TECHNIQUES DE DESCENTE COHOMOLOGIQUE

par B. Saint-Donat (*)

(*) D'après des notes succintes de P. Deligne

INTRODUCTION

1. Soit X un espace topologique et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X, que l'on suppose soit ouvert, soit fermé et localement fini. Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau abélien sur X, la suite spectrale de Leray :

$$(1.1) \qquad \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(\mathfrak{F})) \Longrightarrow H^*(X,\mathfrak{F})$$

définie par $\mathcal{U}$ [[5] II (5.2.4) et (5.4.1)] peut se décrire de la façon suivante :

Le recouvrement $\mathcal{U}$ définit une résolution "Čechiste" $C^*(\mathcal{U},\mathfrak{F})$, fonctorielle en $\mathfrak{F}$ (ibid (5.2.1)). D'autre part, on dispose, pour tout $\mathfrak{F}$ d'une résolution "flasque canonique", $C^*(\mathfrak{F})$, fonctorielle en $\mathfrak{F}$ (ibid (4.3)). Avec ces notations, la suite spectrale (1.1) s'obtient, dans le cas où $\mathcal{U}$ est ouvert, à partir du complexe double

$$(1.2) \qquad \Gamma(X,C^*(\mathcal{U},C^*(\mathfrak{F}))) \quad .$$

Dans le cas où $\mathcal{U}$ est fermé et localement fini, on considère le complexe double

$$(1.3) \qquad \Gamma(X,C^*(\mathcal{C}^*(\mathcal{U},\mathfrak{F}))) \quad .$$

2. Cherchons une description unifiée de ces doubles complexes. Désignons par X_o l'espace topologique somme disjointe des U_i et par X_n $(n\geq 0)$ le produit fibré itéré $(n+1)^{\underline{\text{ième}}}$ de X_o avec lui-même au-dessus de X :

$$(2.1) \qquad X_n = \coprod_{i_o\ldots i_n\in I} U_{i_o}\cap\ldots\cap U_{i_n} = \coprod_{\sigma\in \mathrm{Hom}([n],I)} \bigcap_o^n U_{\sigma(i)} \quad .$$

Les X_n forment un système simplicial d'espaces topologiques, et si j_n désigne la projection de X_n sur X, on a

$$(2.2) \qquad \mathcal{C}^n(\mathcal{U},\mathfrak{F}) = j_{n_*}\, j_n^*\,(\mathfrak{F}) \quad .$$

Notons que la formation des résolutions flasques canoniques commute à la restriction à un ouvert et à l'image directe par une immersion fermée. Dès lors :

a) si $\mathfrak{U}$ est ouvert

(2.3) $$C^q(\mathfrak{U},C^n(\mathfrak{F})) = j_{q*}\, j_q^*\, C^p(\mathfrak{F}) = j_{q*}\, C^p(j_q^*\mathfrak{F})$$

b) si $\mathfrak{U}$ est fermé et localement fini

(2.4) $$C^p(C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})) = C^p(j_{q*}j_q^*\mathfrak{F}) = j_{q*}\, C^p(j_q^*\, \mathfrak{F}) \quad .$$

Ainsi, pour obtenir une description unifiée de (1.2) et (1.3), on voit qu'il suffit de prendre la résolution "flasque canonique" de $j_q^*(\mathfrak{F})$ sur X_q pour tout q, puis d'appliquer le foncteur j_{q*} à cette résolution.

3. La description précédente garde un sens pour tout système simplicial d'espaces topologiques au-dessus de X :

(3.1) $$\begin{aligned} \Delta^o &\longrightarrow \mathrm{Top}/X \\ [n] &\longrightarrow X_n \end{aligned}$$

non nécessairement de la forme (2.1). Toutefois le double complexe, coaugmenté par $\mathfrak{F}$

(3.2) $$\mathfrak{F} \longrightarrow (j_{q*}\quad C^p(j_q^*(\mathfrak{F})))_{p,q}$$

ne définira pas en général une résolution de $\mathfrak{F}$.

Ce travail est consacré à la recherche de conditions suffisantes pour que (3.2) définisse une résolution de $\mathfrak{F}$. Dans ce cas, la suite spectrale (1.1) se généralise en une suite spectrale

(3.3) $$\check{H}^p(H^q(X_p,j_p^*(\mathfrak{F}))) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathfrak{F})$$

dite "suite spectrale de descente".

Dans le cas de "coefficients constant", des suites spectrales analogues ont été obtenues par Segal (cf [8]), par d'autres méthodes et pour d'autres "théories cohomologiques", telles que la K-théorie. Segal se place dans la catégorie des C.W. complexes : il utilise un foncteur "réalisation géométrique" qui, à un complexe semi-simplicial d'espaces topologiques, associe un nouvel espace topologique ; ce nouvel espace doit se comparer au topos associé à un topos simplicial [cf. (1.2.12)].

4. Au paragraphe 5, nous illustrons les critères obtenus en construisant pour tout espace analytique X sur $\mathbb{C}$, via la résolution des singularités, un système simplicial d'espaces analytiques non singuliers au-dessus de X ,

$$[n] \longrightarrow X_n$$

tel que (3.2) définisse une résolution de $\mathfrak{F}$. Si l'on prend pour $\mathfrak{F}$ le faisceau contient $\mathbb{C}$, on obtient en particulier une suite spectrale

$$(4.1) \qquad H^q(X_p, \mathbb{C}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

qui exprime la cohomologie complexe de X en terme de la cohomologie complexe d'espaces analytiques non singuliers. De plus, si X est projectif, on peut supposer que tous les X_p sont projectifs : c'est là l'ingrédient essentiel qui permet d'obtenir une espèce de "théorie de Hodge" pour X (cf. [2]).

5. Les constructions qui précédent s'étendent telles quelles lorsqu'on remplace le faisceau $\mathfrak{F}$ par un complexe borné inférieurement de faisceaux. Elles conduisent à des techniques de "localisation" dans les catégories dérivées :

On sait que pour X_o donné par (2.1), la flèche

$$j_o^* \ : \ D^b(X) \longrightarrow D^b(X_o)$$

n'est pas fidèle en général ; on montrera qu'une donnée plus précise que celle de

$j_o^*(K^\cdot)$ (pour $K^\cdot \in D^+(X)$), faisant intervenir les X_n, permet parfois de reconstituer le complexe $K^\cdot$.

Les énoncés obtenus seront utilisés dans l'appendice de l'exposé XVII pour étendre la définition du foncteur $\underline{\underline{R}}\, f_!$ (f morphisme séparé de type fini entre schémas) au cas où f n'est pas supposé compactifiable.

Dans cette application, il n'est pas possible de ne considérer que des espaces topologiques remplacés ici par des sites étales de schémas. D'autre part, pour mener à bien les démonstrations, il sera nécessaire de considérer aussi bien des sytèmes simpliciaux d'espaces que des systèmes multi-simpliciaux. Ceci explique, justifie ou excuse le degré d'hypergénéralité dont on partira.

1. Préliminaires

(1.1) Notations

(1.1.1) Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{U}$ est univers tel que $\mathbb{Z} \in \mathfrak{U}$: <u>tous les topos considérés seront des $\mathfrak{U}$-topos</u>.

Soient T et T' deux topos : un morphisme $\varphi : T \longrightarrow T'$ consiste en la donnée d'un couple de foncteurs $\varphi_* : T \longrightarrow T'$ et $\varphi^* : T' \longrightarrow T$, muni d'une adjonction $\mathrm{Hom}_{T'}(.,\varphi_*.) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_T(\varphi^*.,.)$, tel que φ^* soit exact à gauche (i.e. préserve les limites projectives finies).

Soient $(T,\mathcal{O}_T)$ et $(T',\mathcal{O}_{T'})$ deux topos annelés : un morphisme de $(T,\mathcal{O}_T)$ dans $(T',\mathcal{O}_{T'})$ est un couple (φ,θ) où $\varphi : T \longrightarrow T'$ est un morphisme de topos et $\theta : \mathcal{O}_{T'} \longrightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_T)$ est un morphisme d'anneaux.

(1.1.2) Nous ferons un usage constant du langage des catégories fibrées tel qu'il est exposé dans [S.G.A. 1 VI]; le lecteur pourra aussi se reporter à [4]. Fixons simplement quelques notations : si $E \longrightarrow B$ est un foncteur fibrant (resp. cofibrant), pour un morphisme $m : i \longrightarrow j$ dans B, nous noterons $m^* : E_j \longrightarrow E_i$ (resp. $m_* : E_i \longrightarrow E_j$) le foncteur "image réciproque" (resp. "image directe") qui lui est associé ; chacun de ces foncteurs est définit à un unique isomorphisme fonctoriel près. Si $\varphi : E \longrightarrow E'$ est un B-foncteur, pour tout objet i de B, nous noterons $\varphi_i : E_i \longrightarrow E'_i$ le foncteur restriction de φ à E_i.

(1.1.3) Enfin, nous désignerons par Δ la catégorie suivante : les objets de Δ sont les ensembles ordonnés $[n] = \{0,1,\ldots,n\}$ et les morphismes de Δ sont toutes les applications croissantes (au sens large). Δ^+ (resp. Δ^-) désignera la catégorie dont les objets sont ceux de Δ et dont les flèches sont les monomorphismes (resp. les épimorphismes) de Δ. Nous utiliserons librement et au fur et à mesure des besoins les notations classiques introduites à propos de Δ [cf. [3] II 2].

(1.2) D-topos

Définition (1.2.1) Soient D une catégorie et $E \longrightarrow D$ un foncteur fibrant et cofibrant. Nous dirons que E est bifibrée en topos au-dessus de D où que E est un D-topos si les conditions suivantes sont réalisées :

(a) Pour tout objet i de D la catégorie fibre E_i est un topos.

(b) Pour tout morphisme $m : i \longrightarrow j$ dans D, il existe un morphisme de topos $f : E_j \longrightarrow E_i$ tel que $f_* = m^*$ et $f^* = m_*$.

Remarque. La condition (b) peut encore s'exprimer, compte tenu de (a), en disant que le foncteur m_* est exact à gauche.

Lorsque $D = \Delta$ (resp. $\Delta \times \Delta$) on parlera de topos simplicial (resp. simplicial double) pour désigner un Δ-topos (resp. un $\Delta \times \Delta$-topos).

Dans la pratique, nous rencontrerons des D-topos grâce aux considérations suivantes :

Définition (1.2.2) *Soit* $\mathcal{E}$ *une catégorie fibrée et cofibrée au-dessus de* D . *Nous dirons que* $\mathcal{E}$ *est* bifibrée en duaux de topos au-dessus de D *si* $\mathcal{E}^o$ *est un* D^o*-topos*.

Remarque (1.2.3) Explicitement, $\mathcal{E}$ est bifibrée en duaux de topos au-dessus de D si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

(a) Pour tout objet i de D , la catégorie duale de la catégorie fibre $\mathcal{E}_i$ est un topos.

(b) Pour tout morphisme $m : i \longrightarrow j$ de D , le foncteur m^* est exact à droite.

(1.2.4) Le lecteur trouvera au paragraphe 4 des exemples de catégories bifibrées en duaux de topos.

(1.2.5) Soient $\mathcal{E} \longrightarrow B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de B et $X : D^o \longrightarrow B$ un foncteur. Alors on laisse au lecteur le soin de vérifier que $(D^o \times_B \mathcal{E})^o$ est un D-topos que nous noterons $\overline{X}$.

(1.2.6) Nous dirons souvent qu'un foncteur $X : D^o \longrightarrow B$ est un D-*objet de* B et nous désignerons par X_i l'image par ce foncteur d'un objet i de D ; les D-objets de B forment une catégorie notée D^oB . Si S est un objet de B , un D-objet de B/S s'appellera un D-*objet de* B *augmenté vers* S . La donnée d'un D-objet de B augmenté vers S est trivialement équivalente à la donnée d'un morphisme fonctoriel $X \longrightarrow C_S^D$ où X est un D-objet de B et C_S^D le D-objet de B constant de valeur S .

Lorsque $D = \Delta$, on parlera d'*objet simplicial* (resp. *objet simplicial augmenté*).

Nous utiliserons aussi des *objets simpliciaux doubles* (en faisant $D = \Delta \times \Delta$).

(1.2.7) Supposons maintenant que la catégorie B possède des produits fibrés finis.

Soit $f : R \longrightarrow S$ une flèche dans B : le bifoncteur

$$([n],X) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{Ens}([n], \mathrm{Hom}_S(X,R))$$

de $\Delta^o \times (B/S)^o$ dans Ens définit un foncteur :

$$[n] \rightsquigarrow X_{[n]} = X_n$$

en prenant pour X_n un représentant du foncteur

$$Z \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{Ens}([n], \mathrm{Hom}_S(Z,R))$$

$$(X_n \xrightarrow{\sim} \overbrace{R \times_S R \times \ldots \times_S R}^{n+1 \text{ fois}})$$

Nous désignerons par $[R|_f S]$ ou $[R|S]$ l'objet semi-simplicial augmenté vers S ainsi construit.

Enfin si X et X' sont deux objets semi-simpliciaux de B (ou de B/S) et $u : X \longrightarrow X'$ un morphisme fonctoriel. Nous introduirons pour des raisons techniques l'objet $[X|_u X']$ calculé dans la catégorie $\Delta^o B$. Celui-là s'interprète comme un objet simplicial double de B que nous noterons alors $[[X \,|_u\, X']]$:
On dispose en effet d'un isomorphisme canonique de catégories :

$$\Delta^o(\Delta^o B) \xrightarrow{\sim} (\Delta \times \Delta)^o\, B \quad .$$

Nous allons revenir maintenant à la notion générale de D-topos.

(1.2.8) Soient E un D-topos : nous désignerons par $\underline{\Gamma}(E)$ la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_D(D,E)$. Soit $f : D' \longrightarrow D$ un foncteur : la catégorie $D' \times_D E$ est un D'-topos et, par composition avec f , on obtient un foncteur

$$f^* : \underline{\Gamma}\,(E) \longrightarrow \underline{\Gamma}(D' \times_D E) \quad .$$

Dans le cas où D' est réduite à un objet i de D (avec pour seul morphisme l'identité de i) et pour f l'inclusion canonique notée e_i, on peut prendre pour $D' \times_D E$ la catégorie fibre E_i et e_i^* s'identifie alors au foncteur "évaluation en i".

Proposition (1.2.9) Si D' est une $\mathcal{U}$-petite catégorie, le foncteur f^* possède un adjoint à droite et à gauche (notés respectivement f_* et $f_!$).

Cela résulte d'une légère généralisation du lemme de Kan [III 1.1], dont nous ferons un usage constant.

Lemme (1.2.10) Soient I, J et A trois catégories au-dessus d'une même catégorie B : on suppose que I est $\mathcal{U}$-petite et que A est fibrée et cofibrée au-dessus de B. On se donne un B-foncteur $f : I \longrightarrow J$ et l'on désigne par f^* le foncteur

$$\underline{\mathrm{Hom}}_B(J,A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_B(I,A)$$

défini par composition avec f. Alors si dans chaque fibre de A au-dessus de B, les $\mathcal{U}$-limites inductives (resp. projectives) existent, f^* possède un adjoint à gauche (resp. à droite).

Preuve. Nous n'indiquerons que la démonstration de l'existence du foncteur adjoint à gauche, la partie resp. du lemme s'en déduisant par dualité. Nous utiliserons le fait suivant, dont la vérification est laissée au lecteur :

Lemme (1.2.10.1) Soient A une catégorie bifibrée au-dessus d'une catégorie B, b un objet de B et $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un foncteur d'une catégorie Λ dans la fibre A_b ; quels que soient G dans $A_{b'}$, et $u : b' \longrightarrow b$ (resp. $u : b \longrightarrow b'$) dans B, on a une bijection :

$$\mathrm{Hom}_u(G, \varprojlim F_\lambda) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_u(G,F_\lambda)$$

$$\text{(resp. } \mathrm{Hom}_u(\varinjlim F_\lambda, G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_u(F_\lambda,G))$$

chaque fois que le premier membre est défini.

+ Ceci étant, soit $I \amalg_f J$ la catégorie sur B définie par :

$$\mathrm{ob}(I \amalg_f J) = \mathrm{ob}\,(I) \amalg \mathrm{ob}\,(J)$$

$$\mathrm{Hom}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_I(x,y) & \text{si } x\,,\, y \in \mathrm{ob}(I) \\ \mathrm{Hom}_J(x,y) & \text{si } x\,,\, y \in \mathrm{ob}(J) \\ \mathrm{Hom}_J(f(x),y) & \text{si } x \in \mathrm{ob}(I) \text{ et } y \in \mathrm{ob}(J) \\ \emptyset & \text{si } x \in \mathrm{ob}(J) \text{ et } y \in \mathrm{ob}(I) \end{cases}$$

+ La catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_B(I \amalg_f J, A)$ est équivalente à la catégorie des triples formés d'un B-foncteur F de I dans A, d'une B-foncteur G de J dans A et d'un morphisme φ de B-foncteur de F dans $G \circ f = f(G)$.

+ Pour tout objet j de J, on désigne par I/j la catégorie des objets de I "placés par f au-dessus de j" : les objets de I/j sont les couples (i,α) où i est un objet de I et $\alpha : i \longrightarrow j$ une flèche dans $I \amalg_f J$, les morphismes de I/j étant ceux de $I \amalg_f J/j$. Si p_I et p_J sont les projections de I et J sur B, et si (i,α) est un objet de I/j, on désignera par $\alpha_* : A_{p_I(i)} \longrightarrow A_{p_J(j)}$ le foncteur $P_J(\alpha)_*$.

+ Se donner un B-foncteur de $I \amalg_f J$ dans A revient encore à se donner $F \in \mathrm{Hom}_B(I,A)$, $G \in \mathrm{Hom}_B(J,A)$ et un morphisme fonctoriel en j

$$\psi_j \;:\; \varinjlim_{(i,\alpha)\in I/j} \alpha_*(F(i) \longrightarrow G(j)\quad .$$

(La fonctorialité en j du membre de gauche résulte de (1.2.10.1)). L'adjoint à gauche de f^* est donc donné par la formule :

$$f_!(F)(j) = \varinjlim_{(i,\alpha)\in I/j} \alpha_*(F(i))$$

<u>Corollaire</u> (1.2.11) <u>Soient</u> E <u>un</u> D-<u>topos et</u> i <u>un objet de</u> D ; <u>le foncteur</u> e_i^* <u>admet un adjoint à gauche</u> (resp. <u>à droite défini par</u> :

$$e_{i!}(a)(j) = \coprod_{\alpha \in \mathrm{Hom}(i,j)} \alpha_*(a) \qquad \left(\text{resp. } e_{i*}(a)(j) = \prod_{\alpha \in \mathrm{Hom}(j,i)} \alpha^*(a)\right)$$

<u>où</u> a <u>est un objet de</u> E <u>au-dessus de</u> i .

<u>Proposition</u> (1.2.12) <u>Soient</u> D <u>une</u> $\mathcal{U}$-<u>petite catégorie et</u> E <u>un</u> D-<u>topos</u> : <u>alors la catégorie</u> $\underline{\Gamma}(E)$ <u>est un</u> $\mathcal{U}$-<u>topos</u>.

+ On vérifie "fibre par fibre", à l'aide de (1.2.10.1), que la catégorie $\underline{\Gamma}(E)$ possède les propriétés suivantes :

a) Les limites projectives finies sont représentables.

b) Les sommes directes indexées par un élément de $\mathcal{U}$ sont représentables. Elles sont disjointes et universelles.

c) Les relations d'équivalence sont effectives universelles.

+ Il reste à montrer que $\underline{\Gamma}(E)$ possède un système de générateurs indexé par un élément de $\mathcal{U}$: or, si pour tout objet i de D , $(G_{i\lambda})_{\lambda\in\Lambda_i}$ est un système de générateurs de E_i (où Λ_i est un ensemble $\mathcal{U}$-petit), la famille $(e_{i!}(G_{i\lambda}))_{i,\lambda}$ est un système de générateurs de $\underline{\Gamma}(E)$.

