FONCTEURS FIBRES, SUPPORTS, ETUDE COHOMOLOGIQUE DES MORPHISMES FINIS

par A. Grothendieck

1. Invariance topologique du topos étale 1
2. Faisceaux sur le spectre d'un corps 4
3. Foncteurs fibres relatifs aux points géométriques d'un schéma 6
4. Anneaux et schémas strictement locaux 13
5. Application au calcul des fibres des $R^q f_*$ 19
6. Supports 24
7. Morphismes de spécialisation des foncteurs fibres 28
8. Deux suites spectrales pour les morphismes entiers 36
9. Descente de faisceaux étales 41

1. Invariance topologique du topos étale

Théorème 1.1. Soit $f : X' \to X$ un morphisme entier surjectif radiciel. Alors le foncteur changement de base

$$f^* : X_{ét} \longrightarrow X'_{ét}$$

est une équivalence de sites (i.e. une équivalence de catégorie, qui est continue ainsi que tout foncteur quasi-inverse). Par suite les foncteurs

$$f_* : \widetilde{X'_{ét}} \to \widetilde{X_{ét}}$$

$$f^* : \widetilde{X_{ét}} \to \widetilde{X'_{ét}}$$

sont des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre.

La première assertion est bien connue (SGA IX 4.10 et 4.11) lorsque f est de présentation finie ou que f est plat; le cas général se réduit à celui où f est de présentation finie. En effet, on sait déjà que le foncteur f^* est pleinement fidèle (SGA 1 IX 3.4). Il suffit de prouver que f^* est essentiellement surjectif, i.e. que tout Z' étale sur X' "provient" d'un Z étale sur X. Utilisant le fait que f est un homéomorphisme universel, et la pleine fidélité de f^*, on est ramené au cas où X, X', Z' sont affines, spectres d'anneaux A, A', B'. Ecrivant A' comme limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini A'_i, B' provient d'une algèbre étale B'_i sur un A'_i (cf. EGA IV 8), ce qui nous ramène au cas où A' est entière et de <u>type fini</u> sur A, donc finie sur A. On a alors un A isomorphisme $A' \simeq A''/J$, ou $A'' \simeq A[t_1,\dots t_n]$ et J est un idéal de A''. Ecrivant J comme limite inductive de ses sous-idéaux J_i de type fini, et posant $A'_i = A''/J_i$, on aura encore $A' = \varinjlim_i A'_i$, donc B' provient d'une algèbre étale B'_i sur un A'_i (loco citato). D'autre part, comme $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ est surjectif, il en est de même des $\operatorname{Spec} A'_i \to \operatorname{Spec} A$, de plus on vérifie facilement que puisque $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ est radiciel, il en est de même de $\operatorname{Spec} A'_i \to \operatorname{Spec} A$ pour i assez grand (appliquer EGA IV 1.9.9 à Spec A(*)). Cela nous ramène au cas où A' est un des A'_i, donc de présentation finie sur A.

Cela prouve la première assertion de 2.1. Le fait que f_* et f^* soient des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre en résulte aussitôt.

<u>Corollaire</u> 1.2. <u>Soient</u> F <u>un faisceau abélien sur</u> X, F' <u>son image inverse sur</u> X', <u>alors les homomorphismes canoniques</u>

$$H^i(X,F) \to H^i(X',F') \qquad (*)$$

<u>sont des isomorphismes. De même, si</u> F' <u>est un faisceau abélien sur</u> X', F <u>son image sur</u> X, <u>les homomorphismes canoniques</u> (*) <u>sont des isomorphismes.</u>

(*) Soit $S_i \subset S = \operatorname{Spec} A$ l'ensemble des $s \in S$ tels que la fibre de $X_i = \operatorname{Spec} A'_i$ ens soit derang séparable 1. Alors, les S_i sont des parties <u>constructibles</u> de S (EGA IV 9.7.9) formant une famille croissante, leur réunion est S d'après l'hypothèse sur $S' = \operatorname{Spec} A' \to S$ et le fait que les fibres de S'_i sont des schémas <u>noethériens</u>. On a donc $S = S_i$ pour i assez grand, par EGA IV 1.9.9, cqfd.

<u>Exemples</u> 1.3. Voici des exemples d'application fréquents de 1.1 :

a) X' est un sous-schéma de X ayant même ensemble sous-jacent que X, i.e. défini par un nil-Idéal I.

b) X est un schéma sur un corps séparablement clos k, k' est une clôture algébrique de k, et $X' = X \otimes_k k'$.

c) Soit X un schéma géométriquement unibranche (par exemple une courbe algébrique sur un corps k, n'ayant comme singularités que des singularités "cuspidales", à l'exclusion en particulier de points doubles ordinaires). Alors, si X' est le normalisé de X_{red}, par définition $X' \to X$ est radiciel, donc 2.1 s'applique.

<u>Remarques</u> 1.4. Un morphisme f comme dans 1.1 est un <u>homéomorphisme universel</u>, i.e. est un homéomorphisme et reste tel par toute extension de la base. Réciproquement, si f est un homéomorphisme universel on prouve que f satisfait aux hypothèses de 2.1 (*), ce qui explique le titre du présent numéro.

Signalons expressément, à propos de l'exemple 2.3 c), que si X est une courbe algébrique (sur un corps algébriquement clos k pour fixer les idées) ayant au moins un point singulier qui n'est pas "unibranche" (par exemple un point double ordinaire), alors (X' désignant le normalisé de X_{red}) la conclusion de 2.2 est déjà en défaut pour les H^1 et des coefficients constants (comparer SGA 1 I 11 a) et SGA 1 IX 5).

(*) Cf. EGA IV 8.11.6 si f est de présentation finie, et EGA IV 18.12.11 dans le cas général.

2. Faisceaux sur le spectre d'un corps

Proposition 2.1. Soient k un corps, $\bar{k}$ une clôture séparable de k, $\pi = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ son groupe de Galois topologique, $X = \mathrm{Spec}\ k$, $\bar{X} = \mathrm{Spec}\ \bar{k}$ (sur lequel π opère à gauche). Considérons le foncteur canonique

$$i : X_{ét} \to \widetilde{X_{ét}}$$

(défini par $i(X')(X'') = \mathrm{Hom}_X(X',X'')$), et le foncteur canonique

$$j : \widetilde{X_{ét}} \to \mathcal{B}_\pi$$

de la catégorie des faisceaux sur $X_{ét}$ dans la catégorie $\mathcal{B}_\pi$ (cf. IV 2.7) des ensembles (discrets) sur lesquels π opère continûment à gauche, défini par

$$j(F) = \varinjlim_{\alpha} F(\mathrm{Spec}(k_\alpha)) ,$$

où k_α parcourt les sous-extensions finies de $\bar{k}$. Alors i et j sont des équivalences de catégories. (Par suite, le topos $\widetilde{X_{ét}}$ est équivalent (IV 3.4) au "topos classifiant" $\mathcal{B}_\pi$.)

Le foncteur composé

$$ji : X_{ét} \to \widetilde{X_{ét}} \to (\pi\text{-Ens})$$

est une équivalence de catégories, d'après le théorème fondamental de la théorie de Galois (sous la forme de SGA 1 V). Comme $\mathcal{B}_\pi$ est évidemment un topos (II 4.14), il en est donc de même de $X_{ét}$. D'ailleurs une famille $(X_i \to X)$ de morphismes dans $X_{ét}$ est couvrante si et seulement si elle est surjective, i.e. son image dans $\mathcal{B}_\pi$ est surjective, ou ce qui revient au même, couvrante pour la topologie canonique de $\mathcal{B}_\pi$ ce qui montre que la topologie de $X_{ét}$ est bien sa topologie canonique. Par suite i est une équivalence, et il en est donc de même de j.

Corollaire 2.2. Le foncteur j de 2.1 induit une équivalence de la catégorie des faisceaux abéliens sur $X = \mathrm{Spec}\, k$, et la catégorie des π-modules galoisiens.

En effet, ces derniers sont justement les "groupes abéliens" du topos $\mathcal{B}\pi$. On voit de même, par "transport de structure" :

Corollaire 2.3. Soient F un faisceau abélien sur $X = \mathrm{Spec}\, k$, $M = j(F)$ le π-module galoisien associé, alors on a un isomorphisme canonique de ∂-foncteurs en F :

$$H^*(X,F) \simeq H^*(\pi,M) ,$$

(où le deuxième membre désigne la cohomologie galoisienne, étudiée par exemple dans le cours de Serre C.G.).

Corollaire 2.4. Supposons k séparablement clos. Alors le foncteur

$$\Gamma : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\mathrm{Ens})$$

est une équivalence de catégorie. Si F est un faisceau abélien sur $X = \mathrm{Spec}\, k$, on a $H^i(X,F) = 0$ pour $i \neq 0$. (En d'autres termes, le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ est un "topos ponctuel" (IV 2.2).)

Corollaire 2.5. Soit k' une extension séparablement close d'un corps séparablement clos k, $X = \mathrm{Spec}\, k$, $X' = \mathrm{Spec}\, k'$, $u : X' \to X$ le morphisme canonique. Alors le foncteur

$$u^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to \widetilde{X'_{\text{ét}}}$$

est une équivalence de catégories.

3. Foncteurs fibres relatifs aux points géométriques d'un schéma

3.1. Soit X un schéma. Nous appellerons point géométrique de X tout X schéma ξ qui est le spectre d'un corps Ω séparablement clos. La donnée d'un tel point équivaut donc à celle d'un point ordinaire $x \in X$, et d'une extension séparablement close Ω du corps résiduel $k(x)$ de x. Le cas le plus fréquent pour nous sera celui où Ω est une clôture séparable de $k(x)$, que nous dénoterons alors généralement par $\overline{k(x)}$, le point géométrique correspondant de X étant alors noté $\overline{x}$. Pour $x \in X$ donné, les $\overline{k(x)}$ (resp. $\overline{x}$) sont déterminés à k-isomorphisme (resp. X-isomorphisme) non unique près.

Remarques 3.2. Dans la plupart des questions géométriques, il est plus naturel de se borner au cas Ω algébriquement clos. La convention différente utilisée ici est spéciale à l'étude de la topologie étale.
C'est la convention que nous avions adoptée dans la définition du groupe fondamental SGA 1 V 7. Mais on notera que les développements de loco citato sont également valables avec la convention adoptée ici (car la propriété de Ω qui y est utilisée est que tout revêtement étale du spectre Ω est trivial, i.e. justement que Ω est séparablement clos).

Définition 3.3. Soient X un schéma, ξ un point géométrique de X, $u : \xi \to X$ son morphisme structural. On appelle foncteur fibre (géométrique) relatif à ξ, et on note $F \longmapsto F_\xi$, le foncteur

$$\widetilde{X_{ét}} \to (\mathrm{Ens})$$

composé de

$$\widetilde{X_{ét}} \xrightarrow{u^*} \widetilde{\xi_{ét}} \xrightarrow{\Gamma_\xi} (\mathrm{Ens}) .$$

On peut dire aussi que, grâce à 2.4, un point géométrique ξ de X définit un point du topos $\widetilde{X_{ét}}$ (IV 6.1), dont on prend simplement le foncteur fibre associé (loc.cit.).

