SGA 4

Exposé VII

SITE ET TOPOS ETALES D'UN SCHEMA

par A. Grothendieck

Dans le présent exposé et le suivant, nous développons les propriétés les plus élémentaires relatives à la topologie et la cohomologie étales. Les développements du présent exposé concernent certaines propriétés valables pour l'essentiel pour d'autres topologies très différentes, telle la "topologie fppf". Dans l'exposé suivant seront développées des propriétés assez spéciales à la topologie étale, tenant à la nature très particulière des morphismes étales.

Nous suivons partiellement ici trois exposés oraux de J.E. ROOS (qui n'avaient pu être rédigés par lui), notamment dans la démonstration, de VIII 6.3.

Sauf mention expresse du contraire, il sera sous-entendu que les schémas envisagés dans le présent exposé et les suivants sont éléments de l'univers fixé $\underline{U}$.

1. La topologie étale

1.1. Nous désignerons par (Sch) la catégorie des schémas (éléments de l'Univers fixé $\underline{U}$). Rappelons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ dans (Sch) est dit <u>étale</u> s'il est localement de présentation finie, plat, et si pour tout $y \in Y$, la fibre X_y est discrète, et ses anneaux locaux sont des extensions finies <u>séparables</u> de $k(y)$. Il revient au même de dire que f est localement de présentation finie, et que pour tout Y - schéma Y' qui est affine (au sens absolu) et pour tout sous-schéma Y'_0 défini par un Idéal nilpotent, l'application

$$\mathrm{Hom}_Y (Y' , X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y (Y'_o , X)$$

est <u>bijective</u>. Pour les propriétés les plus importantes de cette notion, je renvoie à EGA IV §§ 17 et 18, et en attendant à SGA 1 I et IV.

1.2. On appelle <u>topologie étale</u> sur (Sch) la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle, pour tout $X \in$ (Sch), l'ensemble Cov X est formé des familles $(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}$ (indexées par un $I \in U$), telles que les u_i soient étales et $X = \bigcup_i u_i (X_i)$ (au sens ensembliste).

Il est commode d'associer à tout X la sous-catégorie $Et_{/X}$ de $(Sch)_{/X}$ formée des flèches $X' \longrightarrow X$ qui sont étales. On la munira de la "topologie induite" (III) par la topologie étale de (Sch), (appelée encore "topologie étale sur X") et on désignera par $X_{ét}$ le site ainsi obtenu ("<u>site étale</u>" de X) (*). Notons que tout morphisme de $Et_{/X}$ est étale (SGA 1 I 4.8), d'où s'ensuit qu'une famille $(X'_i \xrightarrow{u_i} X')_{i \in I}$ dans $X_{ét}$ est couvrante si et seulement si elle est <u>surjective</u> i.e. $\bigcup_i u_i (X'_i) = X'$. On voit aussitôt (cf. 3.1) que $X_{ét}$ est un $\mathcal{U}$-site donc les résultats des Exp. I à VI sont applicables. Le topos $\widetilde{X_{ét}}$ des U-faisceaux sur $X_{ét}$ est le <u>topos étale</u> de X.

(*) Notons cependant qu'il serait préférable de désigner par $X_{ét}$ le topos $\widetilde{X_{ét}}$ défini par le site étale de X. Pour des raisons pratiques, nous nous en tiendrons dans ce Séminaire aux notations introduites ici (qui sont celles du séminaire primitif).

1.3. Pour la suite, sauf mention expresse du contraire, toutes les notions topologiques que nous envisagerons dans $Et_{/X}$ ou (Sch), s'entendent au sens de la topologie étale. D'ailleurs, dans le langage et les notations, on écrira couramment X au lieu de $X_{ét}$ ou $Et_{/X}$. Ainsi, on appellera "faisceau sur X" (sous-entendu : pour la topologie étale) un faisceau sur le site $X_{ét}$. On désignera par $\widetilde{X_{ét}}$ la catégorie de ces faisceaux, qui est un $\mathcal{U}$-topos. Si F est un faisceau abélien sur X, on désignera par $H^i(X,F)$ ses groupes de cohomologie, qui seraient notés $H^i(X_{ét},F)$ dans Exp. V.

1.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. Alors le foncteur image inverse

$$f^* : Y' \longmapsto Y' \times_Y X$$

induit un foncteur

$$(*) \qquad f^*_{ét} : Et_{/Y} \longrightarrow Et_{/X}$$

qui commute aux $\varprojlim$ finies et transforme familles couvrantes en familles couvrantes; c'est par suite un morphisme de sites

$$f^*_{ét} : X_{ét} \longrightarrow Y_{ét} \quad ,$$

induisant donc un foncteur sur la catégorie des faisceaux :

$$f_*^{ét} : \widetilde{X}_{ét} \longrightarrow \widetilde{Y}_{ét}$$

par

$$f_*^{ét}(F) = F \circ f^*_{ét} \quad .$$

De plus $f_*^{ét}$ admet un adjoint à gauche

$$f^{*}_{ét} : \widetilde{Y_{ét}} \longrightarrow \widetilde{X_{ét}}$$

prolongeant celui envisagé dans (*) , et commutant aux $\varinjlim$ quelconques et aux $\varprojlim$ finies i.e. $f^{*}_{ét}$ définit un <u>morphisme de topos</u>

$$f_{ét} : \widetilde{X_{ét}} \longrightarrow \widetilde{Y_{ét}}$$

. Evidemment, pour un composé de deux morphisme de schémas

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{cases} (gf)^{ét}_{*} \simeq g^{ét}_{*} f^{ét}_{*} , & \text{d'où} \\ (gf)^{*}_{ét} \simeq f^{*}_{ét}\, g^{*}_{ét} , & \text{i.e. on a un isomorphisme} \\ (gf)_{ét} \simeq g_{ét}\, f_{ét} , & \end{cases}$$

(de sorte qu'on obtient un "pseudo-foncteur" (SGA 1 VI 8)de la catégorie (Sch) dans la catégorie (Top) des topos $\in \underline{U}'$, où $\underline{U}'$ est le plus petit univers tel que $\underline{U} \in \underline{U}'$; comparer IV).