(1.2.13) Nous allons introduire maintenant la notion de morphisme entre D-topos. Précisons tout d'abord que si F et F' sont deux catégories au-dessus d'une même catégorie B et si $T : F \longrightarrow F'$ est un B-foncteur , un <u>B-adjoint à gauche</u> à T sera un foncteur $S : F' \longrightarrow F$ adjoint à gauche à T tel que les morphismes canoniques $1 \longrightarrow T\circ S$ et $S\circ T \longrightarrow 1$ soient des B-morphismes de foncteurs. Sous ces conditions, on vérifie trivialement que T est cartésien et que S est cocartésien.

<u>Définition</u> (1.2.14) <u>Soient</u> E <u>et</u> E' <u>deux</u> D-<u>topos</u> : <u>un</u> morphisme <u>de</u> E <u>dans</u> E' <u>est un couple de</u> D-<u>foncteurs</u> $\Phi_* : E \longrightarrow E'$ <u>et</u> $\Phi^* : E' \longrightarrow E$, <u>muni d'une</u> D-<u>adjonction</u> $\mathrm{Hom}(\Phi^*.,.) \xrightarrow[\sim]{\xi} (.,\Phi_*.)$, <u>tel que pour tout objet</u> i <u>de</u> D , <u>le couple</u> (Φ_{*i}, Φ_i^*) , <u>muni de l'adjonction induite par</u> ξ , <u>soit un morphisme de topos de</u> E_i <u>dans</u> E'_i .

<u>Proposition</u> (1.2.15) <u>Soient</u> E <u>et</u> E' <u>deux</u> D-<u>topos et</u> $(\Phi_* , \Phi^*) : E \longrightarrow E'$ <u>un morphisme</u>. <u>On suppose que</u> D <u>est une</u> $\mathfrak{U}$-<u>petite catégorie</u>, <u>alors le couple</u> $(\Gamma(\Phi_*), \Gamma(\Phi^*)) : \underline{\Gamma}(E) \longrightarrow \underline{\Gamma}(E')$ <u>est un morphisme de topos</u>.

Découle trivialement de la définition précédente.

Le lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur, permet de construire des morphismes de D-topos :

<u>Lemme</u> (1.2.16) <u>Soient</u> E <u>et</u> E' <u>deux catégories bifibrées au-dessus d'une même catégorie</u> D , <u>et</u> Φ <u>un</u> D-<u>foncteur</u> cartésien <u>de</u> E <u>dans</u> E' <u>tel que</u>, <u>pour tout objet</u> i <u>de</u> D , $\Phi_i : E_i \longrightarrow E'_i$ <u>possède un adjoint à gauche</u>. <u>Alors</u>, <u>le choix pour tout</u> i , <u>d'une adjoint à gauche à</u> Φ_i <u>détermine canoniquement un</u> D-<u>foncteur</u> $\psi : E' \longrightarrow E$, D-<u>adjoint à gauche à</u> Φ .

<u>Scholie</u> (1.2.17) Sous les conditions de (1.2.16), supposons que E et E' soient deux D-topos et que pour tout i objet de D , tout adjoint à gauche du foncteur Φ_i soit exact à gauche : alors, si $\psi : E' \longrightarrow E$ est un D-adjoint à gauche à Φ , le couple $(\Phi,\Psi) : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de D-topos.

Soient maintenant $\mathcal{E} \longrightarrow B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de B , X et X' deux D-objets de B et $\alpha : X \longrightarrow X'$ un morphisme fonctoriel. Alors le choix de clivages normalisés pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^{o}$ détermine canoniquement un morphisme $(\alpha_* , \alpha^*) : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}'$ de D-topos tel que, pour tout objet i de D $(\alpha_{*i}, \alpha_i^*) : \overline{X}_i \longrightarrow \overline{X}'_i$ soit égal à $(\alpha_{i*}{}^{o}, \alpha_i^{*o})$, où $\alpha_i : X_i \longrightarrow X'_i$ est la flèche de B donnée par α. Pour deux choix différents de clivages pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^o$, il existe un unique D-isomorphisme entre les morphismes ainsi obtenus. (Pour la vérification de ces faits, le lecteur pourra se reporter à ([4] - (1.17)).

(1.3) D-topos annelé

Définition (1.3.1) Un D-topos annelé est un couple (E,A) où E est un D-topos et A un anneau de $\underline{\Gamma}(E)$.

On vérifie alors que pour tout objet i de D, A_i est un anneau du topos E_i et que pour tout morphisme $m : i \longrightarrow j$ la flèche canonique $A_i \longrightarrow m^*(A_j)$ est un homomorphisme d'anneaux.

Définition (1.3.2) Soient (E,A) et (E',A') deux D-topos annelés : un morphisme de (E,A) dans (E',A') est un couple (Φ,θ) où $\Phi : E \longrightarrow E'$ est un morphisme de D-topos et $\theta : A' \longrightarrow \Gamma(\Phi_*)(A)$ est un homomorphisme d'anneaux.

Remarque (1.3.3) Un morphisme $\Phi : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ de D-topos annelés induit un morphisme $(\Gamma(\Phi),\theta) : (\underline{\Gamma}(E),A) \longrightarrow (\underline{\Gamma}(E),A')$ de $\mathfrak{U}$-topos annelés lorsque D est une $\mathfrak{U}$-petite catégorie (cf. 1.2.15).

(1.3.4) Soit $\mathcal{E} \longrightarrow B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de B et $\mathcal{O}$ un anneau de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}^o) = \underline{\mathrm{Hom}}_{B^o}(B^o,\mathcal{E}^o)$. Si $X : D^o \longrightarrow B$ est un D-objet de B, le D-topos $\overline{X}$ (cf. (1.2.5)) est naturellement annelé par $(\mathcal{O}.X)^o : D \longrightarrow \mathcal{E}$ et l'on désignera par $(\overline{X},\mathcal{O})$ le D-topos annelé ainsi construit. Si $\alpha : X \longrightarrow X'$ est un morphisme fonctoriel, le morphisme $(\alpha_* , \alpha^*) : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}'$ (cf. 1.2.17) induit canoniquement un morphisme $(\overline{X},\mathcal{O}) \longrightarrow (\overline{X}',\mathcal{O})$ de D-topos annelés encore noté α.

(1.3.5) Un D-topos annelé (E,A) définit canoniquement une catégorie $\underline{\mathrm{Mod}}(E,A)$ bifibrée en catégorie abéliennes au-dessus de D dont la fibre en un objet i

de D est la catégorie $\mathrm{Mod}(E_i, A_i)$ des modules sur le topos annelé (E_i, A_i) . Avec ces notations, la catégorie des modules de $\underline{\Gamma}(E)$ sur A , notée $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$ s'identifie à la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_D(D,\underline{\mathrm{Mod}}(E,A))$.

(1.3.6) Soit $\varphi = (\Phi,\theta) : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ un morphisme de D-topos annelés. Il définit deux foncteurs $\varphi_* : \underline{\mathrm{Mod}}(E,A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}(E',A')$ et $\varphi^* : \underline{\mathrm{Mod}}(E',A') \longrightarrow \mathrm{Mod}(E,A)$ entre les catégories de modules correspondantes :

- Soit M un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(E,A)$ au-dessus d'un objet i de D : $\Phi_*(M)$ est un module sur $\Phi_*(A_i)$ et, grâce au morphisme $\theta_i : A'_i \longrightarrow \Phi_*(A_i)$, on en déduit un module sur A'_i noté $\varphi_*(M)$. Ce foncteur φ_* sera appelé le <u>foncteur image directe par le morphisme</u> φ .

- Soit M' un objet de $\underline{\mathrm{Mod}}(E',A')$ au-dessus d'un objet i de D : $\Phi^*(M')$ est un module sur $\Phi^*(A'_i)$ et $\varphi^*(M') = \Phi^*(M') \otimes_{\Phi^*(A'_i)} A_i$ est canoniquement muni d'une structure de module sur A_i . Au moyen de (1.2.16), on définit ainsi un foncteur φ^* , adjoint à gauche à φ_* , et appelé <u>foncteur image réciproque par le morphisme</u> φ .

(1.3.6.1) Nous dirons que φ est <u>plat</u> si le foncteur $\Gamma(\varphi^*)$ est exact.

<u>Proposition</u> (1.3.7) <u>Soient</u> $f : D' \longrightarrow D$ <u>un foncteur et</u> (E,A) <u>un</u> D-<u>topos annelé</u>. <u>Alors le foncteur canonique</u>

$$f^* : \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E \times_D D'), A\circ f)$$

<u>possède un adjoint à droite et à gauche si</u> D' <u>est une</u> $\mathcal{U}$-<u>petite catégorie</u>. <u>En particulier</u>, <u>il est exact</u>.

Cela résulte immédiatement de (1.2.10) et de l'identification $\underline{\mathrm{Hom}}_D(D,\underline{\mathrm{Mod}}(E,A)) \simeq \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$.

Conformément aux notations générales, nous noterons $f_!$ (resp. f_*) l'adjoint à gauche (resp. à droite) de f^*.

(1.3.8) Les considérations qui suivent nous fourniront un procédé de calcul commode pour les foncteurs dérivés du type $\underline{\underline{R}}^+\Gamma(\varphi_*) : D^+(\underline{\Gamma}(E),A) \longrightarrow D^+(\underline{\Gamma}(E'),A')$, où $\varphi : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ est un morphisme de D-topos annelé (cf. (1.3.6)). [Si $(S,\mathcal{O}_S)$ est un topos annelé, nous notons $D^+(S,\mathcal{O}_S)$ la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-modules de S].

(1.3.9) Ce calcul formel pourra d'ailleurs s'appliquer à d'autres contextes tels que la "descente en cohomologie ℓ-adique" (cf. S.G.A. 5).

<u>Proposition</u> (1.3.10) <u>Soit</u> D <u>une</u> $\mathfrak{U}$-<u>petite catégorie</u>. <u>Si</u> (E,A) <u>est un</u> D-<u>topos annelé, on désigne par</u> $I_{(E,A)}$ <u>l'ensemble des objets de</u> $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$ <u>isomorphe à un objet de la forme</u> $\prod_{i\in ob(D)} e_{i*}(Q_i)$, <u>où, pour tout objet</u> i <u>de</u> D, Q_i <u>est totalement acyclique</u> (cf. V 4.1)*; $I_{(E,A)}$ <u>vérifie les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>Pour tout objet</u> F <u>de</u> $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$ <u>et tout objet</u> i <u>de</u> D, $e_i^*(F)$ <u>est totalement acyclique</u>.

(ii) <u>Tout objet de</u> $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$ <u>s'injecte dans un objet de</u> $I_{(E,A)}$.

(iii) $I_{(E,A)}$ <u>est stable par sommes directes finies</u>.

(iv) <u>Pour tout morphisme</u> $\varphi : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ <u>de</u> D-<u>topos annelés, le foncteur</u> $\Gamma(\varphi_*)$ <u>transforme tout complexe acyclique de</u> $C^+(\underline{\Gamma}(E),A)$, <u>formé d'objets de</u> $I_{(E,A)}$, <u>en un complexe acyclique formé d'objets de</u> $I_{(E',A')}$.

<u>Démonstration</u>.

(i) Compte tenu de l'expression explicite de e_{i*} (cf. (1.2.1.1)), il suffit de montrer le lemme suivant :

*) "Flasque" dans la terminologie de V.

<u>Lemme</u> (1.3.10.1) <u>Soient</u> $(S,\mathcal{O}_S)$ <u>un topos annelé et</u> $(F_t)_{t\in T}$ <u>une famille de</u> $\mathcal{O}_S$<u>-modules totalement acycliques indexée par un ensemble</u> T $\mathfrak{U}$<u>-petit</u>. <u>Alors</u> $\prod_{t\in T} F_t$ <u>est totalement acyclique</u>.

Soit X un objet de S : il existe une suite spectrale

$$(1.3.10.2) \qquad H^p(X, \prod_{t\in T}^{(q)} F_t) \Longrightarrow \prod_{t\in T} H^{p+q}(X,F_t)$$

où $\prod_{t\in T}^{(q)}$ désigne le q-ième dérivé du foncteur "produit indexé par T". Comme $\prod_{t\in T}^{(q)} F_t$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \xrightarrow{t\in T} \prod_{t\in T} H^q(U,F_t)$, (1.3.10.2) dégénère et on obtient des isomorphismes

$$(1.3.10.3) \qquad H^n(X, \prod_{t\in T} F_t) \xrightarrow{\sim} \prod_{t\in T} H^n(X,F_t)$$

d'où finalement $H^n(X, \prod_{t\in T}) = 0$ pour tout n .

(ii) Soit F un objet de $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$; on choisit pour tout i un monomorphisme $F_i \longrightarrow Q_i$, où Q_i est totalement acyclique dans $\mathrm{Mod}(E_i,A_i)$: $e_{i*}(F_i) \longrightarrow e_{i*}(Q_i)$ est alors un monomorphisme (puisque e_{i*} possède un adjoint à gauche), et la flèche canonique :

$$(1.3.10.4) \qquad F \longrightarrow \prod_{i\in Ob(D)} e_{i*}(F_i) \longrightarrow \prod_{i\in Ob(D)} e_{i*}(Q_i)$$

est encore un monomorphisme, comme on le vérifie trivialement.

(iii) Démonstration laissée au lecteur.

(iv) On laisse aussi au lecteur le soin de vérifier que $\Gamma(\varphi_*)$ transforme un objet de $I_{(E,A)}$ en un objet de $I_{(E',A')}$. Ce point établi, il suffit, compte tenu de (i), de vérifier le lemme suivant :

Lemme (1.3.10.5) Si $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte dans $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$, avec $F \in I_{(E,A)}$ et $G \in I_{(E,A)}$, la suite $0 \longrightarrow \Gamma(\varphi_*)(F)) \longrightarrow \Gamma(\varphi_*)(G)) \longrightarrow \Gamma(\varphi_*(H)) \longrightarrow 0$ est exacte dans $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E'),A')$.

Il suffit de remarquer que $e_i^*(H)$ est acyclique pour tout objet i de D et que le calcul de $\Gamma(\varphi_*)$ se fait fibre par fibre, ce qui achève la démonstration de (1.3.10).

Corollaire (1.3.11) Soit $\varphi : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ un morphisme de D-topos annelés. On peut calculer le foncteur $\underline{\underline{R}}^+\Gamma(\varphi_*)$ au moyen de résolutions formées d'objets de $I_{(E,A)}$.

Soit $L \subset K^+(\underline{\Gamma}(E),A)$ la sous-catégorie pleine des complexes fermés d'objets de $I_{(E,A)}$: L est une sous-catégorie triangulée en vertu de ((1.3.10), (ii)) et on peut lui appliquer le théorème (5.1) de [[7] - Chap.1].

Corollaire (1.3.12) Soit $\varphi : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ un morphisme de D-topos annelés ; pour tout objet i de D on désigne par $\varphi_i : (E_i,A_i) \longrightarrow (E_i', A_i')$ le morphisme de D-topos annelé induit par φ au-dessus de i. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
D^+(\underline{\Gamma}(E),A) & \xrightarrow{\underline{\underline{R}}^+(e_i^*)} & D^+(E_i,A_i) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \underline{\underline{R}}^+\Gamma(\varphi_*)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \underline{\underline{R}}^+\varphi_{i*}} \\
D^+(\underline{\Gamma}(E'),A') & \xrightarrow[\underline{\underline{R}}^+(e_i^*)]{} & D^+(E_i',A_i')
\end{array}$$

est essentiellement commutatif.

On dispose d'un morphisme

$$\underline{\underline{R}}^+(e_i^*) \circ \underline{\underline{R}}^+\Gamma(\varphi_*) \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+\varphi_{i*} \circ \underline{\underline{R}}^+(e_i^*)$$

dont on vérifie que i est un isomorphisme, grâce à (1.3.10).

Remarque (1.3.13) Désignons par $\mathcal{G}_{(E,A)}$ l'ensemble des objets F de $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$ tels que $e_i^*(F)$ soit totalement acyclique pour tout objet i de D. Il résulte de la démonstration de (1.3.10) que l'on peut calculer $\underline{\underline{R}}^+\Gamma(\varphi_*)$ au moyen de résolutions formés d'objets de $\mathcal{G}_{(E,A)}$; i est ce que l'on fait en particulier dans l'introduction en utilisant la "résolution flasque canonique" (*) . D'après [(1.3.10)(i)], on a $I_{(E,A)} \subset \mathcal{G}_{(E,A)}$, mais nous utiliserons explicitement $I_{(E,A)}$ dans le paragraphe 2 .

2. La méthode de la descente cohomologique

Dans ce numéro, D est une catégorie $\mathfrak{U}$-petite.

(2.1) Généralités. Notations

(2.1.1) Soit $(S,\mathcal{O}_S)$ un topos annelé. La catégorie $S \times D$, muni de la projection canonique $S \times D \longrightarrow D$, est un D-topos ; de plus la section de valeur constante $\mathcal{O}_S$ définit un D-topos annelé $(S \times D,\mathcal{O}_S)$ appelé D-topos annelé constant de valeur $(S,\mathcal{O}_S)$. Avec ces notations, la catégorie $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(S \times D), \mathcal{O}_S)$ s'identifie à la catégorie des foncteurs covariants de D dans $\mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S)$.

On définit un foncteur exact :

$$\varepsilon^* \ : \ \mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(S \times D),\mathcal{O}_S)$$

en associant à tout module F sur S le foncteur constant de valeur F . Le foncteur ε^* possède un adjoint à droite ε_* qui associe à tout foncteur $H : D \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_S)$ sa limite projective, le morphisme d'adjonction $F \longrightarrow \varepsilon_*\varepsilon^*(F)$ étant celui qui envoie F dans la limite projective du foncteur constant de valeur F ; ainsi ε^* est pleinement fidèle si et seulement si D est connexe.

(*) cf. exposé XVII pour la généralisation de cette notion.

Définition (2.1.2) Soit (E,A) un D-topos annelé ; une augmentation de (E,A) est un morphisme (de D-topos annelés) de (E,A) dans un D-topos annelé constant. Un D-topos annelé muni d'une augmentation sera appelé un D-topos annelé augmenté.

(2.1.3) Soit $\mathcal{E} \longrightarrow B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos et $\mathcal{O}$ un anneau de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}^{o}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{B^{o}}(B^{o},\mathcal{E}^{o})$. Soit S un objet de B : un foncteur $D^{o} \longrightarrow B/S$, c'est-à-dire un morphisme fonctoriel $X \xrightarrow{\theta} C_S^D$, où X est un foncteur $D^{o} \longrightarrow B$ (cf. (1.2.6)), induit une augmentation :

$$\theta : (\overline{X},\mathcal{O}) \longrightarrow (\mathcal{E}_S^{o} \times D,\ \mathcal{O}_S) \qquad \text{(cf. (1.3.4)).}$$

désignerons par la même lettre que le morphisme fonctoriel qui lui donne naissance.

(2.2) La descente cohomologique

(2.2.1) Soit $\theta : (E,A) \longrightarrow (S \times D,\mathcal{O}_S)$ un D-topos annelé augmenté, on pose, avec les notations de (1.3.6) et (2.1.1),

$$\overline{\theta}^{*} = \Gamma(\theta^{*}) \circ \varepsilon^{*} : \mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$$

et $\quad \overline{\theta}_{*} = \varepsilon_{*} \circ \Gamma(\theta_{*}) : \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S)$.

L'image de $\overline{\theta}^{*}$ se trouve dans la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(E),A)$ formée des sections cocartésiennes de $\underline{\Gamma}\ (D,\underline{\mathrm{Mod}}(E,A))$: nous noterons $\underline{\Gamma}^{\mathrm{cocart}}(D,\underline{\mathrm{Mod}}(E,A))$ cette dernière catégorie.

Définition (2.2.2) On dit que θ est une augmentation de descente effective si $\Gamma(\theta^{*}) \circ \varepsilon^{*} : \mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S) \longrightarrow \underline{\Gamma}^{\mathrm{cocart}}(D,\underline{\mathrm{Mod}}(E,A))$ est une équivalence de catégories.

