S G A 4

E X P O S E III

FONCTORIALITE DES CATEGORIES DE FAISCEAUX

par J.L. Verdier

Dans I 5, on a étudié le comportement des catégories de préfaisceaux par rapport aux foncteurs entre les catégories d'arguments. Dans cet exposé, on étend cette étude au cas des sites et des catégories de faisceaux (n° 1 et 2). Après avoir introduit la topologie induite (n° 3), on aborde au n° 4 le lemme de comparaison qui jouera un rôle important dans Exp. IV. Au numéro 5, on étudie, pour le lecteur patient, certains diagrammes commutatifs liés aux catégories localisées (du type C/X). Dans le théorème I 5.1 on fait des hypothèses de petitesse sur les catégories envisagées. Ces hypothèses ne sont pas, en général , satisfaites par les sites rencontrés dans la pratique (U-sites). Ceci oblige à quelques contorsions (4.2, 4.3, 4.4).

1. Foncteurs continus

Définition 1.1. *Soient* C *et* C' *deux* U-*sites et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que* u *est* continu *si pour tout faisceau d'ensembles* F sur C', *le préfaisceau* $X \longmapsto F \circ u(X)$ *sur* C *est un faisceau.*

Cette notion de continuité dépend a priori de l'univers U pour lequel les deux sites sont des U-sites. La proposition 1.5 montre qu'elle n'en dépend pas.

1.11. Désignons par $i : C^{\sim} \longrightarrow C^{\wedge}$ (resp. $i' : C'^{\sim} \longrightarrow C'^{\wedge}$) le foncteur d'inclusion canonique des faisceaux dans les préfaisceaux. D'après la définition 1.1, le foncteur u est continu si et seulement s'il existe un foncteur $u_s : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}$ tel que l'on ait l'égalité $iu_s = u^* i'$ (avec $u^* F = F \circ u$ (I 5.0)).

Proposition 1.2. *Soient* C *un petit site,* C' *un* U*-site et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Le foncteur* u *est continu.*

ii) *Pour tout objet* X *de* C *et tout crible* $R \hookrightarrow X$ *couvrant* X, *le morphisme* $u_! R \hookrightarrow u(X)$ *est bicouvrant dans* $C'^{\wedge}$ (II 5.2 et I 5.1). (*)

iii) *Pour tout famille bicouvrante* $H_i \longrightarrow K$, $i \in I$, *de* $C^{\wedge}$, *la famille des* $u_! H_i \longrightarrow u_! K$, $i \in I$, *est bicouvrante dans* $C'^{\wedge}$.

iv) *Il existe un foncteur* $u^s : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$, *commutant aux limites inductives et "prolongeant u", i.e. tel que le diagramme de foncteurs canoniques*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad u \quad} & C' \\ {\scriptstyle \varepsilon_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{C'}} \\ C^{\sim} & \xrightarrow{\quad u^s \quad} & C'^{\sim} \end{array} ,$$

soit commutatif à isomorphisme près.

De plus, lorsque C *n'est plus nécessairement un petit site, mais un* U*-site, on a toujours* i) $\Longleftrightarrow$ iv) *et le foncteur* u^s *de* iv) *est nécessairement un adjoint à gauche du foncteur* $u_s : \widetilde{C}' \longrightarrow \widetilde{C}$, *et est par suite déterminé à isomorphisme unique près.*

(*) "Couvrant" au lieu de "bicouvrant" ne suffisait pas nécessairement, cf. exemple 1.9.3 ci-dessous.

Preuve : La démonstration de i) $\Longleftrightarrow$ iv) lorsque C est un $\underline{U}$-site sera faite en 4.2. Supposons C petit. Il est clair que iii) $\Longrightarrow$ ii).

i) $\Longrightarrow$ iii) : Soit $H_i \longrightarrow K$, $i \in I$, une famille bicouvrante de $C^\wedge$. Pour tout faisceau F sur C', le préfaisceau u^*F (I 5.0) est un faisceau sur C. Donc (II 5.3) l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(K,u^*F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(H_i,u^*F) \quad ,$$

est bijective. Par adjonction (I 5.1), on en déduit que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}(u_!K,F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(u_!H_i,F)$$

est bijective. Par suite (II 5.3) la famille $u_!H_i \longrightarrow u_!K$, $i \in I$, est bicouvrante.

ii) $\Longrightarrow$ i) Soient X un objet de C , $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant, F un faisceau sur C'. D'après (II 5.3), l'application

$$\mathrm{Hom}(u_!X,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u_!R,F)$$

est bijective. Par adjonction (I 5.1), on en déduit que l'application

$$\mathrm{Hom}(X,u^*F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R,u^*F)$$

est bijective. Par suite u^*F est un faisceau.

i) $\Longrightarrow$ iv) : Utilisons les notations habituelle $\underline{a}$ et i (resp. $\underline{a}'$ et i') pour les foncteurs "faisceau associé" et "inclusion dans les préfaisceaux". Pour tout faisceau G sur C, posons $u^sG = \underline{a}'u_!i\,G$. Pour tout faisceau F sur C', on a la suite d'isomorphismes naturels :

$$\mathrm{Hom}(G,u_sF) \simeq \mathrm{Hom}(iG,iu_sF) \simeq \mathrm{Hom}(iG,u^*i'F) \simeq \mathrm{Hom}(u_!iG,i'F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}'u_!iG,F).$$

(Le premier isomorphisme provient de ce que i est pleinement fidèle ; le deuxième isomorphisme provient de la définition de u_s ; les troisième et quatrième isomorphisme s'obtiennent par adjonction). Par suite u^s est adjoint à gauche à u_s. En particulier u^s commute aux limites inductives. Pour tout préfaisceau K sur C et tout faisceau F sur C', on a la suite d'isomorphismes naturels : $\mathrm{Hom}(u^s\underline{a}K,F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}K,u_sF) \simeq \mathrm{Hom}(K,iu_sF) \simeq \mathrm{Hom}(K,u^*i'F) \simeq \mathrm{Hom}(u_!K,i'F) \simeq \mathrm{Hom}(\underline{a}'u_!K,F)$ (le troisième isomorphisme provient de la définition de u_s ; les autres s'obtiennent par adjonction) ; d'où un isomorphisme fonctoriel $u^s\underline{a}K \simeq \underline{a}'u_! K$. En particulier, en utilisant cet isomorphisme lorsque K est représentable, on obtient, compte tenu de I 5.4 3), un diagramme commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\
\widetilde{C} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C}'
\end{tikzcd}$$

iv) $\Longrightarrow$ ii) : Soit $h : C \longrightarrow C^\wedge$ (resp. $h' : C' \longrightarrow C'^\wedge$) le foncteur qui associe à un objet le préfaisceau qu'il représente. Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & C' \arrow[d, "h'"] \\
C^\wedge \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'^\wedge \arrow[d, "\underline{a}'"] \\
C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim
\end{tikzcd}$$.

Le carré du haut est commutatif (1.4 3)) et on a $\underline{a}h = \epsilon_C$, $\underline{a}'h' = \epsilon_{C'}$.

Pour tout objet K de $C^\wedge$, on a un isomorphisme canonique (I 3.4) :

$$\varinjlim_{(h(X) \to K) \in ob(C/K)} h(X) \xrightarrow{\sim} K \quad .$$

Comme les foncteurs $u_!$, u^s , $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ commutent aux limites inductives, on en déduit des isomorphismes :

$$\varinjlim_{(h(X) \to K) \in ob(C/K)} u^s\, \underline{a}h(X) \xrightarrow{\sim} u^s\, \underline{a}K \quad ,$$

$$\varinjlim_{(h(X) \to K) \in ob(C/K)} \underline{a}'\, u_! h(X) \xrightarrow{\sim} \underline{a}' u_! K \quad .$$

On a $u_! h = h'u$ et, par hypothèse, on a un isomorphisme $\underline{a}'h'u \simeq u^s \underline{a}h$, d'où un isomorphisme :

$$u^s \underline{a}\, K \simeq \underline{a}' u_!\, K \quad ,$$

dont on vérifie immédiatement qu'il est fonctoriel en K. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C^\wedge \arrow[r, "u_!"] \arrow[d, "\underline{a}"'] & C'^\wedge \arrow[d, "\underline{a}'"] \\
C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'
\end{tikzcd} \quad ,$$

est donc commutatif à isomorphisme près. Comme $\underline{a}i$ est isomorphe au foncteur identique, on a un isomorphisme $u^s \simeq \underline{a}' u_! i$, d'où l'unicité de u^s. Soit $v : H \to K$ un morphisme bicouvrant de $C^\wedge$. Alors $\underline{a}(v)$ est un isomorphisme (II 5.3) et par suite $\underline{a}' u_!(v)$ (isomorphe à $u^s \underline{a}(v)$) est un isomorphisme. Donc $u_!(v)$ est transformé par $\underline{a}'$ en un isomorphisme, et par suite $u_!(v)$ est bicouvrant (II 5.3), d'où ii).