3.4. Comme le foncteur Γ_{ξ} (foncteur sections sur ξ) est une <u>équivalence</u> de catégories (12.4), la connaissance des foncteurs fibres $F \longmapsto F_{\xi}$ équivaut essentiellement à celle des foncteurs images réciproques u^*. Notons d'ailleurs qu'il résulte aussitôt de 2.5 que si ξ est un point géométrique de X tel qu'il existe un X-morphisme $\xi' \to \xi$ (i.e. ξ' correspond à une extension séparablement close Ω' de Ω) alors l'homomorphisme canonique $F_{\xi} \to F_{\xi'}$ est un <u>isomorphisme fonctoriel</u>

$$F_{\xi} \xrightarrow{\sim} F_{\xi'} \ .$$

Cela montre que pour l'étude des foncteurs fibres, on peut (quitte à remplacer Ω par la clôture algébrique séparable de k dans Ω) se borner au cas où $\Omega = k(\xi)$ est une clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$, et que les foncteurs fibres correspondant aux points géométriques de X localisés en un même $x \in X$ sont isomorphes entre eux (de façon non unique).

On désignera, conformément aux conventions de 3.1, par $F_{\overline{x}}$ un foncteur fibre correspondant au choix d'une clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$.

Signalons une propriété de transitivité évidente (qui montre l'utilité technique à ne pas se borner exclusivement à des points géométriques définis par des clôtures séparables de corps résiduels) : Soient $f = X' \to X$ un morphisme de schémas, $u' : \xi' \to X'$ un point géométrique de X, alors $u = f u' : \xi' \to X$ est un point géométrique de X que nous noterons ξ ; relativement à ces points géométriques on a un isomorphisme fonctoriel en $F \in \mathrm{Ob}\, \widetilde{X_{\text{ét}}}$:

$$f^*(F)_{\xi'} \simeq F_{\xi} \quad .$$

Cela résulte en effet de la formule de transitivité des foncteurs images inverses

$$(fu)^* \xrightarrow{\sim} u^* f^* \; .$$

Théorème 3.5. Soit X un schéma.

a) Pour tout point géométrique ξ de X, le foncteur fibre $F \longmapsto F_{\xi}$ $\widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\text{Ens})$ commute aux $\varinjlim$ quelconques (indexées par des catégories $\in \mathcal{U}$) et aux $\varprojlim$ finies (*). En particulier, il transforme faisceaux en groupes (resp. faisceaux abéliens, etc...) en groupes (resp. groupes abéliens, etc...).

b) Lorsque x parcourt les points de X, les foncteurs fibres $F_{\bar{x}}$ forment une famille de foncteurs "conservative", i.e. si $u : F \to G$ est un homomorphisme de faisceaux sur X, u est un isomorphisme si et seulement si pour tout $x \in X$, l'homomorphisme correspondant $u_{\bar{x}} : F_{\bar{x}} \longrightarrow G_{\bar{x}}$ l'est (**).

Notons tout de suite, compte tenu des propriétés d'exactitude de a), les conséquences formelles suivantes de b) :

Corollaire 3.6. Soit $u : F \to G$ un homomorphisme de faisceaux. Alors u est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si pour tout $x \in X$, $u_{\bar{x}} : F_{\bar{x}} \to G_{\bar{x}}$ est injectif (resp. surjectif).

Corollaire 3.7. Soient $u, v : F \to G$ deux morphismes de faisceaux sur X, alors $u = v$ si et seulement si pour tout $x \in X$, on a $u_{\bar{x}} = v_{\bar{x}} : F_{\bar{x}} \longrightarrow G_{\bar{x}}$. En particulier, si u,v sont deux sections de F,

(*) C'est donc bien un "foncteur fibre" au sens de Exp. IV .

(**) Il y a donc "suffisamment de foncteurs fibres" de la forme $F \longmapsto F_{\bar{x}}$, dans la terminologie de IV 6.5.

on a $u = v$ si et seulement si on a $u_{\bar{x}} = v_{\bar{x}}$ dans $F_{\bar{x}}$ pour tout $x \in X$.

Corollaire 3.8. Soit $F \to G \to H$ une suite de deux homomorphismes de faisceaux sur X, alors la suite est exacte si et seulement si pour tout $x \in X$, la suite correspondante $F_{\bar{x}} \to G_{\bar{x}} \to H_{\bar{x}}$ l'est.

Nous laisserons au lecteur le soin de déduire les corollaires (*), qui seront d'ailleurs prouvés partiellement dans la démonstration qui suit.

L'assertion a) résulte des propriétés d'exactitude déjà signalées dans (VII 1.4) pour tout foncteur image réciproque, tel $u^*: \widetilde{X_{ét}} \to \widetilde{\xi_{ét}}$, et du fait que $\widetilde{\xi_{ét}} \to (\mathrm{Ens})$ est une équivalence. Pour prouver b), notons la formule suivante, qui donne un procédé de calcul des foncteurs fibres :

Proposition 3.9 (**). Soit $\xi \xrightarrow{u} X$ un point géométrique de X, et soit C_ξ la catégorie des " X- schémas étales ξ-ponctués ", i.e. des couples (X', u'), ou $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{ét}$ est un schéma étale sur X, et u' un X-morphisme $\xi \to X'$. Alors la catégorie opposée C_ξ^{o} est filtrante et pour un faisceau F (resp. préfaisceau P) variable sur X, on a un isomorphisme fonctoriel canonique

$$F_\xi \simeq \varinjlim_{C_\xi^{o}} F(X'), \qquad (\text{resp. } (aP)_\xi \simeq \varinjlim_{C_\xi^{o}} P(X')\ ),$$

(où aP = faisceau associé à P).

En effet, notons d'abord que pour tout préfaisceau P sur $\xi_{ét}$, si aP est le faisceau associé, l'homomorphisme naturel

$$P(\xi) \longrightarrow aP(\xi)$$

est un isomorphisme, comme il résulte par exemple aussitôt du calcul

(*) Cf. IV 6.5.2.
(**) Cf. IV 6.8.3.

explicite de aP comme L(LP) (II 3.19.). Soit $\varphi : \widetilde{X_{ét}} \to \widehat{\xi_{ét}}$ le foncteur " image réciproque ", alors $u^* = \varphi^*$ n'est autre (III 2.3.(d)) que le composé a $\varphi^{\cdot}$ i, où $i : \widetilde{X_{ét}} \longrightarrow \widehat{X_{ét}}$ est le foncteur inclusion, et $a : \widehat{\xi_{ét}} \to \widetilde{\xi_{ét}}$ le foncteur "faisceau associé". Par la remarque précédente on trouve

$$u^*(F)(\xi) = (\varphi^{\cdot} i(F))(\xi) ,$$

de sorte qu'il suffit d'appliquer l'expression explicite de $\varphi^{\cdot}$ donnée dans la démonstration de Le cas respé, où on part avec un préfaisceau P sur X , se prouve de même, en utilisant l'isomorphisme fonctoriel $\varphi^* a(P) \simeq a\,\varphi^{\cdot}(P)$. Le fait que la catégorie C_ξ est filtrante (qui reste valable pour <u>tout</u> X- schéma ξ , pas nécessairement réduit à un point géométrique) résulte aussitôt du fait que dans C_ξ les limites projectives finies existent, ce qui résulte du fait que $X_{ét}$ est une sous-catégorie de $(Sch)_{/X}$ stable par limites projectives finies.

Soit maintenant $u : F \to G$ un homomorphisme de faisceaux sur X , tel que pour tout $x \in X$, $u_{\bar{x}} : F_{\bar{x}} \to G_{\bar{x}}$ soit un monomorphisme, prouvons que u est un monomorphisme. Pour ceci, on doit prouver que si $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{ét}$, φ, $\psi \in F(X')$ sont tels que $u(\varphi) = u(\psi)$, on a $\varphi = \psi$. Remplaçant X par X' et utilisant la transitivité des foncteurs fibres, on peut supposer X = X' . Pour tout $x \in X$, on aura $u(\varphi)_{\bar{x}} = u(\psi)_{\bar{x}}$ i.e. $u_{\bar{x}}(\varphi_{\bar{x}}) = u_{\bar{x}}(\psi_{\bar{x}})$, donc $\varphi_{\bar{x}} = \psi_{\bar{x}}$ puisque $u_{\bar{x}}$ est un monomorphisme. Utilisant 3.9 il s'ensuit qu'il existe un $X'_x \in \mathrm{Ob}\, X_{ét}$, dont l'image contient x , tel φ et ψ aient même image inverse sur X'_x . Comme pour x variable dans X , les X'_x forment une famille couvrante de X , il s'ensuit que $\varphi = \psi$.

Cela prouve que si les $u_{\bar{x}}$ sont des monomorphismes, il en est de même de u. Supposons de plus que les $u_{\bar{x}}$ soient des épimorphismes, prouvons qu'il en est de même de u , donc que u est un isomorphisme. Il reste à prouver que pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{\text{ét}}$, et tout $\psi \in G(X')$, il existe $\varphi \in F(X')$ tel que $u(X')(\varphi) = \psi$. On peut encore supposer $X'=X$, et utilisant 3.9 on voit que pour tout $x \in X$, existe $X'_x \in \mathrm{Ob}\, X_{\text{ét}}$ tel que l'image de X'_x dans X contienne x , et un $\varphi_x \in F(X'_x)$ dont l'image dans $G(X'_x)$ soit l'image inverse de ψ . Utilisant le fait que u est un monomorphisme, on voit que les φ_x coïncident sur les $X'_x \times_X X'_y$ $(x,y \in X)$ donc proviennent d'un $\varphi \in F(X)$ bien déterminé, et on aura alors $u(\varphi) = \psi$ puisque les images inverses sur les X'_x coïncident. c q f d.

<u>Scholie</u> 3.10. Le théorème 3.5 implique que la collection des "foncteurs fibres" pour la topologie étale jouit des mêmes propriétés essentielles que dans la théorie des faisceaux habituelle sur un espace topologique. Nous utiliserons très fréquemment 3.5 et ses corollaires, et pour cette raison nous dispenserons généralement d'y référer explicitement.

3.11. Pour tout $x \in X$ nous désignerons aussi, par abus de langage, par x le X- schéma Spec k(x), pour le morphisme structural habituel

$$i_x : x = \mathrm{Spec}\, k(x) \longrightarrow X .$$

Il donne lieu à un foncteur canonique

$$i_x^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \rightarrow \widetilde{x_{\text{ét}}} .$$

Si F est un faisceau sur X , nous poserons $F_x = i_x^*(F)$, c'est donc un faisceau sur $x = \mathrm{Spec}\, k(x)$ (et à ce titre peut s'identifier aussi à un schéma étale sur x , en vertu de 2.1). Il dépend fonctoriellement de F , et le foncteur i_x^*: $F \longmapsto F_x$ commute encore aux $\varinjlim$ quelconques, et $\varprojlim$ finies, en vertu de VII 1.4.