1.5. <u>Notations</u>. Dans la suite nous écrirons souvent f^* , f_* au lieu de $f^*_{ét}$, $f^{ét}_{*}$. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, les foncteurs $R^i f^{ét}_{*}$ seront donc simplement notés $R^i f_*$. Rappelons avec ces notations la suite spectrale de Leray pour f , et un faisceau abélien F sur X (V 5) :

$$H^*(X,F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(F)).$$

De même si l'on a deux morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a une suite spectrale de Leray (suite spectrale de foncteurs composés)

$$R^*(gf)_*(F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = R^p g_* (R^q f_*(F)) .$$

1.6. Lorsque $f : X \to Y$ est lui-même un morphisme étale, on peut considérer X comme objet de $Y_{\acute{e}t}$, et on a un <u>isomorphisme de sites</u> canonique

$$X_{\acute{e}t} \xrightarrow{\sim} (Y_{\acute{e}t})_{/X} .$$

Moyennant cet isomorphisme, le foncteur $f^*_{\acute{e}t} : Y' \mapsto Y' \times_Y X$ de $(*)$ s'identifie au foncteur changement de base interne dans la catégorie $Et_{/Y}$. Il s'ensuit que le foncteur

$$f^* : \widetilde{Y_{\acute{e}t}} \to \widetilde{X_{\acute{e}t}}$$

est alors isomorphe au foncteur " <u>restriction</u> à Y "

$$f^*(F) \simeq F \circ i_{X/Y} ,$$

où F est un faisceau sur $Y_{\acute{e}t}$, et $i_{X/Y} = X_{\acute{e}t} \to Y_{\acute{e}t}$ est le foncteur évident (consistant à regarder un schéma étale sur X, $u : X' \to X$, comme un schéma étale sur Y par $fu : X' \to Y$).

1.7. <u>Questions d' Univers</u>. On notera que si $X \neq \emptyset$, alors $X_{\acute{e}t}$ <u>n'est pas</u> élément de l'univers choisi $\underline{U}$. Cependant, comme nous avons signalé, on voit facilement (3.1) que l'on peut trouver une sous-catégorie pleine C de $X_{\acute{e}t}$, <u>élément de</u> $\underline{U}$, satisfaisant aux conditions du "lemme de comparaison" (III), de sorte que le foncteur restriction induise une équivalence $\widetilde{C} \to \widetilde{X_{\acute{e}t}}$. Ainsi, le <u>topos étale</u> est équivalent à un topos défini en termes d'un site $C \in \underline{U}$. En d'autres termes, $X_{\acute{e}t}$ est un U-site donc en vertu de loc. cit. les résultats des Exposés I à VI sont applicables à ce site.

2. Exemples de faisceaux

a) Soit $F \in \mathrm{Ob}\,(\mathrm{Sch})_{/X}$ un schéma sur X, et pour tout X' sur X, posons

$$F(X') = \mathrm{Hom}_X(X',F) \quad .$$

Le foncteur $(\mathrm{Sch})^{\circ}_{/X} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ ainsi défini est un faisceau pour la topologie étale (et même pour la topologie plus fine fpqc étudiée dans SGA 3 IV). En d'autres termes la topologie étale sur (Sch) est moins fine que la topologie canonique. C'est en effet, essentiellement, le contenu de SGA 1 VIII 5.1 (cf. aussi SGA 3 IV 6.3.1). A fortiori, la restriction de ce faisceau à $X_{\text{ét}}$ est un faisceau. On le désignera encore par F, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre (*). Noter aussi que le foncteur ainsi obtenu

$$(*) \qquad (\mathrm{Sch})_{/X} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

commute aux $\varprojlim$ finies (c'est trivial). Cela implique par exemple que lorsque F est un schéma en groupes (resp...) sur X, alors le faisceau qu'il définit est un faisceau en groupes (resp...). Notons que le foncteur $\mathrm{Et}_{/X} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$ induit par (*) n'est autre que le foncteur canonique, associant à tout $X' \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{X_{\text{ét}}}$ le foncteur sur $X_{\text{ét}}$ qu'il représente. C'est donc un isomorphisme de la catégorie $\mathrm{Et}_{/X}$ sur une sous-catégorie pleine du topos étale $\widetilde{X_{\text{ét}}}$, par laquelle nous identifions généralement un $X \in \mathrm{Ob}\,X_{\text{ét}}$ au faisceau correspondant, qui sera noté $\widetilde{X}$ ou simplement X.

Evidemment on aura $H^{\circ}(X,F) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Sch})_{/X}}(X,F)$.

Donnons également une interprétation de $H^1(X,F)$ lorsque F est un préschéma en groupes sur X (commutatif si l'on veut, de sorte que la

(*) Mais on fera attention que si $X \neq \emptyset$, le foncteur φ qui a $F \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sch})_{/X}$ associe le faisceau correspondant $\varphi(F)$ n'est pas pleinement fidèle, ni même fidèle, et qu'on ne peut réconstituer F (mod. isom.) connaissant $\varphi(F)$. Par exemple; si $S = \mathrm{Spec}\, k$, k corps alg. clos, la connaissance de $\varphi(F)$ équivaut à celle de l'ensemble sous-jacent à F seulement (en vertu de VIII 2.4). Comparer IV définition de $H^1(X,F)$ relève de Exp. V ; pour le cas général on pourra consulter la thèse de J. Giraud (*)). Alors des raisonnements bien connus, que je me dispense de répéter ici, montrent que $H^1(X,F)$ est canoniquement isomorphe au groupe des classes (mod. isomorphisme) de faisceaux d'ensembles sur $X_{ét}$ principaux homogènes sous F (**). Lorsque F est affine sur X, alors SGA 1 VIII 2.1 implique (toujours par des arguments standards, cf. thèse de J. Giraud) que $H^1(X,F)$ est aussi le groupe des classes de schémas P sur X, sur lesquels F opère à droite et qui sont "fibrés principaux homogènes sur X au sens de la topologie étale" i. e. localement triviaux dans le sens de la topologie étale (***).