L'assertion supplémentaire, dans le cas C petit, a été prouvée en cours de démonstration, cqfd.

1.2.1. Le foncteur $u^s : C^\sim \longrightarrow C'^\sim$ de 2.2 iv) pourra s'interpréter souvent comme un foncteur "image réciproque" par un "morphisme de topos" $C'^\sim \longrightarrow C^\sim$, cf. IV 4.9. Ses propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur continu entre un petit site* C *et un* U-*site* C' .

1) *Le foncteur* u^s *est adjoint à gauche au foncteur* u_s .

2) *On a un isomorphisme canonique* $u^s \simeq \underline{a}' u_! i$.

3) *On a un isomorphisme canonique* $u^s \underline{a} \simeq \underline{a}' u_!$

4) *Le foncteur* u^s *commute aux limites inductives.*

5) *Lorsque le foncteur* $u_!$ *est exact à gauche* (cf. I 5.4 4)), *le foncteur* u^s *l'est aussi. Plus généralement le foncteur* u^s *commute aux types de limites projectives finies auxquels le foncteur* $u_!$ *commute.*

Preuve : Les assertions 1), 2), 3), 4) ont été prouvées en cours de démonstration de 1.2. L'assertion 5) résulte de l'isomorphisme 2), compte tenu de ce que i commute aux limites projectives et de ce que $\underline{a}'$ commute aux limites projectives finies (II 4.1).

Remarque 1.4. En combinant I 5.4 3) et 1.3 3) on obtient un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\quad u \quad} & C' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ C^\wedge & \xrightarrow{\quad u_! \quad} & C'^\wedge \\ {\scriptstyle \underline{a}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{a}'} \\ C^\sim & \xrightarrow{\qquad} & C'^\sim \end{array} ,$$

où le carré du haut est commutatif et le carré du bas commutatif à isomorphisme près. Mais les foncteurs $\underline{a}$, $\underline{a}'$, $u_!$, u^s ne sont définis qu'à isomorphisme près. Le lecteur pourra vérifier qu'on peut choisir les foncteurs $\underline{a}$, $\underline{a}'$ et u^s de façon que :

1) Les foncteurs composés $\underline{a}h$ et $\underline{a}'h'$ soient injectifs sur les ensembles d'objets;

2) le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\underline{a}h"'] & C' \arrow[d, "\underline{a}'h'"] \\ C^\sim \arrow[r, "u^s"] & C'^\sim \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Plus précisément, on peut choisir les foncteurs $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ de façon à remplir la condition 1). Les foncteurs $\underline{a}$ et $\underline{a}'$ étant choisis, on peut choisir le foncteur u^s de façon à remplir la condition 2).

Proposition 1.5. *Soient* $\underline{U} \subset \underline{V}$ *deux univers*, C *et* C' *deux* $\underline{U}$*-sites*, $u : C \to C'$ *un foncteur entre les catégories sous-jacentes*. *Alors* u *est continu relativement à* $\underline{U}$ *si et seulement s'il est continu relativement à* $\underline{V}$. *De plus*, *lorsque* u *est continu*, *désignons par* $u^s_{\underline{U}}$ (*resp*. $u^s_{\underline{V}}$) *le foncteur entre catégories de* $\underline{U}$*-faisceaux* (*resp*. $\underline{V}$*-faisceaux*) *introduit en* 1.2 iv). *Alors le diagramme*

(1.5.1)
$$\begin{tikzcd} \tilde{C}_{\underline{U}} \arrow[r, "u^s_{\underline{U}}"] \arrow[d] & \tilde{C}'_{\underline{U}} \arrow[d] \\ C^\sim_{\underline{V}} \arrow[r, "u^s_{\underline{V}}"] & C'^\sim_{\underline{V}} \end{tikzcd} ,$$

<u>où les foncteurs verticaux sont les foncteurs d'inclusion canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.</u>

<u>Preuve</u>. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où C est $\underline{U}$-petit. Le cas général sera démontré en 4.3. Il est clair que si le foncteur u^* transforme tout $\underline{V}$-faisceau sur C' en $\underline{V}$-faisceau sur C, il transforme tout $\underline{U}$-faisceau sur C' en $\underline{U}$-faisceau sur C. Supposons que u^* transforme tout $\underline{U}$-faisceau sur C' en $\underline{U}$-faisceau sur C. Notons $C^\wedge_{\underline{U}} \hookrightarrow C^\wedge_{\underline{V}}$ (resp. $C'^\wedge_{\underline{U}} \hookrightarrow C'^\wedge_{\underline{V}}$) les catégories de $\underline{U}$-préfaisceaux et $\underline{V}$-préfaisceaux, $u_{\underline{U}!}$ et $u_{\underline{V}!}$ les foncteurs"image réciproque" pour les $\underline{U}$-préfaisceaux et les $\underline{V}$-préfaisceaux respectivement. On a un diagramme commutatif (cf. la construction explicite de $u_!$ dans I 5.1) :

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} C^\wedge_{\underline{U}} \arrow[r, "u_{\underline{U}!}"] \arrow[d, hook] & C'^\wedge_{\underline{V}} \arrow[d, hook] \\ C^\wedge_{\underline{V}} \arrow[r, "u_{\underline{V}!}"] & C'^\wedge_{\underline{V}} \end{tikzcd} .$$

Les foncteurs d'inclusion des $\underline{U}$-préfaisceaux dans les $\underline{V}$-préfaisceaux sont pleinement fidèles et commutent aux limites projectives. Il résulte alors de (II 5.1 i)) qu'un morphisme bicouvrant de $\underline{U}$-préfaisceaux est un morphisme bicouvrant de $\underline{V}$-préfaisceaux. Soit alors $R \hookrightarrow X$ un crible couvrant un objet X de C. D'après 1.2 ii), le morphisme $u_{\underline{U}!}R \longrightarrow u_{\underline{U}!}X$ est bicouvrant. Utilisant la commutativité de (*) et ce qui précède, on en déduit que le morphisme $u_{\underline{V}!}R \longrightarrow u_{\underline{V}!}X$ est bicouvrant. Par suite (1.2), le foncteur u^* transforme les $\underline{V}$-faisceaux sur C' en $\underline{V}$-faisceaux sur C. La commutativité de 1.5.1 résulte alors de la commutativité de (*), de II 3.6 et de 1.3 2).

Proposition 1.6. Soient C et C' deux U-sites, u : C $\longrightarrow$ C' un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Considérons les conditions :

i) u est continu (cf. 1.1 et 1.2).

ii) Pour tout famille couvrante $(X_i \longrightarrow X), i \in I$, de C, la famille $(uX_i \longrightarrow uX), i \in I$, de C', est couvrante.

On a l'implication i) $\Longrightarrow$ ii).

Supposons que la topologie de C puisse être définie par une prétopologie T (II 1.3) et que le foncteur u commute aux produits fibrés.(*) Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes et sont équivalentes à la condition suivante :

iii) Le foncteur u transforme les familles couvrantes de T en familles couvrantes de C'.

En particulier, supposons que dans C les produits fibrés soient représentables et que le foncteur u commute aux produits fibrés. Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes.

Preuve. Montrons que i) $\Longrightarrow$ ii). Soit $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, une famille couvrante de C. Pour tout faisceau F sur C', u^*F est un faisceau. Par suite, l'application

$$\mathrm{Hom}(X, u^*F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, u^*F)$$

est injective (II 5.1). D'où une application injective

$$\mathrm{Hom}(u_! X, F) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(u_! X_i, F) \quad .$$

Donc la famille $u_! X_i \longrightarrow u_! X$, $i \in I$, est couvrante dans C' (II 5.1).