(2.2.3) Avec les notations de (2.2.1), supposons que θ soit plat, de sorte que $\bar{\theta}^*$ est exact et passe trivialement aux catégories dérivées : soit $\underline{\underline{L}}^+(\bar{\theta}^*)$ le foncteur ainsi obtenu. Avec ces notations :

Lemme (2.2.3.1) Il existe deux morphismes fonctoriels

$$\alpha : \mathrm{id}_{D^+(S,\mathcal{O}_S)} \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+(\bar{\theta}_*) \circ \underline{\underline{L}}^+(\bar{\theta}^*) \quad \text{et} \quad \beta : \underline{\underline{L}}^+(\bar{\theta}^*) \circ \underline{\underline{R}}^+(\bar{\theta}_*) \longrightarrow \mathrm{id}_{D^+(\underline{\Gamma}(E),A)}$$

mettant ces deux foncteurs en adjonction.

(cf. [9] (3.3)).

Définition (2.2.4) On dit que θ est une augmentation de 1-descente cohomologique si

1°) θ est plat

2°) Le foncteur $\underline{\underline{L}}^+(\bar{\theta}^*)$ est pleinement fidèle.

Remarque (2.2.5) La condition 2°) la définition précédente peut aussi s'exprimer en disant que le morphisme α dans (2.2.3.1) est un isomorphisme.

Définition (2.2.6) On dit que θ est une augmentation de 2-descente cohomologique (ou de descente cohomologique effective) si θ est à la fois une augmentation de descente effective et une augmentation de 1-descente cohomologique.

La terminologie précédente est justifiée par le résultat suivant :

Proposition (2.2.7) Soit θ une augmentation de descente cohomologique effective. Alors, l'image essentielle de $\underline{\underline{L}}^+(\bar{\theta}^*)$ est la sous-catégorie pleine de $D^+(\underline{\Gamma}(E),A)$ formée des complexes $F^\cdot$ tels que pour tout i , $H^i(F^\cdot)$ soit une section cocartésienne de $\underline{\mathrm{Mod}}(E,A)$.

Nous dirons, pour abréger, qu'un complexe $F^\cdot$ vérifiant les conditions précédentes est une donnée de descente cohomologique. Il est clair que si $K^\cdot \in D^+(S,\mathcal{O}_S)$ $\underline{\underline{L}}^+(\bar{\theta}^*)(K^\cdot)$ est une donnée de descente cohomologique : il suffit donc de montrer que pour toute donnée de descente cohomologique $F^\cdot$, le morphisme canonique

$$\beta(F^\cdot) \ : \ \underline{\underline{L}}^+(\overline{\theta}^*) \circ \underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)(F^\cdot) \longrightarrow F^\cdot$$

est un isomorphisme dans $D^+(\underline{\Gamma}(E),A)$.

a) <u>Cas où $F^\cdot$ est borné</u> : on raisonne par récurrence sur la longueur ℓ de l'intervalle des entiers i où $H^i(F^\cdot) \neq 0$:

- pour $\ell \leq 1$ l'assertion est vraie parce que θ est de descente effective.
- supposons $\ell > 1$ et soit n le plus grand entier tel que $H^n(F^\cdot) \neq 0$:

on dispose d'un triangle distingué (*)

$$\begin{tikzcd} & H^n(F^\cdot)[-n] \arrow[dl] & \\ F'^\cdot \arrow[rr] & & F^\cdot \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

tel que l'hypothèse de récurrence s'applique à $F'^\cdot$; $\beta(H^n(F^\cdot)[-n])$ et $\beta(F'^\cdot)$ étant des isomorphismes, il en est de même de $\beta(F^\cdot)$.

b) <u>Cas général</u> : désignons par $\sigma_{\leq}(F^\cdot)$ le complexe

$$\ldots \ F^{n-1} \longrightarrow F^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Kerd}^n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ \ldots \qquad ,$$

(cf. [7] (7.1)), de sorte que l'on dispose pour tout n d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{L}}^+(\overline{\theta}^*) \circ \underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)\ (\sigma_{\leq n}(F^\cdot)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \sigma_{\leq n}(F^\cdot) \arrow[d] \\ \underline{\underline{L}}^+(\overline{\theta}^*) \circ \underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)\ (F^\cdot) \arrow[r] & F^\cdot \end{tikzcd}$$

et il suffit de voir que le morphisme

(*) pour tout complexe $K^\cdot$, $K^\cdot[-n]$ désigne le complexe $T^{-n}(K^\cdot)$, où T est le foncteur translation.

$$\underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)\ (\sigma_{\leq n}(F^\cdot)) \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)(F^\cdot)$$

induit un isomorphisme sur les H^i pour $i \leq n$. Or, on dispose d'un triangle :

$$\begin{tikzcd} & F''^\cdot \arrow[dl] & \\ \sigma_{\leq n}(F^\cdot) \arrow[rr] & & F^\cdot \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

avec $H^i(F''^\cdot) = 0$ pour $i \leq n$. On en déduit alors que $H^i(\underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)\ (F''^\cdot)) = 0$ pour $i \leq n$, puis que $H^i(\underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)(\sigma_{\leq n}(F^\cdot))) \longrightarrow H^i(\underline{\underline{R}}^+(\overline{\theta}_*)(F^\cdot))$ est un isomorphisme pour $i \leq n$, ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant exposer une méthode de calcul explicite de $\underline{\underline{R}}^+\overline{\theta}_*$ fort utile dans la démonstration de certains critères de descente cohomologique, ainsi que dans l'exploitation de la dite notion.

(2.3) <u>Un procédé de calcul pour</u> $\underline{\underline{R}}^+\ \varepsilon_*$

Nous commencerons par deux sorites.

(2.3.1) Soient D une $\mathfrak{U}$-petite catégorie et Ab la catégorie des groupes abéliens appartenant à $\mathfrak{U}$. On désigne par r_D le foncteur $D \longrightarrow (\underline{Hom}(D,Ab))^o$ défini par la relation

$$r_D(i)(j) = \mathbb{Z}^{\,Hom(i,j)}$$

pour tout couple (i,j) d'objets de D . On construit alors, pour tout couple (i,X) formé d'un objet de D et d'un objet de $\underline{Hom}(D,Ab)$, un isomorphisme canonique et fonctoriel :

$$Hom(r_D(i),\ X) \xrightarrow{\ \sim\ } X(i)$$

(2.3.1.1) Soient A une catégorie additive (cf. Tohokû) et F un foncteur $D \longrightarrow A$: on définit un foncteur $\overline{F} : (\underline{Hom}(D,Ab))^o \longrightarrow A^oEns$ par la relation

$$\overline{F}(X)(a) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(D,Ab)}(X, \mathrm{Hom}_A(a, F(.)))$$

de sorte que le diagramme suivant, où h_A désigne le foncteur canonique :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{r_D} & (\underline{\mathrm{Hom}}(D,Ab))^o \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{F}} \\ A & \xrightarrow[h_A]{} & \underline{\mathrm{Hom}}(A^o, Ens) \end{array}$$

soit essentiellement commutatif.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\overline{F}$ transforme les sommes directes finies de $\underline{\mathrm{Hom}}(D,Ab)$ en produits et que, si l'on désigne par $\mathbb{Z}$ le foncteur constant $D \longrightarrow Ab$ de valeur $\mathbb{Z}$, on a $\overline{F}(\mathbb{Z}) = \varprojlim F$.

Enfin la correspondance $F \rightsquigarrow \overline{F}$ définit un foncteur covariant

$$\underline{\mathrm{Hom}}(D,A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}((\underline{\mathrm{Hom}}(D,Ab))^o, \ \underline{\mathrm{Hom}}(A^o, Ens)).$$

(2.3.1.2) On désigne par $\mathrm{Add}(D)$ la sous-catégorie pleine de $(\underline{\mathrm{Hom}}(D,Ab))^o$ définie par les objets de la forme $r_D(i)$, où i est un objet de D, et leurs sommes directes finies. La catégorie $\mathrm{Add}(D)$ est additive et le foncteur $r_D : D \longrightarrow \mathrm{Add}(D)$ vérifie la propriété universelle suivante :

(2.3.1.3) _Pour toute catégorie additive_ A, _le foncteur_ $G \longrightarrow G \circ r_D$ _induit une équivalence de la sous-catégorie pleine de_ $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Add}(D),A)$ _formée par les foncteurs additifs_ sur l_a catégorie_ $\underline{\mathrm{Hom}}(D,A)$.

La catégorie $\mathrm{Add}(D)$, définie à équivalence près par (2.3.1.3) s'appellera la _catégorie additive engendrée par_ D.

(2.3.2) Soient A une catégorie abélienne et $K^{\cdot\cdot}$ un complexe double que nous considérons comme un objet de $C^+(C^+(A))$, le premier indice correspondant au premier signe C^+ : on désigne par $(K^{\cdot\cdot})_s$ le <u>complexe simple associé</u> (cf. Tohokû (2.4), dont nous conserverons les notations). On définit ainsi un foncteur

$$(2.3.2.1) \qquad (\ )_s : C^+(C^+(A)) \longrightarrow C^+(A)$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier le lemme suivant :

<u>Lemme</u> (2.3.2.2) <u>Le foncteur</u> $(\ )_s$ <u>définit un foncteur triangulé</u> :

$$K^+(C^+(A)) \longrightarrow K^+(A)$$

<u>qui préserve les quasi-isomorphismes</u> ; <u>il définit donc un foncteur triangulé</u> :

$$D^+(C^+(A)) \longrightarrow D^+(A) \quad ,$$

<u>encore noté</u> $(\ )_s$.

<u>Remarque</u>. On a le même résultat pour le foncteur $(\ )_s : C(C^b(A)) \longrightarrow C(A)$ car la suite spectrale que l'on envisage est birégulière par (E.G.A. III (11.3.3)).

(2.3.3) Ceci étant, soient $(S,\mathcal{O}_S)$ un topos annelé et D une $\mathcal{U}$-petite catégorie. Soit $Z^\cdot \in C^+(\mathrm{Add}(D))$ un complexe de cochaînes tel que $Z^n = 0$ pour $n < 0$.

Tout objet F de $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(S \times D, \mathcal{O}_S), \mathcal{O}_S)$ (qui s'identifie à un foncteur $D \longrightarrow \mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S)$ d'après (2.1.1)) définit, par la propriété universelle de $\mathrm{Add}(D)$ un objet $\epsilon_{Z^\cdot *}(F)^\cdot$ de $C^+(S,\mathcal{O}_S)$ qui varie fonctoriellement avec F d'après (2.3.1.3).

On définit ainsi un foncteur triangulé :

$$(2.3.3.1) \qquad K^+(\epsilon_{Z^\cdot *}) : K^+(\underline{\Gamma}(S \times D),\mathcal{O}_S) \longrightarrow K^+(C^+(S,\mathcal{O}_S)) \quad .$$

De plus, il résulte de (2.3.2.2) que le foncteur composé :

$$(\ )_s \circ K^+(\epsilon_{Z^\cdot *}) \ : \ K^+(\underline{\Gamma}(S \times D),\mathcal{O}_S) \longrightarrow K^+(S,\mathcal{O}_S)$$

transforme les objets acycliques en objets acycliques. Il définit donc un foncteur triangulé :

(2.3.3.2) $$\underline{\underline{R}}^{+}\varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}} : D^{+}(\underline{\Gamma}(S \times D),\, \mathcal{O}_S) \longrightarrow D^{+}(S,\mathcal{O}_S)$$

vérifiant la relation $Q\circ(\ )_S\circ K^{+}(\varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}) = \underline{\underline{R}}^{+}\varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}\circ Q$ (*)

(2.3.4) Les données précédentes sont conservées. On considère $Z^{\cdot}$ comme un complexe de chaînes dans $\underline{\mathrm{Hom}}(D,Ab)$. Soit $t : Z^{o} \longrightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme de Z^{o} dans le foncteur constant de valeur $\mathbb{Z}$ tel que le morphisme composé

(2.3.4.1) $$Z^{1} \longrightarrow Z^{o} \xrightarrow{t} \mathbb{Z}$$

soit nul.

Par fonctorialité (cf. (2.3.1.1)), on en déduit un morphisme $\varepsilon_{*}(F) \longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}(F)^{o}$ tel que le morphisme composé

(2.3.4.2) $$\varepsilon_{*}(F) \longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}(F)^{o} \longrightarrow \varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}(F)^{1}$$

soit nul.

Il existe alors un morphisme canonique de foncteurs triangulés :

(2.3.4.3) $$Q\circ K^{+}(\varepsilon_{*}) \xrightarrow{\ \ j\ \ } Q\circ(\ )_S\circ K^{+}(\varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}) = \underline{\underline{R}}^{+}\varepsilon_{Z^{\cdot}{}_{*}}\circ Q$$

<u>Proposition</u> (2.3.5) <u>Les conditions et notations de</u> (2.3.3) <u>et</u> (2.3.4) <u>sont conservées</u> ; <u>on suppose en outre que le complexe augmenté</u>

$$Z^{n} \longrightarrow Z^{n-1} \ \ldots\ldots\ Z^{1} \longrightarrow Z^{o} \xrightarrow{t} \mathbb{Z}$$

<u>définisse une résolution de</u> $\mathbb{Z}$.

<u>Alors</u>, <u>pour tout complexe</u> $F^{\cdot}$ <u>formé d'objets de</u> $I_{(S\times D,\mathcal{O}_S)}$ (cf. 1.3.10),

(*) Pour toute catégorie abélienne A , la lettre Q désigne le foncteur canonique $K^{+}(A) \longrightarrow D^{+}(A)$.

$$j(F^\cdot) : G\circ K^+(\varepsilon_*)(F^\cdot) \longrightarrow (\underline{\underline{R}}^+ \varepsilon_{Z^\cdot *} \circ Q)(F^\cdot)$$

<u>est un isomorphisme</u>.

+ Soit i un objet de D et Q_i un module sur $(S,\mathcal{O}_S)$: montrons que $j\ (e_{i*}(Q_i))$ est un isomorphisme. Il s'agit de voir que la suite :

(2.3.5.1) $$0 \longrightarrow Q_i \longrightarrow \varepsilon_{Z^\cdot *}(e_{i*}(Q_i))^o \longrightarrow \varepsilon_{Z^\cdot *}(e_{i*}(Q_i))^1 \longrightarrow \dots.$$

est exacte.

Pour cela il suffit de montrer que, pour tout objet X de $\mathrm{Mod}(S,\mathcal{O}_S)$, la suite :

(2.3.5.2) $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Q_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\varepsilon_{Z^\cdot *}(e_{i*}(Q_i))^o) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,\varepsilon_{Z^\cdot *}(e_{i*}(Q_i))^1) \rightarrow \dots$$

est exacte. Or un calcul immédiat montre que (2.3.5.2) se réduit à :

(2.3.5.3) $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}(X,Q_i)) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z^o,i),\mathrm{Hom}(X,Q_i)) \rightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Add}(D)}(Z^1,i),\mathrm{Hom}(X,Q_i)) \longrightarrow \dots \quad .$$

+ Si pour tout objet i de D , Q_i est un module totalement acyclique, on voit, en appliquant le foncteur $\prod_{i\in \mathrm{Ob}(D)}$ aux complexes (2.3.5.1), que l'on obtient encore un complexe acyclique d'après (1.3.10.1). Ainsi $j\ (\prod_{i\in \mathrm{Ob}(D)} (e_{i*}(Q_i))$ est un isomorphisme.

+ On laisse au lecteur le soin de déduire de ceci que $j(F^\cdot)$ est un isomorphisme lorsque $F^n \in I_{(S\times D,\mathcal{O}_S)}$ pour tout n (par suites spectrales, par exemple).

<u>Corollaire</u> (2.3.6) <u>Sous les conditions de</u> (2.3.5), <u>le morphisme</u> j <u>définit</u> $\underline{\underline{R}}^+\epsilon_{Z\cdot *}$ <u>comme le foncteur dérivé de</u> ϵ_* .

La sous-catégorie de $K^+(\underline{\Gamma}(S\times D),\mathcal{O}_S)$ définie par les complexes formés d'objets de $I_{(S\times D,\mathcal{O}_S)}$ vérifie les conditions du théorème (5.1) de [[7], I], pour le foncteur $K^+(\epsilon_*)$, en vertu de (1.3.10) et (2.3.5) : le corollaire résulte immédiatement de cette remarque.

<u>Corollaire</u> (2.3.7) <u>Sous les conditions de</u> (2.3.5), <u>soient</u> (E,A) <u>un</u> D-<u>topos annelé</u> <u>et</u> $\theta : (E,A) \longrightarrow (S\times D,\mathcal{O}_S)$ <u>une augmentation</u> ; <u>il existe un isomorphisme canonique</u>

$$\underline{\underline{R}}^+\ \overline{\theta}_* \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\underline{R}}^+\Gamma(\theta_*) \circ \underline{\underline{R}}^+\epsilon_{Z\cdot *} \quad .$$

Cela résulte de [[7] - I - 5.4].

<u>Remarque</u> (2.3.8) On savait a priori que $\underline{\underline{R}}^+\epsilon_*$ existe et que l'on a un isomorphisme $\underline{\underline{R}}^+\ \overline{\theta}_* \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}^+\Gamma(\theta_*)\circ \underline{\underline{R}}^+\epsilon_*$, vu que $\Gamma(\theta_*)$ et ϵ_* sont induits par des morphismes de topos annelés (cf. (1.3.6) et (2.1.1)). Cependant le calcul précédent s'avérera fort utile et applicable à d'autres contextes, car, dans la pratique, les conditions de (2.3.5) seront toujours vérifiées.

Nous allons maintenant donner les exemples fondamentaux où l'on pourra appliquer (2.3.5).

(2.3.9) Dans $\mathrm{Add}(\Delta)$, on pose $Z^n = [n]$ et on définit $d^n : Z^n \longrightarrow Z^{n+1}$ par la formule

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, \partial^i \qquad (2.3.9.1)$$

où $\partial^i : [n] \longrightarrow [n+1]$ est la i-ème face [cf.[3] II 2]. On prend pour $t : Z^o \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'augmentation naturelle évidente.

La condition de (2.3.4) est trivialement vérifiée. La condition de (2.3.5) résulte de ([5] I (3.7.4)).

(2.3.10) Dans $\mathrm{Add}(\Delta \times \Delta)$, on considère le complexe simple associé au complexe double :

$$\begin{tikzcd}
([n],[m+1]) \arrow[r, "s_1^{n,m+1}"] & ([n+1],[m+1]) \\
([n],[m]) \arrow[u, "s_2^{n,m}"] \arrow[r, "s_1^{n,m}"] & ([n+1],[m]) \arrow[u, "s_2^{n+1,m}"']
\end{tikzcd} \tag{2.3.10.1}$$

avec

$$\begin{cases} s_1^{n,m} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, (\partial^i, id_{[m]}) \\ \\ s_2^{n,m} = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^j (id_{[n]}, \partial^j) \end{cases} \tag{2.3.10.2}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier (en utilisant (2.3.9)) que le complexe ainsi défini, muni de l'augmentation naturelle évidente, vérifie les conditions de (2.3.5).

(2.3.11) On traite de manière analogue le cas multi-simplicial (avec $\underbrace{\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta}_{p\text{-fois}}$.)

(2.4) La descente cohomologique relative

(2.4.0) Soient $\mathcal{E} \longrightarrow B$ une catégorie bifibrée en duaux de topos et $\mathcal{O}$ un anneau de $\underline{\Gamma}(\mathcal{E}^{o})$.

Ces données définissent canoniquement une catégorie fibrée et cofibrée en catégories abéliennes, notée $\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^{o},\mathcal{O})$, au-dessus de B^{o} (cf. (1.3.3) et (1.3.4)): dans tout ce qui suit, les foncteurs "images directes" et "images réciproques" seront toujours pris par rapport au foncteur fibrant et cofibrant : $\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^{o},\mathcal{O}) \longrightarrow B^{o}$.

Définition (2.4.0.1) Nous dirons qu'un morphisme $f : T \longrightarrow S$ dans B est plat (relativement à $(\mathcal{E},\mathcal{O})$) si $f_{*} : \mathrm{Mod}(\mathcal{E}^{o}_{S},\mathcal{O}_{S}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{E}^{o}_{T},\mathcal{O}_{T})$ est un foncteur exact.

(2.4.1) Soit G une sous-catégorie fibrée et cofibrée de $\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^{o},\mathcal{O})$ telle que, pour tout objet S de B , G_S soit une sous-catégorie épaisse (cf. Tohokû (1.11)) de $(\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^{o},\mathcal{O}))_S$ - Le lecteur trouvera au paragraphe 4 des exemples de telles situations.