Remarques 2.1. On fera attention que si l'on désigne, pour tout schéma Z sur X, par $\varphi_X(Z)$ le faisceau associé sur $X_{ét}$, et si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de schéma, on a un homomorphisme évident (fonctoriel en Z)

$$(*) \qquad f^*(\varphi_X(Z)) \longrightarrow \varphi_Y(Z_Y) \qquad , Z_Y = Z \times_X Y ,$$

i.e. un homomorphisme évident

$$\varphi_X(Z) \longrightarrow f_*(\varphi_Y(Z_Y)) \quad ,$$

savoir l'homomorphisme fonctoriel en $X' \in \mathrm{Ob}\, X_{ét}$

$$\mathrm{Hom}_X(X', Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_Y(X'_Y, Z_Y) \quad .$$

Mais on fera attention qu'en général (*) n'est pas un isomorphisme, i.e. la formation du faisceau étale associé à un schéma relatif ne commute pas aux foncteurs images inverses. Cependant (*) est un isomorphisme dans le cas particulier où Z est étale sur X

(*)

(**) ou F-torseurs dans la terminologie de loc.cit.

(***) ou F-torseurs représentables dans la terminologie maintenant reçue.

De même, le foncteur

$$\varphi_X : Sch_{/X} \longrightarrow \widetilde{X_{ét}}$$

n'est pas fidèle si $X \neq \emptyset$ (*); cependant sa restriction à $X_{ét}$, qui n'est autre que le foncteur canonique $X_{ét} \longrightarrow \widetilde{X_{ét}}$, est pleinement fidèle, car en vertu de a) la topologie de $X_{ét}$ est moins fine que sa topologie canonique.

b) Notons que (*) commute également aux sommes directes indexées par les $I \in \underline{U}$, comme on vérifie facilement. En particulier, si pour tout ensemble I, on désigne par I_X le X schéma constant défini par I (SGA 3 I 1.8), somme directe de I copies de X, alors le faisceau associé n'est autre que le faisceau constant $I_{X_{ét}}$ (somme directe de I copies du faisceau final sur $X_{ét}$). Comme le foncteur $I \longmapsto I_X$ commute également aux $\varprojlim$ finies, on voit qu'il transforme groupe en groupe, groupe commutatif en groupe commutatif etc... Si G est un groupe commutatif ordinaire, on écrira simplement $H^i(X,G)$ au lieu de $H^i(X,G_X)$. Supposons, par exemple, que G soit un groupe fini, alors G_X est fini donc affine sur X, donc en utilisant la remarque finale de a) on obtient une interprétation de $H^1(X,G)$ comme l'ensemble des classes de revêtements principaux galoisiens de groupe G (SGA 1 V 2.7). Lorsque X est connexe et muni d'un point géométrique a, alors en termes du "groupe fondamental" $\pi_1(X,a)$ (SGA 1 V 7) on obtient l'isomorphisme canonique

$$(**) \qquad H^1(X,G) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X,a), G),$$

(où on a supposé G commutatif).

On peut dire qu'en passant de la cohomologie de Zariski à la topologie étale, "on a fait ce qu'il fallait" pour obtenir "le bon" H^1 (qui figure

(*) Cf. pour ceci la note au bas de la page 6.

au 2ème membre de (*)) pour un groupe de coefficients constant fini G. C'est un fait remarquable, qui sera démontré par la suite de ce séminaire, que cela suffit également pour trouver les "bons" $H^i(X,G)$ pour tout groupe de coefficients de torsion (du moins si G est premier aux caractéristiques résiduelles de X).

c) Soit F un $\underline{O}_X$-Module sur X, au sens de la topologie de Zariski. Alors (avec les notations de SGA 3 I 4.6) on définit un foncteur

$$W(F) \; : \; (Sch)_{/X}{}^{\circ} \longrightarrow (Ens)$$

par

$$W(F)(X') = \Gamma(X', F \otimes_{\underline{O}_X} \underline{O}_{X'}) \quad .$$

Ce foncteur est encore un faisceau pour la topologie étale (et même pour la topologie fpqc) comme il résulte encore de SGA 1 VIII 1.6 et SGA 3 IV 6.3.1. A fortiori, la restriction de $W(F)$ à $X_{\acute{e}t}$ est encore un faisceau, qu'on notera encore $W(F)$. Par définition on aura donc $H^{\circ}(X,W(F)) = \Gamma(F) = H^{\circ}(X,F)$. Mais on a mieux si F est quasi-cohérent, cf. 4.3.

3. Générateurs du Topos étale. Cohomologie d'une $\varinjlim$ de faisceaux

Proposition 3.1. Soient X un schéma, C une sous-catégorie pleine de $X_{\acute{e}t}$, telle que pour tout X' étale sur X qui est affine, C contienne un objet isomorphe à X'. Alors C est une "famille de générateurs topologiques" du site $X_{\acute{e}t}$ donc une famille de générateurs du topos $\widetilde{X}_{\acute{e}t}$, et le foncteur restriction $\widetilde{X}_{\acute{e}t} \longrightarrow \widetilde{C}$ est une équivalence de catégories (où C est muni de la topologie induite par celle de $X_{\acute{e}t}$).