Toute famille couvrante de la prétopologie T est une famille couvrante de C, d'où ii) $\Longrightarrow$ iii). Montrons que iii) $\Longrightarrow$ i). Soit X un

(*) En fait, il suffit que n commute aux produits fibrés intervenant dans les changements de base pour des morphismes provenant de famille couvrantes pour T .

objet de C et $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, une famille couvrante de Cov(X) (II 1.3). Les morphismes $X_i \longrightarrow X$ sont quarrables et le foncteur u commute aux produits fibrés. Par suite, les produits fibrés $u(X_i) \times_{u(X)} u(X_j)$ sont représentables et canoniquement isomorphes à $u(X_i \times_X X_j)$. Soit F un faisceau sur C'. Alors le diagramme d'ensembles :

$$F(u(X) \longrightarrow \prod_i F(u(X_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(u(X_i \times_X X_j)$$

est exact (II 2.1 , I 3.5 et I 2.12) . Par suite le diagramme d'ensembles

$$u^*F(X) \longrightarrow \prod_i u^*F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} u^*F(X_i \times_X X_j)$$

est exact. Donc u^*F est un faisceau (II 2.4), d'où i). La dernière assertion de 1.6 résulte de ce qui précède et du fait que, lorsque les produits fibrés sont représentables dans C, toutes les familles couvrantes de C ([1]) définissent sur C une prétopologie dont la topologie associée est la topologie de C.

Proposition 1.7. *Soient* C *un petit site*, C' *un* U-*site et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur continu. Soit* γ *une structure algébrique définie par limites projectives finies, telle que dans la catégorie des* γ-*objets de* U-Ens *les* U-*limites inductives soient représentables* ([2]). *On utilise les notations de la proposition* II 6.4 . *Le foncteur* u_s *commute aux limites projectives et par suite définit un foncteur* $u_s^\gamma : C_\gamma^\sim \longrightarrow C'^\sim_\gamma$. *Le foncteur* u_s^γ *admet un adjoint à gauche* u_γ^s *qui possède les propriétés suivantes* :

([1]) indexéespar les ensembles appartenant à un univers convenable.

([2]) On peut montrer en fait que cette condition est toujours satisfaite.

1) *On a un isomorphisme canonique* $u^s_Y \xrightarrow{\sim} \underline{a}'_Y \, u_{Y!} i_Y$, *et* u^s_Y *commute aux limites projectives finies auxquelles* $u_{Y!}$ *commute.*

2) *On a un isomorphisme canonique* $u^s_Y \, \underline{a}_Y \xrightarrow{\sim} \underline{a}'_Y \, u'_{Y!}$.

3) *Le foncteur* u^s_Y *commute aux limites inductives.*

4) *Si* u^s *est exact à gauche, le diagramme* (notation de II 6.3.0)

$$\begin{tikzcd} C^{\sim}_Y \arrow[r, "u^s_Y"] \arrow[d, "esj^{\sim}"'] & C'^{\sim}_Y \arrow[d, "esj'^{\sim}"'] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^s"] & C'^{\sim} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près et le foncteur u^s_Y *est exact.*

5) *Supposons que le foncteur* $esj^{\sim}$ (*resp.* $esj'^{\sim}$) *possède un adjoint à gauche* $Lib^{\sim}$ (*resp.* $Lib'^{\sim}$) (II 6.5). *On a un isomorphisme canonique* :
$u^s_Y \, Lib^{\sim} \xrightarrow{\sim} Lib'^{\sim} u^s$.

De plus, lorsque C *n'est pas nécessairement un petit site mais un* $\underline{U}$*-site, le foncteur* u^Y_s *admet un adjoint à gauche* u^s_Y . *Enfin si* $\underline{V}$ *est un univers contenant* $\underline{U}$ *et si* $u^s_{Y\,\underline{U}}$ (*resp.* $u^s_{Y\,\underline{V}}$) *désigne l'adjoint à gauche de* u_s *relativement à l'univers* $\underline{U}$ (*resp.* $\underline{V}$), *le diagramme suivant, analogue au diagramme* 1.5.1 :

$$(1.7.1) \qquad \begin{tikzcd} C^{\sim}_{Y\,\underline{U}} \arrow[r, "u^s_{Y\,\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & \tilde{C}'_{Y\,\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ C^{\sim}_{Y\,\underline{V}} \arrow[r, "u^s_{r\underline{V}}"] & \tilde{C}'_{Y\,\underline{V}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

Preuve. La démonstration, dans le cas où C est un petit site, est laissée au lecteur. Elle sera complétée en 4.3 dans le cas où C est un $\underline{U}$-site.

<u>Notation</u> 1.8. Nous emploierons dorénavant la notation u_s pour désigner le foncteur u_s^Y . Cette notation ne risque pas d'apporter de confusion, car le foncteur u_s (défini sur les faisceaux d'ensembles) commute aux limites projectives finies.

De même, lorsque u^s est exact à gauche, nous emploierons la notation u^s pour désigner le foncteur u_Y^s . Cet abus de notation est justifié par 1.7 4) .

<u>Exemple</u> 1.9.1. Soit X un petit espace topologique. Désignons par Ouv(X) la catégorie des ouverts de X (les objets de Ouv(X) sont les sous-ensembles ouverts de X, les morphismes de Ouv(X) sont les inclusions) munie de la topologie canonique. Une famille$(U_i \subset U), i \in I$, est couvrante si et seulement si les ouverts U_i recouvrent U (II 2.6). Les faisceaux d'ensembles sur Ouv(X) sont donc les faisceaux d'ensembles au sens de [TF]. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On en déduit un foncteur $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$: pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est l'image réciproque de U par l'application f. Le foncteur f^{-1} est un foncteur continu (1.6). Le foncteur $f_s^{-1} : \mathrm{Ouv}(X)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Ouv}(Y)^{\sim}$ est le foncteur image directe pour les faisceaux,au sens de [TF]. Le foncteur $(f^{-1})^s : \mathrm{Ouv}(Y)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)^{\sim}$ est le foncteur image réciproque pour les faisceaux au sens de [TF]. Le foncteur $(f^{-1})^s$ commute aux limites projectives finies, grâce à 1.3 5).

<u>Exemple</u> 1.9.2. Soient X un espace topologique et $Y \hookrightarrow X$ un ouvert de X. Tout ouvert de Y est un ouvert de X, d'où un foncteur $\Phi : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$. Le foncteur Φ est continu (1.6). Le foncteur $\Phi_s : \mathrm{Ouv}(X)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Ouv}(Y)^{\sim}$ est

le foncteur "restriction à Y". Le foncteur Φ^{s}_{ab} : $\mathrm{Ouv}(Y)^{\sim}_{ab} \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)^{\sim}_{ab}$ (II 6.3.3, I 1.7) est le foncteur "prolongement par zéro en dehors de Y " introduit dans [TF]. Le foncteur Φ^{s} : $\mathrm{Ouv}(Y)^{\sim} \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)^{\sim}$ (1.3) est analogue au foncteur "prolongement par zéro" : pour tout faisceau H sur Y et tout point $y \in Y$, la fibre en y de $\Phi^{s}H$ est canoniquement isomorphe à la fibre en y de H ; pour tout point $x \in X$, $x \notin Y$, la fibre en x de $\Phi^{s}H$ est vide. Le foncteur Φ^{s} est appelé le foncteur "prolongement par le vide en dehors de Y". Le foncteur Φ^{s} commute aux produits fibrés et aux produits finis sur un ensemble d'indices non vide, mais il ne transforme pas l'objet final de $\mathrm{Ouv}(Y)^{\sim}$ en l'objet final de $\mathrm{Ouv}(X)^{\sim}$.

Exemple 1.9.3. Soient C et C' deux petits sites, u : $C \longrightarrow C'$ un foncteur entre les catégories sous-jacentes qui transforme toute famille couvrante de C en famille couvrante de C'. Le foncteur u n'est pas continu en général (cf. cependant 1.6). Voici un contre-exemple. Soit S un ensemble de cardinal infini de l'univers $\underline{U}$, et C la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles, dont les objets sont les sous-ensembles finis, non-vides, de S. On munit C de la topologie canonique. On remarquera que les familles couvrantes de C sont les familles surjectives d'applications et que les familles couvrantes ne sont pas vides. On remarquera de plus qu'il n'y a, à isomorphisme près, que deux faisceaux constants sur C : le faisceau de valeur l'ensemble vide et le faisceau de valeur l'ensemble à un élément. Posons C = C' et soit u : $C \rightarrow C'$ un foncteur constant. Le foncteur u transforme les familles couvrantes de C en familles couvrantes de C'. Le foncteur u n'est pas continu. En effet, comme les préfaisceaux représentables de C' sont des faisceaux, pour tout objet X de C', il existe un faisceau F sur C' tel que le cardinal de l'ensemble $F(X)$ soit ≥ 2, et par suite le préfaisceau u^*F n'est pas un faisceau.