Si S est un objet de B , nous désignerons par $D^{+}(S)$, la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(\mathcal{E}^{o}_{S},\mathcal{O}_{S})$: on introduit, suivant [[7] (I § 4)], la catégorie $D^{+}_{G_S}(S)$, qui s'identifie à la sous-catégorie pleine de $D^{+}(S)$ formée par les objets $X^{\cdot}$ tels que $H^{n}(X^{\cdot}) \in G_S$ pour tout n .

Nous supposerons que la condition suivante est toujours vérifiée.

(2.4.1.1) Pour tout morphisme $h : T \longrightarrow S$ dans B , le foncteur $\underline{\underline{R}}^{+}(h^{*}) : D^{+}(T) \longrightarrow D^{+}(S)$ est tel que $\underline{\underline{R}}^{+}(h^{*})(F) \in D^{+}_{G_S}(S)$ si $F \in G_T$.

D'après [[7] (I. (7.3).(ii))], cette condition entraîne que $\underline{\underline{R}}^{+}(h^{*})(D^{+}_{G_T}(T)) \subset D^{+}_{G_S}(S)$.

(2.4.2) Soit D une $\mathcal{U}$-petite catégorie : <u>nous supposerons dans tout ce qui suit que l'on s'est donné un complexe</u> $Z^\cdot$ <u>de</u> $\mathrm{Add}(D)$ <u>vérifiant les conditions de</u> (2.3.5) (dans les applications, on aura en fait $D = \Delta$ ou $D = \Delta \times \Delta$).

Si $X : D^o \longrightarrow B$ est un D-objet de B, on désigne par $\mathrm{Mod}_G(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ formée par les objets F tels que $e_i^*(F) \in G_i (= G_{X_i})$ pour tout objet i de D : $\mathrm{Mod}_G(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$. Nous désignerons par $K_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ (resp. $D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$) la sous-catégorie pleine de $K^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ (resp. $D^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$) formée des objets $X^\cdot$ tels que $H^n(X^\cdot) \in \mathrm{Mod}_G(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ pour tout n.

(2.4.3) Soient X et X' deux D-objets de B et $\alpha : X \longrightarrow X'$ un morphisme fonctoriel. Rappelons (cf. (1.3.4)) que nous notons encore $\alpha : (\overline{X},\mathcal{O}) \longrightarrow (\overline{X}',\mathcal{O})$ le morphisme de D-topos annelés correspondant.

<u>Définition</u> (2.4.3.1) <u>Nous dirons que</u> $\alpha : X \longrightarrow X'$ <u>est</u> plat <u>si le morphisme de</u> D-<u>topos annelés correspondant est plat au sens de</u> (1.3.6.1).

On a alors le lemme évident :

<u>Lemme</u> (2.4.3.2) <u>Pour que</u> $\alpha : X \longrightarrow X'$ <u>soit plat, il faut et il suffit que, pour tout objet</u> i <u>de</u> D, $\alpha_i : X_i \longrightarrow X_i'$ <u>soit un morphisme plat</u> (cf. (2.4.0.1)).

(2.4.4) Soit $\alpha : X \longrightarrow X'$ un morphisme, il définit un foncteur

(2.4.4.1) $$K^+(\Gamma(\alpha_*)) : K^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O}) \longrightarrow K^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}'),\mathcal{O}) \quad .$$

<u>Lemme</u> (2.4.4.2) <u>Le foncteur</u>

$$K^+(\Gamma(\alpha_*))\,|\,K_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O}) : K_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O}) \longrightarrow K^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}'),\mathcal{O})$$

<u>possède un foncteur dérivé à droite, noté</u> $\underline{\underline{R}}_G^+\Gamma(\alpha_*)$, <u>et le morphisme canonique</u>

$$\underline{\underline{R}}_G^+\Gamma(\alpha_*) \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+\Gamma(\alpha_*)\,|\,D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$$

<u>est un morphisme</u>.

<u>De plus</u> $\underline{\underline{R}}_G^+(D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})) \subset D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}'),\mathcal{O})$.

La première partie résulte de (1.3.10) et de [[7] - (I.(5.2))]. Pour vérifier la dernière assertion, il suffit de montrer, en vertu de [[7] - (I.(7.3).(ii))], que $\underline{\underline{R}}^+\Gamma(\alpha_*)(F) \in D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}'),\mathcal{O})$ lorsque $F \in \mathrm{Mod}_G(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$, ce qui résulte du calcul explicite de $\underline{\underline{R}}^+\Gamma(\alpha_*)$ donné par (1.3.1.1) et de l'hypothèse (2.4.1.1).

(2.4.5) Soit S un objet de B : le D-topos annelé $(\overline{C_S^D},\mathcal{O})$ (cf. (1.2.6)) s'identifie au D-topos annelé constant $(\mathcal{E}_S^o \times D,\ \mathcal{O}_S)$ et on a le lemme suivant qui résulte de [[7](I. (7.3). (ii))] :

<u>Lemme</u> (2.4.5.1) <u>Le foncteur</u> $\underline{\underline{R}}^+\epsilon_{Z^\cdot *}\ |D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{C_S^D}),\mathcal{O})$, <u>noté</u> $\underline{\underline{R}}_G^+\ \epsilon_{Z^\cdot *}$, <u>est à valeurs dans</u> $D_{G_S}^+(S)$ <u>et s'identifie un foncteur dérivé à droite du foncteur</u>

$$K^+(\epsilon_*)\ |\ K_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{C_S^D}),\mathcal{O})\ :\ K_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{C_S^D}),\mathcal{O}) \longrightarrow K^+(S) \quad .$$

<u>Proposition</u> (2.4.6) <u>Soit</u> $\theta : X \longrightarrow C_S^D$ <u>un</u> D-<u>objet de</u> B <u>augmenté</u> : <u>le foncteur</u> $K^+(\overline{\theta}_*)\,|K_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ <u>possède un foncteur dérivé à droite, noté</u> $\underline{\underline{R}}^+\overline{\theta}_*$, <u>qui prend ses valeurs dans</u> $D_{G_S}^+(S)$. <u>De plus, il existe un isomorphisme canonique</u>

$$\underline{\underline{R}}_G^+\ \overline{\theta}_* \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\underline{R}}_G^+\ \epsilon_{Z^\cdot *} \circ \underline{\underline{R}}_G^+\Gamma(\theta_*) \quad .$$

Démonstration laissé au lecteur à partir de ce qui précède.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les définitions relatives à la descente cohomologique.

(2.4.7) Soit $\theta : X \longrightarrow C_S^D$ un D-objet de B augmenté. Supposons que θ soit plat, de sorte que la restriction à $D^+_{G_S}(S)$ du foncteur $\underline{\underline{L}}^+ \overline{\theta}^*$ prend ses valeurs dans $D^+_G(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$: nous noterons $\underline{\underline{L}}^+_G \overline{\theta}^*$ cette restriction. Avec ces notations :

<u>Lemme</u> (2.4.7.1) <u>Il existe deux morphismes fonctoriels</u> $\alpha : \mathrm{id}_{D^+_{G_S}(S)} \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+_G\overline{\theta}_* \circ \underline{\underline{L}}^+_G\overline{\theta}^*$ <u>et</u> $\beta : \underline{\underline{L}}^+_G\overline{\theta}^* \circ \underline{\underline{R}}^+_G\overline{\theta}_* \longrightarrow \mathrm{id}_{D^+_G(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})}$ <u>mettant ces deux foncteurs en adjonction.</u>

Cela résulte immédiatement de (2.2.3.1) et (2.4.6).

<u>Définition</u> (2.4.8) <u>On dit que</u> θ <u>est une augmentation de 1-descente cohomologique relativement à</u> G <u>si</u>

1°) θ <u>est plat</u>.

2°) <u>Le foncteur</u> $\underline{\underline{L}}^+_G \overline{\theta}^*$ <u>est pleinement fidèle</u>.

<u>Remarque</u> (2.4.9) La condition 2°) de la définition précédente peut encore s'exprimer en disant que le morphisme α dans (2.4.7.1) est un isomorphisme.

<u>Définition</u> (2.4.10) <u>Soit</u> $\theta : X \longrightarrow C_S^D$ <u>un</u> D-<u>objet de</u> B <u>augmenté</u>. <u>On dit que</u> θ <u>est une</u> augmentation de descente effective relativement à G <u>si le foncteur</u>

$$\Gamma(\theta^*) \circ \epsilon^* : G_S \longrightarrow \underline{\Gamma}^{\mathrm{Cocart}}(D,\, G)$$

<u>est une équivalence de catégories</u>.

<u>Définition</u> (2.4.11) <u>On dit que</u> θ <u>est une</u> augmentation de 2-descente cohomologique (<u>ou de</u> descente cohomologique effective) relativement à G <u>si</u> θ <u>est à la fois une augmentation de 1-descente cohomologique et de descente effective relativement à</u> G .

On déduit alors de la démonstration de (2.2.7) le résultat suivant :

Théorème (2.4.12) Soit $\theta : X \longrightarrow C_S^D$ une augmentation de 2-descente cohomologique relativement à G. Alors l'image essentielle de $\underline{\underline{L}}_G^+ \overline{\theta}^*$ est la sous-catégorie pleine de $D_G^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathcal{O})$ formée des complexes $F^\cdot$ tels que pour tout n, $H^n(F^\cdot)$ soit une section cocartésienne de G.

La proposition suivante, dont la vérification est laissée au lecteur, permet de transcrire la définition (2.4.10) dans le langage de ([4]. 6) :

Proposition (2.4.13) Pour que $\theta : X \longrightarrow C_S^D$ soit une augmentation de descente effective relativement à G, il faut et il suffit que le foncteur $D^o \longrightarrow B/S$ au-dessus de B, défini par θ, induire une équivalence entre la catégorie des sections cartésiennes de G^o au-dessus de B/S et la catégorie des sections cartésiennes de G^o au-dessus de D^o.

Corollaire (2.4.14) Supposons que les produits fibrés finis soient représentables dans B et soit $f : R \longrightarrow S$ un morphisme : pour que l'objet semi-simplicial augmenté $[R|_f S]$ (cf. (1.2.7)) soit de descente effective relativement à G, il faut et il suffit que f soit un morphisme de descente effective pour la catégorie fibrée G^o au-dessus de B.

Cela résulte de (2.4.13) et de ([4]- 9).

Définition (2.4.15) Supposons que les produits fibrés finis soient représetables dans B et soit $f : R \longrightarrow S$ un morphisme. Nous dirons que f est un morphisme de i-descente cohomologique relativement à G ($i = 1,2$) si l'objet semi-simplicial augmenté $[R|_f S]$ est de i-descente cohomologique relativement à G.

Définition (2.4.16) Supposons que les produits fibrés finis soient représentables dans B et soit $\theta : X \longrightarrow C_S^D$ une augmentation : nous dirons que θ est une augmentation de i-descente cohomologique universelle ($i = 1,2$) relativement à G si, pour tout morphisme $T \longrightarrow S$, l'augmentation $X_T \xrightarrow{\theta_T} C_T^D$ obtenue par changement de base est une augmentation de i-descente cohomologique relativement à G .

La notion de morphisme de i-descente cohomologique universelle relativement à G se déduit immédiatement des deux définitions précédentes.

Nous emploierons souvent la terminologie "augmentation de G- i-descente cohomologique" à la place de "augmentation de i-descente cohomologique relativement à G " .

(2.5) La suite spectrale de descente

(2.5.1) Soit A une catégorie abélienne. On désigne par F(A) la catégorie dont les objets sont les objets de A , munis d'une filtration discrète et codiscrète, et dont les morphismes sont les morphismes filtrés de A : la catégorie F(A) est une catégorie additive (mais non abélienne).

La catégorie K(F(A)) des complexes filtrés de A , de filtration discrète et codiscrète degré par degré, est une catégorie triangulée et les foncteurs canoniques

(2.5.1.1) $$Gr_n : K(F(A)) \longrightarrow K(A)$$

sont triangulés. L'ensemble Σ des morphismes f de K(F(A)) tels que $Gr_n(f)$ soit un quasi-isomorphisme pour tout n est donc un système multiplicatif saturé [cf. [9]. §2. n°1].

En inversant les flèches de ce système, on obtient une nouvelle catégorie triangulée notée D F(A) et les foncteur Gr_n se prolongent en des foncteurs

(2.5.1.2) $$Gr_n : D\,F(A) \longrightarrow D(A) \quad .$$

Nous ne considérerons, par la suite, que des complexes bornés inférieurement : on introduit naturellement les notations $K^+(F(A))$ et $D^+F(A)$.

(2.5.2) Soit B une sous-catégorie épaisse de A et désignons par $K_B^+(F(A))$ la sous-catégorie pleine de $K^+(F(A))$ dont les objets sont les complexes $X^\cdot$ tels que $H^i(Gr_j(X^\cdot)) \in B$ pour tout couple d'entiers (i,j) : $K_B^+(F(A))$ est une <u>sous-catégorie triangulée localisante</u> de $K(F(A))$ [cf. [7]. (I. §5)] . Nous désignerons par $D_B^+ F(A)$ la sous-catégorie pleine de $D\,F(A)$ dont les objets sont les complexes bornés inférieurement $X^\cdot$ tels que $H^i(Gr_j(X^\cdot)) \in B$ pour tout couple (i,j) : d'après (loc. cit.), $D_B^+F(A)$ s'identifie à la catégorie de fractions $K_B^+(F(A))_{\Sigma \cap K_B^+(F(A))}$.

Le foncteur "oubli des filtrations" :

$$\iota : K^+(F(A)) \longrightarrow K^+(A)$$

est triangulé. De plus, il résulte de [[5]. I. (4.7)] que $\iota(f)$ est un quasi-isomorphisme si $f \in \Sigma$ et que $\iota(K_B^+(F(A)) \subset K_B^+(A)$. Le foncteur ι s'étend ainsi en un foncteur triangulé

(2.5.2.1) $$\iota : D^+F(A) \longrightarrow D^+(A)$$

tel que $\iota(D_B^+ F(A)) \subset D_B^+(A)$.

Notons enfin qu'il existe un <u>foncteur spectral</u> canonique $D_B^+ F(A) \longrightarrow B$, aboutissant à $H^n \circ \iota$, et dont le terme E_1 est donné par $H^{p+q} \circ Gr_p$ [cf. [5] I. (4.2)].

<u>Nous revenons maintenant aux notations de</u> (2.3) <u>en supposant</u> $D = \Delta$: $Z^\cdot$ désignera le complexe de $Add(\Delta)$ défini par (2.3.9.1).

<u>Proposition</u> (2.5.3) <u>Soit</u> $(S,\mathcal{O}_S)$ <u>un topos annelé</u>. <u>Le foncteur</u> $\underline{\underline{R}}^+\varepsilon_{Z^\cdot *} : D^+(\underline{\Gamma}(S\times D),\mathcal{O}_S) \longrightarrow D^+(S,\mathcal{O}_S)$ <u>possède une factorisation canonique</u>

$$D^+(\Gamma(S\times D),\mathcal{O}_S) \xrightarrow{F\underline{\underline{R}}^+\varepsilon_{Z^\cdot *}} D^+F(S,\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\iota} D^+(S,\mathcal{O}_S)$$

<u>De plus, pour tout entier</u> i , <u>le diagramme suivant est commutatif</u> :

$$\begin{tikzcd}
D^+(\underline{\Gamma}(S\times D),\mathcal{O}_S) \arrow[rr, "\underline{\underline{R}}^+(e_i^*)"] \arrow[d, "F\,\underline{\underline{R}}^+\varepsilon_{Z^\cdot *}"'] & & D^+(S,\mathcal{O}_S) \\
D^+F(S,\mathcal{O}_S) \arrow[urr, "\mathrm{Gr}_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Considérons le foncteur $C^+(C^+(S,\mathcal{O}_S)) \xrightarrow{(\ )_s} C^+(S,\mathcal{O}_S)$: si $X^{\cdot\cdot}$ est un objet de $C^+(C^+(S,\mathcal{O}_S))$, on muni $(X^{\cdot\cdot})_s$ de sa deuxième filtration canonique [cf. [5]. I.4.8] ; on obtient ainsi une factorisation :

(2.5.3.1) $$(\ )_s : C^+(C^+(S,\mathcal{O}_S)) \longrightarrow C^+(F(S,\mathcal{O}_S)) \xrightarrow{\ \iota\ } C^+(S,\mathcal{O}_S)$$

qui passe aux catégories K^+ :

(2.5.3.2) $$(\ )_s : K^+(C^+(S,\mathcal{O}_S)) \longrightarrow K^+(F(S,\mathcal{O}_S)) \xrightarrow{\ \iota\ } K^+(S,\mathcal{O}_S)$$

car une homotopie de $C^+(C^+(S,\mathcal{O}_S))$ induit une homotopie filtrée.

On a alors un diagramme :

(2.5.3.3) $$\begin{tikzcd}
D^+(\underline{\Gamma}(S\times\Delta),\mathcal{O}_S) \arrow[rr, "\underline{\underline{R}}^+\varepsilon_{Z^\cdot *}"] \arrow[dr, dashed] & & D^+(S,\mathcal{O}_S) \\
& D^+F(S,\mathcal{O}_S) \arrow[ur, "\iota"] & \\
& K^+(F(S,\mathcal{O}_S)) \arrow[u] \arrow[dr, "\iota"] & \\
K^+(\underline{\Gamma}(S\times\Delta),\mathcal{O}_S) \arrow[uuu] \arrow[ur] \arrow[rr, "(\ )_s\circ K^+(\varepsilon_{Z^\cdot *})"'] & & K^+(S,\mathcal{O}_S) \arrow[uuu]
\end{tikzcd}$$

et on vérifie qu'il existe un foncteur

$$ {}_{F}\underline{\underline{R}}^{+}\varepsilon_{Z^{\cdot}*} \quad : \quad D^{+}(\underline{\Gamma}(S\times\Delta),\mathcal{O}_S) \longrightarrow D^{+}F(S,\mathcal{O}_S) $$

et un seul rendant commutatif (2.5.3.3).

Le reste de la proposition est évident.

Proposition (2.5.4) Soient (E,A) un topos semi-simplicial annelé et $\theta : (E,A) \longrightarrow (S\times\Delta,\mathcal{O}_S)$ une augmentation : pour tout entier i, on désigne par $\theta_i : (E_i,A_i) \longrightarrow (S,\mathcal{O}_S)$ le morphisme de topos annelé induit par θ au-dessus de i .

Le foncteur $\underline{\underline{R}}^{+}\,\overline{\theta}_{*} : D^{+}(\underline{\Gamma}(E),A) \longrightarrow D^{+}(S,\mathcal{O}_S)$ possède une factorisation canonique

$$ D^{+}(\underline{\Gamma}(E),A) \xrightarrow{{}_{F}\underline{\underline{R}}^{+}\overline{\theta}_{*}} D^{+}F(S,\mathcal{O}_S) \xrightarrow{\ \iota\ } D^{+}(S,\mathcal{O}_S) $$

telle que pour tout entier i , le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd}
D^{+}(\underline{\Gamma}(E),A) \arrow[r, "\underline{\underline{R}}^{+}\, e_i^{*}"] \arrow[d, "{}_{F}\underline{\underline{R}}^{+}\overline{\theta}_{*}"'] & D^{+}(E_i,A_i) \arrow[d, "\underline{\underline{R}}^{+}\theta_{i*}"] \\
D^{+}F(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "Gr_i"'] & D^{+}(S,\mathcal{O}_S)
\end{tikzcd}$$

soit essentiellement commutatif.

Résulte de ce qui précède et de (1.3.1.2).

Proposition (2.5.5) Soient (E,A) un topos semi-simplicial annelé et $\theta : (E,A) \longrightarrow (S\times\Delta,\mathcal{O}_S)$ une augmentation de 1-descente cohomologique. Soit $H : (S,\mathcal{O}_S) \longrightarrow (R,\mathcal{O}_R)$ un morphisme de topos annelés. Alors il existe un foncteur spectral de ${}'D^{+}(S,\mathcal{O}_S)$ dans $\mathrm{Mod}(R,\mathcal{O}_R)$:

$$E_1^{pq} = R^q(H\circ\theta_p)_* \circ \underline{\underline{L}}^+\theta_p^* \Longrightarrow R^{p+q}H_*$$

appelé foncteur spectral de descente.