Trivial à l'aide du "lemme de comparaison"

Corollaire 3.2. Supposons que X soit quasi séparé. Appelons site étale restreint de X la sous-catégorie pleine C de $X_{ét}$ formée des schémas étales sur X qui sont de présentation finie sur X, munie de la topologie induite par $X_{ét}$. Alors :

(i) C est stable par produits fibrés, et est un site de type fini si X est quasi-compact.

(ii) Le foncteur restriction $\widetilde{X_{ét}} \to \widetilde{C}$ est une équivalence de catégories.

L'assertion (i) est triviale, et (ii) résulte de 3.1 car C satisfait à la condition de 3.1 grâce au fait que X est quasi-séparé, qui implique que si X' est quasi-compact, par exemple affine, il est quasi-compact sur X (EGA IV 1.2.4 , où on fait $Z = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$), donc de présentation finie sur X si X' est localement de type fini sur X.

Proposition 3.3. Supposons X quasi-compact et quasi-séparé. Alors les foncteurs $H^q(X_{ét}, F)$ sur la catégorie des faisceaux abéliens sur $X_{ét}$ commutent aux $\varinjlim$.

En effet, on peut remplacer $X_{ét}$ par C en vertu de 3.2 (ii), or comme X est quasi-compact on a $X \in \operatorname{Ob} C$, et la conclusion résulte de 3.2 (i) et VI § 6 1.2 (3).

4. Comparaison avec d'autres topologies

4.0. Tout d'abord notons que les exemples de faisceaux sur $X_{ét}$ considérés au N° 2 sont en fait de façon naturelle des restrictions de faisceaux définis sur $(\mathrm{Sch})_{/X}$ muni de sa topologie étale (ou même de la topologie fpqc). Soit de façon générale

$$u^* : X_{\text{ét}} \longrightarrow (\mathrm{Sch})_{/X}$$

le foncteur d'inclusion, qui est continu (III) et commute aux $\varprojlim$ finies, donc définit un morphisme de sites :

$$u : (\mathrm{Sch})_{/X} \longrightarrow X_{\text{ét}} \quad ,$$

d'où un foncteur

$$u_* : \widetilde{\mathrm{Sch}_{/X}} \longrightarrow \widetilde{X_{\text{ét}}}$$

sur les catégories de faisceaux associées :

$$u_*(F) \longrightarrow F \circ u \ ,$$

et un foncteur adjoint à gauche ([1]) de ce dernier

$$u^* : \widetilde{X_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sch}_{/X}}$$

Ceci posé :

Proposition 4.1. (i) Le foncteur u^* est pleinement fidèle, donc pour tout faisceau G sur $X_{\text{ét}}$, l'homomorphisme canonique $G \longmapsto u_*u^*(G)$ est un isomorphisme.

(ii) Soient G (resp. F) un faisceau abélien sur $X_{\text{ét}}$ (resp. $(\mathrm{Sch})_{/X}$). Alors les homomorphismes canoniques (définis par exemple comme edge-homomorphismes de la suite spectrale de Leray suivants

---

([1]) En toute rigueur, comme $(\mathrm{Sch})_{/X}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie mais pas un $\mathcal{U}$-site on ne peut invoquer III pour l'existence de u^*; Cependant, on construit facilement u^* par

$$u^*(F)(X') = (p_{X'})^*_{\text{ét}}(F)(X') \qquad (X' \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{Sch}_{/X}),$$

où $p_{X'}$ désigne le morphisme structural $X' \longrightarrow X$. D'autre part, pour donner un sens à 4.1 (ii) et justifier la démonstration indiquée de 4.1 , il y a lieu d'introduire un univers $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$, et de considérer les faisceaux intervenant dans les formules 4.1 (i) comme des faisceaux à valeurs dans $\mathcal{V}$-(Ens). On peut aussi, si on ne veut travailler qu'avec des U-sites, remplacer $(\mathrm{Sch})_{/X}$ par une sous-catégorie pleine $(\mathrm{Sch})_{/X}$ stable par $\varprojlim$ finies, contenant C de 3.1, et qui soit U-petite.

sont des isomorphismes :

$$H^*(X_{ét}, F\circ u) \xrightarrow{\simeq} H^*((Sch)_{/X}, F)$$

$$H^*(X_{ét}, G) \xrightarrow{\simeq} H^*((Sch)_{/X}, u^*(G)) .$$

En effet, le foncteur u est un comorphisme et on peut alors appliquer (III)

Ainsi, (i) montre que pour l'étude de la cohomologie des faisceaux, il est essentiellement équivalent de travailler avec le "petit" site étale $X_{ét}$, ou le "gros" site étale $(Sch)_{/X}$.

4.2. D'autre part, il y a lieu d'introduire dans (Sch) (donc dans les $(Sch)_{/X}$) diverses autres topologies que la topologie étale, dont les plus utiles sont définies dans SGA 3 IV 6.3. La plus grossière parmi ces dernières est la topologie de Zariski (Zar), définie par la prétopologie où les familles couvrantes sont les familles surjectives d'immersions ouvertes; elle est moins fine que la topologie étale. La plus fine de ces topologies est la topologie "fidèlement plate quasi-compacte", en abrégé (fpqc), qui est la moins fine des topologies pour lesquelles les familles couvrantes au sens de Zariski, ainsi que les morphismes fidèlement plats quasi-compacts, sont couvrants; la topologie fpqc est plus fine que la topologie étale. Comme nous l'avons déjà remarqué, les divers exemples de faisceaux sur $(Sch)_{/X}$ envisagés au N° 2 sont en fait déjà des faisceaux pour la topologie fpqc.