2. Foncteurs cocontinus

Définition 2.1. *Soient* C *et* C' *deux* U*-sites et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre les catégories sous-jacentes. On dit que* u *est cocontinu s'il possède la propriété suivante :*

(COC) *Pour tout objet* Y *de* C *et pour tout crible couvrant* $R \hookrightarrow u(Y)$, *le crible de* Y *engendré par les flèches* $Z \longrightarrow Y$ *telles que* $u(Z) \rightarrow u(Y)$ *se factorise par* R, *couvre* Y.

Proposition 2.2. *Soient* C *un petit site,* C' *un* U*-site et* $u : C \longrightarrow C'$ *un foncteur entre les catégories sous-jacentes. Notons* $\hat{u}_* : C^\wedge \longrightarrow C'^\wedge$ *le foncteur adjoint à droite au foncteur* $F \longmapsto F\circ u = \hat{u}^*F$ (I 5.1). *Le foncteur* u *est cocontinu si et seulement si pour tout faisceau* G *sur* C, $\hat{u}_*G$ *est un faisceau sur* C' .

Preuve. *La condition est suffisante.* Supposons que pour tout faisceau G sur C, le préfaisceau $\hat{u}_*G$ soit un faisceau. Soient Y un objet de C et $R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. On a un isomorphisme $\mathrm{Hom}(u(Y), u_*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R, u_*G)$, d'où par adjoinction (I 5.1) un isomorphisme $\mathrm{Hom}(\hat{u}^*\circ u(Y), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\hat{u}^*R, G)$. On en déduit (II 5.3) que le morphisme $\hat{u}^*R \longrightarrow \hat{u}^*u(Y)$ est bicouvrant. Mais le foncteur $\hat{u}^*$ commute aux limites projectives et par suite le morphisme $\hat{u}^*R \longrightarrow \hat{u}^*u(Y)$ est un monomorphisme. C'est donc un monomorphisme couvrant. D'autre part on a un morphisme canonique $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y)$ déduit du morphisme d'adjonction

$id_C \longrightarrow \hat{u}^*u$, (I 5.4 3)). Faisons alors le changement de base $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y)$.
On obtient un crible couvrant Y :

$$\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*u(Y)} Y \longrightarrow Y \qquad ,$$

et lorsqu'on cherche les flèches $Z \to Y$ qui se factorisent par ce crible, on obtient le crible décrit par la propriété (COC).

<u>La condition est nécessaire</u> : Soient S un objet de C' et $R \hookrightarrow S$ un crible couvrant S. On doit démontrer que pour tout faisceau G sur C on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(S,u_*G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(R,u_*G) \qquad .$$

Utilisant alors la proposition II 5.3 et les isomorphismes d'adjonction, on voit qu'il suffit de démontrer que le monomorphisme $\hat{u}^*R \longrightarrow \hat{u}^*S$ est couvrant. Pour cela, il suffit de démontrer (II 5.1) que pour tout changement de base $Y \longrightarrow \hat{u}^*S$ le crible $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} Y$ est couvrant, (Y objet de C). Mais, d'après les propriétés des foncteurs adjoints et I 5.4 3), le morphisme $Y \longrightarrow \hat{u}^*S$ se factorise par $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y) \longrightarrow \hat{u}^*S$, et par suite le crible $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} Y \hookrightarrow Y$ est le transformé par le changement de base $Y \xrightarrow{p} \hat{u}^*u(Y)$ du monomorphisme $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} \hat{u}^*u(Y) \xhookrightarrow{q} \hat{u}^*u(Y)$. Or le foncteur $\hat{u}^*$ commute aux limites projectives,et par suite le monomorphisme q est le transformé par $\hat{u}^*$ du crible $R \times_S u(Y) \hookrightarrow u(Y)$, qui est couvrant. L'hypothèse (COC) nous permet alors de dire que le crible $\hat{u}^*R \times_{\hat{u}^*S} Y \hookrightarrow Y$ est couvrant, cqfd.

<u>Proposition</u> 2.3. <u>Soient</u> C <u>et</u> C' <u>deux</u> <u>U-sites</u> <u>et</u> $u : C \longrightarrow C'$ <u>un foncteur cocontinu</u>. <u>Notons</u> $u^* : \tilde{C}' \longrightarrow \tilde{C}$ <u>le foncteur</u> $u^* = a\hat{u}^*i'$, <u>où</u> <u>a</u> <u>désigne le foncteur</u> <u>"faisceau associé"</u> <u>pour</u> $C^\wedge$, $\hat{u}^*$ <u>le foncteur</u> $F \longmapsto Fou$, i' <u>le</u>

foncteur d'inclusion $\widetilde{C'} \longrightarrow C'^{\wedge}$.

1) Le foncteur u^* commute aux limites inductives et est exact.

2) On a un isomorphisme canonique $u^* \underline{a}' \simeq \underline{a} \hat{u}^*$, où $\underline{a}'$ désigne le foncteur "faisceau associé" pour $C'^{\wedge}$.

3) Le foncteur u^* admet un adjoint à droite $u_* : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C'}$. Lorsque C est petit, le diagramme

(2.3.1)
$$\begin{tikzcd} C^{\sim} \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, hook, "i"'] & \widetilde{C'} \arrow[d, hook, "i'"] \\ C^{\wedge} \arrow[r, "\hat{u}_*"] & C'^{\wedge} \end{tikzcd},$$

où le foncteur du bas est adjoint à droite au foncteur $\hat{u}^*$ (I 5.1), est commutatif à isomorphisme canonique près.

4) Soit $\underline{V} \supset \underline{U}$ un univers. Notons $u_{*\underline{U}} : C^{\sim}_{\underline{U}} \longrightarrow \widetilde{C}'_{\underline{U}}$ (resp. $u_{*\underline{V}} : C^{\sim}_{\underline{V}} \to \widetilde{C}'_{\underline{V}}$ le foncteur adjoint à droite relatif à l'univers $\underline{U}$ (resp. $\underline{V}$) dont l'existence est affirmé dans 3). Le diagramme

(2.3.2)
$$\begin{tikzcd} C^{\sim}_{\underline{U}} \arrow[r, "u_{*\underline{U}}"] \arrow[d, hook] & \widetilde{C}'_{\underline{U}} \arrow[d, hook] \\ C^{\sim}_{\underline{V}} \arrow[r, "u_{*\underline{V}}"] & \widetilde{C}'_{\underline{V}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Preuve. Les assertions 1) et 2) résultent immédiatement de II 3.4. L'assertion 3), lorsque C est petit, résulte de 2.2. Lorsque C est un $\underline{U}$-site, elle sera démontrée en 4.4. L'assertion 4), lorsque C est petit, résulte de l'assertion de commutativité analogue lorsque les topologies sur C et C' sont chaotiques et de I 3.5. Lorsque les topologies sur C et C' sont chaotiques, la commutativité de (2.3.2) se voit immédiatement sur la description explicite de u_* (I 5.1).

2.4. Nous ne développerons pas ici les considérations relatives aux γ-objets des catégories de faisceaux. Il nous suffira de remarquer que les foncteurs u^* et u_* introduits dans ce numéro commutent toujours aux limites projectives finies (contrairement à ce qui se passait dans le numéro précédent pour le foncteur u^s). Par suite ils se prolongent naturellement en des foncteurs définis sur les γ-objets, qui sont adjoints l'un de l'autre et qui commutent aux foncteurs "faisceau d'ensemble sous-jacent". Nous ferons les abus de notations signalés en 1.8, consistant à noter par u^* et u_* les prolongements aux γ-objets.

Proposition 2.5. *Soient* C *et* C' *deux* $\underline{U}$-*sites et* $C \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} C'$ *un couple de foncteurs, où* v *est adjoint à gauche de* u. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) *Le foncteur* u *est continu.*

ii) *Le foncteur* v *est cocontinu.*

De plus, sous ces conditions équivalentes, on a des isomorphismes canoniques $v_* \simeq u_s$, $v^* \simeq u^s$. *En particulier, le foncteur* u^s *commute aux limites projectives finies.*

Preuve. La propriété pour un foncteur d'être continu ou cocontinu ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$ pour lequel C et C' sont des $\underline{U}$-sites (c'est immédiatement dans le cas d'un foncteur cocontinu, et cela résulte de 1.5 dans le cas d'un foncteur continu). On peut donc, quitte à augmenter l'univers, supposer que C et C' sont petits. La proposition résulte alors de 2.2 et I 5.6.