Soit $H\circ\theta : (E,A) \longrightarrow (R\times\Delta,\mathcal{O}_R)$ l'augmentation déduite canoniquement de θ par composition avec H ; on a

(2.5.5.1) $$\overline{(H\circ\theta)}_* = H_* \circ \overline{\theta}_*$$

de sorte que le diagramme

(2.5.5.2)
$$\begin{tikzcd} D^+(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\underline{\underline{L}}^+(\overline{\theta}^*)"] \arrow[dr, "\underline{\underline{R}}^+H_*"'] & D^+(\underline{\Gamma}(E),A) \arrow[d, "\underline{\underline{R}}^+\overline{(H\circ\theta)}_*"] \\ & D^+(R,\mathcal{O}_R) \end{tikzcd}$$

est essentiellement commutatif.

$$(\underline{\underline{R}}^+\overline{(H\circ\theta)}_* \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}^+H_* \circ \underline{\underline{R}}^+\overline{\theta}_* \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_{D^+(S,\mathcal{O}_S)} \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}^+\overline{\theta}_* \circ \underline{\underline{L}}^+\,\overline{\theta}^*) .$$

Grâce à (2.5.4), on dispose pour tout i , d'un diagramme essentiellement commutatif :

$$(2.5.5.3)\qquad \begin{tikzcd}
D^+(S,\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\underline{\underline{L}}^+\overline{\theta}^*"] \arrow[ddr, "\underline{\underline{R}}^+H_*"'] & D^+(\underline{\Gamma}(E),A) \arrow[r, "\underline{\underline{R}}^+(e_i^*)"] \arrow[d, "{}_F\underline{\underline{R}}^+\overline{(H\circ\theta)}_*"'] & D^+(E_i,A_i) \arrow[d, "\underline{\underline{R}}^+(H\circ\theta_i)_*"] \\
 & D^+F(R,\mathcal{O}_R) \arrow[r, "Gr_i"'] \arrow[d, "\iota"'] & D^+(R,\mathcal{O}_R) \\
 & D^+(R,\mathcal{O}_R) &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur spectral annoncé, s'obtient en considérant le foncteur spectral canonique sur $D^+F(R,\mathcal{O}_R)$ que l'on compose avec ${}_F\,\underline{\underline{R}}^+\overline{(H\circ\theta)}_* \circ \underline{\underline{L}}^+(\overline{\theta}^*)$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier la proposition suivante :

<u>Proposition</u> (2.5.6) <u>Avec les notations précédentes</u>, <u>le terme</u> E_2^{pq} <u>du foncteur spectral précédant s'écrit</u> :

$$\check{H}^p \circ R^q\Gamma((H\circ\theta)_*) \circ \underline{\underline{L}}^+\,\overline{\theta}^*$$

<u>où</u> $\check{H}^p : \mathrm{Mod}(\underline{\Gamma}(R\times\Delta),\mathcal{O}_R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R,\mathcal{O}_R)$ <u>est le foncteur qui associe à tout foncteur</u> $\Delta \xrightarrow{F} \mathrm{Mod}(R,\mathcal{O}_R)$ <u>l'objet d'homologie en degré</u> p <u>du complexe associé</u> (<u>noté</u> $\epsilon_{Z\cdot_*}(F)^\cdot$ <u>dans</u> (2.3.3)).

Nous revenons maintenant à la terminologie introduite dans (2.4) : grâce au sorite (2.5.2), toutes les considérations précédentes vont se transcrirent mot pour mot en plaçant la lettre G en indice partant ou cela a un sens. Les détails sont laissés aux soins du lecteur ; on obtient en particulier :

Proposition (2.5.7) Soient $\Theta : X \longrightarrow C^D_S$ une augmentation de 1-descente cohomologique relativement à G et soit $h : S \longrightarrow R$ un morphisme de B ; il existe un foncteur spectral de $D^+_{G_S}(S)$ dans G_R :

$$E_1^{pq} = R^q_G(h\circ\theta)_* \circ \underline{\underline{L}}^+_G \ \theta_p{}^* \Longrightarrow R^{p+q}_G \ h_*$$

avec $E_2^{pq} = \check{H}^p \circ R^q_G \,\Gamma((h\circ\theta)_*) \circ \underline{\underline{L}}^+_G \,\bar{\theta}^*$.

3. Critères de descente

(3.0) Notations

Dans tout ce qui suit, nous conserverons les notations de (2.4). Nous supposerons toujours que les produits fibrés finis sont représentables dans B

Nous supposerons de plus que B vérifie la condition suivante

(3.0.0) Les sommes directes existent dans B , sont disjointes, universelles et des familles de $\mathcal{E}$-descente effective et G^o-descente effective [cf. [4] (9.23) (9.25) et (9.27)].

(3.0.1) Rappelons maintenant quelques notations classiques sur les objets semi-simpliciaux d'une catégorie [cf. ([3] Chap. II) et (V. appendice)].

Soit E une catégorie possédant des limites projectives finies $\Delta^o E$ désigne la catégorie des objets semi-simpliciaux de E (cf. (1.2.6)).

Soit n un entier : on désigne par Δ_n (resp. $\Delta^+_n \ \Delta^-_n$) la sous-catégorie pleine de Δ (resp. Δ^+, Δ^-) formés par les objets $[p]$ tels que $p \leq n$.

Le foncteur restriction

(3.0.1.1) $$i^*_n : \Delta^o E \longrightarrow \Delta^o_n E$$

possède un adjoint à droite i_{n*} , puisque les limites projectives finies existent dans E (cf. (1.2.10)). On note cosk_n et on appelle <u>foncteur cosquelette d'ordre</u> n le foncteur $i_{n*} \circ i_n^*$; par abus de notations, nous utiliserons aussi la notation cosk_n pour le foncteur i_{n*} .

Pour tout entier p, désignons par $\underset{n[p]}{\Delta}$ (resp. $\underset{n[p]}{\Delta^+}$) la sous-catégorie pleine $\Delta_{[p]}$ (resp. $\Delta^+_{[p]}$) des objets de Δ (resp. Δ^+) au-dessus de $[p]$, définie par les objets $[q]$ au-dessus de $[p]$ tels que $q \leq n$; on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a :

(3.0.1.2) $$(\mathrm{cosk}_n(X))_p = \varprojlim_{\underset{n[p]}{\Delta}} X_q \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\underset{n[p]}{\Delta^+}} X_q$$

(3.0.2) Soient X et X' deux objets de $\Delta^{\circ}E$ et $f,g : X \rightrightarrows X'$ deux morphismes. Une <u>homotopie de</u> f <u>vers</u> g consiste en la donnée pour tout n d'une application $h_n : \mathrm{Hom}_\Delta([n],[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(X_n,X'_n)$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(3.0.2.1) $$h_n(\partial^1) = f_n \quad \text{et} \quad h_n(\partial^{\circ}) = g_n \quad \text{pour tout } n.$$

(3.0.2.2) pour toute flèche $[n] \longrightarrow [p]$ dans Δ , on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Delta([p],[1]) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Hom}_E(X_p,X'_p) \arrow[dr] & \\
& & & \mathrm{Hom}_E(X_p,X'_p) \\
\mathrm{Hom}_\Delta([n],[1]) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}_E(X_n,X'_n) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

N.B. : La relation ainsi introduite sur l'ensemble des morphismes de X dans X' n'est pas une relation d'équivalence ; on peut palier à cet inconvénient en introduisant la notion d'<u>homotopie composé</u> [cf. [3] chap. III] : nous n'utiliserons pas cette dernière notion.

<u>Lemme</u> (3.0.2.3) <u>Soient</u> X <u>et</u> X' <u>deux objets de</u> $\Delta^{o}E$, $f,g : X \rightrightarrows X'$ <u>deux morphismes et</u> $F : E \longrightarrow C$ <u>un foncteur où</u> C <u>est une catégorie abélienne</u>. <u>Une homotopie simpliciale de</u> f <u>vers</u> g <u>induit une homotopie sur les morphismes de complexes de cochaines canoniquement associés à</u> $F(f)$ <u>et</u> $F(g)$.

On est ramené au cas où C est la catégorie des modules sur un anneau et on applique [[5] I. (3.7.1)].

<u>Lemme</u> (3.0.2.4) <u>Soient</u> n <u>un entier</u>, X <u>et</u> X' <u>deux objets de</u> $\Delta^{o}_{n}E$. <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux morphismes de</u> X <u>dans</u> X' <u>tels que</u> $f_p = g_p$ <u>pour</u> $p < n$: <u>alors il existe une homotopie simpliciale de</u> $\mathrm{cosk}_n(f)$ <u>vers</u> $\mathrm{cosk}_n(g)$.

On définit $h_p : \mathrm{Hom}_{\Delta}([p],[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_p,X'_p)$ par l'application constante de valeur $f_p = g_p$ pour $p < n$, puis $h_n : \mathrm{Hom}_{\Delta}([n],[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X_n,X'_n)$ en envoyant tous les éléments de $\mathrm{Hom}_{\Delta}([n],[1])$, sauf ∂^{o}, sur f_n, et ∂^{o} sur g_n. On remarque ensuite que $\mathrm{Hom}_{\Delta}([k],[1]) = \varprojlim_{\substack{[q] \to [k] \\ q \geq n}} \mathrm{Hom}([q],[1])$ pour $k > n$, ce qui permet de définir canoniquement h_k.

(3.1) <u>Comparaison de deux augmentations du point de vue de la 1-descente cohomologique</u>

Soit S un objet de B : on désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{plat}}(D^{o},B/S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(D^{o},B/S)$ dont les objets sont les augmentations plates [cf. (1.2.6) et (2.4.3.1)].

<u>Proposition</u> (3.1.1) <u>Soient</u> $X \xrightarrow{n} C^{D}_{S}$ <u>et</u> $X' \xrightarrow{n'} C^{D}_{S}$ <u>deux objets de</u> $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{plat}}(D^{o},B/S)$. <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow X'$ <u>un morphisme au-dessus de</u> S (<u>i.e.</u> <u>un morphisme de</u> $\underline{\mathrm{Hom}}(D^{o},B/S)$) ; <u>il lui correspond de façon naturelle un morphisme fonctoriel</u>

$$\eta^{f}_{G} : \underline{\underline{R}}^{+}_{G}\, \overline{u}'_{*} \circ \underline{\underline{L}}^{+}_{G}\, \overline{u}'^{*} \longrightarrow \underline{\underline{R}}^{+}_{G}\, \overline{u}_{*} \circ \underline{\underline{L}}^{+}\, \overline{u}^{*}$$

<u>tel que le diagramme suivant soit commutatif</u> :

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{R}}^+_G \, \overline{u}'_* \circ \underline{\underline{L}}^+_G \, \overline{u}'^* \arrow[dd, "\eta^f_G"] \\
1_{D^+_{G_S}(S)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \underline{\underline{R}}^+_G \, \overline{u}_* \circ \underline{\underline{L}}^+_G \, \overline{u}^*
\end{tikzcd}
$$

<u>De plus, si</u> $D = \Delta$, η^f_G <u>ne dépend que de la classe d'homotopie</u> (cf. (3.0.2)) <u>de</u> f <u>dans</u> $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^o , B/S)$.

Il est clair que nous pouvons supposer que $G = \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{C}^o, \mathcal{O})$ pour la construction de η^f_G .

Soit I la catégorie définie par le type de diagramme

(3.1.1.1) $$\overset{o}{x} \longrightarrow \overset{1}{x}$$

On désigne par $r_o : D \longrightarrow I \times D$ (resp. r_1) le foncteur pleinement fidèle défini par $r_o(i) = (0,i)$ (resp. $r_1(i) = (1,i)$).

En vertu de l'isomorphisme canonique

(3.1.1.2) $$\underline{\mathrm{Hom}}((I \times D)^o, B/S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}(I^o, \underline{\mathrm{Hom}}(D^o, B/S))$$

les données de (3.1.1) définissent une augmentation plate

(3.1.1.3) $$XfX' \xrightarrow{ufu'} C_S^{I \times D}$$

Soit F un objet de $\mathrm{Mod}(\mathcal{C}^o_S, \mathcal{O}_S)$, le morphisme canonique

(3.1.1.4) $$\mathcal{C}^*_{I \times D}(F) \longrightarrow \Gamma((ufu')_*) \circ \Gamma((ufu')^*) \quad (\mathcal{C}^*_{I \times D}(F))$$

peut s'interpréter comme un triangle commutatif dans $\mathrm{Mod}(\overline{\underline{\Gamma}(C^D_S)}, \mathcal{O})$:

(3.1.1.5)
$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma(u'_*) \circ \Gamma(u'^*)(\mathcal{E}_D^*(F)) \arrow[dd] \\
\mathcal{E}_D^*(F) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \Gamma(u_*) \circ \Gamma(u^*)(\mathcal{E}_D^*(F))
\end{tikzcd}$$

d'où un morphisme fonctoriel $\bar{u}'_* \circ \bar{u}'^* \xrightarrow{\alpha_f} \bar{u}_* \circ \bar{u}^*$ tel que le diagramme

(3.1.1.6)
$$\begin{tikzcd}
 & \bar{u}'_* \circ \bar{u}'^* \arrow[dd, "\alpha_f"] \\
1_{\mathrm{Mod}(\mathcal{E}_S^o, \mathcal{O}_S)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \bar{u}_* \circ \bar{u}^*
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On obtient par suite un morphisme fonctoriel tel que le diagramme

(3.1.1.7)
$$\begin{tikzcd}
 & K^+(\bar{u}'_*) \circ K^+(\bar{u}'^*) \arrow[dd, "K^+(\alpha_f)"] \\
1_{K^+(\mathcal{E}_S^o, \mathcal{O}_S)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & K^+(\bar{u}_*) \circ K^+(\bar{u}^*)
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

(Remarquons que $K^+(\alpha_f)$ peut aussi s'obtenir formellement par adjonction en utilisant l'isomorphisme $K^+(\Gamma(f^*)) \circ K^+(\bar{u}'^*) \xrightarrow{\sim} K^+(\bar{u}^*))$.

Soient $F^\cdot$ un complexe de $K^+(S)$ et $\xi : K^+(\overline{u\ f\ u'^*})(F^\cdot) \longrightarrow J^\cdot$ un quasi-isomorphisme tel que, pour tout entier n , J^n soit totalement acyclique objet par objet (cf. (1.3.13)). D'après (loc. cit.) les flèches canoniques

$$K^+(\bar{u}^*)(F^\bullet) \longrightarrow r_1^*(J^\bullet) \quad \text{et} \quad K^+(\bar{u}^*)(F^\bullet) \longrightarrow r_o^*(J^\bullet)$$

sont des quasi-isomorphismes (cf. (1.2.8) pour les notations). On obtient par suite un morphisme

$$\mathbf{R}^+\,\bar{u}'_*\circ \mathbf{L}^+\,\bar{u}'^*(F^\bullet) \xrightarrow{\ \eta^f(F^\bullet)\ } \mathbf{R}^+\bar{u}_*\circ \mathbf{L}^+\,\bar{u}^*(F^\bullet)$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif dans $D^+(S)$:

(3.1.1.8)

$$\begin{tikzcd}
 & Q\circ K^+(\bar{u}'_*)(r_o^*(J^\bullet)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathbf{R}^+\bar{u}'_*\circ Q(r_o^*(J^\bullet)) \arrow[dd] \\
Q\circ K^+(\bar{u}'_*)\circ K^+(\bar{u}'^*)(F^\bullet) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "Q(K^+(\alpha_f)(F^\bullet))"'] & & \mathbf{R}^+\bar{u}'_*\circ\mathbf{L}^+\bar{u}'^*(F^\bullet) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dd, dashed, "\eta^f(F^\bullet)"' near start] & \\
 & Q\circ K^+(\bar{u}_*)(r_1^*(J^\bullet)) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbf{R}\bar{u}_*\circ Q(r_1^*(J^\bullet)) \\
Q\circ K^+(\bar{u}_*)\circ K^+(\bar{u}^*)(F^\bullet) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{R}^+\bar{u}_*\circ\mathbf{L}^+\bar{u}\,^*(F^\bullet) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $\eta^f(F^\bullet)$ ne dépend pas de la résolution choisie et on vérifie qu'il est fonctoriel en $F^\bullet$ variant dans $D^+(S)$.

Pour achever la démonstration de (3.11), il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme (3.1.1.9) Soient $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ et $X' \xrightarrow{u'} C_S^{\Delta}$ deux objets de $\mathrm{Hom}_{plat}(\Delta^o, B/S)$. Soient $f, g : X \longrightarrow X'$ deux morphismes dans $\mathrm{Hom}(\Delta^o, B/S)$: s'il existe une homotopie simpliciale de f vers g, on a $\eta^f = \eta^g$.

Soit $h_n : \mathrm{Hom}_{\Delta}([n],[1]) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B/S}(X_n, X'_n)$ une homotopie simpliciale de f vers g. Soit $\overline{I \times D}$ la catégorie obtenue à partir de $I \times D$ en ajoutant les flèches $(1,n) \longrightarrow (0,n)$ correspondant bijectivement à h_n $(\mathrm{Hom}([n],[1]))$ et les relations imposées par la compatibilité des h_n pour n variable. Les données du lemme définissent une augmentation plate $\overline{XfX'} \xrightarrow{t} C_S^{\overline{I\times D}}$. Soit $F^{\cdot}$ un complexe de $C^+(S)$ et $J^{\cdot}$ une résolution de $C^+(\overline{t}^*)(F^{\cdot})$ telle que pour tout entier n, J^n soit totalement acyclique objet par objet : il existe une homotopie simpliciale entre

$$C^+(\Gamma(u'_*))(r_o^*(J^{\cdot})) \rightrightarrows C^+(\Gamma(u_*))(r_1^+(J^{\cdot}))$$

d'où une homotopie lorsqu'on passe aux complexes "condensés". (cf. (3.0.2.3)).

Définition (3.1.2) Avec les notations de (3.1.1), nous dirons que f est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique si η_G^f est un isomorphisme.

(3.1.3) Nous noterons dans ce qui suit par $L_i : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$ (resp. $c_i : \Delta \longrightarrow \Delta \times \Delta$) le foncteur canonique défini par $[n] \longrightarrow [n]\times[i]$ (resp. $[n] \longrightarrow [i] \times [n]$).

Proposition (3.1.4) Soient $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta\times\Delta}$ et $X' \xrightarrow{u'} C_S^{\Delta\times\Delta}$ deux objets de $\mathrm{Hom}_{plat}((\Delta\times\Delta)^o, B/S)$. Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme au-dessus de S : on suppose que $f * id_{L_i} : X \circ L_i \longrightarrow X' \circ L_i$ (resp. $f * id_{c_i} : X \circ c_i \longrightarrow X' \circ c_i$) est une équivalence pour de la G-1-descente cohomologique pour tout entier i. Alors f est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique.

D'après la description de η^f (cf. démonstration de (3.1.1)) il s'agit de montrer qu'un certain morphisme de complexes triples induit un isomorphisme sur la cohomologie des complexes condensés : un raisonnement standard par suite spectrales permet alors de conclure.

Proposition (3.1.5) Soient X et X' deux objets de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{plat}}(\Delta^{\circ},B/S)$. Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme fonctoriel tel que $f_n : X_n \longrightarrow X'_n$ soit un morphisme de G-1-descente cohomologique. Alors le morphisme canonique $[[X|_f X']] \longrightarrow [[X'|_{id} X']]$ (cf. (1.2.7) est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique.

Résulte de (3.1.4) et du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme (3.1.5.1) Soient $f : R \longrightarrow S$ un morphisme plat, $Y \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ et $Y \xrightarrow{v} C_R^{\Delta}$ deux augmentations plates telles que le diagramme suivant soit commutatif dans $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^{\circ},B)$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "u"'] & & C_R^{\Delta} \arrow[dl, "f"] \\ & C_S^{\Delta} & \end{tikzcd}$$

Si v est une augmentation de G-1-descente cohomologique, c'est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique.