4.2.1. On fera attention cependant que pour un faisceau abélien F sur $(Sch)_{/X}$ pour la topologie (fpqc), (ou une topologie, telle fppf, envisagée dans SGA 3 , les groupes de cohomologie de F pour la topologie fpqc (resp....) ne sont pas toujours isomorphes aux groupes de cohomologie pour la topologie étale, et ceci même si X est le spectre d'un corps k , et F est représentable par un groupe algébrique sur k , même en ce qui concerne le H^1. De façon générale, on peut montrer que la topologie étale donne les "bons" groupes de cohomologie pour les groupes de coefficients qui sont des schémas en groupes étales, ou plus généralement lisses, sur X (*), mais il n'en est plus de même pour des schémas en groupes tels que les groupes radiciels sur S , pour lesquels il y a lieu de remplacer la topologie étale, encore trop grossière, par la topologie fpqc, ou fppf.

4.2.2. Comme exemple des relations entre les cohomologies relatives à des topologies différentes, signalons ici le cas des topologies de Zariski et de la topologie étale. Nous désignerons par X_{Zar} le site des ouverts de Zariski de X, de sorte qu'on a un foncteur d'inclusion canonique

$$u^*: X_{Zar} \longrightarrow X_{\acute{e}t}$$

qui définit un morphisme de sites

$$u : X_{\acute{e}t} \longrightarrow X_{Zar} \quad ,$$

d'où des foncteurs correspondants image directe

$$f_*: \widetilde{X_{\acute{e}t}} \longrightarrow \widetilde{X_{Zar}} \qquad (f_*(F) = F\circ u) \quad ,$$

et image inverse

$$f^*: \quad \widetilde{X_{Zar}} \longrightarrow \widetilde{X_{\acute{e}t}} \quad ,$$

adjoints l'un de l'autre; géométriquement, il y a lieu d'interpréter le couple (f_* , f^*) comme un morphisme de topos

$$f : \widetilde{X_{\acute{e}t}} \longrightarrow \widetilde{X_{Zar}} \quad .$$

On en déduit un homomorphisme de foncteurs cohomologiques

$$H^* (X_{Zar} , f_*(F)) \longrightarrow H^*(X_{\acute{e}t},F)$$

(*) Cf. A. Grothendieck, Le groupe de Brauer III, th. 11.7, in "Dix exposés sur la topologie des schémas, North Holland Pub. Cie.

et une suite spectrale de Leray

$$H^*(X_{ét},F) \Longleftarrow H^p(X_{Zar},R^q f_*(F)) ,$$

où F est un faisceau abélien sur $X_{ét}$. Cette suite spectrale résume les relations générales entre cohomologie étale et cohomologie de Zariski. Bien entendu, pour des faisceaux de coefficients F tel que des faisceaux de coefficients constants, cette suite spectrale en général est loin d'être triviale, i.e. en général on aura $R^q f_*(F) \neq 0$ (prendre notamment le cas où X est le spectre d'un corps). Cependant :

Proposition 4.3. *Soit* F *un faisceau de modules variable sur le préschéma* X *(faisceau au sens de la topologie de Zariski), d'où un faisceau* $F_{ét}$ *sur* $X_{ét}$ (cf. 2, c) *et un homomorphisme de foncteurs cohomologiques*

$$H^*(X,F) \longrightarrow H^*(X_{ét}, F_{ét}) .$$

Lorsque F *est quasi-cohérent, l'homomorphisme précédent est un* isomorphisme.

En effet, le premier membre n'est autre que $H^*(X_{Zar}, f_*(F_{ét}))$, et avec les notations précédentes, il suffit de prouver qu'on a

$$R^q f_*(F) = 0 \qquad \text{pour } q > 0 .$$

Cela résulte aussitôt, grâce au procédé de calcul des $R^q f_*$ et grâce au fait que les ouverts affines forment une base de la topologie de X , du

Corollaire 4.4. *Si* X *est affine, on a*

$$H^q (X_{ét} , F_{ét}) = 0 \ \underline{\text{pour}} \ q > 0 .$$

Pour le voir, soient $C = X_{ét}$, C' la sous-catégorie pleine formée des X' *affines*, alors en vertu de 3.1 on aura

$$H^q (C,F_{ét}) \simeq H^q (C',F \mid C') .$$

Il suffit donc de prouver que $F \mid C'$ est C'-acyclique V 4.1 ou encore satisfait la condition de V 4.3 i.e. que pour tout $X' \in \mathrm{Ob}\, C'$ et toute famille couvrante $\underline{R} = (X'_i \to X')_i$ dans C', on a $H^q(\underline{R}, F) = 0$ pour $q > 0$. Or on peut supposer $(X'_i)_i$ fini, puis, quitte à remplacer les X'_i par leur somme, que la famille couvrante consiste en un morphime $X'_i \to X'$ qui est couvrant, i.e. (étale et) surjectif. Donc on est ramené à prouver que si $f : X \to Y$ est un morphisme étale surjectif de schéma affines et F un module quasi-cohérent sur X, alors

$$(*) \qquad H^q(X/Y, F) = 0 \qquad \text{pour } q > 0 .$$

Or ceci est démontré dans TDTE I, B, 1.1, (dans FGA, cf. réf [4] de IX).

Remarques 4.5. En fait, par loc. cit., pour avoir $(*)$ il suffit que $X \to Y$ soit surjectif, et plat (au lieu de étale). Cela permet de montrer par la démonstration précédente, qu'on a encore des isomorphismes analogues à celui de 3.3, en y remplaçant le site étale $X_{\text{ét}}$ par $(Sch)_{/X}$, muni d'une quelconque des topologies plus fines que celle de Zariski envisagées dans SGA 3 IV 6.3, par exemple la topologie fpqc.