Si $\bar{x}$ = Spec $\overline{k(x)}$, le foncteur fibre $F \longmapsto F_{\bar{x}}$ est canoniquement isomorphe au composé du foncteur $F \longmapsto F_x$ et du foncteur j de 1.1 (compte tenu que ce dernier est isomorphe au foncteur fibre relatif au point géométrique Spec $\bar{k}$ de Spec k). Il résulte aussitôt de ceci et de 3.5 que le système des foncteurs $(F \longmapsto F_x)$ $(x \in X)$ est encore conservatif. D'ailleurs, si $k(x)$ est séparablement clos, i.e. $x = \bar{x}$, les notations F_x et $F_{\bar{x}}$ sont en toute rigueur contradictoires (la première désignant un objet de $\widetilde{x_{ét}}$, la deuxième un ensemble), mais en vertu de 1.1 c'est là une contradiction inessentielle.

3.12. On voit par les remarques qui précèdent que si $\bar{x}$ = Spec $k(x)$, alors pour tout faisceau F sur X , le groupe π_x = Gal $(\overline{k(x)}/k(x))$ opère de façon naturelle (à gauche) sur l'ensemble fibre $F_{\bar{x}}$, de sorte que $F \longmapsto F_{\bar{x}}$ peut en fait être considéré comme un foncteur

$$\widetilde{X_{ét}} \longrightarrow \mathcal{B}_{\pi_x}$$

dont la connaissance équivaut essentiellement (grâce à 1.1) à celle du foncteur $F \longmapsto F_x$.

Cela montre, dans un cas particulier important, que contrairement à ce qui a lieu dans le cas des faisceaux sur les espaces topologiques, les "foncteurs fibres" admettent en général des automorphismes non triviaux. De façon générale, nous déterminerons dans 7.9 tous les homomorphismes d'un foncteur fibre dans un autre.

Remarque 3.13. Voici une généralisation parfois utile de 3.5 b). Considérons une partie E de X telle que pour tout morphisme étale $f : X' \rightarrow X$, $E' = f^{-1}(E)$ soit "très dense" dans X' (EGA IV 10.1.3), i.e. que pour tout f comme ci-dessus, tout ouvert U de X' qui contient E' soit égal à X'. Alors les foncteurs fibres $F_{\bar{x}}$ sur $\widetilde{X_{ét}}$, pour $x \in E$, forment déjà une "famille conservative" (et par suite les corollaires 3.6 , 3.7 et 3.8 restent valables en se bornant à y choisir $x \in E$). Cela se voit immédiatement en reprenant la démonstration donnée de 3.5 b). Le résultat précédent s'applique notamment dans les situations suivantes :

a) X est un schéma de Jacobson (EGA IV 10.4.1.), par exemple localement de type fini sur un corps, ou sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, et E est l'ensemble des points fermés de X.

b) X est localement de type fini sur un schéma S, et E est l'ensemble des points de X qui sont fermés dans leur fibre.

c) X est localement noethérien, et E est l'ensemble des $x \in X$ tels que $\bar{x}$ soit un ensemble fini (i.e. un schéma semi-local de dimension $\leqslant 1$) cf. EGA IV 10.5.3 et 10.5.5.

4. Anneaux et schémas strictement locaux

4.1. Rappelons qu'on dit, avec Azumaya, qu'un anneau local A est hensélien s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

(i) Toute algèbre B finie sur A est composée directe $\prod_i B_i$ d'anneaux locaux (les B_i sont alors nécessairement isomorphes aux

$B_{\mathfrak{m}_i}$, où $\mathfrak{m}_i$ parcourt les idéaux maximaux de B).

(ii) Toute algèbre B sur A qui est localisée d'une algèbre de type fini C sur A en un idéal premier $\mathfrak{p}$ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, et telle que $B/\mathfrak{M}B$ soit fini sur $k = A/\mathfrak{M}$, est finie sur A.

(iii) Comme (ii). mais en supposant C étale sur A en $\mathfrak{p}$ et $k \rightarrow B/\mathfrak{M}B$ un isomorphisme.

(iv) Le "lemme de Hensel" sous la forme classique est valable pour A, i.e. pour tout polynôme unitaire $F \in A[T]$, désignant par $\dot{F} \in k[T]$ le polynome réduit correspondant, et pour toute décomposition

$$\dot{F} = \dot{F}_1\dot{F}_2$$

de $\dot{F}$ en produit de deux polynômes unitaires étrangers, $\dot{F}_1$ et $\dot{F}_2$ se relèvent (de façon nécessairement unique) en des $F_1, F_2 \in A[T]$, tels que $F = F_1F_2$.

Pour la démonstration de ces équivalences et les propriétés générales des anneaux henséliens, cf. EGA IV 18.5.11. Rappelons que si A est un anneau local quelconque, on montre (Nagata) que l'on peut trouver un homomorphisme local,

$$A \longrightarrow A^h$$

avec A^h <u>hensélien</u>, qui est <u>universel</u> pour les homomorphismes locaux de A dans des anneaux locaux noethériens. L'anneau A^h est appelé le hensélisé de A. La construction donnée dans EGA IV 18.6 (différente de celle de Nagata) consiste à poser

$$A^h = \varinjlim_i A_i \quad ,$$

où A_i parcourt les A-algèbres essentiellement de type fini et essentiellement étales sur A (i.e. localisées d'une algèbre étale sur A) telles que $A \longrightarrow A_i$ soit un homomorphisme local et l'extension résiduelle $k(A_i)/k(A)$ soit triviale. Cette construction montre en particulier que A^h est plat sur A et que si A est noethérien, il en est de même de sa clôture hensélienne.

Définition 4.2. Un anneau local A est dit strictement local s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) A est hensélien (4.1) et son corps résiduel est séparablement clos.

(ii) Tout homomorphisme local $A \longrightarrow B$, où B est localisé d'une algèbre étale sur A, est un isomorphisme.

Un schéma est dit schéma strictement local s'il est isomorphe au spectre d'un anneau strictement local.

L'équivalence de (i) et (ii) résulte aussitôt de 4.1. Notons que, sous forme géométrique, 4.2 (ii) (resp. 4.1 (iii)) s'exprime en disant que pour tout schéma étale X sur Y = Spec A, et tout point x de la fibre X_y (respectivement tout point de X_y rationnel sur $k(y)$), où y est le point fermé de Y , il existe une section de X sur Y passant par y (section qui est d'ailleurs nécessairement unique).

Définition 4.3. Soient X un schéma, $\underline{O}_{X_{ét}}$ le faisceau sur $X_{ét}$ défini par

$$\underline{O}_{X_{ét}}(X') = \Gamma(X', \underline{O}_{X'})$$

(comparer VII 2. c)), $u : \xi = \mathrm{Spec}(\Omega) \longrightarrow X$ un point géométrique de X. On appelle anneau strictement local de X en ξ , et on note $\underline{O}_{X,\xi}$ ou simplement $\underline{O}_{\xi}$, la fibre du faisceau $\underline{O}_{X_{\text{ét}}}$ en le point ξ . Son spectre est appelé localisé strict de X en ξ .

En vertu de 3.9, on a la description de la fibre $\underline{O}_{X,\xi}$:

$$(*) \qquad \underline{O}_{X,\xi} = \varinjlim \Gamma(X', \underline{O}_{X'}) \ ,$$

où X' parcourt la catégorie filtrante opposée de la catégorie des schémas étales sur X qui sont ξ -ponctués, i.e. munis d'un X-morphisme $\xi \longrightarrow X'$. D'après la transitivité des limites inductives, on peut remplacer au deuxième membre $\Gamma(X', \underline{O}_{X'})$ par $\underline{O}_{X',x'}$, où x' est l'image de ξ dans X', et on trouve l'expression

$$(**) \qquad \underline{O}_{X,\xi} = \varinjlim_{i} A_i$$

où A_i parcourt les algèbres essentiellement de type fini et étales sur $A = \underline{O}_{X,x}$ munies d'un k-homomorphisme $k(A_i) \to \Omega$. (N.B. x désigne l'image de ξ dans X). Bien entendu les homomorphismes de transition entre les A_i sont les homomorphismes locaux de A-algèbres $A_i \longrightarrow A_j$ qui rendent commutatif le triangle correspondant

$$\begin{tikzcd} k(A_i) \arrow[r] \arrow[dr] & k(A_j) \arrow[d] \\ & \Omega \end{tikzcd} ,$$

ce qui implique que s'il existe un homomorphisme admissible de A_i dans A_j, ce dernier est unique. Donc la limite inductive (**) est une limite relative à un ensemble d'indices ordonné filtrant croissant.

4.4. La description (**) montre que l'anneau local strict de X en ξ ne dépend essentiellement que de l'anneau local habituel $A = \underline{O}_{X,x}$ $(x=u(\xi))$, et de l'extension Ω de $k = k(A)$. On l'appelle aussi <u>anneau hensélisé strict</u> de A (relativement à l'extension séparablement close considérée Ω de k) et on le notera A^{hs} . On renvoie à EGA IV 18.8 pour les propriétés générales de A^{hs} . Signalons simplement que la construction donnée montre encore que A^{hs} est plat sur A , et qu'il est noethérien si A l'est. D'autre part, on montre facilement (loc. cit.) que l'homomorphisme local

$$A \longrightarrow A^{hs}$$

muni du k-homomorphisme

$$k(A^{hs}) \longrightarrow \Omega$$

est solution du problème universel, relatif à la donnée de A et de l'extension Ω de k, correspondant à la recherche des homomorphismes locaux

$$A \longrightarrow A' ,$$

avec A' <u>strictement local</u>, munis d'un k-homomorphisme

$$k(A') \longrightarrow \Omega .$$

En particulier, A^{hs} <u>est bien un anneau strictement local</u> (ce qui justifie la terminologie 4.3).

4.5. Gardons les notations des 4.3 et choisissons un voisinage ouvert affine U de x . Notons que dans 3.9 on peut évidemment se borner aux X' qui sont affines au-dessus de U. Ces derniers forment alors un système projectif pseudo-filtrant de schémas affines, de sorte que nous sommes dans la situation générale de VII 5 (cf. VII 5.12 b). En vertu de l'expression (*) pour $\mathcal{O}_{X,\xi}$, on aura un X-isomorphisme

$$(***)\qquad \varprojlim_{\substack{X' \text{ étale} \\ \text{affine sur } U, \\ X'\ \xi\text{-ponctué}}} X' \simeq \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,\xi}$$

ce qui précise la signification géométrique intuitive de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\xi})$ comme "limite des voisinages étales de ξ".