<u>Proposition</u> 2.6. <u>Soit</u> $u : C \longrightarrow C'$ <u>un foncteur continu et cocontinu entre deux</u> <u>U-sites</u>. <u>Alors le foncteur</u> $u^* : C'^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}$ (2.3) <u>commute aux</u> <u>U-limites inductives et projectives</u>. <u>Notons</u> $u_! : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$ <u>et</u> $u_* : C^{\sim} \longrightarrow C'^{\sim}$ <u>les foncteurs adjoints à</u> u^* <u>à gauche et à droite respectivement. Le foncteur</u> $u_!$ <u>est pleinement fidèle si et seulement si le foncteur</u> u_* <u>est pleinement fidèle. Lorsque</u> u <u>est pleinement fidèle,</u> $u_!$ <u>est pleinement fidèle et la réciproque est vraie lorsque les topologies de</u> C <u>et</u> C' <u>sont moins fines que la topologie canonique.</u>

Le foncteur u^* admet un adjoint à droite u_* (2.3) et un adjoint à gauche $u_!$ (1.2). Le foncteur u^* commute donc aux limites inductives et projectives (I 2.11). Le fait que le foncteur $u_!$ soit pleinement fidèle si et seulement si le foncteur u_* est pleinement fidèle est une propriété générale des foncteurs adjoints (I 5.7.1). Lorsque u est pleinement fidèle, le foncteur $\hat{u}_* : C^{\wedge}_{\underline{V}} \longrightarrow C'^{\wedge}_{\underline{V}}$ relatif aux $\underline{V}$-préfaisceaux, pour un univers $\underline{V}$ assez grand, est pleinement fidèle (I 5.7). Par suite le foncteur $u_* : C^{\sim} \longrightarrow \tilde{C}'$ est pleinement fidèle en vertu de la commutativité de (2.3.1) et (2.3.2), donc $u_!$ est pleinement fidèle d'après ce qui précède. La réciproque se déduit de l'existence du diagramme commutatif 1.2 iv), compte tenu du fait que les foncteurs ϵ_C et $\epsilon_{C'}$ sont pleinement fidèles lorsque les topologies sont moins fines que la topologie canonique, cqfd.

<u>Exemple</u> 2.7. Avec les notations de 1.9.2, le foncteur

$$\Phi : \mathrm{Ouv}(Y) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(X)$$

est continu (1.9.2) et cocontinu (2.2). De plus, soient $i : Y \longrightarrow X$

l'injection canonique et i^{-1} : Ouv(X) $\longrightarrow$ Ouv(Y) le foncteur qu'elle permet de définir (1.9.1). Le foncteur i est adjoint à **droite** au foncteur Φ. On a donc une suite de trois foncteurs adjoints :

$$\begin{array}{ccc} \Phi^s \,, & \Phi_s & \\ & \| & \\ & \Phi^* \,, & \Phi_* \,, \end{array}$$

et des isomorphismes canoniques $\Phi^* \simeq (i^{-1})^s$, $\Phi_* \simeq i_s^{-1}$.

3. Topologie induite

3.1. Soient C' un site, C une catégorie et u : C $\longrightarrow$ C' un foncteur. Pour tout univers $\underline{U}$ tel que C' soit un $\underline{U}$-site et C une $\underline{U}$-petite catégorie, désignons par $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ la plus fine parmi les topologies T sur C qui rendent u continu (1.1). (Une telle topologie existe grâce à II 2.2). La topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$. En effet, si $\underline{V} \supset \underline{U}$ est un univers on a $\mathcal{C}_{\underline{U}} = \mathcal{C}_{\underline{V}}$ (1.1 et 1.5). La topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est appelée <u>la topologie induite sur</u> C <u>par la topologie de</u> C' <u>au moyen du foncteur</u> u [1].

<u>Proposition</u> 3.2. <u>Soient</u> C <u>une petite catégorie</u>, C' <u>un</u> <u>U-site</u>, u : C $\rightarrow$ C' <u>un foncteur</u>, $\mathcal{C}$ <u>la topologie sur</u> C <u>induite par</u> u. <u>Soient</u> X <u>un objet de</u> C <u>et</u> R $\longrightarrow$ X <u>un crible de</u> X. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Le crible</u> R $\hookrightarrow$ X <u>est couvrant pour</u> $\mathcal{C}$.

ii) <u>Pour tout changement de base</u> Y $\longrightarrow$ X, <u>où</u> Y <u>est un objet de</u> C, <u>le morphisme</u> $u_!(R \times_X Y) \longrightarrow u(Y)$ <u>est bicouvrant dans</u> C'^ (II 5.2).

<u>Preuve</u>. i) $\Longrightarrow$ ii) résulte de l'axiome (T1) des topologies et de 1.2.

ii) $\Longrightarrow$ i) : Pour tout faisceau F sur C', l'application

---

[1] Lorsqu'aucune confusion n'en résulte cette topologie est appelée la <u>topologie induite sur</u> C <u>par la topologie de</u> C'.

$$\mathrm{Hom}(Y,u^*F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R\times_X Y,u^*F)$$

est isomorphe, par adjonction (I 5.1), à l'application

$$\mathrm{Hom}(u(Y),F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(u_!(R\times_X Y),F)$$

qui est bijective (II 5.3). Par suite (II 2.2) le crible $R \hookrightarrow X$ est couvrant pour $\mathcal{C}$.

Corollaire 3.3. Soient C' un site, C une catégorie, $u : C \longrightarrow C'$ un faisceau, $\mathcal{C}$ la topologie sur C induite par la topologie de C'. Soit $(X_i \longrightarrow X)$ $i \in I$ une famille de morphismes quarrables de C et supposons que u commute aux produits fibrés (*). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) La famille $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, est couvrante pour $\mathcal{C}$.

ii) La famille $(u(X_i) \longrightarrow u(X))$, $i \in I$, est couvrante.

Preuve. i) $\Longrightarrow$ ii) résulte de 1.6.

ii) $\Longrightarrow$ i) : Soit $\underline{U}$ un univers tel que C soit $\underline{U}$-petite et C' un $\underline{U}$-site. Soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par les $X_i \longrightarrow X$. Le préfaisceau R est le conoyau du couple de flèches (I 2.12 et I 3.5)

$$\coprod_{i,j} X_i \times_X X_j \rightrightarrows \coprod_i X_i$$

(la somme directe est prise ici dans $C^\wedge$). Comme le foncteur $u_!$ commute aux limites inductives (I 5.4), le préfaisceau $u_! R$ est le conoyau du couple de flèches

$$\coprod_{i,j} u(X_i \times_X X_j) \rightrightarrows \coprod_i u(X_i) \quad .$$

Comme le foncteur u commute aux produits fibrés, le préfaisceau $u_! R$ est le conoyau du couple de flèches

(*) En fait, il suffit que u commute aux produits fibrés de la forme $X_i \times_X X'$.

$$\coprod_{i,j} u(X_i) \times_{u(X)} u(X_j) \rightrightarrows \coprod_i u(X_i) \quad ,$$

et par suite $u_! R \longrightarrow u(X)$ est un crible de $u(X)$ engendré par les $u(X_i) \longrightarrow u(X)$, $i \in I$. Utilisant encore une fois le fait que u commute aux produits fibrés, on montre que pour tout changement de base $Y \longrightarrow X$, où Y est un objet de C, $u_!(R \times_X Y) \longrightarrow u(Y)$ est un crible de $u(Y)$ engendré par les $u(X_i) \times_{u(X)} u(Y) \longrightarrow u(Y)$, $i \in I$. Comme la famille $u(X_i) \longrightarrow u(X)$, $i \in I$, est couvrante, la famille $u(X_i) \times_{u(X)} u(Y) \longrightarrow u(Y)$, $i \in I$, est couvrante. Donc $u_!(R \times_X Y) \longrightarrow u(Y)$ est un crible couvrant et par suite (3.2) $R \longrightarrow X$ est couvrant pour $\mathcal{C}$, cqfd.

