SGA 4

Exposé V

COHOMOLOGIE DANS LES TOPOS

par J. L. Verdier

SOMMAIRE

Introduction

On présente dans cet exposé les invariants cohomologiques commutatifs et élémentaires des topos. Dans le n° 1, on étudie les modules plats et les morphismes plats de topos annelés. Les démonstrations sont faites en utilisant l'hypothèse, le plus souvent vérifiée dans la pratique, que les topos ont suffisamment de points (IV 6). Ces démonstrations sont reprises dans le cas général dans l'appendice n° 8 où Deligne, à l'aide de la technique des limites inductives locales, généralise en outre au cas des topos, le théorème de D. Lazard sur la structure des modules plats. Les théorèmes de cet exposé, sont des théorèmes d'existence de suites spectrales reliant les différents invariants cohomologiques (N° 3, 5, 6). On sait que, même pour les espaces topologiques, la cohomologie de Cech ne coïncide pas en général avec la cohomologie des faisceaux [11]. On introduit dans l'appendice n° 7, un calcul de Cech modifié permettant d'obtenir, à l'aide de recouvrement, la cohomologie des faisceaux dans un topos quelconque. On est amené dans cet appendice à utiliser des recouvrements simpliciaux (hyper-recouvrements) dont les invariants homotopiques ont été étudiés dans [1] (cf. aussi [17]).

Les invariants cohomologiques introduits sont élémentaires en ce sens que nous n'utilisons pas les catégories dérivées [12]. Le lecteur familier avec ce langage fera immédiatement la traduction des différents énoncés de cet exposé et pourra alors les généraliser aux complexes et à l'hypercohomologie. Ce langage des catégories dérivées est d'ailleurs utilisé dans la suite de ce séminaire.

On se limite ici à la cohomologie commutative. Pour le H^1 non commutatif, utilisé dans ce séminaire, et pour le H^2 non commutatif, nous renvoyons à [9] . Les foncteurs qu'on dérive sont additifs ; on reste muet sur les structures multiplicatives (cf. [7]).

0. Généralités sur les catégories abéliennes

Dans ce numéro nous rappelons quelques lemmes dont la plupart se trouvent dans [11].

Proposition 0.1 Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant un générateur. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La catégorie $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome AB 5): Les petites sommes directes sont représentables et si (X_i) , $i \in I$, est une petite famille filtrante croissante de sous-objets d'un objet X de $\mathcal{A}$ et Y est un sous-objet de X , on a

$$(\sup_i X_i) \cap Y = \sup_i (X_i \cap Y).$$

ii) Les petites limites inductives pseudo-filtrantes (I.2.7) sont représentables et commutent aux limites projectives finies.

De plus, si les conditions ci-dessus sont remplies, les petites limites inductives filtrantes sont universelles (I 2.6).

Preuve : Il est clair que (ii) $\Longrightarrow$ (i) . Pour montrer que i) $\Longrightarrow$ (ii) , et pour prouver l'assertion supplémentaire, il suffit d'utiliser que $\mathcal{A}$ est une sous-catégorie pleine d'une catégorie de modules $\mathcal{M}$ sur un anneau convenable, telle que le foncteur d'inclusion $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ admette un adjoint à gauche v exact [5]. La vérification est alors triviale.

0.1.1 On sait [11] qu'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ possédant un générateur et vérifiant l'axiome AB 5) possède suffisamment d'injectifs i.e. tout objet se plonge dans un objet injectif. De plus, d'après le résultat déjà cité [5], les petits produits sont représentables dans $\mathcal{A}$ (axiome AB 3) *).

Proposition 0.2 Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes et $\mathcal{A} \underset{u}{\overset{v}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ deux foncteurs adjoints (u est adjoint à gauche de v). Considérons les deux propriétés :

i) Le foncteur u est exact.

ii) Le foncteur v transforme les objets injectifs de $\mathcal{B}$ en objets injectifs de $\mathcal{A}$.

1) On a toujours l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Si, de plus, tout objet non nul de $\mathcal{B}$ est source d'un morphisme non nul dans un objet injectif, alors (ii) $\Longleftrightarrow$ (i) .

2) Supposons que :

a) la catégorie $\mathcal{B}$ possède suffisamment d'injectifs.

b) l'une des deux conditions équivalentes (i) et (ii) ci-dessus soit remplie.

c) le foncteur u soit fidèle.

Alors, la catégorie $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectifs.

Preuve : La preuve est laissée au lecteur.