Proposition 4.6. *Soit X un schéma strictement local, x son point fermé, qui est donc un point géométrique de X. Alors le foncteur* $F \longmapsto \Gamma(X,F) : \widetilde{X}_{ét} \longrightarrow (Ens)$ *est canoniquement isomorphe au foncteur fibre* $F \longmapsto F_x$, *et par suite commute aux* $\varinjlim$ *quelconques* (*).

En effet, en vertu de déf. 4.2 (ii), l'objet final X de la catégorie des X' étales x-ponctués sur X envisagée dans 3.9 majore tous les autres objets, donc $\varinjlim F(X')$ est canoniquement isomorphe à $F(X)$, cqfd.

En particulier, le foncteur induit par Γ sur la catégorie des faisceaux abéliens est exact, donc on conclut

Corollaire 4.7. *Sous les conditions des 4.6 on a pour tout faisceau abélien F sur X :*

$$H^q(X,F) = 0 \text{ pour } q \neq 0.$$

Corollaire 4.8. *Soient X un schéma,* ξ *un point géométrique de X,* $\overline{X} = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ *le schéma localisé strict correspondant, F un faisceau variable sur X,* $\overline{F}$ *son image inverse sur* $\overline{X}$, *alors on a un isomorphisme fonctoriel*

$$F_\xi \simeq \Gamma(\overline{X},\overline{F}) .$$

(*) pas nécessairement filtrantes !

En effet, ξ peut être considéré comme un point géométrique de $\bar{X}$ également, et il suffit d'appliquer 4.6 et la transitivité des fibres (3.4).

5. Application au calcul des fibres des $R^q f_*$.

5.1. Soient

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de schémas, F un faisceau abélien sur X , on se propose de déterminer les $R^q f_*(F)$. En vertu de 3.5 , il revient au même, à peu de choses près, de connaître les fibres géométriques $R^q f_*(F)_{\bar{y}}$, pour $y \in Y$. Or (V 5.1) $R^q f_*(F)$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\mathcal{H}^q : Y' \longmapsto H^q(X \times_Y Y', F)$$

sur Y, et par suite (3.9)

$$R^q f_*(F)_{\bar{y}} = \varinjlim_{Y'} \mathcal{H}^q(Y'),$$

où la limite inductive est prise suivant la catégorie filtrante opposée de la catégorie des Y' étales sur Y ponctués par $\bar{y}$. Choisissant un voisinage ouvert affine U de y , on peut se limiter dans la limite du deuxième membre à la catégorie cofinale des Y' qui sont affines et au-dessus de U. On obtient ainsi

$$R^q f_*(F)_{\bar{y}} \simeq \varinjlim H^q(X \times_Y Y', F) , \tag{5.1.1}$$

où Y' varie dans la catégorie précédente.

Introduisons

$$\bar{Y} = \operatorname{Spec}(\underline{O}_{Y,\bar{y}}) = \varprojlim Y'$$

(cf 4.5), et

$$\bar{X} = X \times_Y \bar{Y} .$$

Notons que dans le système projectif des $X\times_Y Y'$ (déduit de celui des Y' par changement de base $X \longrightarrow Y$) les morphismes de transition sont affines, on est donc dans les conditions générales de VII 5.1 , et on voit aussitôt, par construction de $\varprojlim$ dans loc.cit., que l'on a un isomorphisme canonique

$$\overline{X} = \varprojlim X\times_Y Y' \ .$$

Désignons par $\overline{F}$ le faisceau sur $\overline{X}$ image réciproque de F , alors on obtient un homomorphisme canonique

$$\varinjlim_{Y'} H^q(X\times_Y Y', F) \longrightarrow H^q(\overline{X},\overline{F})$$

d'où en comparant avec 5.1.1 , un homomorphisme canonique

$$(5.1.2) \qquad R^q f_*(F)_{\overline{y}} \longrightarrow H^q(\overline{X},\overline{F}) \ ,$$

évidemment fonctoriel en F.

Supposons maintenant $f:X \longrightarrow Y$ quasi-compact et quasi-séparé, alors il en est de même de $X'\times_Y Y' \longrightarrow Y'$, et comme Y' est affine, les $X\times_Y Y'$ sont quasi-compacts et quasi-séparés. Utilisant (5.1.1) et le théorème de passage à la limite VII 5.8 , on obtient alors :

Théorème 5.2. Soient $f:X \longrightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas, F un faisceau abélien sur X , y un point de Y, $\overline{y}$ le point géométrique au-dessus de y , relatif à une clôture séparable $k(\overline{y})$ de $k(y)$, $\overline{Y} = \mathrm{Spec}\,(\underline{O}_{Y,\overline{y}})$ le schéma localisé strict correspondant, $\overline{X} = X\times_Y \overline{Y}$, $\overline{F}$ l'image inverse de F sur $\overline{X}$. Alors homomorphisme canonique (5.1.2) est un isomorphisme :

$$R^q f_*(F)_{\overline{y}} \simeq H^q(\overline{X},\overline{F}) \ .$$

Cet énoncé ramène pratiquement la détermination des fibres d'un faisceau $R^q f_*(F)$ à la détermination de la cohomologie d'un préschéma au dessus d'un schéma strictement local, et sera constamment utilisé par la suite. Techniquement, c'est 5.2 qui explique le rôle important des anneaux henséliens et des anneaux strictement locaux dans l'étude de la cohomologie étale.

<u>Remarque</u> 5.3. L'énoncé reste valable pour $R^o f_*(F) = f_*(F)$, pour un faisceau d'ensembles quelconque. D'autre part, 5.2 reste également valable pour $R^1 f_*(F)$, lorsque F est un faisceau en groupes (pas nécessairement commutatif), en prenant la définition habituelle du $R^1 f_*(F)$ (cf. Thèse de Giraud).

5.4. Supposons maintenant que f soit un morphisme <u>fini</u>. Alors $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{Y}$ est un morphisme fini, et comme $\bar{Y}$ est strictement local, il s'ensuit que $\bar{X}$ est une somme finie de schémas strictement locaux $\bar{X}_i$. Par suite, utilisant 4.7 on trouve

$$(5.4.1) \qquad H^q(\bar{X},\bar{F}) = 0 \quad \text{pour } q \neq 0 .$$

D'autre part, notons que les composantes $\bar{X}_i$ de $\bar{X}$ correspondent aux points $\bar{x}_i$ de $\bar{X}$ au-dessus du point fermé $\bar{y}$ de $\bar{Y}$, i.e. aux points de $\bar{X}_{\bar{y}} = X_y \otimes_{k(y)} k(\bar{y})$, . D'ailleurs, ces points peuvent être considérés comme des points géométriques de X , et $\bar{X}_i$ n'est alors autre que le schéma localisé strict de X en $\bar{x}_i$. On a donc (4.8)

$$H^o(\bar{X}_i,\bar{F}) \simeq F_{\bar{x}_i} \quad ,$$

d'où

$$(5.4.2) \qquad H^o(\bar{X},\bar{F}) = \prod_i F_{\bar{x}_i} \quad ,$$

qui est un isomorphisme fonctoriel en le faisceau d'ensembles F (inutile ici de se restreindre aux faisceaux abéliens). Tenant compte de 5.2 et 5.3 , les formules précédentes (5.4.1) et (5.4.2) donnent :

Proposition 5.5. Soient $f: X \to Y$ un morphisme fini de préschémas, y un point de Y. Alors pour tout faisceau F sur X, on a un isomorphisme (fonctoriel en F)

$$f_*(F)_{\bar{y}} \simeq \prod_{\bar{x} \in X_y \otimes_{k(y)} k(\bar{y})} F_{\bar{x}} ,$$

(par suite la formation de $f_*(F)$ commute à tout changement de base $Y' \to Y$), et si F est un faisceau abélien, on a

$$R^q f_*(F) = 0 \quad \text{si } q > 0 .$$

On notera que la première formule 5.5 est en fait indépendante de 5.2. et du théorème de passage à la limite général VII 5.7 , et qu'elle implique (grâce à 3.5) que $F \mapsto f_*(F)$ est un foncteur exact sur la catégorie des faisceaux abéliens, d'où encore $R^q f_*(F) = 0$ pour $q \neq 0$. Voici une légère variante de 5.5 :

Corollaire 5.6. Soit $f: X \to Y$ un morphisme entier. Alors pour tout faisceau abélien F sur X, on a

$$R^q f_*(F) = 0 \quad \text{pour } q \neq 0 .$$

De plus, le foncteur f_* sur les faisceaux d'ensembles commute à tout changement de base $Y' \to Y$.

En effet, on est ramené grâce à 5.2 à prouver que lorsque Y est strictement local, on a $H^q(X,F) = 0$ pour tout faisceau abélien sur X . Or on aura $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$, B étant une algèbre entière, et écrivant $B = \varinjlim B_i$, où B_i parcourt les sous-algèbres de type fini de B, (qui sont même finies sur A), on aura $X = \varprojlim_i X_i$, où X_i = Spec B_i. En vertu de VII 5.13 , on est ramené à prouver que $R^q f_*(F_i) = 0$ pour $q \neq 0$, F_i un faisceau abélien sur X_i, ce qui résulte de 5.5. La dernière assertion de 5.6 se prouve par la même méthode de réduction à 5.5.

Corollaire 5.7. Soit $f: X \to Y$ un morphisme d'immersion. Alors pour tout faisceau F sur X, le morphisme canonique

$$f^* f_*(F) \longrightarrow F$$

est un isomorphisme.

Comme f se factorise en le produit d'une immersion ouverte et d'une immersion fermée, et que 5.7 est trivial dans le cas d'une immersion ouverte (IV n° 3), on est ramené au cas où f est une immersion fermée. On est ramené à prouver que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme correspondant

$$(f^* f_*(F))_{\bar{x}} \longrightarrow F_{\bar{x}}$$

est bijectif, or par transitivité des fibres (3.4) le premier membre n'est autre que la fibre $f_*(F)_{\bar{x}}$, donc il faut vérifier que l'homomorphisme canonique

$$f_*(F)_{\bar{x}} \longrightarrow F_{\bar{x}}$$

est bijectif, ce qui résulte aussitôt de 5.5.

Remarque 5.8. Utilisant 5.5 et procédant encore comme dans 5.6 , on prouve facilement que si $f: X \to Y$ est un morphisme entier, F un faisceau en groupes sur X (pas nécessairement commutatif), alors $R^1 f_*(F)$ est le faisceau final sur Y (comparer remarque 5.3).

6. Supports

Soit U un ouvert de Zariski du schéma X . Alors $U \in \mathrm{Ob} X_{ét}$, et en fait U est un sous-objet de l'objet final X de $X_{ét}$, donc définit un sous-objet $\widetilde{U}$ de l'objet final de $\widetilde{X_{ét}}$, i.e. un "ouvert" du topos étale $X_{ét}$ de X (IV 8.3).

Proposition 6.1. L'application précédente $U \longmapsto \widetilde{U}$ est un isomorphisme de l'ensemble ordonné des ouverts (au sens de Zariski) de X, sur l'ensemble des ouverts du topos étale $\widetilde{X_{ét}}$.