Dans les applications, nous combinerons (3.1.4) et (3.1.5) avec le résultat suivant :

Proposition (3.1.6) Soit $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta\times\Delta}$ une augmentation plate. Pour que u soit une augmentation de G-1-descente cohomologique, il suffit que $X\circ L_i \xrightarrow{u * id_{L_i}} C_S^{\Delta}$ (resp. $X\circ C_i \xrightarrow{u * id_{C_i}} C_S^{\Delta}$) le soit pour tout entier i.

Cela résulte de la construction explicite de $\underline{\underline{R}}_G^{+}\,\overline{u}_*$ (cf. (2.3.10)).

Corollaire (3.1.7) Soit $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ une augmentation pour que u soit de G-1-descente cohomologique, il faut et il suffit que $[[X|_{id}X]] \longrightarrow C_S^{\Delta\times\Delta}$ le soit.

3.2. Critères de localisation

Proposition (3.2.1) Soit $Y \xrightarrow{v} C_S^{\Delta}$ une augmentation de G-1-descente cohomologique. Pour qu'une augmentation plate $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ soit de G-1-descente cohomologique, il suffit qu'elle le devienne après tous les changements de base $Y_n \longrightarrow S$.

Au moyen des changements de base $Y_n \longrightarrow S$, on construit un objet semi-simplicial double $X\times_S Y$ augmenté vers S . D'après (3.1.4) et (3.1.5.1) le morphisme canonique $X\times_S Y \longrightarrow [[X|_{id}X]]$ est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique : en vertu de (3.1.7), il suffit de montrer que l'augmentation de $X\times_S Y$ vers S est de G-1-descente cohomologique. Or ceci résulte du fait que le morphisme canonique $X\times_S Y \longrightarrow [[Y|_{id}Y]]$ est une équivalence pour la G-1-descente cohomologique : on utilise encore (3.1.4), (3.1.5.1) et (3.1.7).

(3.2.2) Soit

(3.2.2.1)
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans B et soit F un objet de $\mathrm{Mod}(\mathcal{E}_S^o, \mathcal{O}_S)$: il existe un morphisme et un seul $\varphi(F) : g_*(f^*(F)) \longrightarrow f'^*(g'_*(F))$ tel que le diagramme suivant (dans $\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^o, \mathcal{O})$), soit commutatif :

(3.2.2.2)
$$\begin{tikzcd} & f^*(F) \arrow[dl] \arrow[rr] & & F \arrow[d] \\ g_*(f^*(F)) \arrow[dr] & & & g'_*(F) \\ & f'^*(g'_*(F)) \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Si l'on suppose maintenant que toutes les flèches de (3.2.2.1) sont plates, on définit de la même manière un morphisme, dit de <u>changement de base</u> :

$$(3.2.2.3) \qquad \xi_G \; : \; \underline{\underline{L}}^+_G\, g_* \circ \underline{\underline{R}}^+_G f^* \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+_G f'^* \circ \underline{\underline{L}}^+_G\, g'_*$$

<u>Définition</u> (3.2.2.4) <u>On dit que le diagramme</u> (3.2.2.1) vérifie le théorème du changement de base relativement à G <u>si</u> f , g, f', g' <u>sont des morphismes plats</u> <u>et si</u> ξ_G <u>est un isomorphisme</u>.

(3.2.3) Soient $h : S \longrightarrow S'$ un morphisme <u>plat</u> dans B , $X \xrightarrow{u} C^{\Delta}_S$ et $X' \xrightarrow{u'} C^{\Delta}_{S'}$ deux augmentations <u>plates</u>. Soit $f : X \longrightarrow X'$ un morphisme fonctoriel tel que le diagramme (dans <u>Hom</u>(Δ^o, B))

$$(3.2.3.1) \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & X' \arrow[d, "u'"] \\ C^{\Delta}_S \arrow[r, "h_c"] & C^{\Delta}_{S'} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. (h_c désigne le morphisme fonctoriel constant défini par h).

Soit $K^{\cdot}$ un complexe de $D^+(S')$: le morphisme

$$\eta^f_G(K^{\cdot}) \; : \; \underline{\underline{R}}^+\bar{u}'_* \circ \underline{\underline{L}}^+\, \bar{u}'^*(K^{\cdot}) \longrightarrow \underline{\underline{R}}^+(\overline{h_c \circ u})_* \circ \underline{\underline{L}}^+(\overline{h_c \circ u})^*(K^{\cdot})$$

induit, compte tenu des identités :

$$\underline{\underline{R}}^+(\overline{h_c \circ u})_* \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}^+h_* \circ \underline{\underline{R}}^+\bar{u}_* \quad \text{et} \quad \underline{\underline{L}}^+(\overline{h_c \circ u})^* \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{L}}^+(\bar{u}^*) \circ \underline{\underline{L}}^+h_*$$

un morphisme $ch^{f,h}_G(K^{\cdot})$, fonctoriel en $K^{\cdot}$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\underline{L}}_G^+ h_* \circ \underline{\underline{R}}_G^+ \bar{u}'_* \, \underline{\underline{L}}_G^+ \bar{u}'^*(K^\cdot) \arrow[rr, "ch_G^{f,h}(K^\cdot)"] & & \underline{\underline{R}}_G^+ \bar{u}_* \circ \underline{\underline{L}}_G^+ \bar{u}^* \circ \underline{\underline{L}}_G^+ h_*(K^\cdot) \\
& \underline{\underline{L}}_G^+ h_*(K^\cdot) \arrow[ul, "\underline{\underline{L}}_G^+ h_*(\alpha(K^\cdot))"] \arrow[ur, "\alpha(\underline{\underline{L}}_G^+ h_*(K^\cdot))"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.2.3.2}
$$

<u>Lemme</u> (3.2.3.3) <u>Supposons que, pour tout entier</u> i , <u>le diagramme</u>

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i"'] & X'_i \arrow[d, "u'_i"] \\
S \arrow[r, "h"] & S'
\end{tikzcd}
$$

<u>vérifie le théorème du changement de base relativement à</u> G . <u>Alors</u> $ch_G^{f,h}$ <u>est un isomorphisme</u>.

On peut calculer $ch_G^{f,h}(K^\cdot)$ de la manière suivante : on considère l'augmentation $X \; f \; X' \xrightarrow{(h_c \circ u)^G f \; u'} C_S^{\Delta'}$ (cf. (3.1.1.2)) et l'on choisit une résolution $J^\cdot$ de $K^+(\overline{(h_c \circ u) \; f \; u'}^*)(K^\cdot)$ telle que, pour tout entier n , J^n soit totalement acyclique objet par objet.

On obtient un quasi-isomorphisme

$$\theta : K^+(\Gamma(f^*))(r_o^*(J^\cdot)) \longrightarrow r_1^*(J^\cdot)$$

et un morphisme

$$t : K^+(\Gamma(h_c^*)) \circ K^+(\Gamma(u'_\alpha))(r_o^*(J^\cdot)) \longrightarrow K^+(\Gamma(u_*))(r_1^*(J^\cdot))$$

qui admet la factorisation :

$$K^+(\Gamma(h_c^*) \circ K^+(\Gamma(u_*^!))(r_o^*(J^\cdot)) \xrightarrow{\varphi} K^+(\Gamma(u_*))\circ K^+(\Gamma(f^*))(r_o^*(J^\cdot) \xrightarrow{K^+(\Gamma(u_*))(\theta)}$$

$$\longrightarrow K^+(\Gamma(u_*))(r_1^*(J^\cdot))$$

et $ch^{f,h}(K^\cdot)$ s'obtient en prenant l'image de t par le foncteur $\underline{\underline{R}}^+\varepsilon_{Z^\cdot *}$.

Or, la factorisation précédente montre que, t s'identifie "objet par objet" aux morphismes de changmement de base relatifs aux diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u_i"'] & X_i' \arrow[d, "u_i'"] \\ S \arrow[r, "h"] & S' \end{tikzcd}$$

on en déduit, par suites spectrales, que $ch_G^{f,h}(K^\cdot)$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Ceci nous conduit à un <u>second critère de localisation</u> :

<u>Proposition</u> (3.2.4) <u>Soit</u> $X \xrightarrow{u} C_S^\Delta$ <u>un objet de</u> $\underline{Hom}_{plat}(\Delta^o,B/S)$. <u>Pour que</u> u <u>soit une augmentation de</u> G-1-<u>descente cohomologique</u>, <u>il suffit qu'elle le devienne après</u> "<u>suffisamment pour</u> G" (*) <u>de changements de base</u> plats $h : S' \longrightarrow S$ <u>tels que les diagrammes cartésiens</u>

$$\begin{tikzcd} X_i' \arrow[r] \arrow[d] & X_i \arrow[d] \\ S' \arrow[r, "h"] & S \end{tikzcd}$$

<u>vérifient le théorème du changement de base relativement à</u> G .

(*) L'expression "suffisamment pour G " signifie qu'il existe une famille $(S_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} S)_{\alpha\in A}$ de morphismes plats vérifiant les conditions précédentes et telle que la famille de foncteurs $(h_{\alpha *} : G_S \to G_{S_\alpha})_{\alpha\in A}$ soit <u>conservative</u>.

La proposition (3.2.4) est évidente à partir de (3.2.3.3), compte tenu du diagramme (3.2.3.2).

3.3. Propriétés des morphismes de descente cohomologique

Dans ce numéro, nous supposons que l'ensemble des morphismes plats dans B est stable par changement de base.

Proposition (3.3.1) $i = 1,2$.

a) Tout morphisme plat qui possède une section est un morphisme de G-2-descente cohomologique universelle.

b) Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme plat, $g : S' \longrightarrow S$ un morphisme de G-i-descente cohomologique, $X' = X \times_S S'$, $f' = f_{(S')} : X' \longrightarrow S'$. Pour que f soit de G-i-descente cohomologique universelle, il faut et il suffit que f' le soit .

c) Si le composé de deux morphismes $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ est de G-i-descente cohomologique universelle, g est de G-i-descente cohomologique universelle.

d) Le composé de deux morphismes de G-i-descente cohomologique universelle est un morphisme de G-i-descente cohomologique universelle.

e) Si $f : X \longrightarrow X'$ et $g : Y \longrightarrow Y'$ sont deux S-morphismes de G-i-descente cohomologique universelle, $f \times_S g$ est de G-i-descente cohomologique universelle.

f) Soit $(u_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de morphismes de G-i-descente cohomologique. Alors $\coprod u_\alpha : \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow \coprod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ est un morphisme de G-i-descente cohomologique.

Démonstration. En ce qui concerne la descente effective relativement à G nous renvoyons à [4].

a) Au moyen d'une section s de f on compare les objets semi-simpliciaux augmentés vers S : $[X|_f S]$ et $[S|_{id} S]$; grâce à (3.0.2.4) on obtient une équivalence pour la G-1-descente cohomologique.

b) Résulte de (3.2.1).

c) Résulte de a) et b).

d) Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow S$ deux morphismes de G-1-descente cohomologique universelle. Posons $h = g \circ f$ et considérons le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\ h'\ } & R \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ S & \xleftarrow[\ h\ ]{} & X \end{array}$$

g' possède une section $s : X \longrightarrow R$ tel que $h' \circ s = f$. D'après c) h' est de G-1-descente universelle et il en est de même de h d'après b).

e) Résulte formellement de b) et d).

f) Soit $(Z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'objets de B . Il résulte des hypothèses (3.0.0) que l'on dispose d'une équivalence canonique

$$\mathrm{Mod}\left(\mathcal{E}^{o}_{\coprod_\lambda Z_\lambda}, \mathcal{O}_{\coprod_\lambda Z_\lambda}\right) \xrightarrow{\ \sim\ } \prod_\lambda \mathrm{Mod}(\mathcal{E}^{o}_{Z_\lambda}, \mathcal{O}_{Z_\lambda})$$

induisant une équivalence

$$G_{\coprod_\lambda Z_\lambda} \xrightarrow{\ \sim\ } \prod_\lambda G_{Z_\lambda}$$

De plus, si $(Q_\lambda)_\lambda \in \prod_\lambda \mathrm{Mod}(\mathcal{E}^{o}_{Z_\lambda}, \mathcal{O}_{Z_\lambda})$ est totalement acyclique, Q_λ est totalement acyclique pour tout λ

Soit maintenant $(u_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de morphismes de G-1-descente cohomologique : puisque les sommes directes dans B sont disjointes et universelles, on a pour tout n , une identification

$$\left[\coprod_{\lambda} X_{\lambda} \,\Big|_{\coprod u_{\lambda}} \coprod Y_{\lambda} \right]_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda} [X_{\lambda} |_{u_{\lambda}} Y_{\lambda}]_n$$

qui est fonctorielle en n . On déduit alors des remarques précédentes et du calcul explicite de $\underline{\underline{R}}_G^+ \theta_*$ (cf. (2.3)) que $\coprod_{\lambda} u_{\lambda}$ est un morphisme de G-1-descente cohomologique : les détails sont laissés au lecteur. On laisse aussi à ce dernier le soin de vérifier que $\coprod_{\lambda} u_{\lambda}$ <u>reste de G-1-descente cohomologique après tout changement de base s'il en est de même de</u> u_{λ} <u>pour tout</u> λ .

(3.3.2) Si l'on associe à chaque objet X de B l'ensemble des familles de morphismes $(X_{\alpha} \longrightarrow X)_{\alpha \in A}$ telles que $\coprod_{\alpha} X_{\alpha} \longrightarrow X$ soit un morphisme de G-i-descente cohomologique universelle on définit, en vertu de (3.3.1), une prétopologie sur B .

La topologie engendrée par cette prétopologie s'appelle la <u>topologie de la G-i-descente cohomologique</u>. Il résulte de [(3.3.1)-c)] que les morphismes couvrants pour cette topologie sont exactement les morphismes de G-i-descente cohomologique universelle. Notons enfin que la topologie de la G-2-descente cohomologique est moins fine que la topologie de la G°-descente [cf.[4] (6.23)].

<u>Théorème</u> (3.3.3) <u>On suppose que</u> toutes les flèches de B sont plates. <u>Soit</u> S <u>un objet de</u> B : <u>tout hyperrecouvrement de</u> S , <u>pour la topologie de la G-1-descente cohomologique</u>, <u>dont tous les objets sont représentables</u> (cf. V appendice) <u>définit une augmentation de</u> G-1-<u>descente cohomologique universelle</u>.

La démonstration se fait en deux étapes : précisons que tous les cosquelettes seront calculés dans la catégorie B/S .

Lemme (3.3.3.1) *Soit X un objet de $\mathrm{Hom}(\Delta^o, B/S)$ pour que X soit de 1-descente cohomologique* (resp. *universelle*), *il suffit que* $\mathrm{cosk}_n(X)$ *le soit pour tout* n *assez grand*.

Soit en effet $\alpha_n : X \longrightarrow \mathrm{cosk}_n(X)$ le morphisme canonique : on vérifie alors que si $K^\cdot$ est un complexe de $D^+_{G_S}(S)$ tel que $H^j(K^\cdot) = 0$ pour $j < N$, $H^i(\eta_G^{\alpha_n})$ est un isomorphisme pour $i < N+n$, d'où l'assertion.

Lemme (3.3.3.2) *Soient* n *un entier* ≥ 0, X *et* X' *deux objets simpliciaux de* B/S. *Soit* $f : X \longrightarrow X'$ *un morphisme. On suppose que* :

(i) $X \longrightarrow \mathrm{cosk}_{n+1}(X)$ *est un isomorphisme*.

(ii) $X' \longrightarrow \mathrm{cosk}_{n+1}(X')$ *est un isomorphisme*.

(iii) $f_i : X'_i \longrightarrow X_i$ *est un isomorphisme pour* $i \leq n$.

(iv) f_{n+1} *est un morphisme de* G-1-*descente cohomologique universelle*.

Alors si X *est de* G-1-*descente cohomologique universelle, il en est de même de* X'.

Il est clair que (3.3.3.1) et (3.3.3.2) démontrent le théorème (3.3.3) par récurrence.

Lemme (3.3.3.3) *Sous les hypothèses de* (3.3.3.2), *les morphismes* f_p *sont tous de* G-1-*descente cohomologique universelle*

C'est trivial pour $p \leq n+1$. Pour $p > n+1$, X_p (resp. X'_p) peut s'écrire comme $\varprojlim_{\Delta^+_{n+1[p]}} X_q$ (resp. $\varprojlim_{\Delta^+_{n+1[p]}} X'_q$). Or pour toute flèche $\iota : i \longrightarrow j$ de $\Delta^+_{n+1[p]}$ on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
K'_\iota \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_\iota"'] & \prod\limits_{r\in ob(\Delta^+_{n+1[p]})} X'_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[r] \arrow[d] & X'_j \arrow[r] & X'_i \arrow[d, "f_i"] \\
K_\iota \arrow[r] & \prod\limits_{ob(\Delta^+_{n+1[p]})} X_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[r] & X_j \arrow[r] & X_i
\end{tikzcd}$$

dont le carré de gauche est cartésien (ou bien $i = n+1 = j$ et $\iota = id$, ou bien $i < n+1$ et f_i est un isomorphisme). Utilisant alors (3.3.1) on voit que α_ι est un morphisme de G-1-descente cohomologique universelle. On achève la démonstration en remarquant que f_p s'identifie au morphisme canonique $\prod\limits_\iota K'_\iota \xrightarrow{X\,\alpha_\iota} \prod\limits_\iota K_\iota$.

Soit $[X'/X]^p$ le produit fibré itéré $(p+1)$-uple de X' au-dessus de X . Grâce à(3.3.3.3), il suffit de vérifier(3.3.3.2) après un changement de base $[X'/X]^p \longrightarrow X$. Après un tel changement de base, les hypothèses de (3.3.3.2) sont encore vérifiées, et de plus f_{n+1} admet une section. On peut alors appliquer (3.0.2.4) pour achever la démonstration.

En ce qui concerne la descente effective, on a :

<u>Proposition</u> (3.3.4) <u>Soit</u> $X : \Delta^o \longrightarrow B/S$ <u>un foncteur</u>. <u>On suppose que</u> $X_o \longrightarrow S$ <u>est un morphisme de</u> G^o-2-<u>descente universelle ainsi que les morphismes</u> $X_{n+1} \longrightarrow (cosk_n(X))_{n+1}$ <u>pour</u> $n = 0,1$. <u>Alors le foncteur</u> X <u>est</u> G^o-2-<u>fidèle</u> <u>et le reste après tout changement de base</u> (<u>autrement dit</u> X <u>définit une augmentation de descente effective universelle au sens de</u> (2.4.11)).

D'après [4] (7.12), il suffit de voir que $i_2^*(X)$ est G^o-2-fidèle et on utilise pour ce faire les lemmes suivants :

Lemme (3.3.4.1) Soient X et X' deux foncteurs $\Delta^{o}_{2} \longrightarrow B/S$ et un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
X'_2 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, leftarrow, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, leftarrow, shift right=3] \arrow[r, shift right=5] \arrow[d, "k"'] & X'_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, equal] & X'_o \arrow[r] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, equal] \\
X_2 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, leftarrow, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, leftarrow, shift right=3] \arrow[r, shift right=5] & X_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & X_o \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

tel que k soit un morphisme de G^{o}-0-descente. Alors si X est G^{o}-2-fidèle, il en est de même de X' .

Evident.

Lemme (3.3.4.2) Soient X et X' deux foncteurs $\Delta^{o}_{2} \longrightarrow B/S$ et un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
X'_2 \arrow[r, shift left=4, "\partial^{o}"] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r, shift left=0, "\partial^{1}"'] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4, "\partial^{2}"'] \arrow[d, "f_2"'] & X'_1 \arrow[r, shift left=2, "\partial^{o}"] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2, "\partial^{1}"'] \arrow[d, "f_1"] & X'_o \arrow[r] \arrow[d, equal] & S \arrow[d, equal] \\
X_2 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, leftarrow, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, leftarrow, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] & X_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, leftarrow] \arrow[r, shift right=2] & X_o \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

tel que f_1 soit de G^{o}-1-descente et f_2 de G^{o}-0-descente. On suppose de plus que $X'_2 \xrightarrow{\sim} (\mathrm{cosk})_1(X'))_2$. Alors si X est G^{o}-2-fidèle, il en est de même de X' .

Soient $X''_1 = X'_1 \times_{X_1} X'_1$, $\underline{\partial}_o : X''_1 \longrightarrow X'_1$ et $\underline{\partial}_1 : X''_1 \longrightarrow X'_1$ les deux projections.