Corollaire 3.4. *Soient* C' *un* U-*site*, C *une sous-catégorie pleine de* C', $u : C \longrightarrow C'$ *le foncteur d'inclusion. On suppose que les produits fibrés sont représentables dans* C *et que* u *commute aux produits fibrés. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) a) *Pour tout objet* X *de* C, *toute famille couvrante* $(Y_j \longrightarrow X)$, $j \in J$, *de* C' *est majorée par une famille couvrante* $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, *où les* X_i *sont des objets de* C.

b) *Il existe un petit ensemble* G *d'objets de* C, *tel que tout objet de* C *soit but d'une famille couvrante dans* C' *de morphismes dont les sources sont dans* G .

ii) *La topologie induite par la topologie de* C' *est une* U-*topologie* (I 3.0.2) *et le foncteur* u *est continu et cocontinu pour cette topologie*.

Preuve. Résulte immédiatement de 3.3 et 2.1.

Proposition 3.5. Soient C un $\underline{U}$-site et $\varepsilon_C : C \longrightarrow C^\sim$ le foncteur canonique (II 4.4.0). Munissons $C^\sim$ de la topologie canonique. Alors la topologie du site C est la topologie induite par la topologie de $C^\sim$.

Preuve. Les familles couvrantes de $C^\sim$ pour la topologie canonique sont les familles épimorphiques effectives universelles (II 2.5), i.e. (II 4.3) les familles épimorphiques. Soit T la topologie du site C et $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ la topologie la plus fine des topologies T' sur C telles que pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F \circ \varepsilon_C$ soit un faisceau pour T'. Il suffit de montrer que $T = \mathcal{C}_U$, car alors $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est une $\underline{U}$-topologie et par suite $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est la topologie induite.

A) La topologie T est plus fine que $\mathcal{C}_{\underline{U}}$: Soit $(X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, une famille couvrante de $\mathcal{C}_{\underline{U}}$. Alors pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F(\varepsilon_C(X) \longrightarrow \prod_i F(\varepsilon_C(X_i))$ est injective et par suite (II 5.2) $(\varepsilon_C X_i \longrightarrow \varepsilon_C X)$, $i \in I$, est couvrante pour la topologie canonique de $C^\sim$, donc (II 5.2) $(X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, est couvrante pour T.

B) La topologie T est moins fine que $\mathcal{C}_{\underline{U}}$: Il suffit de montrer que $\varepsilon_C : C \longrightarrow C^\sim$ est continu (1.1). Or on démontrera en IV n° 1 que tout faisceau sur $C^\sim$ est représentable et par suite, pour tout faisceau F sur $C^\sim$, $F \circ \varepsilon_C$ est un faisceau sur C. (On n'utilisera pas 3.5 jusqu'à IV 1).

Notons deux résultats qui seront utilisés en VI 7.

Proposition 3.6. Soient $(C_i)_{i \in I}$ une famille de sites, C une catégorie et pour tout $i \in I$, $u_i : C_i \longrightarrow C$ un foncteur, $\mathfrak{U}$ un univers tel que les catégories C_i et C soient $\underline{U}$-petites. Il existe une topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ sur C qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les u_i soient continus. La topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$ pour lequel les catégories considérées sont petites.

La dernière assertion de 3.6 résulte de 1.5.

Soit T une topologie sur C. Alors les foncteurs u_i sont continus si et seulement si pour tout $i \in I$ et pour tout crible couvrant $R \hookrightarrow X$ d'un objet X de

C_i , le morphisme

$$u_{i\,!}(R) \longrightarrow u_i(X)$$

de $\hat{C}$ est bicouvrant (1.2 (ii)). Donc 3.6 est une conséquence du

Lemme 3.6.1 Soient C une petite catégorie, $(u_i : F_i \longrightarrow G_i)_{i \in I}$ une famille de flèches de $\hat{C}$. Alors il existe sur C une topologie la moins fine parmi celles qui rendent les morphismes u_i **couvrants** (resp. bicouvrants) (II 5.2).

Dire que $u : F \longrightarrow G$ est couvrant pour une topologie donnée T signifie que pour toutes flèche $X \longrightarrow G$, avec $X \in \mathrm{Ob}\, C$, la flèche $F\times_G X \longrightarrow X$ correspondante est couvrante, ou encore que la famille des flèches $X' \longrightarrow X$ de C qui se factorisent par la flèche précédente est couvrante. Le fait qu'il existe une topologie la moins fine parmi celles pour lesquelles les $u_i : F_i \longrightarrow G_i$ sont couvrants résulte donc de I 1.1.6, d'où l'assertion non respée de 3.6.1. L'assertion respée s'en déduit, en se rappelant qu'un morphisme $u : F \longrightarrow G$ est bicouvrant si et seulement si les morphismes $u : F \longrightarrow F$ et $\mathrm{diag}_u : F \longrightarrow F\times_G G$ sont couvrants.

Proposition 3.7. Soient $(C_i)_{i \in I}$ une famille de sites, C une catégorie, pour tout $i \in I$, $u_i : C_i \longrightarrow C$ un foncteur, et $\underline{\mathcal{U}}$ un univers tel que les catégories C_i et C soient $\underline{U}$-petites. Il existe une topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ qui est la plus fine pour laquelle les u_i sont cocontinus . La topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ ne dépend pas de l'univers $\underline{U}$ pour lequel les catégories considérées sont petites.

Soit $\underline{U}$ un univers pour lequel les catégories considérées sont petites. Les foncteurs u_i sont cocontinus pour une topologie $\mathcal{C}$ de C si et seulement si pour tout $i \in I$ et tout faisceau F sur C_i le préfaisceau $\hat{u}_{i*}F$ est un faisceau pour $\mathcal{C}$ (2.2). Il en résulte que la topologie $\mathcal{C}_{\underline{U}}$ est la topologie la plus fine pour laquelle les préfaisceaux $\hat{u}_{i*} F$, $i \in I$, $F \in \mathrm{ob}\, C_i$, sont des faisceaux (II 2.2). La dernière assertion résulte de 2.2.

4. Lemme de comparaison

Théorème 4.1 (*lemme de comparaison*). *Soient* C *une petite catégorie,* C' *un site dont la catégorie sous-jacente est une* $\mathcal{U}$*-catégorie et* $u : C \to C'$ *un foncteur* pleinement fidèle. *Munissons* C *de la topologie induite par* u (3.1). *Considérons les propriétés* :

i) *Tout objet de* C' *peut être recouvert par des objets provenant de* C.

ii) *Le foncteur* $F \longmapsto F \circ u$ *induit une équivalence de catégories de la catégorie des faisceaux sur* C' *dans la catégorie des faisceaux sur* C.

On a toujours i) $\Longrightarrow$ ii). *Lorsque* C' *est un* $\mathcal{U}$*-site et lorsque la topologie de* C' *est moins fine que la topologie canonique, on a* ii) $\Longrightarrow$ i).

4.1.1. Démontrons d'abord i) $\Longrightarrow$ ii). La démonstration se fait en deux pas.

Premier pas. *Pour tout préfaisceau* H *de* $C'^\wedge$ *le morphisme d'adjonction* $\varphi : u_! u^* H \to H$ (I 5.1) *est bicouvrant* (II 5.3) *et le foncteur* $u_s : \widetilde{C}' \to \widetilde{C}$ (1.1.1) *est pleinement fidèle.*

Soit C/H la petite catégorie dont les objets sont les objets Y de C muni d'un morphisme $u(Y) \to H$, et dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
u(Y) \arrow[rr, "u(m)"] \arrow[dr] & & u(Y') \arrow[dl] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

On a $u^*H = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/H} Y$ (I 3.4) et par suite (I 5.4) $u_! u^* H = \varinjlim_{Y \in \mathrm{ob}\, C/H} u(Y)$.