Comme $X_{ét} \longrightarrow \widetilde{X_{ét}}$ est pleinement fidèle, on voit aussitôt que l'application $U \longmapsto \widetilde{U}$ conserve les structures d'ordre i.e. $(U \subset V) \Leftrightarrow (\widetilde{U} \subset \widetilde{V})$, en particulier l'application précédente est injective. Pour prouver qu'elle est surjective, considérons un sous-faisceau F du faisceau final $\widetilde{X}$, et considérons les objets de $X_{ét/F}$, i.e. les schémas étales X' sur X tels que $F(X') \neq \emptyset$. Comme $X' \longrightarrow X$ est étale, c'est une application ouverte (EGA IV 2.4.6), en particulier son image (au sens ensembliste) $\mathrm{Im}(X')$ est ouverte. Soit U l'ouvert réunion des $\mathrm{Im}(X')$ ($X' \in \mathrm{Ob}\, X_{ét/F}$). Comme la famille des $X' \longrightarrow U$ ($X' \in \mathrm{Ob}\, X_{ét/F}$) est surjective, donc couvrante, on conclut que $U \in \mathrm{Ob}\ X_{ét/F}$, donc $X_{ét/F} = X_{ét/U}$, donc $F = U$, cqfd.

Compte tenu de 6.1, nous pouvons donc parler sans ambiguité d'un "ouvert" de X , sans préciser si nous entendons cette notion au sens habituel de Zariski ou au sens de la topologie étale.

Corollaire 6.2. Soient U un ouvert de X, $j : U \longrightarrow X$ l'immersion canonique, alors le foncteur

$$j^* : \widetilde{X_{ét}} \longrightarrow \widetilde{U_{ét}}$$

induit une équivalence de catégories

$$\widetilde{X_{ét}}/\widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{U_{ét}} .$$

En effet on vérifie aussitôt que pour tout site C où les $\varprojlim$ finies existent, et pour tout sous-objet U de l'objet final e de C, considérant le foncteur $j : C \longrightarrow C_{/U}$ défini par $j(S) = S \times U$, j est un morphisme de sites et $j^* : \widetilde{C} \longrightarrow \widetilde{C_{/U}}$ induit une équivalence $\widetilde{C}/\widetilde{U} \rightarrow \widetilde{C_{/U}}$. Il suffit alors de conjuguer ce fait général et le fait que $U_{ét}$ est canoniquement isomorphe à $X_{ét/U}$.

De façon imagée, on peut exprimer 6.2 en disant que les opérations de "s'induire sur un ouvert", au sens habituel des schémas d'une part, et au sens des topos de l'autre, sont compatibles. Voici une compatibilité analogue pour les opérations de "restriction à un fermé" :

<u>Théorème</u> 6.3. <u>Soient</u> X <u>un schéma</u>, Y <u>un sous-schéma fermé de</u> X, $U = X - Y$ <u>muni de la structure induite</u>, $i : Y \longrightarrow X$ <u>et</u> $j : U \rightarrow X$ <u>les immersions canoniques. Alors le foncteur</u>

$$i_*: \widetilde{Y_{ét}} \longrightarrow \widetilde{X_{ét}}$$

<u>est pleinement fidèle, et si</u> $F \in \mathrm{Ob}\, \widetilde{X_{ét}}$, F <u>est isomorphe à un faisceau de la forme</u> $i_*(G)$ <u>sss</u> $j^*(F)$ <u>est isomorphe au faisceau final</u> $\widetilde{U}$ <u>sur</u> U.

Démonstration. Comme i_* et i^* sont adjoints l'un de l'autre, le fait que i_* soit pleinement fidèle équivaut aussi au fait que l'homomorphisme fonctoriel

$$i^*(i_*(G)) \longrightarrow G$$

est un isomorphisme, ce qui n'est autre que 5.7. D'autre part, si $G \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{Y_{\acute{e}t}}$, alors on vérifie trivialement grâce à 6.2 que $j^*(i_*(G))$ est le faisceau final sur U. Inversement, si $F \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{X_{\acute{e}t}}$ est tel que $j^*(F)$ soit le faisceau final, prouvons que F est isomorphe à un faisceau de la forme $i_*(G)$, ou ce qui revient au même, que l'homomorphisme canonique

$$G \longrightarrow i_* i^* G$$

est un isomorphisme. Or il suffit de vérifier encore que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme induit sur les fibres géométriques en $\bar{x}$ est un isomorphisme. Lorsque $x \in U$, cela n'est autre que l'hypothèse faite sur G. Lorsque $x \in Y$, par transitivité des fibres on est ramené à vérifier que l'homomorphisme sur les fibres en $\bar{x}$ induit par

$$i^*(G) \longrightarrow i^*(i_* i^*(G))$$

est un isomorphisme, or l'homomorphisme précédent est un isomorphisme d'après 5.7 appliqué à $F = i^*G$ et à i. Cela achève la démonstration de 6.3.

Corollaire 6.4. *Le foncteur i_* induit une équivalence de la catégorie des faisceaux abéliens sur Y avec la catégorie des faisceaux abéliens sur X dont la restriction à $U = X - Y$ est nulle.*

Conformément à l'usage courant nous identifierons donc souvent un faisceau abélien sur Y à un faisceau abélien sur X nul sur U.

6.5. En vertu de 6.1 nous savons donc (si X est un schéma) interpréter les "ouverts" du topos $\underline{E} = \widetilde{X_{\acute{e}t}}$ comme ouverts U de X au sens habituel, et en vertu de 6.3 avec cette identification le "topos résiduel" $E_{\complement U}$ de IV 3 est équivalent canoniquement au topos $\widetilde{Y_{ét}}$, où $Y = X - U$ est muni d'une structure induite quelconque, faisant de Y un schéma. Nous pouvons par suite appliquer à cette situation les résultats de IV 3. , notamment la description IV 3.3 des faisceaux F sur X en terme des triplets (F', F'', u) où F' est un faisceau sur Y, F'' un faisceau sur U et u un homomorphisme de F' dans $i^*j_*(F')$. Nous utiliserons librement par la suite les notations $i^!$, $j_!$ de IV.3 , qui désignent des foncteurs

$$j_! : (\widetilde{U_{ét}})_{ab} \longrightarrow (\widetilde{X_{ét}})_{ab} \quad ,$$

$$i^! : (\widetilde{X_{ét}})_{ab} \longrightarrow (\widetilde{Y_{ét}})_{ab} \quad ,$$

où l'indice "ab" dénote la catégorie des faisceaux abéliens. Ces foncteurs donnent lieu aux deux suites exactes IV 3.7.

6.6. Compte tenu des développements qui précèdent et de la terminologie générale introduite dans IV 8.5 , il y a lieu d'introduire, pour un faisceau abélien F sur X, ou une section φ d'un tel faisceau, la notion de <u>support de</u> F resp. <u>de</u> φ, comme étant le fermé (au sens habituel, i.e. de Zariski) complémentaire du plus grand ouvert sur lequel l'objet en question s'annule.

Dans la situation actuelle, il s'impose également de remplacer les notations générales V 4.3 $H^q(E_{\complement U}\ F)$, $\underline{H}^q_{\complement U}(F)$ par les notations $H^q_Y(X,F)$, $\underline{H}^q_Y(F)$, le premier désignant un groupe abélien, le deuxième un faisceau abélien sur Y (ou encore un faisceau abélien sur X, nul sur U). Ainsi, on a $\underline{H}^q_Y = R^q i^!$ etc...

Je renvoie à V 6 pour les propriétés générales des foncteurs précédents.

7. Morphismes de spécialisation des foncteurs fibres

7.1. Nous avons vu au N° 4 comment on associe, à tout point géométrique ξ du schéma X, un X-schéma strictement local

$$\overline{X}(\xi) = \operatorname{Spec} \underline{O}_{X,\xi} \quad ,$$

ne dépendant, en fait, que du point géométrique au-dessus de l'image x de ξ défini par la clôture séparable $\overline{k(x)}$ de $k(x)$ dans $\Omega = k(\xi)$. Nous nous restreindrons souvent par la suite aux points géométriques $\xi = \operatorname{Spec} \Omega$ algébriques séparables sur X , i.e. tels que Ω soit une clôture séparable de $k(x)$, i.e. $\xi = \overline{x}$. Appelons un X-schéma Z un localisé strict de X s'il est X-isomorphe à un schéma de la forme Spec $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$, on voit donc que

$$\xi \longmapsto \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,\xi} = \overline{X}(\xi)$$

est une équivalence de la catégorie des points géométriques algébriques séparables sur X , avec la catégorie des X-schémas qui sont des localisés stricts de X , quand on prend comme morphismes dans l'une et l'autre catégorie les seuls isomorphismes.

Ce dernier énoncé n'est plus exact quand on prend comme morphismes tous les X-morphismes, car dans la seconde catégorie il peut y avoir des X-morphismes qui ne sont pas des isomorphismes.
On pose alors la

Définition 7.2. Soient ξ, ξ' deux points géométriques du schéma X, on appelle flèche de spécialisation de ξ' à ξ tout X-morphisme entre les localisés stricts correspondants

$$\overline{X}(\xi') \longrightarrow \overline{X}(\xi) \quad .$$

On dit que ξ est une spécialisation de ξ' ou que ξ' est une généralisation de ξ, s'il existe une flèche de spécialisation de ξ' à ξ.

On notera que les flèches de spécialisation se composent de façon évidente, de sorte qu'en prenant pour morphismes les flèches de spécialisation, les points géométriques de X forment une catégorie, équivalente (ainsi que la sous-catégorie pleine formée des points géométriques algébriques et séparables sur X) à la sous-catégorie pleine de $(Sch)_{/X}$ formée des localisés stricts de X.

Lemme 7.3. Soient X un schéma, Z un X-schéma qui est isomorphe à une limite projective pseudo-filtrante de X-schémas étales X_i, avec des morphismes de transition affines (VII 5.1), ξ' un point géométrique de X, $Z' = \overline{X}(\xi')$ le localisé strict correspondant. Alors:

a) L'application de restriction

$$\mathrm{Hom}_X(Z',Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\xi',Z)$$

est bijective.

b) Pour que les deux membres soient non vides, il faut et il suffit que l'image x' de ξ' dans X soit dans celle de Z.

c) Soit T un Z-schéma, pour que T soit un localisé strict de Z, il faut et il suffit qu'il soit un localisé strict de X.

Démonstration. a) on est ramené aussitôt au cas où Z est un des X_i, i.e. où Z est étale sur X. et par le changement de base $Z' \to X$ on peut supposer que $Z' \xrightarrow{\sim} X$, d'où la conclusion par 4.2 (ii).

b) On note que si x' est l'image d'un point z de Z, alors $k(z)$ est nécessairement une extension algébrique séparable de $k(x')$, donc il existe un $k(x')$-homomorphisme de cette dernière dans $k(\xi')$, d'où la conclusion.

c) La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur.