Remarque 0.2.1 La catégorie des groupes commutatifs possède suffisamment d'injectifs. Appliquant le lemme 0.2 on en déduit que toute catégorie de modules unitaires sur un anneau à élément unité possède suffisamment d'injectifs. Appliquant alors le résultat de [5] (utilisé dans la preuve de 0.1) et 0.2, on en déduit que toute catégorie abélienne possédant un générateur et des petites limites inductives filtrantes exactes possède suffisamment d'injectifs ; ce qui fournit une nouvelle démonstration de ce fait.

Proposition 0.3 Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois catégories abéliennes et u : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, v : $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs additifs exacts à gauche. Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ possèdent suffisamment d'objets injectifs. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un foncteur spectral dont le terme $E_2^{p,q}$ est :

$$R^p v R^q u$$

et qui aboutit à $R^{p+q} vu$ (convenablement filtré).

ii) Le foncteur u transforme les objets injectifs de $\mathcal{A}$ en objets acycliques pour le foncteur v .

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) est trivial car il suffit d'appliquer le foncteur spectral à un objet injectif. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est démontrée dans [11].

Proposition 0.4 : *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *deux catégories abéliennes et* $u : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un foncteur additif exact à gauche. Soit* M *un sous-ensemble de l'ensemble des objets de* $\mathcal{A}$ *possédant les propriétés suivantes* :

1) *Tout objet de* $\mathcal{A}$ *se plonge dans un élément de* M .

2) *Si* $X \oplus Y$ *appartient à* M , *l'objet* X *appartient à* M .

3) *Si*

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte et si X' *et* X *appartiennent à* M , *alors* X'' *appartient à* M *et la suite*

$$0 \longrightarrow u(X') \longrightarrow u(X) \longrightarrow u(X'') \longrightarrow 0$$

est exacte. Les objets nuls appartiennent à M .

Alors tout injectif appartient à M , *et les objets de* M *sont acycliques pour* u , *i.e. pour tout* $q \neq 0$ *et tout objet* X *de* M , *on a* $R^q u(X) = 0$. (*En particulier les résolutions par des objets de* M *permettent de calculer les foncteurs dérivés de* u .)

Pour la preuve voir [11] 3.3.1.

Proposition 0.5 : *Soient* $\underline{U} \subset \underline{V}$ *deux univers,* $\mathcal{A}$ (*resp.* $\mathcal{B}$) *une* $\underline{U}$-*catégorie* (*resp.* $\underline{V}$-*catégorie*) *abélienne vérifiant l'axiome* AB 5) *relativement à* $\underline{U}$ (*resp. à* $\underline{V}$) *et possédant une famille génératrice* $\underline{U}$-*petite* (*resp.* $\underline{V}$-*petite*). *Soit* $\varepsilon : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un foncteur exact et pleinement fidèle. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

1) *Il existe une famille génératrice* $(X_i)_{i \in I}$ *de* $\mathcal{A}$ *telle que la famille* $(\varepsilon(X_i))_{i \in I}$ *soit génératrice dans* $\mathcal{B}$.

1') *Tout objet de* $\mathcal{B}$ *est isomorphe à un quotient d'un objet du type* $\bigoplus_{\alpha \in A} \varepsilon(Y_\alpha)$ *où* $A \in \underline{V}$.

Sous ces conditions, on a la propriété suivante :

2) ε *transforme les produits* $\underline{U}$-*petits en produits* (*donc commute aux limites projectives* $\underline{U}$-*petites*).

De plus, sous les conditions équivalentes 1) *ou* 1'), *les conditions suivantes sont* équivalentes :

a) Pour tout objet Y de $\mathcal{A}$, tout sous-objet de $\varepsilon(Y)$ est isomorphe à l'image par ε d'un sous-objet de Y .

a') Il existe une famille génératrice $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$ telle que la famille $(\varepsilon(X_i))_{i\in I}$ soit génératrice dans $\mathcal{B}$ et telle que pour tout $i \in I$, tout sous-objet de $\varepsilon(X_i)$ soit isomorphe à l'image par ε d'un sous-objet de X_i .

b) Tout objet de $\mathcal{B}$ est isomorphe à un sous-objet d'un objet du type $\prod\limits_{\alpha\in A} \varepsilon(Y_\alpha)$ où $A \in \underline{V}$.

c) ε commute aux sommes directes $\underline{U}$-petites (donc commute aux limites inductives $\underline{U}$-petites.

De plus, sous les conditions 1) et a') on a :

d) ε transforme les objets injectifs en objets injectifs.

Remarque 0.5.1 : Lorsque dans 0.5 on a $\underline{U} = \underline{V}$, les conditions 1) et a') entraînent que ε est une équivalence de catégories (car on a alors b), 2) et a)).