5. Cohomologie d'une limite projective de schémas

5.1. Soit I un ensemble préordonné filtrant croissant,

$$\mathcal{X} = (X)_{i \in I}$$

un système projectif de schémas, les morphismes de transition $u_i : X_i \to X_j$ $(i \geq j)$ étant affines. Rappelons (EGA IV 8...) que sous ces conditions, la limite projective

$$X = \varprojlim X_i$$

existe dans la catégorie des schémas, (et même dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux) et peut se construire ainsi : on choisit $i_o \in I$, de sorte que pour $i \geq i_o$, on a un X_{i_o} - isomorphisme (EGA II 1.2 et 1.3)

$$X_i = \operatorname{Spec} \underline{A}_i \quad ,$$

où $\underline{A}_i$ est une Algèbre quasi-cohérente sur X_i, les $\underline{A}_i$ $(i \geq i_o)$ formant donc un système inductif de telles Algèbres. Posant

$$\underline{A} = \varinjlim_i \underline{A}_i \; ,$$

on peut prendre

$$X = \operatorname{Spec} \underline{A} \quad .$$

D'ailleurs, désignant par esp S l'espace topologique sous-jacent à un schéma S , on montre (EGA IV 8...) que l'application canonique

$$\operatorname{esp} X \longrightarrow \varprojlim \operatorname{esp} (X_i)$$

est un <u>homéomorphisme</u> et que l'homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux

$$\varinjlim_i \gamma_i^{-1}(\underline{O}_{X_i}) \longrightarrow \underline{O}_X$$

est bijectif, où $\gamma_i : X \longrightarrow X_i$ est l'application continue canonique.

5.2. De façon imagée, on peut résumer le contenu de EGA IV 8,9 en disant que, <u>lorsque</u> X_{i_o} <u>est quasi-compact et quasi-séparé</u>, alors "toute donnée de nature schématique sur X , de présentation finie sur X ", est équivalente à une donnée de même nature sur un des X_i , "pour i assez grand". Ainsi, on prouve (EGA IV 8...) :

a) si $i_1 \in I$ et si X'_{i_1}, X''_{i_1} sont deux schémas de présentation finie sur X_{i_1}, alors posant pour tout $i \geqslant i_1$

$$X'_i = X'_{i_1} \times_{X_{i_1}} X_i \quad , \quad X' = X'_{i_1} \times_{X_{i_1}} X \quad ,$$

et définissant de même X''_i , X'' , l'application canonique

$$\varinjlim_{i \geqslant i_1} \mathrm{Hom}_{X_i} \; (X'_i \; , \; X''_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X \; (X', \; X'')$$

est bijective.

b) Pour tout schéma X' de présentation finie sur X , il existe un indice $i_1 \in I$, un schéma X'_{i_1} de présentation finie sur X_{i_1} , et un X-isomorphisme

$$X' \simeq X'_{i_1} \times_{X_{i_1}} X \quad .$$

5.3. On peut exprimer le résultat précédent, et les résultats de nature analogue contenus dans EGA IV 8, dans le langage des $\varinjlim$ de catégories fibrées introduit dans VI. Pour ceci, considérons la catégorie $\mathcal{F}$ des morphismes $f : T \longrightarrow S$ de présentation finie de schémas, et le "foncteur but"

$$\pi \; : \; \mathcal{F} \longrightarrow (\mathrm{Sch}) \; ,$$

qui est évidemment un foncteur fibrant, les catégories fibres étant d'ailleurs équivalentes à des catégories $\mathcal{U}$-petites Considérons l'image inverse de la catégorie fibrée $\mathcal{F}/(\mathrm{Sch})$ par le foncteur

$$i \longmapsto X_i : \mathrm{cat}\ (I) \longrightarrow (\mathrm{Sch})$$

(où cat(I) est la catégorie associée à I , avec $\mathrm{Hom}(i,j) \neq \emptyset$ si et seulement si $i \geqslant j$), d'où une catégorie fibrée

$$\pi_{\mathfrak{X}} : \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathrm{cat}(I)\ ,$$

dont la fibre en chaque $i \in I$ est canoniquement isomorphe à la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_{X_i}$ de $(\mathrm{Sch})_{/X_i}$ formée des schémas de présentation finie sur X_i , le morphisme de changement de base $\mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_j$ relatif à $j \geqslant i$ n'étant autre que $X'_i \longmapsto X'_j = X'_i \times_{X_i} X_j$. Ceci posé, associant à tout X'_i de présentation finie sur X_i son image inverse sur X

$$\varphi(X'_i) = X'_i \times_{X_i} X\ ,$$

on trouve un foncteur naturel

$$\varphi : \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathcal{F}_{X'}\ ,$$

qui transforme évidemment morphisme cartésien de $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ en isomorphisme, donc par définition se factorise de façon unique par un foncteur canonique

$$(*) \qquad \psi : \varinjlim_{\mathcal{F}_X /\mathrm{Cat}\ I} \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathcal{F}_X\ .$$

Compte tenu de la description du premier membre, le résultat de EGA IV 8 rappelé plus haut peut s'énoncer alors en disant que (*) est une <u>équivalence de catégories</u>.

5.4. L'énoncé a) de 5.2. ci-dessus peut se préciser de diverses façons, en introduisant quelque ensemble $(\mathcal{M})$ de morphismes de schémas, stable par changement de base, et en énonçant que pour un X_{i_1} -morphisme donné $u_{i_1} : X'_{i_1} \longrightarrow X''_{i_1}$, le morphisme correspondant $u' : X' \longrightarrow X''$ est $\in (\mathcal{M})$ si et seulement si il existe $i \geqslant i_1$ tel que le X_i-morphisme $u_i : X'_i \longrightarrow X''_i$ soit $\in (\mathcal{M})$. L'énoncé obtenu ainsi est vrai par exemple lorsque $(\mathcal{M})$ est l'un des ensembles de flèches suivants : morphismes propres (respectivement projectifs, resp. quasi projectifs, resp. affines, resp. quasi affines, resp. finis, resp. quasi finis, resp. radiciels, resp. surjectifs, resp. plats, resp. lisses, resp. étales, resp. non ramifiés). Le lecteur trouvera les énoncés correspondants dans EGA IV par. 8 (pour les 9 premiers) par. 11 (pour le cas plat) par. 17 (pour les trois derniers cas).