On conclut de 7.2 et 7.3 :

Proposition 7.4. Soient ξ, ξ' deux points géométriques du schéma X. Alors l'application de restriction définit une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), \overline{X}(\xi))$ des flèches de spécialisation de ξ' dans ξ, avec l'ensemble des X-morphismes de ξ' dans $\overline{X}(\xi)$.

Corollaire 7.5. Pour que ξ soit une spécialisation de ξ', il faut et il suffit qu'il en soit de même pour les images x, x' de ξ, ξ' dans X, i.e. que x appartienne à l'adhérence de $\{x'\}$.

Comme $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,\xi} \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{X,x}$ est fidèlement plat (4.4) il est surjectif, et il suffit donc d'appliquer la deuxième assertion de 7.3.

Corollaire 7.6. Pour tout schéma X, soit $\underline{\mathrm{Pt}}(X)$ la catégorie des points géométriques sur X (ou encore, des points géométriques algébriques séparables sur X), les morphismes étant les flèches de spécialisation. Soit alors ξ un point géométrique d'un schéma X, $\overline{X}(\xi)$ le localisé strict correspondant, on a alors une équivalence des catégories

$$\underline{\mathrm{Pt}}(\overline{X}(\xi)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Pt}}(X)_{/\xi},$$

obtenue en associant, à tout point géométrique ξ' de $\overline{X}(\xi)$, le point géométrique correspondant sur X, avec le morphisme de spécialisation dans ξ déduit du morphisme structural $\xi' \to \overline{X}(\xi)$ grâce à 7.4.

En d'autres termes, la donnée d'une générisation ξ' du point géométrique ξ équivaut essentiellement à la donnée d'un point géométrique de $\overline{X}(\xi)$. Notons d'ailleurs qu'en vertu de 7.3 c), l'homomorphisme correspondant $\overline{X}(\xi') \longrightarrow \overline{X}(\xi)$ fait de $\overline{X}(\xi')$ le localisé strict de $\overline{X}(\xi)$, relativement à ξ'.

7.7. Interprétons maintenant, pour tout point géométrique ξ de X et tout faisceau F sur X, la fibre F_{ξ} comme étant $\Gamma(\overline{X}(\xi), \overline{F}(\xi))$, où $\overline{F}(\xi)$ est l'image inverse de F sur $\overline{X}(\xi)$ (4.8). Alors on voit que toute flèche de spécialisation

$$u : \xi' \longrightarrow \xi$$

induit un homomorphisme, fonctoriel en F:

$$u^{*}: F_{\xi} \longrightarrow F_{\xi'} \quad ,$$

appelé <u>homomorphisme de spécialisation</u> associé à la flèche de spécialisation u. Il est évident, d'après la transitivité des images inverses de faisceaux, que l'on a pour une flèche de spécialisation composée :

$$(wu)^{*} = u^{*}\, w^{*} \quad .$$

7.8. Si $\underline{E}$ est un topos, rappelons (IV) qu'on a appelé "foncteur fibre", ou (par abus de langage) "point" du topos $\underline{E}$, tout morphisme du "topos final" (Ens) (isomorphe à la catégorie des faisceaux sur un espace réduit à un point!) dans $\underline{E}$, i.e. tout foncteur

$$\varphi = \underline{E} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

qui commute aux lim. inductives quelconques, et aux lim. projectives finies. Il y a lieu de considérer l'ensemble des foncteurs fibres de $\underline{E}$ comme l'ensemble des objets d'une sous-catégorie pleine de <u>Hom</u> ($\underline{E}$,(Ens)), appelée <u>catégorie des foncteurs fibres</u> du topos $\underline{E}$, dont l'opposée est appelée <u>catégorie des points de</u> $\underline{E}$, et notée <u>Pt</u>(E), cf. (IV 6.1).

Lorsque E est de la forme $\widetilde{X_{\text{ét}}}$, où X est un schéma, nous avons défini dans 3.3 et 7.7 un foncteur

$$(*) \qquad \underline{\mathrm{Pt}}\,(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Pt}}\,(\widetilde{X_{\acute{e}t}}) \ ,$$

où le premier membre est défini dans 7.6. Ceci posé, on a le

Théorème 7.9. Soit X un schéma. Le foncteur précédent $(*)$ est une équivalence de la catégorie des points géométriques sur X (avec comme morphismes les flèches de spécialisation) avec la catégorie des points du topos étale $\widetilde{X_{\acute{e}t}}$ (opposée de celle des foncteurs fibres sur $\widetilde{X_{\acute{e}t}}$).

Comme ce théorème ne servira plus dans la suite du séminaire, nous nous bornons ici à une esquisse de démonstration, où nous nous permettrons certaines libertés avec les questions d'univers.

a) Le foncteur envisagé est pleinement fidèle. Pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, X_{\acute{e}t}$, soit $X^{\vee} : \widetilde{X_{\acute{e}t}} \to (\mathrm{Ens})$ défini par

$$\check{X}\,(F) = \mathrm{Hom}(X,F) = F(X) \ .$$

Notons que le foncteur fibre

$$\mathcal{E}_{\xi} : F \longmapsto F_{\xi}$$

peut s'écrire

$$\mathcal{E}_{\xi} \simeq \varinjlim_{i} X_i^{\vee} \quad ,$$

où les X_i sont des schémas affines étales sur X, indexés par une certaine catégorie filtrante (cf. 4.3 et 4.5). On a donc pour tout foncteur $\varphi : \widetilde{X_{\acute{e}t}} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_{\xi}, \varphi) \simeq \varprojlim_{i} \mathrm{Hom}(X_i^{\vee}, \varphi) \quad ,$$

d'autre part il est bien connu que l'on a un isomorphisme bifonctoriel

$$\mathrm{Hom}(X_i^{\vee}, \varphi) \simeq \varphi(X_i) \ .$$

Lorsque φ est de la forme $\mathcal{E}_\xi$, donc

$$\varphi \simeq \varinjlim_j X_j'^{\vee} ,$$

on a donc une bijection naturelle

(*) $$\mathrm{Hom}\,(\mathcal{E}_\xi , \mathcal{E}_{\xi'}) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_X (X_j', X_i) .$$

D'autre part on a (dans la catégorie des schémas)

$$\overline{X}(\xi) = \varprojlim_i X_i , \quad \overline{X}(\xi') = \varprojlim_j X_j' ,$$

d'où

$$\mathrm{Hom}_X(\overline{X}(\xi'), \overline{X}(\xi)) \simeq \varprojlim_i \mathrm{Hom}_X (\overline{X}(\xi'), X_i) ,$$

d'autre part, comme X_i est localement de présentation finie sur X , on a

$$\mathrm{Hom}_X (\overline{X}(\xi'), X_i) \simeq \varinjlim_j \mathrm{Hom}_X (X_j, X_i) ,$$

d'où

(**) $$\mathrm{Hom}_X (\overline{X}(\xi'), \overline{X}(\xi)) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathrm{Hom}_X(X_j', X_i) .$$

La comparaison de (*) et (**) donne la conclusion voulue (moyennant une vérification de compatibilités, laissée au lecteur).

b) <u>Le foncteur envisagé est essentiellement surjectif</u> .

7.9.1. Remarquons d'abord que si C est un site où les $\varprojlim$ finies sont représentables, $\widetilde{C} = \underline{E}$ le topos correspondant, alors tout foncteur fibre φ sur $\underline{E}$ peut se représenter comme une "limite inductive filtrante" de foncteurs de la forme

$$\check{Y}(F) = F(Y) = \mathrm{Hom}\,(\widetilde{Y}, F), \qquad Y \in \mathrm{Ob}\, C ,$$

(où $\widetilde{Y}$ est le faisceau associé à Y), de la façon suivante (*). On considère

(*) C'est un cas particulier de IV 6.8.3.

la catégorie $C_{/\varphi}$ des couples (Y,ξ), avec $Y \in \mathrm{Ob}\, C$, $\xi \in \varphi(\widetilde{Y})$ (les morphismes se définissant de la façon évidente), et on note qu'on a un homomorphisme évident

$$(*) \qquad \varinjlim_{(Y,\xi)\in C^{\circ}_{/\varphi}} \check{Y} \longrightarrow \varphi$$

en remarquant que

$$\mathrm{Hom}\,(\varinjlim_{C_\varphi} \check{Y},\ ) \simeq \varprojlim_{C_{/\varphi}} \mathrm{Hom}\,(\check{Y},\varphi) \simeq \varprojlim_{C_{/\varphi}} \varphi(\widetilde{Y}) .$$

Or on a un élément canonique dans $\varprojlim_{C/\varphi} \varphi(\widetilde{Y})$, en associant à tout (Y,ξ) l'élément ξ de $\varphi(Y)$. Utilisant le fait que les $\varprojlim$ finies existent dans C, et que le foncteur $Y \longmapsto \varphi(\widetilde{Y})$ y commute, on voit que dans $C_{/\varphi}$ les $\varprojlim$ finies existent; a fortiori $C^{\circ}_{/\varphi}$ est filtrant.
Utilisant que tout faisceau F est limite inductive des faisceaux de la forme $\widetilde{Y}$, et utilisant le fait que φ commute aux limites inductives, on conclut aisément que l'homomorphisme de foncteurs (*) est bijectif, et donne donc la représentation annoncée.

7.9.2. Remarquons également que si $\underline{E}$ est un topos, Y un objet de $\underline{E}$, d'où un topos $\underline{E}_{/Y}$, alors la donnée d'un foncteur fibre φ pour $\underline{E}_{/Y}$ équivaut à la donnée d'un couple (φ,ξ), où φ est un foncteur fibre pour $\underline{E}$, et $\xi \in (Y)$. Au foncteur fibre $\psi : \underline{E}_{/Y} \to (\mathrm{Ens})$ on associe le couple (φ,ξ), où φ est le composé $Z \longmapsto \varphi(Z) = \psi(Z\times Y)$, et où $\xi \in \varphi(Y) = \psi(Y\times Y)$ est l'image de l'unique élément de $\psi(Y)$ par le morphisme diagonal de $Y\times Y$.

7.9.3. Revenons maintenant au cas du site $C = \widetilde{X_{\text{ét}}}$, et soit $\varphi : \widetilde{X_{\text{ét}}} \to (\mathrm{Ens})$ un foncteur fibre sur le topos étale de X.

Considérant la restriction de φ à la sous-catégorie pleine de $X_{ét}$ formée des ouverts de ce topos, ou ce qui revient au même (6.1) des ouverts U de X, on trouve une application

$$\varphi_o : \mathcal{U}(X) \to \{0, \quad 1\}$$

commutant aux sup quelconques et aux inf finis. (On note que pour $U \in \mathcal{U}(X)$, $\varphi(U)$ est vide ou réduit à un point, et on prend $\varphi_o(U) = 0$ ou 1 suivant qu'on est dans l'un ou l'autre cas).