Le morphisme d'adjonction est le morphisme évident qui résulte de la description de $u_! u^* H$ comme limite inductive. Le morphisme φ possède la propriété suivante : (*) Pour tout objet Y de C, tout morphisme $m : u(Y) \to H$ se factorise de manière unique en le morphisme canonique $\alpha(m) : u(Y) \to u_! u^* H$ et le morphisme φ. Il résulte immédiatement de i) que le morphisme φ est couvrant (II 5.1), montrons qu'il est bicouvrant. Soient $p,q : Z \rightrightarrows u_! u^* H$ deux morphismes d'un objet Z de C' dans H' tels que $\varphi p = \varphi q$. Pour tout objet Y de C et tout morphisme $n : u(Y) \longrightarrow Z$, on a $\varphi pn = \varphi qn$. La propriété (*) entraîne alors que $pn = qn$, et comme les $u(Y)$ recouvrent Z, le noyau de (p,q) est un crible couvrant Z. Le morphisme φ est donc bicouvrant (II 5.3). Pour tout faisceau H sur C', $u^* H$ est un faisceau sur C noté $u_s H$ (1.1.1). On a de plus $u^s u_s H = \underline{a}' u_! u_s H$ (1.3), et le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \longrightarrow H$ s'obtient en appliquant le foncteur "faisceau associé" au morphisme $\varphi : u_! u^* H \longrightarrow H$. Par suite (II 5.3) le morphisme d'adjonction $u^s u_s H \longrightarrow H$ est un isomorphisme. Donc $u_s : \widetilde{C}' \longrightarrow \widetilde{C}$ est pleinement fidèle.

<u>Deuxième pas</u>. <u>Le foncteur</u> u <u>est cocontinu et le foncteur</u> $u^s : C^\sim \to C'^\sim$ (1.2) <u>est pleinement fidèle</u>. <u>Par suite</u> $u_s : C'^\sim \longrightarrow C^\sim$ <u>est une équivalence</u>. Soient Y un objet de C et $i : R \hookrightarrow u(Y)$ un crible couvrant. Comme le foncteur u^* commute aux limites projectives (I 5.5) le morphisme $u^*(i) : u^*(R) \hookrightarrow u^* u(Y)$ est un monomorphisme. Comme u est pleinement fidèle, on a $u^* u(Y) \simeq Y$, d'où un crible de Y, $u^*(i) : u^*(R) \longrightarrow Y$. Pour montrer que u est cocontinu, il suffit de montrer que $u^*(i) : u^*(R) \hookrightarrow Y$ est un crible couvrant pour la topologie induite sur C (2.1). Pour cela, il suffit de montrer (3.2) que pour tout changement de base $m : X \to Y$, le morphisme $u_!(u^*(R) \times_Y X) \longrightarrow u(X)$ est bicouvrant. Mais comme u^* commute

aux limites projectives, on a $u^*(R)\times_Y X = u^*(R\times_{u(Y)}u(X))$ et $R\times_{u(Y)}u(X)$ est un crible couvrant X. Il suffit donc de montrer que pour tout objet Y de C et tout crible couvrant $i: R \hookrightarrow u(Y)$, le morphisme de $C'^{\wedge}$, $u_! u^*(R) \xrightarrow{u_! u^*(i)} u(Y)$, est bicouvrant. Or ce morphisme se factorise en le morphisme d'adjonction $u_! u^*(R) \longrightarrow R$, qui est bicouvrant (premier pas), et le monomorphisme $R \hookrightarrow u(Y)$ qui est couvrant. Il est donc bicouvrant (II 5.3). Ceci montre que u est cocontinu. Comme u est continu et pleinement fidèle, il résulte de 2.6 (utilisé dans le cas où C est petit) que u^s (noté $u_!$ dans 2.6) est pleinement fidèle. Comme u^s et u_s sont adjoints l'un de l'autre et qu'ils sont pleinement fidèles, ce sont des foncteurs quasi-inverses et par suite u_s est une équivalence.

4.1.2. Démontrons maintenant que ii) $\Longrightarrow$ i). Les objets Y de C forment une famille génératrice de $C^{\sim}$ (II 4.10) et par suite, pour tout objet X de C', il existe une famille épimorphique (dans $C^{\sim}$) $v_i : Y_i \rightarrow u_s X$, $i\in I$. On a $u_s u(Y_i) = Y_i$ et, le foncteur u_s étant une équivalence de catégories, on a $v_i = u_s(x_i)$, où les $w_i : u(Y_i) \longrightarrow X$ forment une famille épimorphique de $C'^{\sim}$. Il résulte alors de II 5.1 que la famille $w_i : u(Y_i) \longrightarrow X$, $i\in I$, est couvrante.

4.2. <u>Fin de la démonstration de</u> 1.2.

Soient G une sous-catégorie pleine de C dont les objets forment une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1). Munissons G de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \longrightarrow C$ (3.1) Le foncteur $(u\circ i)_s = i_s \circ u_s$ (1.1.1) admet un adjoint à gauche d'après la première partie de la démonstration de 1.2. Comme i_s est une équivalence de catégories (4.1), le foncteur u_s admet un adjoint à gauche u^s et on a un isomorphisme fonctoriel $u^s \simeq (u \circ i)^s \circ i_s$. Montrons que le diagramme

(4.2.1)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\ C^{\sim} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C}' \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme près. Pour tout faisceau H sur C', on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\varepsilon_{C'}\, u\, X, H) \simeq u_s\, H\,(X)$, pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. On a de plus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(u^s \varepsilon_C\, X, H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_C X, u_s H)$ par adjonction, puis $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varepsilon_C X, u_s H) \simeq u_s H(X)$ par définition de ε_C. D'où un isomorphisme $\varepsilon_{C'} u\, X \simeq u^s\, \varepsilon_C\, X$ pour tout $X \in \mathrm{ob}\, C$. Ceci démontre i) $\Longrightarrow$ iv). Montrons que iv) $\Longrightarrow$ i). On a un diagramme commutatif

(4.2.2)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon_G"'] & C \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & C' \arrow[d, "\varepsilon_{C'}"] \\ \widetilde{G} \arrow[r, "i^s"] & \widetilde{C} \arrow[r, "u^s"] & \widetilde{C}' \end{tikzcd} ,$$

et par suite, d'après la première partie de la démonstration, le foncteur $i \circ u : G \longrightarrow C'$ est continu. On en déduit aussitôt par 4.1 et 1.1 que u est continu, d'où iv) $\Longrightarrow$ i). On obtient de plus l'unicité de u^s ; connaissant, par la première partie de la démonstration, l'unicité lorsque C est petit.

4.3. Fin de la démonstration de 1.5 et de 1.7

Soient $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre deux $\underline{U}$-sites et G une sous-catégorie pleine de C dont l'ensemble des objets est une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1). Munissons G de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \longrightarrow C$. Il résulte immédiatement de 4.1 et de 1.1 que u est continu si et seulement si $u \circ i$ est continu. De cette remarque et de la première partie de la démonstration de 1.5 résulte le cas général. Cette remarque permet aussi de ramener la démonstration de 1.7 au cas où la catégorie C est petite.

4.4. Fin de la démonstration de 2.3.

Soient $u : C \longrightarrow C'$ un foncteur entre deux $\underline{U}$-sites, G une sous-catégorie pleine de C dont l'ensemble des objets est une petite famille topologiquement génératrice de C (II 3.0.1), munie de la topologie induite par le foncteur d'inclusion $i : G \longrightarrow C$. Il résulte de la démonstration de 4.1 (4.1.1 deuxième pas) que i est cocontinu. Par suite, lorsque u est cocontinu, le foncteur $u \circ i : G \longrightarrow C'$ est cocontinu. De plus, $i^* : \tilde{C}' \longrightarrow \tilde{G}$ est une équivalence de catégories (4.1). Donc le foncteur $u^* : \tilde{C}' \longrightarrow \tilde{C}$ admet un adjoint à droite. Ceci démontre 3). Pour démontrer 4), il suffit de remarquer que $(u \circ i)_* \simeq u_* \circ i_*$ et que i_* est une équivalence (4.1). La commutativité de (2.3.2) résulte alors de la commutativité de ces diagrammes lorsque C est petit.

5. Localisation

5.1. Soient maintenant C un $\underline{U}$-site et X un objet de $C^\wedge$. Sauf mention expresse du contraire la catégorie C/X sera munie de la topologie $\mathcal{C}$ induite par le foncteur $j_X : C/X \longrightarrow C$ (3.1). La notation C/X désignera la catégorie C/X munie de la topologie $\mathcal{C}$. La proposition I 5.11 nous montre que le foncteur $j_{X!}$ commute aux produits fibrés et par suite transforme tout monomorphisme en monomorphisme. En particulier, pour tout objet $(Y \longrightarrow X)$ de C/X, le foncteur $j_{X!}$ établit une correspondance biunivoque entre les cribles, dans la catégorie C/X, de l'objet $(Y \longrightarrow X)$ et les cribles, dans C, de l'objet Y.

Proposition 5.2. *Soient* C *un* $\underline{U}$-*site*, X *un objet de* $C^\wedge$ *et* $j_X : C/X \longrightarrow C$ *le foncteur continu correspondant*.