5.5. Remplaçons alors $\mathcal{F} \longrightarrow (Sch)$ par la sous catégorie fibrée $\mathcal{G}$ formée des <u>morphismes étales</u> de présentation finie, dont la catégorie fibre $\mathcal{G}_S$, pour tout schéma S, n'est autre que la catégorie des schémas étales de présentation finie sur S, et formons de même la catégorie fibrée $\mathcal{G}_{\mathfrak{X}}$ sur $\mathrm{cat}(I)$, dont la catégorie fibre en tout $i \in I$ est la catégorie $\mathcal{G}_{X_i}$. En vertu de 3.2 (ii), les topos étales $\widetilde{X_{i_{\text{ét}}}}$, $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ sont aussi canoniquement équivalents à $\widetilde{\mathcal{G}_{X_i}}$, $\widetilde{\mathcal{G}_X}$, (où tout $\mathcal{G}_S$ est muni de la topologie induite par $S_{\text{ét}}$). De plus, par 3.2 (i), chaque $\mathcal{G}_{X_i}$ est un site de type fini, d'ailleurs équivalent à un site $\mathcal{U}$-petit. Compte tenu des topologies sur les $\mathcal{G}_{X_i}$, $\mathcal{G}$ devient un <u>site fibré</u> sur $\mathrm{cat}(I)$ Ceci posé, on peut énoncer le

<u>Lemme</u> 5.6. <u>Le foncteur canonique</u>

$$\varinjlim_{\mathcal{G}_{\mathfrak{X}}/\mathrm{cat}(I)} \mathcal{G}_{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathcal{G}_X$$

définit une équivalence, respectant les topologies, du site $\varinjlim$ des sites étales restreints (3.2) des X_i , avec le site étale restreint de $X = \varprojlim_i X_i$.

Le fait qu'on obtient une équivalence de catégories est l'un des énoncés rappelés dans 5.4 (celui où $(\mathcal{M})$ est l'ensemble des morphismes étales dans (Sch)). L'assertion relative aux topologies s'obtient de même en prenant $(\mathcal{M})$ = ensemble des morphismes surjectifs dans (Sch).

Le résultat précédent nous permet d'appliquer les résultats de à la situation présente. On trouve en particulier

Théorème 5.7. Soit $\mathcal{X} = (X_i)_{i\in I}$ un système projectif de schémas, avec I ensemble préordonné filtrant croissant. Supposons que les morphismes de transition $u_{ij}: X_j \longrightarrow X_i$ sont affines (de sorte que le schéma $X = \varprojlim X_i$ est défini (5.1)), et que les X_i sont quasi-compacts et quasi-séparés. Considérons le site fibré $\mathcal{G}$ sur cat(I) explicité dans 5.5 , dont la fibre $\mathcal{G}_i$ en $i \in I$ est canoniquement isomorphe au "site étale restreint" de X_i (formé des schémas étales de présentation finie sur X_i). Soit F un faisceau abélien sur $\mathcal{G}$ (i.e. (3)) un foncteur $\mathcal{G}^{\circ} \longrightarrow (Ab)$ dont la restriction F_i à chaque $\mathcal{G}_i$ est un faisceau, i.e. un faisceau sur X_i). Soit $F_\infty = \varinjlim_i u_i^*(F_i)$ le faisceau induit sur X , où $u_i : X \longrightarrow X_i$ est le morphisme canonique. Alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i,F_i) \longrightarrow H^n(X,F_\infty)$$

sont des isomorphismes.

Compte tenu de 5.6 , cela résulte de la conjonction de VI 8.7.3 et VI 8.5.2 On appliquera surtout 5.7 dans le cas particulier suivant, explicité également dans

Corollaire 5.8. Avec les hypothèses et notations précédentes pour $(X_i)_{i\in I}$, X, u_{ij}, u_i , soit $i_o \in I$, et soit F_{i_o} un faisceau abélien sur X_{i_o} . Pour tout $i \geq i_o$, soit $F_i = u_{i_o i}^*(F_{i_o})$, soit de plus $F_\infty = u_i^*(F_{i_o})$. Sous ces conditions, les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i,F_i) \longrightarrow H^n(X,F_\infty)$$

sont des isomorphismes.

Voici cependant un cas parfois utile qui relève de 5.7 et non de 5.8 :

Corollaire 5.9. Avec les hypothèses et notations de 5.7 pour $(X_i)_{i\in I}, X, u_{ij}, u_i$, soit G_{i_o} un schéma en groupes commutatifs localement de présentation finie sur X_{i_o} (où $i_o \in I$ est donné). Pour tout $i \geq i_o$, soit $G_i = G_{i_o} \times_{X_{i_o}} X_i$, et soit de même $G_\infty = G \times_{X_{i_o}} X$. Alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i H^n(X_i,G_i) \longrightarrow H^n(X,G_\infty)$$

sont des isomorphismes.