On voit facilement, grâce au fait que tout fermé irréductible de X a un point générique et un seul (*), que φ_o est défini à l'aide d'un unique $x \in X$, par la condition

$$\varphi_o(U) = 1 \qquad \text{sss} \qquad x \in U \quad ,$$

i.e.

$$\varphi(U) \neq \emptyset \iff x \in U \ .$$

Soit $F \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{X_{ét}}$, alors l'image de F dans le faisceau final X est un ouvert; et comme

$$\varphi(F) \longrightarrow \varphi(U)$$

est surjectif, on voit que $\varphi(F) \neq \emptyset$ sss $\varphi(U) \neq \emptyset$, i.e. sss $x \in U$.
Soit alors $C_{/\varphi}$ la catégorie des couples (X', ξ) où $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{ét}$, et $\xi \in \varphi(X')$. On a signalé dans 7.9.1 que $C^{o}_{/\varphi}$ est filtrante connexe. De plus, grâce à 7.9.2 et à ce qui précède appliqué à X' au lieu de X , si $(X', \xi) \in \mathrm{Ob}\, X_{ét}$, il lui est associé un unique point $x' \in X'$, tel que pour un morphisme étale $X'' \longrightarrow X'$, ξ est dans l'image de $\varphi(X'') \longrightarrow \varphi(X')$ sss x' est dans celle de X" . On conclut de ceci que le schéma $\varprojlim$ des X' suivant la catégorie C des (X', ξ) existe et est un localisé strict Z de X , correspondant donc à un point géométrique ξ et un foncteur fibre ε_{ξ} .

(*) i.e. X est <u>sobre</u> dans la terminologie de IV 4.2.1. L'assertion faite est un cas particulier de IV 4.2.3.

Pour tout faisceau F , on a alors

$$\mathcal{E}_{\xi}(F) \simeq \varinjlim_{C_{\varphi}} F(X') \quad .$$

Compte tenu de 7.9.1 on en conclut que φ est isomorphe à $\mathcal{E}_{\xi}$, ce qui achève la démonstration de 7.9.

8. Deux suites spectrales pour les morphismes entiers

Proposition 8.1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme entier surjectif, F un faisceau abélien sur Y. Pour tout entier i, soit $\mathcal{H}^{i}(F)$ le préfaisceau sur $(Sch)_{/Y}$ défini par

$$\mathcal{H}^{i}(F)\,(Z) = H^{i}(Z,F_{Z}) \quad ,$$

où F_Z est l'image inverse de F sur Z . Alors il existe une suite spectrale (fonctorielle en F)

$$H^{*}(X,F) \Longleftarrow E_{2}^{pq} = H^{p}(X/Y, \mathcal{H}^{q}(F)\,)$$

("suite spectrale de descente").

Bien entendu, le symbole $H^{p}(X/Y, G)$, pour un préfaisceau G sur $(Sch)_{/Y}$, désigne le p.ème groupe de cohomologie de Čech relatif, défini à l'aide du complexe des $C^{n}(X/Y,G) = G(X^{n+1})$, où X^{m} désigne la puissance m.ième dans $(Sch)_{/Y}$. Pour établir 8.1 , soit $p_n : X^{n+1} \longrightarrow Y$ la projection, et posons

$$A^{n} = p_{n*}(\underline{Z}_{X^{n+1}}) \quad ,$$

où $\underline{Z}_{X^{n+1}}$ désigne le faisceau constant $\underline{Z}$ sur X^{n+1}. Alors les A^n sont les composantes d'un faisceau abélien simplicial sur Y , donc d'un complexe de faisceaux abéliens A^{*} sur Y. Notons qu'on a un homomorphisme évident

$$(*) \qquad \underline{Z}_Y \longrightarrow A^0 .$$

Ceci posé, on a le

<u>Lemme</u> 8.2. <u>Le complexe</u> (A^*) <u>muni de l'homomorphisme</u> $(*)$ <u>est une résolution de</u> $\underline{Z}_Y$. <u>Plus généralement pour tout faisceau abélien</u> F <u>sur</u> Y , $A^* \otimes_{\underline{Z}} F$ <u>est une résolution de</u> F.

Démonstration : On peut supposer Y affine, donc $Y = \operatorname{Spec} A$, $X = \operatorname{Spec} B$, où B est une A algèbre entière. On aura $B = \varinjlim_i B_i$, où B_i parcourt les sous-algèbres de type fini donc finies de B , d'où $X = \varprojlim X_i$, où $X_i = \operatorname{Spec} B_i$. Utilisant VII 5.11 , on voit que le complexe augmenté $A^*(X/Y)$ est alors la limite inductive des complexes augmentés $A^*(X_i/Y)$. Cela nous ramène au cas où f est <u>fini</u>. Il suffit de prouver que pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Y , le complexe $A^*_{\bar{y}}$ est une résolution de $\underline{Z}_{\bar{y}}$, et le reste après tensorisation par un F. Mais si $X_{\bar{y}}$ est la fibre de X en $\bar{y}$, il résulte de 5.5 que le complexe $A^*_{\bar{y}}$ n'est autre que le complexe analogue $A^*(X_{\bar{y}}/\bar{y})$. Cela nous ramène au cas où Y est le spectre d'un corps séparablement clos k. Utilisant 1.3 a) et b), on peut même supposer k algébriquement clos, et X réduit, donc X de la forme I_Y , où I est un ensemble fini. Mais alors le complexe $A^* \otimes F$ s'identifie au complexe de cochaines trivial de l'ensemble d'indices I à coefficient dans $F_{\bar{y}}$, donc c'est bien une résolution de $F_{\bar{y}}$.

Nous obtenons donc, comme conséquence de 8.2, une suite spectrale

$$H^*(Y,F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(H^q(Y,A^* \otimes F)) ,$$

et il reste à expliciter le terme initial. Or on a un homomorphisme canonique

$$A^n \otimes F \longrightarrow p_{n_*} p_n^*(F) \quad ,$$

et ce dernier est un isomorphisme, comme on voit encore par réduction au cas f fini et passage aux fibres. Utilisant 5.5 , on en conclut

$$H^q(Y, A^n \otimes F) \simeq H^q(X^{n+1}, p_n^*(F)) \Rightarrow \mathcal{H}^q(F)(X^{n+1}),$$

ce qui donne bien le terme initial annoncé dans 8.1.

<u>Remarque</u> 8.3. a) Lorsque l'on se donne un recouvrement <u>localement fini</u> de Y par des ensembles fermés Y_i , et qu'on pose $X = \coprod_i Y_i$ alors le morphisme canonique $f : X \to Y$ est fini, et la suite spectrale 8.1 a un terme initial qui s'explicite comme la cohomologie du complexe défini par les $H^q(Y_{i_o \dots i_p}, F|Y_{i_o \dots i_p})$, où $Y_{i_o \dots i_p} = Y_{i_o} \cap \dots \cap Y_{i_p}$. C'est donc là l'analogue de la suite spectrale de Leray pour un recouvrement fermé localement fini d'un espace topologique ordinaire (TF Chapitre II 5.2.4). Cette dernière peut d'ailleurs se généraliser également en une suite spectrale relative à un morphisme "fini" i.e. propre à fibres finies, en procédant comme dans 8.1.

b) On notera l'analogie de la suite spectrale de 8.1 avec la suite spectrale de Leray d'un recouvrement (X_i) de Y (en l'occurrence par des X_i étales sur Y); cette dernière s'obtiendrait formellement en écrivant la suite spectrale 8.1 pour $X = \coprod_i X_i$. Il est probable en fait que ces deux suites spectrales admettent une généralisation commune, qui serait valable chaque fois qu'on aurait une famille de morphismes $(X_i \to Y)$, qui soit "famille de descente effective universelle" pour la catégorie fibrée des faisceaux étales sur un schéma de base variable (cf n° 9 ci-dessous). La question analogue se pose d'ailleurs en topologie ordinaire, à propos d'une généralisation commune des deux espèces de suites spectrales de Leray d'un recouvrement, supposé soit ouvert, soit fermé localement fini (*).

Proposition 8.4. Soient Y un schéma, π un groupe profini, $(\pi_i)_i$ le système projectif des groupes quotients finis discrets de π, $(X_i)_{i \in I}$ un système projectif de revêtements principaux de Y, de groupes les π_i, les homomorphismes de transition $X_j \longrightarrow X_i$ étant compatibles avec les homomorphismes $\pi_j \longrightarrow \pi_i$ sur les groupes d'opérateurs, $X = \varprojlim X_i$ (cf. VII 5.1), de sorte que le groupe π opère sur le Y-schéma X, F un faisceau abélien sur Y. Alors on a une suite spectrale "de Hochschild-Serre" (fonctorielle en F)

$$H^*(Y,F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(\pi, \varinjlim_i H^q(X_i, F_{X_i})) ,$$

où F_{X_i} est l'image inverse de F sur X_i, et $H^p(\pi, -)$ désigne la cohomologie galoisienne.

Le terme E_2^{pq} écrit ici est également (par définition de $H^p(\pi, -)$ et transitivité des limites inductives) isomorphe à

$$E_2^{pq} = \varinjlim_i H^p(\pi_i, H^q(X_i, F_{X_i})) ,$$

ce qui nous montre qu'il suffit de trouver un système inductif de suites spectrales (dépendant de l'indice i)

$$H^*(Y, F) \Longleftarrow {}^iE_2^{pq} = H^p(\pi_i, H^q(X_i, F_{X_i})) .$$

Cela nous ramène à définir la suite spectrale dans le cas où π est fini. Alors $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme couvrant dans $Y_{ét}$, donc on peut

(*) Depuis la rédaction de ces lignes, P.Deligne a fait une théorie générale des "suites spectrales de descente", cf. Exp. V bis.

écrire la suite spectrale de Leray de ce morphisme. Compte tenu des isomorphismes canoniques :

$$X^n \simeq X \overset{G}{\underset{X}{\times}} G^n \quad ,$$

un calcul bien connu montre alors que pour tout préfaisceau $\mathcal{H}$ sur $X_{\text{ét}}$, transformant somme en produits, $C^*(X/Y, \mathcal{H})$ n'est autre que le complexe des cochaines homogènes de G à coefficients dans $\mathcal{H}(X)$, d'où la forme annoncée pour le terme initial.

Une variante de cette démonstration, évitant tout calcul, consiste à considérer $E \longmapsto X \times_{\pi} E$ comme un morphisme du site des π-ensembles finis dans le site étale de Y, et à écrire la suite spectrale de Leray de ce morphisme. Enfin, lorsque π est fini, on peut également regarder la suite spectrale de Hochschild-Serre comme étant un cas particulier de 8.1 relativement au morphisme $f : X \to Y$.