Grâce à la définition d'un cosquelette, on définit une flèche $\varphi : X''_1 \longrightarrow X'_2$ telle que :

$$
\begin{cases}
\partial_o \circ \varphi = \underline{\partial}_o \\
\partial_1 \circ \varphi = \underline{\partial}_1 \\
\partial_2 \circ \varphi = \sigma_o \, \partial_1 \, \underline{\partial}_o = \sigma_o \, \partial_1 \, \underline{\partial}_1
\end{cases}
$$

Soit maintenant une donnée de descente sur X' ; d'où un objet sur X_o , deux objets sur X_1 , un isomorphisme entre eux sur X_1' . Grâce à φ , on voit que les deux images réciproques de ces isomorphismes sur X_1'' sont égales. Puisque f est de 1-descente, on attrape un isomorphisme entre les deux objets sur X_1 ; cet isomorphisme est une donnée de descente (grâce au fait que $X_2' \longrightarrow X_2$ est de 0-descente), et on a gagné.

Corollaire (3.3.5) On suppose que toutes les flèches de B sont plates : tout hyperrecouvrement de S , pour la topologie de la G-2-descente cohomologique, dont les objets sont représentables, définit une augmentation de G-2-descente cohomologique universelle.

4. Exemples

(4.1) Faisceaux de groupes abéliens sur les espaces topologiques

(4.1.0) Dans ce numéro Top désigne la catégorie des espaces topologiques [éléments de l'univers fixé $\mathfrak{U}$] : on définit une catégorie $\mathcal{E}$ bifibrée en duaux de topos au-dessus de Top en prenant pour objets les couples (X,F), où X est un espace topologique et F un faisceau d'ensembles sur X , et pour morphismes les couples $(f,\varphi) : (X,F) \longrightarrow Y,H)$ où $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $\varphi : H \longrightarrow f_*(F)$ un morphisme de faisceaux. On prend pour $\mathfrak{G}$ la section de $\mathcal{E}^o$ au-dessus de Top^o qui associe à chaque espace topologique le faisceau constant $\mathbb{Z}_X$: on posera $G = \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^o,\mathfrak{G})$ de sorte que, pour tout espace topologique X , G_X s'identifie à la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X .

Rappelons qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est séparé si la diagonale de $X \times_Y X$ est fermée. Un morphisme propre est un morphisme séparé et universellement fermé (prendre garde que cette définition est plus restrictive que celle de Bourbaki).

La démonstration du "théorème de changement de base" ci-dessous est inspirée de([5] II(4.11.1).

<u>Théorème</u>(4.1.1) <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre</u>, F <u>un faisceau abélien sur</u> X <u>et un diagramme cartésien</u>

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

<u>Alors</u>, <u>l'application canonique</u> (XII 4.2) ou (3.2.2.3)

$$g^*R^if_*F \xrightarrow{\simeq} R^if'_* g'^*F$$

<u>est un isomorphisme</u>.

Ce théorème équivaut au corollaire suivant (le corollaire s'obtient en faisant $Y' =$ (Point) ; le théorème s'obtient en appliquant le corollaire à f et f') .

<u>Corollaire</u>(4.1.2) <u>Soient</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme propre</u>, F <u>un faisceau abélien sur</u> X <u>et</u> $y \in Y$. <u>L'application canonique</u>

$$(R^if_*F)_y \longrightarrow H^i(f^{-1}(y), F)$$

<u>est bijective</u>.

Par définition, pour U parcourant les voisinages de Y , on a

$$(R^if_*F)_y = \varinjlim H^i(f^{-1}(U), F) .$$

Puisque f est fermé, les $f^{-1}(U)$ forment un système fondamental de voisinages de $f^{-1}(y)$ et(4.1.3) résulte du lemme suivant.

Lemme (4.1.3) *Soient* X *un espace topologique,* $K \subset X$ *et* F *un faisceau abélien sur* X . *On suppose que* K *est compact et que deux points distincts quelconques de* K *ont, dans* X , *des voisinages disjoints. Alors, pour* U *parcourant les voisinages de* K , *on a*

(4.1.3.1) $$\varinjlim H^i(U,F) \xrightarrow{\sim} H^i(K,F)$$

Nous traiterons d'abord le cas $i = 0$. Dans ce cas, il est clair que (4.1.3.1) est injectif. Pour la surjectivité, nous utiliserons

Lemme (4.1.4) *Sous les hypothèses de* (4.1.3), *si* A *et* B *sont deux fermés de* K *et* W *un voisinage de* $A \cap B$ *dans* X , *il existe des voisinages* U *et* V *de* A *et* B *dans* X *tels que* $U \cap V \subset W$.

Nous traiterons d'abord le cas où A est réduit à un point a . L'assertion est triviale si $a \in B$ (prendre $U = W$). Si $a \notin B$ il existe pour chaque $b \in B$ des voisinages ouverts disjoints U_b et V_b de a et b dans X . On prend pour V une réunion finie de V_b qui comme B , et pour U l'intersection des U_b correspondants.

Dans le cas général, pour chaque $a \in A$, il existe des voisinages ouverts U_a et V_a de a et B dans X avec $U_a \cap V_a \subset W$. On prend pour U une réunion finie des U_a , qui couvre A , et pour V l'intersection correspondante des V_a .

Revenons à (4.1.3). Si $s \in H^o(K,F)$, il existe un recouvrement ouvert U_i de K dans X et des $s_i \in H^o(U_i,F)$ tels que $s_i = s$ sur $U_i \cap K$. On peut supposer les U_i en nombre fini. Soit (K_i) un recouvrement fermé de K , avec $K_i \subset K \cap U_i$. Soit W_y l'ouvert de $U_i \cap U_j$ où $s_i = s_j$; on a $K_i \cap K_j \subset W_{ij}$. Appliquons (4.1.4) à tous les couples (K_i, K_j) et aux W_{ij}: on trouve des ouverts V_{ij} avec $K_i \subset V_{ij} \subset U_i$ et $V_{ij} \cap V_{ji} \subset W_{ij}$. Soit $U_i' = \bigcap_j V_{ij}$: on a $K_i \subset U'_i \subset U_i$, et $s_i = s_j$ sur $U_i' \cap U_j'$. Les s_i se recollent donc sur le voisinage de K réunion des U'_i , et (4.1.3.1) est surjectif (donc bijectif) pour $i = 0$.

Lemme (4.1.5) *Si F est flasque, le faisceau $F|K$ sur K est mou.*

Soit $A \subset K$ un fermé dans K . Toute section de F sur A se prolonge à un voisinage, d'après ce qui précède. Puisque F est flasque, elle se prolonge à X , et a fortiori à K .

Prouvons (4.1.3). Soit F^* une résolution flasque de F . On a

$$\varinjlim H^i(U,F) = \varinjlim H^i(\Gamma(U,F^*)) = H^i \varinjlim \Gamma(U,F^*) \underset{4.1.3(i=0)}{=} H^i\, \Gamma(K,F^*) \underset{(4.1.5)}{=} H^i(K,F) \ .$$

Corollaire (4.1.6) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre et surjectif d'espaces topologiques. Alors, f est de G-1-descente cohomologique.*

Résulte de (4.1.2) et (3.2.4).

Corollaire (4.1.7) *Soit $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fermé localement fini d'un espace topologique X . Alors le morphisme canonique $f : \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X$ est un morphisme de G-1-descente cohomologique.*

En effet f est propre et surjectif. En appliquant (2.5.6), on retrouve la suite spectrale de [[5]. II (5.2.4)] (cf. l'introduction).

Proposition (4.1.8) *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme local surjectif d'espace topologique. Alors f est un morphisme de G-1-descente cohomologique universelle.*

Par localisation sur Y (cf. (3.2.4), on est ramené au cas où f possède une section.

<u>Corollaire</u> (4.1.9) <u>Soit</u> $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ <u>un recouvrement ouvert d'un espace topologique</u> X . <u>Alors le morphisme canonique</u> $f : \coprod_{i\in I} U_i \longrightarrow X$ <u>est un morphisme de</u> G-1-<u>descente cohomologique universelle</u>.

La suite spectrale de descente donne alors [[5] II (5.4.1)] (cf. l'Introduction).

<u>Remarque</u> (4.1.10) Les démonstrations de (VIII. 9) montrent que l'on peut remplacer "1-descente cohomologique" par "2-descente cohomologique" dans tous les énoncés qui précèdent.

(4.2) <u>Modules quasi-cohérents sur les schémas</u>

(4.2.0) Soit $(Sch)_{\mathfrak{U}}$ la catégorie dont les objets sont les schémas éléments de $\mathfrak{U}$ et les flèches les morphismes quasi-compacts et quasi-séparés : on définit une catégorie $\mathcal{E}$ bifibrée en duaux de topos au-dessus de $(Sch)_{\mathfrak{U}}$ en prenant pour objets les couples (X,F) où X est un schéma et F un faisceau sur X (pour la topologie de Zariski), et pour morphismes les couples $(f,\varphi) : (X,F) \longrightarrow (Y,G)$, où $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $\varphi : G \longrightarrow f_*(F)$ un morphisme de faisceaux. On prend pour $\mathcal{O}$ la section de $\mathcal{E}^{o}$ au-dessus de $(Sch)^{o}_{\mathfrak{U}}$ qui associe à tout schéma son faisceau structural ; on prend pour G la sous-catégorie de $\underline{Mod}(\mathcal{E}^{o},\mathcal{O})$ telle que pour tout schéma X , G_X soit la catégorie des modules quasi-cohérents sur X .

<u>Proposition</u> (4.2.1) <u>Tout morphisme</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>fidèlement plat quasi-compact et quasi-séparé est un morphisme de G-2-descente cohomologique universelle</u>.

D'après [S.G.A I (VIII5.2)], f est un morphisme de G^{o}-descente effective. En vertu de [E.G.A IV (1.7.21)], on peut appliquer (3.2.4) au carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X\times_Y X & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow f \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

(4.3) Faisceaux étales sur les schémas

(4.3.0) Soit (Sch) la catégorie de tous les schémas appartenant à $\mathfrak{U}$: on définit donc une catégorie $\mathcal{E}$ bifibrée en duaux de topos au-dessus de (Sch) en prenant pour objets les couples $(X,\mathfrak{F})$, où X est un schéma et F un faisceau étale sur X , et pour morphismes les couples $(f,\varphi) : (X,\mathfrak{F}) \longrightarrow (Y,\mathfrak{G})$, où $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas et $\varphi : \mathfrak{G} \longrightarrow f_*(\mathfrak{F})$ est un morphisme de faisceaux.

Soit n un entier ≥ 0 : on désigne par $\mathcal{O}_n$ la section de $\mathcal{E}^o$ au-dessus de $(\mathrm{Sch})^o$ qui associe à tout schéma X le faisceau constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_X$. On posera $F_n = \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}^o,\mathcal{O}_n)$ de sorte que, pour tout schéma X , F_{n_X} s'identifie à la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-modules sur X .

(4.3.1) Soit maintenant $(\mathrm{Sch})_s$ la sous-catégorie de (Sch) dont les objets sont les schémas éléments de $\mathfrak{U}$ et dont les flèches sont les morphismes quasi-compacts et quasi-séparés. On désigne par $\mathcal{E}_s$ la catégorie bifibrée en duaux de topos au-dessus de $(\mathrm{Sch})_s$ déduite de $\mathcal{E}$ par le changement de base $(\mathrm{Sch})_s \longrightarrow (\mathrm{Sch})$; on désigne encore par $\mathcal{O}_o$ la restriction de $\mathcal{O}_o$ à $(\mathrm{Sch})_s$. Soit $G \subset \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}_s^o,\mathcal{O}_o)$ la sous-catégorie fibrée et cofibrée de $\underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{E}_s^o,\mathcal{O}_o)$ telle que pour tout schéma X , G_X soit la catégorie des faisceaux abéliens de torsion sur X : le lecteur notera que la condition (2.4.1.1) est vérifiée.

Proposition (4.3.2) *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme* propre surjectif. *Alors* f *est un morphisme de* F_n*-2-descente cohomologique universelle pour* $n \geq 1$. *Considéré comme morphisme de* $(\mathrm{Sch})_s$, f *est un morphisme de G-2-descente cohomologique universelle*.

D'après (VIII. (9.4)) f est un morphisme de F^{o}-descente effective et d'après (XII. (5.1)), on peut appliquer (3.2.4) au diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X\times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Proposition (4.3.3) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme surjectif de schémas. On suppose que l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

a) f est entier.

b) Y est localement noethérien, f est universellement ouvert et localement de présentation finie.

c) f est plat et localement de présentation finie.

Alors f est un morphisme de F_n-2-descente cohomologique, pour tout $n \geq 0$.

a) On recopie la démonstration de (4.3.2) en remplaçant (XII. (5.1)) par (VIII. (5.6)).

b) La question étant locale sur Y , on peut supposer que Y est noethérien. On applique (E.G.A. IV. (14.5.10)). Par (3.3.1) et a) on se ramène au cas où tout point y de Y possède un voisinage U tel que $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ possède une section et on gagne par (3.2.4).

c) Il s'agit de montrer que f est un morphisme de F-1-descente cohomologique (on sait par (VIII. (9.4)) que f est un morphisme de F^{o}-descente effective).

Par localisation sur Y (cf. (3.2.4)), on peut supposer que Y est affine d'anneau A. On peut alors écrire $\operatorname{Spec} A = \varprojlim_{i\in I} \operatorname{Spec} A_i$, où I est un ensemble ordonné filtrant et A_i un anneau noethérien pour tout i , avec $X = \varprojlim X_i$, où, pour tout i, X_i est un schéma plat et localement de présentation finie sur $\operatorname{Spec} A_i$ tel que $f_i : X_i \longrightarrow \operatorname{Spec} A_i$ soit surjectif ; de plus, les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ Y \arrow[r, "u_i"] & \operatorname{Spec} A_i \end{tikzcd}$$

sont cartésiens.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur Y : on a $\mathcal{F} = \varinjlim_i u_i^* u_{i*}(\mathcal{F})$ de sorte que, par un passage à la limite standard, on est ramené au cas où $\mathcal{F}$ provient d'un faisceau sur $\operatorname{Spec} A_i$ pour un certain i, et b) permet de conclure.

Remarque (4.3.4) Si $f : X \longrightarrow Y$ est entier, on a $R^q f_* = 0$ pour $q > 0$. On en conclut facilement qu'il n'est pas nécessaire de se limiter aux complexes bornés inférieurement pour faire de la descente au moyen de f.

Corollaire (4.3.5) Soit $(X_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} X)_{\alpha \in A}$ une famille couvrante pour la topologie étale. Alors $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow X$ est un morphisme de F_n-2-descente cohomologique universelle pour tout $n \geq 0$.

En effet, il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "h"] & & X \end{tikzcd}$$

où h est un morphisme étale surjectif.

5. Applications

(5.1) Construction d'objets simpliciaux

(5.1.0) Jusqu'au numéro (5.1.3) compris, H est une catégorie où les limites projectives finies non vides existent et où les sommes finies existent, sont disjointes et universelles. Si $X : \Delta^o \longrightarrow H$ est un objet simplicial de H, nous noterons $d_i^k : X_k \longrightarrow X_{k-1}$ (resp. $s_i^k : X_k \longrightarrow X_{k+1}$) pour $i \in [k]$ et $0 \leq k$ les flèches correspondantes aux opérateurs "faces" $\partial_k^i : [k-1] \longrightarrow [k]$ (resp. aux opérateurs de dégénérescence $\sigma_k^i : [k] \longrightarrow [k+1]$) (cf. [3] II 2).

<u>Définition</u> (5.1.1) <u>Un objet simplicial</u> $X : \Delta^o \longrightarrow H$ <u>de</u> H <u>est</u> σ-scindé <u>s'il existe une famille de sous-objets</u> NX_j <u>des</u> X_j $(j \geq 0)$ <u>telle que les morphismes</u>

$$h_i : \coprod_{\substack{\mathrm{Hom}([i],[j]) \\ \Delta^- \\ j \leq i}} NX_j \longrightarrow X_i$$

<u>soient des isomorphismes</u>.

De même, un objet simplicial k-tronqué $X : \Delta_k^o \longrightarrow H$ est σ-scindé s'il existe des NX_j $(0 \leq j \leq k)$ vérifiant la condition précédente pour $i \leq k$.

Les NX_j sont uniquement déterminés par X. En effet, si X est σ-scindé, les opérateurs de dégénérescence $s_\ell^{k-1} : X_{k-1} \longrightarrow X_k$ sont des isomorphismes de X_{k-1} avec des facteurs directs de X_k, et

$$NX_k = \bigcap_\ell (\text{complément de } s_\ell^k(X_{k-1})) .$$

Pour $k = 0$, $NX_o = X_o$.

(5.1.2) Pour X un objet simplicial (n+1)-tronqué σ-scindé de H, nous désignerons par $\alpha_n(X)$ le triple consistant en

a) la restriction $i_n^*(X)$ de X à Δ_n^o.

b) NX_{n+1} ,

c) l'application évidente de NX_{n+1} dans $(\mathrm{cosq}_n\,(X))_{n+1}$

Ce triple (Y, N, β) vérifie la condition suivante

(*) Y est un objet simplicial n-tronqué σ-scindé de H , et β est une application de N dans $(\mathrm{cosq}\, Y)_{n+1}$.

Proposition (5.1.3) Soit (Y, N, β) un triple vérifiant (*) ci-dessus.

(i) A isomorphisme unique près, il existe un et un seul $X : \Delta^{o}_{n+1} \longrightarrow H$ σ-scindé, avec $\alpha_n(X) \xrightarrow{\sim} (Y, N, \beta)$,

(ii) Il revient au même de se donner un morphisme f de X dans un objet simplicial tronqué $Z : \Delta^{o}_{n+1} \longrightarrow H$, ou de se donner

a) un morphisme $f' : Y \longrightarrow i^{*}_{n}(Z)$;

b) un morphisme $f'' : N \longrightarrow Z_{n+1}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & (\mathrm{cosq}_n Y)_{n+1} \arrow[d, "f'"] \\
Z_{n+1} \arrow[r] & (\mathrm{cosq}_n\, Z)_{n+1}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Construisons X .

On pose : $Y'_n = (\mathrm{cosk}_n Y)_{n+1}$ et on note $d'^{\,n+1}_{i} : Y'_{n+1} \longrightarrow Y_n$ (resp. $s'^{\,n}_{i} : Y_n \longrightarrow Y'_{n+1}$) les opérateurs de face (resp. de degénérescence) obtenu par fonctorialité.

+ On pose $Y_{n+1} = N \amalg \Big(\coprod_{\mathrm{Hom}_{\Delta^{-}_{\ell \leq n}}([n+1],[\ell])} N\, Y_\ell \Big)$ et soit $\alpha : Y_{n+1} \longrightarrow Y'_{n+1}$ la flèche dont les composantes sont β et les flèches $M\, Y_\ell \longrightarrow Y_\ell \longrightarrow Y'_{n+1}$ pour tout épimorphisme $[n+1] \longrightarrow [\ell]$ avec $\ell \leq n$.

+ Soit $s_i^n : Y_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\substack{\mathrm{Hom}_{\Delta^-}([n],[\ell'])\\ \ell'\leq n}} N\, Y_{\ell'} \longrightarrow X_{n+1}$

la flèche induite par σ_n^i , de sorte que

$$(\mathrm{I}) \qquad \alpha \circ s_i^n = s'^n_i \qquad .$$

On pose

$$(\mathrm{II}) \qquad d_i^{n+1} = d'^{n+1}_i \circ \alpha \quad .$$

+ Pour montrer que l'on définit ainsi un objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^o_{n+1},H)$, il suffit, d'après [[3]. II(2.4)] de vérifier les formules

$$\text{a)} \quad d_i^n . d_j^{n+1} = d_{j-1}^n . d_i^{n+1} \qquad i < j$$

$$\text{b)} \quad s_i^n . s_j^{n-1} = s_{j+1}^n . s_i^{n-1} \qquad i \leq j$$

$$\text{c)} \quad d_i^{n+1} . s_j^n = \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} . d_i^n & i < j \\ \mathrm{id} & i = j \text{ ou } i = j+1 \\ s_j^{n-1} . d_{i-1}^n & i > j+1 \end{cases}$$

Les formules a) et c) sont évidentes en vertu de (I) et (II), car on sait que a) et c) sont vérifiées si l'on remplace d_i^{n+1} par d'^{n+1}_i et s_i^n par s'^n_i .