En effet, nous savons que G_{i_o} définit un faisceau sur $(Sch)_{/X_{i_o}}$ (cf. 2 (a)), et supposant que i_o est un plus petit objet pour I (ce qui est loisible), d'où un foncteur canonique $\mathcal{G} \to (Sch)_{/X_{i_o}}$, on trouve par composition un foncteur contravariant F sur $\mathcal{G}$, dont la restriction à

$\mathcal{G}_i$ est canoniquement isomorphe au faisceau sur X_i défini par G_i. En particulier F est un faisceau sur $\mathcal{G}$, et nous pouvons lui appliquer 5.7. L'hypothèse que G_{i_o} est localement de présentation finie sur X_{i_o} sert à assurer que le faisceau F_∞ de 5.7 est isomorphe, par l'homomorphisme naturel $F_\infty \longrightarrow \mathrm{faisc}(G_\infty)$, au faisceau $\mathrm{faisc}(G_\infty)$ défini par G_∞ (comme il résulte en effet aussitôt de EGA IV 8.8.2 (i), en regardant les valeurs des faisceaux envisagés sur les objets du site étale restreint de G_∞ et appliquant 5.6). Cela achève de prouver 5.9.

__Corollaire__ 5.10. __Avec les hypothèses et notations de__ 5.7 __pour__ $(X_i)_{i\in I}$, X, u_{ij}, u_i, __soit__ F __un faisceau en groupes commutatifs sur__ X, __alors les homomorphismes canoniques__

$$\varinjlim_i H^n(X_i, u_{i*}(F)) \longrightarrow H^n(X,F)$$

__sont des isomorphismes.__

Les énoncés 5.7 à 5.10 se généralisent en des énoncés correspondants pour les Ext^i de faisceaux de Modules, grâce à VI 8.7.9 , que nous nous dispensons de répéter dans le cas particulier présent. Nous allons par contre expliciter, pour références ultérieures, les variantes de 5.8 et 5.9 en termes de foncteurs R^nf_*

__Corollaire__ 5.11. __Soient__ I __un ensemble préordonné filtrant croissant,__ $(X_i)_{i\in I}$ __et__ $(Y_i)_{i\in I}$ __deux systèmes projectifs de schémas, à morphismes de transition affines,__ $X = \varprojlim_i X_i$, $Y = \varprojlim_i Y_i$, $(f_i)_{i\in I}$ __un système projectif de morphismes__ $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ __quasi-compacts et quasi-séparés,__ $i_o \in I$, F_{i_o} __un faisceau sur__ X_{i_o}. __Pour tout__ $i \geq i_o$, __soit__ F_i __le__ faisceau sur X_i image inverse de F_{i_o}. Soit de même $f:X \longrightarrow Y$ déduit de (f_i) et F le faisceau sur X image inverse de F_{i_o}. Sous ces conditions, l'homomorphisme canonique

$$\varinjlim_i u_i^* (R^n f_{i*}(F_i)) \longrightarrow R^n f_*(F)$$

est un isomorphisme (où $u_i : X \longrightarrow X_i$ est le morphisme canonique).

On peut supposer que i_o est un plus petit objet de I, et la question étant locale sur Y_{i_o}, que Y_{i_o} est affine, de sorte que les Y_i et les X_i sont quasi-compacts et quasi-séparés. On est alors sous les conditions d'application de VI 8.7.3 (où on se ramène à 5.8, compte tenu du calcul des $R^n f_*$ comme faisceaux associés à des préfaisceaux, On prouve de même :

Corollaire 5.12. Même énoncé que 5.11, à cela près que maintenant F_{i_o} désigne un schéma en groupes commutatifs localement de présentation finie sur X_{i_o}, et F_i, F ses images réciproques (au sens du changement de base pour les schémas).

On fera attention que 5.9 (resp. 5.12) n'est pas un cas particulier de 5.8 (resp. 5.11), cf. 2 a) remarque 2.1.

Corollaire 5.13. Avec les notations de 5.11, soit F un faisceau en groupes abéliens sur X. Alors les homomorphismes canoniques

$$\varinjlim_i v_i^*(R^n f_{i*}(u_{i*}(F))) \longrightarrow R^n f_*(F)$$

sont des isomorphismes, (où $u_i : X \longrightarrow X_i$ et $v_i : Y \longrightarrow Y_i$ sont les homomorphismes canoniques).

La démonstration est essentiellement la même que précédemment.

<u>Remarques</u> 5.14. a) Les résultats de passage à la limite précédents sont valables pour le H^0 resp. les f_* , pour des faisceaux <u>d'ensembles</u> (au lieu de faisceaux abéliens), et pour le H^1 resp. les R^1f_* pour des faisceaux de groupes (non nécessairement commutatifs), - où les H^1 et R^1f_* non commutatifs sont définis comme d'habitude en termes de torseurs (ou fibrés principaux homogènes) (cf. thèse de Giraud (*)). Cela peut se vérifier directement dans le contexte général de Il est certainement possible (et sans doute utile) de donner également une variante pour les H^2 non commutatifs de "liens", étudiés par Giraud.

b) Les résultats de passage à la limite pour les sites fibrés développés dans VI supposaient seulement que la catégorie base était une catégorie filtrante sans qu'il ait été nécessaire de supposer qu'elle soit associée à un ensemble préordonné filtrant. Le cas d'une catégorie d'indices filtrante arbitraire est également le cadre naturel pour les énoncés développés dans le présent n°. Si nous nous sommes placés dans un cadre trop restrictif, cela était pour pouvoir donner des références correctes à EGA IV , où l'on suppose malencontreusement dans les questions de passage à la limite (à partir du par. 8) que la catégorie d'indices est définie en termes d'un ensemble préordonné filtrant. Nous admettrons cependant par la suite que tous les résultats utilisés de EGA IV sont valables pour des catégories d'indices filtrantes quelconques, (les démonstrations données dans loc. cit. étant valables, essentiellement sans changement, dans ce cas plus général). Aussi, nous utiliserons également sans autre commentaire les résultats du présent n° dans le cas où I est remplacé par une catégorie d'indices filtrante arbitraire.

(*) citée p.7, note de bas de page (*).