Corollaire 8.5. Supposons Y quasi-compact et quasi-séparé, alors la suite spectrale de 8.4 s'écrit

$$H^*(Y,F) \Longleftarrow E_2^{pq} = H^p(\pi\ , H^q(X,F_X))\ .$$

En effet, en vertu de VII 5.8, on a alors des isomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^q(X_i, F_{X_i}) \simeq H^q(X, F_X)\ .$$

Corollaire 8.6. Soient Y un schéma local hensélien de point fermé y, F un faisceau abélien sur Y, F_0 le faisceau induit sur $Y_0=\mathrm{Spec}(k(y))$. Alors les homomorphismes canoniques

$$H^n(Y,F) \longrightarrow H^n(Y_o,F_o)$$

<u>sont des isomorphismes.</u>

Soit en effet $\bar{y}$ un point géométrique sur y, correspondant à une clôture séparable $\overline{k(y)} = k(\bar{y})$ de $k(y)$; comme Y est hensélien, le localisé strict X de Y en $\bar{y}$ est la limite projective des revêtements étales galoisiens connexes $\bar{y}$-ponctués X_i, de sorte qu'on est sous les conditions d'application de 8.5. Comme $H^q(X,F_X) = 0$ pour $q > 0$ en vertu de 4.7, on en conclut des isomorphismes

$$H^n(Y,F) \xleftarrow{\simeq} H^n(\pi,F(X)) ,$$

où π est le "groupe de Galois" de X sur Y, isomorphe à celui de $\overline{k(y)}$ sur $k = k(y)$. On trouve de même (ou par 2.3)

$$H^n(Y_o,F_o) \xleftarrow{\simeq} H^n(\pi,F_o(X_o)) ,$$

où $X_o = X \times_Y Y_o \simeq \mathrm{Spec}\,(\overline{k(y)})$. Or l'homomorphisme de restriction $F(X) \to F_o(X_o)$ est un isomorphisme en vertu de 4.8, d'où résulte aussitôt la conclusion 8.6.

9. <u>Descente de faisceaux étales</u>

Le présent numéro ne servira plus dans la suite de ce Séminaire, et peut être omis en première lecture.

Proposition 9.1. Soit $f : X' \to X$ un morphisme surjectif (resp. universellement submersif (SGA 1 IX 2.1)) de schémas . Alors le foncteur $f^* : X_{ét} \longrightarrow X'_{ét}$ est fidèle et "conservatif" (cf. 3.6) (resp. induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des faisceaux sur $X_{ét}$ dans la catégorie des faisceaux sur $X'_{ét}$ munis d'une donnée de descente relativement à $f : X' \longrightarrow X$).

Le premier point résulte aussitôt de la transitivité des foncteurs fibres (3.4) et de (3.7), le deuxième (qui s'énonce aussi en disant que f est un morphisme de descente relativement à la catégorie fibrée des faisceaux étales sur des schémas variables), signifie aussi que pour deux faisceaux F , G sur Y , le diagramme naturel

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}\,(F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(F', G') \rightrightarrows \mathrm{Hom}\,(F'', G'')$$

est exact, où F' et G' (resp. F'' et G'') sont les images inverses de F et G sur X' (resp. sur $X'' = X' \times_X X'$) . Prenant pour F le faisceau final, l'énoncé donne le

Corollaire 9.2. Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme universellement submersif. Alors pour tout faisceau F sur X , le diagramme

$$\Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(X', F') \rightrightarrows \Gamma(X'', F'')$$

est exact, où $X'' = X' \times_X X'$, et où F', F'' sont les images inverses de F sur X' , X'' .

Nous prouverons 9.1 en utilisant le

Lemme 9.3. Supposons f universellement submersif. Soit F un faisceau sur X , désignons par $S(F)$ l'ensemble des sous-faisceaux de

X , <u>et définissons de façon analogue</u> S(F') , S(F") . <u>Alors le diagramme d'applications naturelles</u>

$$S(F) \longrightarrow S(F') \rightrightarrows S(F'')$$

<u>est</u> exact.

Démonstration. Le fait que $S(F) \to S(F')$ est injectif résulte aussitôt du fait que le foncteur f^* est conservatif; car si F_i ($i = 1, 2$) sont deux sous-faisceaux de F tels que $f^*(F_1) = f^*(F_2)$, alors les inclusions $F_3 = F_1 \cap F_2 \to F_i$ $(i = 1, 2)$ sont des isomorphismes, car elles deviennent telles après application du foncteur f^*, donc $F_1 = F_2$. Il reste à prouver que si G' est un sous-faisceau de F' tel que $pr_1^*(G') = pr_2^*(G')$, alors G' est l'image inverse d'un sous-faisceau de F . Notons que l'on peut trouver un épimorphisme $F_1 \to F$ dans $X_{ét}$, ou F_1 est <u>représentable</u> par un schéma étale sur X . Introduisons $F_2 = F_1 \times_F F_1$, et de même F'_1 , F''_1 , F'_2 , F''_2 , faisceaux donnant lieu à un diagramme d'ensembles

$$\begin{array}{ccccc} S(F) & \longrightarrow & S(F') & \rightrightarrows & S(F'') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S(F_1) & \longrightarrow & S(F'_1) & \rightrightarrows & S(F'') \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ S(F_2) & \longrightarrow & S(F'_2) & \rightrightarrows & S(F''_2) \end{array} ,$$

dans lequel les colonnes sont exactes, grâce aux propriétés d'exactitude dans la catégorie des faisceaux sur X, X', X'' respectivement. Un diagram-chasing standard montre alors que, pour prouver que la première ligne est exacte, il suffit de le prouver pour les lignes 2 et 3 . Or pour la ligne 2 cela résulte du fait que F_1 est représentable, $X' \to X$

universellement submersif, et de SGA IX 2.3. D'autre part, F_2 est également représentable, car c'est un sous-faisceau de $F_1 \times_X F_1$ qui est représentable, et on applique 6.1. Donc la ligne 3 est aussi exacte, cqfd.

Prouvons maintenant 9.1 , i.e. que tout morphisme $u' : F' \longrightarrow G'$, compatible avec les données de descente sur F', G', u' provient d'un morphisme $u : F \longrightarrow G$. Soit $H = F \times G$, donc $H' = F' \times G'$, $H'' = F'' \times G''$, alors le graphe de u' est un sous-faisceau Γ' de H' , dont les deux images inverses sont égales au graphe d'un même morphisme $u'' : F'' \longrightarrow G''$. Donc en vertu de 9.3. Γ' provient d'un sous-faisceau Γ de H . Je dis que Γ est le graphe d'un morphisme $u : F \rightarrow G$, i.e. que le morphisme $p : \Gamma \longrightarrow F$ induit par pr_1 est un isomorphisme : en effet, il devient un isomorphisme après le changement de base $X' \longrightarrow X$, et on applique la partie déjà prouvée de 9.1. Le morphisme $u : F \longrightarrow G$ répond alors à la question, cqfd.

Théorème 9.4. Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme surjectif de schémas. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

a) f est entier.

b) f est propre.

c) f est plat et localement de présentation finie (*).

d) X est discret (p.ex. le spectre d'un corps).

Alors f est un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée $\mathcal{F}$ sur (Sch) des faisceaux étales sur des schémas variables, i.e. le foncteur f^* induit une équivalence de la catégorie

(*) Il est probable que cette deuxième hypothèse est en fait superflue.

<u>des faisceaux sur</u> X <u>avec la catégorie des faisceaux sur</u> X' , munis <u>d'une donnée de descente relativement à</u> $f : X' \to X$.

9.4.1. Soit F' un faisceau sur X', muni d'une donnée de descente relativement à $f : X' \to X$. On définit alors un foncteur

$$G : X^{\circ}_{\text{ét}} \longrightarrow (\text{Ens})$$

par la formule

$$G(Y) = \text{Ker}\,(F'(Y') \rightrightarrows F''(Y'')) .$$

On constate aussitôt que G est un <u>faisceau</u> pour la topologie étale, d'autre part on a un homomorphisme canonique injectif $G \to f_*(F')$, d'où un homomorphisme $f^*(G) \longrightarrow F'$, et ce dernier est évidemment compatible avec les données de descente. Il reste à examiner si cet homomorphisme est un <u>isomorphisme</u>. Noter que G est aussi définissable par l'exactitude de

$$G \to f_*(F') \rightrightarrows g_*(F'') \quad ,$$

donc pour tout changement de base $Y \xrightarrow{h} X$ <u>qui commute à la formation de</u> $f_*(F')$ <u>et</u> $g_*(F'')$, $h^*(G) = G_Y$, s'identifie au faisceau "descendu" de $F'_{Y'}$ par $Y' \to Y$, et bien entendu l'homomorphisme $f_Y{}^*(G_Y) \longrightarrow (F_Y)'$ est celui déduit de $f^*(G) \longrightarrow F'$ par changement de base. Or <u>supposons que le changement de base</u> $f : Y = X' \longrightarrow X$ <u>commute à la formation de</u> $f_*(F')$ <u>et</u> $g_*(F'')$, et notons que comme $Y' = X' \times_X X'$ a une section sur $Y' = X'$, donc $Y' \to Y$ est un morphisme de descente <u>effective</u> pour toute catégorie fibrée, en particulier pour $\mathcal{F}$, il s'ensuit que $f_Y^*(G_Y) \longrightarrow (F_Y)'$ est un isomorphisme, donc $f^*(G) \to F'$ devient un isomorphisme après changement de base $Y' = X' \times_X X' \to X'$. Comme ce dernier a une section, $f^*(G) \longrightarrow F'$ est un isomorphisme, donc la donnée de descente envisagée sur F' est effective.

9.4.2. Ceci prouve le théorème 9.4 dans le cas a), grâce à 5.6. Le cas b) résulte également du fait que si f est propre, alors f_* commute à tout changement de base $Y' \longrightarrow Y$, (qui sera prouvé dans un exposé ultérieur (XII 5.1 (i))).

9.4.3. Dans le cas c), la question étant locale sur X on peut supposer X affine, et qu'il existe un schéma affine X'_1, de présentation finie, quasi fini et fidèlement plat sur X, et un X-morphisme $X'_1 \longrightarrow X'$, ce qui nous ramène au cas où f est quasi-fini. Quitte à localiser encore sur X, au sens de la topologie étale cette fois, on voit qu'il existera un ouvert X'_1 de X' tel que $X'_1 \longrightarrow X$ soit fini et surjectif, ce qui nous ramène au cas où f est fini et surjectif, déjà traité dans a).

9.4.4. Dans le cas d), on peut supposer (en se localisant sur X) que X est réduit à un seul point, et même compte tenu de 1.1, qu'il est spectre d'un corps k. De plus, f est universellement ouvert (EGA IV 2.4.9) donc on est sous les conditions de 9.1, et le raisonnement de 9.4.1 s'applique encore, en prenant un changement de base avec $Y = \mathrm{Spec}\ k$, où $k=k(x)$, pour un $x \in X$. Mais alors il est encore vrai que f_* commute au changement de base $Y \longrightarrow X$, comme nous verrons ultérieurement (XVI 1.4 et 1.5).

Ceci achève la démonstration de 9.4.