1) *Un crible* R *d'un objet* $(Z \longrightarrow X)$ *est couvrant dans* C/X *si et seulement si le crible* $j_{X!}(R) \hookrightarrow Z$ *est couvrant dans* C.

2) *Le foncteur* $j_X : C/X \longrightarrow C$ *est cocontinu et continu*.

3) *Soit* $m : Y \longrightarrow X$ *un morphisme de* $C^\wedge$. *On a alors le diagramme commutatif* :

$$\begin{tikzcd}
C/Y \arrow[rr, "j_m"] \arrow[dr, "j_Y"'] & & C/X \arrow[dl, "j_X"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

La topologie induite par le foncteur j_Y *sur* C/Y *est égale à la topologie induite par* j_m *sur* C/Y.

4) *La topologie induite par* $j_X : C/X \longrightarrow C$ *est une* $\underline{U}$-*topologie* (II 3.0.2).

Preuve. 1) Si le crible R de $(Z \longrightarrow X)$ est couvrant, le crible $j_{X!}(R) \hookrightarrow Z$ est couvrant (1.6).

Réciproquement, si le crible $j_{X!}(R) \longrightarrow Z$ est couvrant dans C, on voit qu'il en est de même pour tout crible obtenu en faisant un changement de base dans C/X. Le crible R est donc couvrant (3.2).

2) Se déduit immédiatemant de 1) en appliquant 2.1.

3) Se déduit immédiatemant de la description des cribles couvrants donnée par 1).

4) Soit $(G)_i, i \in I$, une petite famille topologiquement génératrice de C. On vérifie immédiatement que la petite famille $(u:G_i \longrightarrow X)$, $u \in \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{C^\wedge}(G_i, X)$, est topologiquement génératrice dans C/X .

Terminologie et notations 5.3. D'après la proposition précédente le foncteur j_X est à la fois un foncteur continu et cocontinu. Il définit donc une suite de trois foncteurs adjoints (4.3.2.) entre les catégories de faisceaux d'ensembles (1.3 et 2.3) :

$$\begin{aligned} j_X^s \ &: \ (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim \\ j_X^* = j_{X,s} \ &: \ C^\sim \longrightarrow (C/X)^\sim \\ j_{X*} \ &: \ (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim \end{aligned}$$

Dans la situation particulière de la proposition 5.2 nous emploierons la terminologie et les notations suivantes :

1) Le foncteur j_{X*} sera appelé le foncteur image directe.

2) Le foncteur $j_{X,s} = j_X^*$ sera noté j_X^* et sera appelé le foncteur restriction à C/X.

3) Le foncteur j_X^s sur les faisceaux d'ensembles sera appelé le "foncteur prolongement par le vide à la catégorie C" et sera noté $j_{X!}$ (cf. 2.9.2).

On a donc une suite de trois foncteurs adjoints entre $(C/X)^\sim$ et $C^\sim$:

$$j_{X!} \ , \ j_X^* \ , \ j_{X*} \qquad .$$

Proposition 5.4. Le foncteur $j_{X!} : (C/X)^\sim \longrightarrow C^\sim$ se factorise par la catégorie $C^\sim/\underline{a}X$ ($\underline{a}$ est le foncteur faisceau associé) : $(C/X)^\sim \xrightarrow{e_X^\sim} C^\sim/\underline{a}X \longrightarrow C^\sim$. Le foncteur :

$$e_X^\sim \ : \ (C/X)^\sim \longrightarrow \tilde{C}/\underline{a}X$$

est une équivalence de catégories. Le foncteur restriction à C/X, composé avec l'équivalence $e_X^\sim$, est isomorphe au foncteur "changement de base par $\underline{a}X \longrightarrow e$ ", (e l'objet final de $C^\sim$) : $F \longmapsto (F \times \underline{a}X \xrightarrow{pr_2} \underline{a}X)$.

Preuve. L'image par $j_{X!}$ de l'objet final de $(C/X)^\sim$ est l'objet $\underline{a}X$; d'où la factorisation. Pour montrer que le foncteur $e_X^\sim$ est une équivalence, nous nous bornerons à quelques indications. D'après I 5.11, un préfaisceau sur C/X est défini par un préfaisceau F sur C muni d'un morphisme $F \longrightarrow X$. On démontre alors que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le préfaisceau sur C/X défini par $F \longrightarrow X$ est un faisceau.

ii) Le diagramme suivant est cartésien (on dénote par i et $\underline{a}$ les foncteurs injection dans les préfaisceaux, et faisceau associé) :

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & i\underline{a}F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & i\underline{a}X \end{array} \qquad ,$$

On en déduit alors immédiatement que $e_X^{\sim}$ est une équivalence. La dernière assertion est triviale.

Proposition 5.5. 1) Soient C un U-site, X un objet de $C^{\wedge}$. Le diagramme ci-dessous de catégories et foncteurs est commutatif à isomorphismes canoniques près :

$$\begin{tikzcd}
C/X \arrow[r, "h_X"] \arrow[d] & (C/X)^{\wedge} \arrow[r, "\underline{a}_X"] \arrow[d, "e_X^{\wedge}"] & (C/X)^{\sim} \arrow[rr, "i_X"] \arrow[d, "e_X^{\sim}"] & & (C/X)^{\wedge} \arrow[d, "e^{\wedge}/X"] \\
C/X \arrow[r, "h/X"] & C^{\wedge}/X \arrow[r, "a/X"] & C^{\sim}/\underline{a}X \arrow[r, "i/\underline{a}X"] & C^{\wedge}/i\underline{a}X \arrow[r, "\pi"] & C^{\wedge}/X
\end{tikzcd}$$

Les notations $\underline{a}_X$ et i_X désignent les foncteurs "faisceau associé" et injection dans les préfaisceaux pour le site C/X. La notation a/X désigne le prolongement naturel du foncteur $\underline{a}$ (faisceau associé pour le site C) à la catégorie des flèches de but X, de même pour la notation $i/\underline{a}X$. Enfin la notation π désigne le foncteur changement de base par la flèche canonique $X \longrightarrow i\underline{a}X$.

2) Soit de plus $m : Y \longrightarrow X$ un morphisme de $C^{\wedge}$. Le diagramme ci-après est commutatif à isomorphisme canonique près :

$$\begin{tikzcd}
C^{\sim}/\underline{a}X/\underline{a}Y \arrow[d, equal] & & (C/X)^{\sim}/\underline{a}_X Y \arrow[ll, "f"'] \\
& & & (C/X/Y)^{\sim} \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "e_m^{\sim}"] \\
C^{\sim}/\underline{a}Y & & (C/Y)^{\sim} \arrow[ll, "e_Y^{\sim}"']
\end{tikzcd}$$

La flèche f *est le prolongement naturel de l'équivalence* $e^{\sim}/X$ *à la catégorie des flèches de but* $\underline{a}_X Y$, *et est par suite une équivalence de catégories*. *La flèche* g *n'est autre que l'équivalence de* 5.4 *appliquée à la situation* $(C/X)/[m]$.

3) *Désignons par* $j_{\underline{a}X\,!} : C^{\sim}/\underline{a}X \longrightarrow C^{\sim}$ *le foncteur* "*oublions* $\underline{a}X$", *et par* $j^*_{\underline{a}X} : C^{\sim} \longrightarrow C^{\sim}/\underline{a}X$ *le foncteur* "*produit par* $\underline{a}X$". *Les diagrammes ci-après sont commutatifs à isomorphisme canonique près* :

$$\begin{tikzcd}
(C/X)^{\sim} \arrow[r, "j_{X!}"] \arrow[d] & C^{\sim} \arrow[d, equal] \\
C^{\sim}/\underline{a}X \arrow[r, "j_{\underline{a}X!}"] & C^{\sim}
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
C^{\sim} \arrow[r, "j^*_X"] \arrow[d, equal] & (C/X)^{\sim} \arrow[d, "e^{\sim}/X"] \\
C^{\sim} \arrow[r, "j^*_{\underline{a}X}"] & C^{\sim}/\underline{a}X
\end{tikzcd} .$$

Preuve. La preuve de ces assertions est immédiate à partir de la définition des équivalences $e^{\sim}_X$ (5.4) et $e^{\wedge}_X$ (I 5.11).

BIBLIOGRAPHIE

[TF] R. Godement, théorie des faisceaux, Hermann, 1958. Act. Scient. Ind n° 1252, (Paris).