La formule b) est vérifiée par construction.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'objet X obtenu vérifie 5.1.3.

+ On prendra garde que le foncteur construit dans la démonstration de 5.1.3, de la catégorie des triples vérifiant (5.1.2) (*) dans les objets simpliciaux n+1-tronqués, est fidèle mais non pleinement fidèle.

La proposition 5.1.3 fournit un procédé très commode pour construire par induction des objets simpliciaux de H . Dans la fin de ce numéro, nous formalisons cette remarque sous la forme qui sera utilisé en 5.2 et 5.3.

(5.1.4) Soient $E \xrightarrow{\pi} B$ un foncteur tel que pour tout objet b de B, la catégorie fibre E_b soit non vide et vérifie les conditions de (5.1.0).

Soit Q une propriété d'un objet de E, stable par isomorphisme : on suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

a) Pour tout objet b de B il existe un objet x de E_b vérifiant Q.

b) Pour tout objet b de B et tout couple (x,y) d'objets de E_b vérifiant Q, il existe un objet z de E_b vérifiant Q et des morphismes $z \longrightarrow x$, $z \longrightarrow Y$ dans E_b.

c) Pour tout morphisme $b' \xrightarrow{t} b$ de B et tout objet x de E_b vérifiant Q, il existe un objet x' de E_b, vérifiant Q et un morphisme $x' \longrightarrow x$ au-dessus de t.

Soit d'autre part P une propriété d'une flèche de E au-dessus d'une identité stable par isomorphisme : on suppose que les conditions suivantes sont réalisées :

d) Pour tout objet b de B et tout objet x de E_b il existe une flèche $y \longrightarrow x$ dans E_b vérifiant P.

e) Pour tout objet G de B, tout diagramme dans E_b de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[rr, "f"] & & x \\ & z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ v \arrow[rr, "g"'] & & y \end{tikzcd}$$

où f et g vérifient P, peut se compléter en un diagramme commutatif dans E_b

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[rr, "f"] & & x \\ w \arrow[ur] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & v \arrow[rr, "g"'] & & y \end{tikzcd}$$

où h vérifie P .

f) Pour tout morphisme $b' \xrightarrow{t} b$ de B et tout morphisme $x \xrightarrow{f} y$ de E_b vérifiant P , il existe un morphisme $x' \xrightarrow{f'} y'$ de $E_{b'}$ vérifiant P et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & x \arrow[d, "f"] \\ y' \arrow[r, "\beta"'] & y \end{tikzcd}$$

où α et β sont des morphismes au-dessus de t .

Définition (5.1.5) Avec les notations de (5.1.4), nous dirons qu'un objet X de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^o,E)$ vérifie la condition (APQ) si les conditions suivantes sont remplies :

(i) L'image de $\pi \circ X$ est l'objet simplicial constant défini par un objet G de B.

(ii) En tant qu'objet de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^o,E_b)$, X est σ-scindé.

(iii) X_o vérifie la condition Q .

(iv) Pour tout entier n , la flèche $N\,X_{n+1} \longrightarrow (\mathrm{cosq}_n\, X)_{n+1}$ vérifie la condition P .

(5.1.6) On désigne par $E_{(APQ)}$ la sous-catégorie de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^o,E)$ dont les objets sont les objets simpliciaux vérifiant (APQ) et dont les morphismes sont les morphismes $X \xrightarrow{\alpha} Y$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta^o,E)$ tels que $\pi(\alpha_n) : \pi(X_n) \longrightarrow \pi(Y_n)$ soit le même morphisme de B pour tout n . Il existe alors un foncteur canonique $\overline{\pi} : E_{(APQ)} \longrightarrow B$.

Proposition (5.1.7) Le foncteur $\overline{\pi}$ est surjectif. De plus, pour tout objet b de B et tout couple (X,Y) d'objets de $E_{(APQ),b}$, il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

dans $E_{(APQ),b}$.

La démonstration est triviale à partir de (5.1.3), en vertu des hypothèses faites en (5.1.4).

Proposition (5.1.8) Soient C une catégorie et F un foncteur $E_{(APQ)} \longrightarrow C$; on introduit les conditions suivantes pour F :

(i) Pour tout objet b de B, la restriction de F à $E_{(APQ),b}$ se factorise à travers la catégorie grossière (*) définie par les objets de $E_{(APQ),b}$.

(ii) Pour tout morphisme $t : b' \longrightarrow b$ de B et tout couple $(X' \longrightarrow X,\ Y' \longrightarrow Y)$ de morphismes au-dessus de t, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(X') \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha"] \\ F(Y') \arrow[r] & F(Y) \end{tikzcd}$$

où α et α' sont les flèches déterminées par la condition (i).

Alors, le foncteur $G \longrightarrow G\circ\overline{\pi}$ induit une équivalence entre la catégorie $Hom(B,C)$ et la sous-catégorie pleine de $Hom(E_{(APQ)},C)$ définie par les foncteurs vérifiant les conditions (i) et (ii).

(*) Une catégorie est dite grossière si pour tout couple (x,y) d'objets, $Hom(x,y)$ est réduit à un élément et un seul.

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. Indiquons simplement la manière dont on procède pour montrer que le foncteur précédent est essentiellement surjectif .

Soit $F : E_{(APQ)} \longrightarrow C$ un foncteur vérifiant les conditions (i) et (ii) pour tout objet b de B , on choisit un objet X de $E_{(APQ),b}$ et on pose $\overline{F}(b) = F(X)$; on vérifie alors que $\overline{F}(b)$ varie fonctoriellement avec b .

(5.2) Cohomologie singulière d'un schéma de type fini sur un corps de caractéristique nulle

Dans ce numéro, k désignera un corps de caractéristique nulle.

(5.2.0) Nous désignerons par Sch_f/k (resp. Ann) la catégorie des schémas localement de type fini sur k (resp. des espaces analytiques complexes). Tous les objets simpliciaux de Sch_f/k (resp. Ann) seront considérés comme objets simpliciaux de Top grâce au foncteur canonique $Sch_f/k \longrightarrow Top$ (resp. $Ann \longrightarrow Top$). Nous conservons les données de (4.1.0) relatives à la descente cohomologique.

Suivant les notations usuelles, nous noterons $S \longrightarrow S^{an}$ le foncteur canonique $Sch_f/\mathbb{C} \longrightarrow Ann$ défini dans G.A.G.A.

(5.2.1) Soit X un objet simplicial de Sch/k (resp. Ann) : les compatibilités usuelles pour la construction du complexe de De Rham d'un morphisme de schéma (resp. d'espaces analytiques) permettent de construire un complexe $\Omega^{Zar.}_{X/k}$ (resp. $\Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}$) de $D^+(\underline{\Gamma}(\overline{X}),\mathbb{Z})$ tel que pour tout entier i , $\underline{\underline{R}}^+e^*_i(\Omega^{Zar.}_{X/k})$ (resp. $\underline{\underline{R}}^+ e^*_i(\Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}})$) soit le complexe De Rham $\Omega^{Zar.}_{X_i/k}$(resp. $\Omega^{\cdot}_{X_i/\mathbb{C}}$) .

Soit $X \xrightarrow{u} C^{\Delta}_S$ un objet simplicial de Sch_f/k (resp. Ann) muni d'une augmentation. On définit $H^{Zar.\cdot}_{DR}(u)$ (resp. $H^{\cdot}_{DR}(u)$ et $H^{\cdot}(u,\mathbb{C})$) comme étant les groupes d'hypercohomologie du complexe $\underline{\underline{R}}^+\overline{u}_+(\Omega^{Zar.}_{X/k})$ (resp. $\underline{\underline{R}}^+\overline{u}_*(\Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}})$ et $\underline{\underline{R}}^+\overline{u}_*(\mathbb{C})$).

(5.2.2) Si $X \xrightarrow{u} C_S^{\Delta}$ est un objet semi simplicial de $Sch_f/\mathbb{C}$, on dispose de trois morphismes canoniques :

$$H_{DR}^{Zar\cdot}(u) \xrightarrow{\alpha} H_{DR}^{\cdot}(u^{an})$$

$$H^{\cdot}(u^{an},\mathbb{C}) \xrightarrow{\beta} H_{DR}^{\cdot}(u^{an})$$

$$H^{\cdot}(S^{an},\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma} H^{\cdot}(u^{an},\mathbb{C})$$

<u>Proposition</u> (5.2.3) <u>Supposons, avec les notations de</u> (5.2.2) <u>que</u> X_n <u>soit lisse pour tout</u> n : <u>alors</u> α <u>et</u> β <u>sont des isomorphismes</u>. <u>Si de plus</u> $X^{an} \xrightarrow{u^{an}} C^{\Delta}_{S^{an}}$ <u>est un hyperrecouvrement de</u> S^{an} <u>pour la topologie de la 1-descente cohomologique universelle</u>, γ <u>est un isomorphisme</u>.

Le fait que α soit un isomorphisme résulte de [[6]. Th. 1']. Il résulte du lemme de Poincaré que β est un isomorphisme. La dernière partie de la proposition résulte de (3.3.3).

(5.2.4) Nous allons maintenant appliquer (5.1.4) au cas où $B = Sch_f/k$ et où E est la catégorie au-dessus de B telle que pour tout schéma S , la catégorie fibre E_S soit la catégorie des schémas de Sch_f/k au-dessus de S , les flèches au-dessus d'une flèche de B étant évidentes. Nous dirons qu'un morphisme $h : X \longrightarrow Y$ au-dessus de S vérifie la propriété P si X est lisse sur k et si h est composé d'un nombre fini de morphismes vérifiant l'un des conditions suivantes :

(i) être somme d'une famille de morphismes étales et surjectifs

(ii) être somme d'une famille de morphismes propres et surjectifs.

Nous dirons qu'un schéma X de E_S vérifie la propriété Q si le morphisme structural $X \longrightarrow S$ vérifie la propriété P .

On laisse au lecteur le soin de vérifier, via la résolution des singularités, que toutes les conditions de (5.1.4) sont vérifiées.

La donnée des groupes $H_{DR}^{Zar.}(u)$ définit un foncteur contravariant de la catégorie $E_{(APQ)}$ dans la catégorie des groupes abéliens gradués, noté $H_{DR}^{Zar.}$.

<u>Proposition</u> (5.2.5) <u>Le foncteur</u> $H_{DR}^{Zar.}$ <u>vérifie les conditions de</u> (5.1.8).

Par le principe de Lefschetz, on est ramené au cas ou $k = \mathbb{C}$. Dans ce cas, pour tout morphisme $S' \xrightarrow{t} S$ et tout couple $(u' \longrightarrow u\ ,\ v' \longrightarrow v)$ de morphismes au-dessus de t , on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_{DR}^{Zar.}(u') \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"'] & H_{DR}^{Zar.}(u) \arrow[d, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"] \\
H^{\cdot}(S'^{an},\mathbb{C}) \arrow[r, "H^{\cdot}(t^{an},\mathbb{C})"] & H^{\cdot}(S^{an},\mathbb{C}) \\
H_{DR}^{Zar.}(v') \arrow[r] \arrow[u, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"] & H_{DR}^{Zar.}(v) \arrow[u, "\gamma^{-1}.\beta^{-1}.\alpha"']
\end{tikzcd}$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Définition</u> (5.2.6) <u>Le foncteur contravariant défini par</u> (5.1.8) <u>à partir de</u> $H_{DR}^{Zar.}$ <u>sera noté</u> $H^{\cdot}(*,k)$. <u>Pour tout schéma</u> S <u>localement de type fini sur</u> k , <u>le groupe abélien gradué</u> $H^{\cdot}(S,k)$ <u>s'appellera la</u> cohomologie singulière de S .

(5.2.7) Nous allons terminer ce numéro par une illustration des principes généraux qui y ont été introduits. Rappelons tout d'abord que si S est un espace analytique complexe, la <u>cohomologie de De Rham</u> de S , notée $\mathbb{H}_{DR}^{\cdot}(S)$ est par définition l'hypercohomologie du complexe de De Rham $\Omega_{S/\mathbb{C}}^{\cdot}$.

Proposition (5.2.8) (Blum-Herrera). *Soit* S *un schéma localement de type fini sur* $\mathbb{C}$, *la flèche canonique*

$$H^{\cdot}(S^{an},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^{\cdot}_{DR}(S^{an})$$

possède une rétraction (*dans la catégorie des groupes abéliens gradués*) *fonctorielle en* S .

En vertu de (5.1.8) il suffit de considérer le morphisme $H^{\cdot}(+,\mathbb{C})\circ\bar{\pi} \longrightarrow \mathbb{H}^{\cdot}_{DR}\circ\bar{\pi}$ obtenu à partir du précédent par composition avec $\bar{\pi}$.

En utilisant, pour toute augmentation $X \xrightarrow{u} C^{\Delta}_{S}$, le morphisme canonique $\underline{\underline{L}}\bar{u}^{+}(\Omega^{\cdot}_{S/C}) \longrightarrow \Omega^{\cdot}_{X/C}$, on définit un morphisme fonctoriel $\mathbb{H}^{\cdot}_{DR}\circ\bar{\pi} \longrightarrow H^{\cdot}_{DR}$, de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^{\cdot}_{DR} & \mathbb{H}^{\cdot}_{DR}\circ\bar{\pi} \arrow[l] \\ H^{\cdot}(*,\mathbb{C})\circ\bar{\pi} \arrow[u, "\beta\circ\gamma", "\wr"'] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ce qui fournit la rétraction cherchée.

Remarque (5.2.9) L'énoncé (5.2.8) reste valable pour tout espace analytique, dès que l'on dispose de la résolution des singularités dans le cadre analytique.

(5.3) *Théories de Hodge mixtes*

Nous donnons ici un résultat de nature technique qui joue un rôle clef dans [2].

k est un corps de caractéristique nulle.

(5.3.1) Soit Sch_{fs}/k la catégorie des schémas séparés et de type fini sur k ; on désigne par $E \xrightarrow{\pi} Sch_{fs}/k$ la catégorie au-dessus de Sch_{fs}/k définie de la façon suivante :

+ Si S est un objet de Sch_{fs}/k , un objet de E_S est un triple $(\overline{X},X,i)$ où $\overline{X}$ est un schéma réduit projectif au-dessus de k , X un schéma propre au-dessus de S et $i : X \longrightarrow \overline{X}$ une immersion ouverte au-dessus de k telle que $i(X)$ soit dense dans $\overline{X}$.

+ Si $t : S' \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas, $(\overline{X}, X, i)$ un objet au-dessus de S et $(\overline{X}', X', i')$ un objet au-dessus de S', un morphisme de $(\overline{X}, X, i)$ dans $(\overline{X}', X', i')$ au-dessus de t est un couple $(\overline{h}, h)$ où $\overline{h} : \overline{X}' \longrightarrow \overline{X}$ est un morphisme au-dessus de k , et $h : X' \longrightarrow X$ un morphisme au-dessus de S , tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "h"'] & \overline{X}' \arrow[d, "\overline{h}"] \\ X \arrow[r, "i"] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

N.B. : on remarque qu'il résulte des hypothèses de propreté que $\overline{h}^{-1}(i(X)) = i(X')$.

<u>Lemme</u> (5.3.2) <u>Pour tout objet</u> S <u>de</u> Sch_{fs}/k , <u>la catégorie</u> E_S <u>est non vide, possède des limites projectives non vides et des sommes directes finies qui sont disjointes et universelles</u>.

Le fait que la catégorie E_S soit non vide résulte du lemme de Chow.

Nous n'indiquerons que la construction du produit direct de deux objets $(\overline{X}, X, i)$ et $(\overline{X}', X', i')$ de E_S .

La flèche canonique $j : X\times_S X' \longrightarrow \overline{X}\times_k\overline{X}'$ est une immersion et on désigne par T le sous-schéma réduit de $\overline{X}\times_k\overline{X}'$ ayant pour espace sous-jacent l'adhérence de l'image de j : $(T , X\times_S X'_{red} , j_{red})$ vérifie la propriété universelle voulue.

(5.3.3) Soit S un objet de Sch_{fs}/k : nous dirons qu'un objet $(\overline{X}, X, i)$ de E_S vérifie la propriété Q si $\overline{X}$ est lisse sur k et si $i(X)$ est le complémentaire d'un diviseur à croisement normaux. Nous dirons qu'un morphisme $(\overline{h},h) : (\overline{X}',X',i') \longrightarrow (\overline{X}, X, i)$ vérifie la propriété P si $\overline{h}$ est surjectif et si $(\overline{X}', X', i')$ vérifie la propriété Q .

<u>Proposition</u> (5.3.4) <u>Avec les notations de</u> (5.3.3), <u>toutes les conditions de</u> (5.1.4) <u>sont vérifiées</u>.

Les conditions a) b) d) et c) se vérifient facilement en utilisant la résolution des singularités. De plus c) est conséquence de f) : il reste donc à vérifier f).

Il s'agit de voir que tout diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, "i_Z"] \arrow[d, "h"'] & \overline{Z} \arrow[d, "\overline{h}"] \\
 & X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[d] \\
S' \arrow[r, "t"] & S \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

où $(\overline{X}, X, i_X)$ et $(\overline{Z}, Z, i_Z)$ sont des objets de E_S avec $\overline{h}$ surjectif, peut se compléter en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[rr] \arrow[dr, "i_{Z'}"] \arrow[dd, "h'"'] & & Z \arrow[dr, "i_Z"] \arrow[dd, "h"] & \\
& \overline{Z}' \arrow[rr] \arrow[dd, "h'"] & & \overline{Z} \arrow[dd, "\overline{h}"] \\
X' \arrow[rr] \arrow[dr, "i_{X'}"] \arrow[dd] & & X \arrow[dr, "i_X"] \arrow[dd] & \\
& \overline{X}' \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{X} \arrow[dd] \\
S' \arrow[rr, "t"] \arrow[dr] & & S \arrow[dr] & \\
& k \arrow[rr, equal] & & k
\end{tikzcd}$$

où $(\overline{X}', X', i_{X'})$ et $(\overline{Z}', Z', i_{Z'})$ sont des objets de $E_{S'}$, avec $\overline{h}'$ surjectif.

On considère un diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i_T"'] & S' \arrow[r, "t"] & S \arrow[d] \\
\overline{T} \arrow[rr, "\psi"'] & & k
\end{tikzcd}$$

où φ est propre et ψ projectif : par changements de base on en déduit un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Z\times_S T_{red} \arrow[rr] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd] & & Z \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{Z}\times_k \overline{T}_{red} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{Z} \arrow[dd] \\
X\times_S T_{red} \arrow[rr] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd] & & X \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \overline{X}\times_k \overline{T}_{red} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overline{X} \arrow[dd] \\
T \arrow[r] \arrow[dr] & S' \arrow[r] & S \arrow[dr] & \\
& \overline{T} \arrow[rr] & & k
\end{tikzcd}$$

où p et q sont des immersions ; il suffit alors de remplacer $\overline{Z} \times_k \overline{T}_{red}$ et $\overline{X} \times_k \overline{T}_{red}$ pour les images fermées de p et q pour avoir le diagramme voulu, ce qui achève la démonstration de (5.3.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Blum - M. Herrera : De Rham Cohomology of an analytic Space. Inv. Math. vol 7. Fas 4 -1969. p.275-296.

[2] P. Deligne : Théorie de Hodge III (I.H.E.S).

[3] P. Gabriel - M. Zisman : Homotopy theory and calculus of fractions Ergebnisse der Mathematik - Band 35 - Springer 1967.

[4] J. Giraud : Méthode de la descente : Mémoires de la S.M.F. 2. 1964.

[5] R. Godement : Théorie des faisceaux. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann 1964.

[6] A. Grothendieck : On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties. Publications de l'I.H.E.S. n° 29.

[7] R. Hartshorne : Residues and Duality Springer Lecture Notes n° 20.

[8] G. Segal : Classifying spaces and Spectral sequences Publications de l'I.H.E.S. n° 34.

[9] J.L. Verdier : Catégories dérivées - Etat 0 - (I.H.E.S)