0.5.2. Nous nous bornerons à donner des indications sur la démonstration. Les implications 1) $\Longleftrightarrow$ 1') , 1) $\Longrightarrow$ 2), sont laissées au lecteur. Il est clair que a) $\Longrightarrow$ a'). Montrons que a') entraîne d). Soit M un injectif dans $\mathcal{A}$. Pour tout $i \in I$ et tout sous-objet $Y \hookrightarrow X_i$ de X_i , l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(X_i,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Y,M)$ est surjectif. Donc, en vertu de a') et de la pleine fidélité de ε , pour tout sous-objet $U \hookrightarrow \varepsilon(X_i)$, l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(\varepsilon(X_i),\varepsilon(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,\varepsilon(M))$ est surjectif. Comme les $\varepsilon(X_i)$ forment une famille génératrice de $\mathcal{B}$, $\varepsilon(M)$ est injectif [11].
Montrons que a') $\Longrightarrow$ b). Quitte à augmenter la famille des X_i , on peut supposer que pour tout $i \in I$, tout quotient de X_i est isomorphe à un X_j pour un j convenable. Soit alors, pour tout $i \in I$, $X_i \hookrightarrow M_i$ un monomorphisme dans un objet injectif. La famille $(\varepsilon(X_i))_{i\in I}$ est stable par quotient et pour $i \in I$, le morphisme $\varepsilon(X_i) \hookrightarrow \varepsilon(M_i)$ est, d'après d), un monomorphisme dans un objet injectif. On vérifie alors immédiatement que, la famille $\varepsilon(X_i)$ étant génératrice, la famille $(\varepsilon(M_i))_{i\in I}$ est cogénératrice, d'où b).
Montrons que b) $\Longrightarrow$ c) . Soit $(Z_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille $\underline{U}$-petite d'objets de $\mathcal{A}$ et montrons que le morphisme canonique

$$\bigoplus_{\alpha\in A} \varepsilon(Z_\alpha) \longrightarrow \varepsilon(\bigoplus_{\alpha\in A} Z_\alpha)$$

est un isomorphisme. Comme la famille des objets $\varepsilon(Y)$ est cogénératrice, il suffit montrer que pour tout objet Y de $\mathfrak{A}$, l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\varepsilon(\bigoplus_\alpha Z_\alpha),\varepsilon(Y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}\ (\bigoplus_\alpha \varepsilon(Z_\alpha),\ \varepsilon(Y))$$

est un isomorphisme ce qui résulte de la pleine fidélité de ε. Il reste à montrer que c) $\Longrightarrow$ a). Soit Z un sous-objet de $\varepsilon(Y)$. Il existe, en vertu de 1'), une famille $\underline{U}$-petite Y_α d'objets de $\mathfrak{A}$ et un épimorphisme de $\bigoplus_\alpha \varepsilon(Y_\alpha)$ sur Z. Comme ε commute aux sommes directes $\underline{U}$-petites, il existe donc un épimorphisme $\varepsilon(Y') \longrightarrow Z$. Notons $u : \varepsilon(Y') \longrightarrow Z \longrightarrow \varepsilon(Y)$ le morphisme composé. On a $Z = \mathrm{Im}(u)$. Comme est pleinement fidèle, on a $u : \varepsilon(v)$ et par suite $Z = \mathrm{Im}(\varepsilon(V)) = \varepsilon(\mathrm{Im}(v))$.

<u>Exercice</u> 0.5.2. : Soit $\mathrm{Sex}_{\underline{V}}(\mathfrak{A})$ la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathfrak{A}$ dans la catégorie des $\underline{V}$-groupes commutatifs qui commutent aux limites inductives $\underline{U}$-petites. Montrer que sous les conditions 1) et a') le foncteur canonique de $\mathfrak{B}$ dans $\mathrm{Sex}_{\underline{V}}(\mathfrak{A})$ est une équivalence.

1. <u>Modules plats</u>

<u>Définition</u> 1.1 : <u>Soit</u> (E,A) <u>un topos annelé</u> (IV 11.1.1). <u>Un</u> <u>A-Module à droite</u> <u>(resp. à gauche)</u> M <u>est dit plat si le foncteur</u> $M \otimes_A .$ <u>(resp.</u> $. \otimes_A M$) <u>de la catégorie des</u> A-<u>Modules à gauche</u> <u>(resp. à droite)</u> <u>dans la catégorie des faisceaux abéliens</u> <u>de</u> E , <u>est exact</u>.

<u>Proposition</u> 1.2 : <u>Soit</u> M <u>un</u> B-A <u>bi-Module</u>.

1) <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

   i) <u>Le module</u> M <u>est</u> <u>A-plat à gauche</u>

   ii) <u>Pour tout</u> B-<u>Module injectif</u> I , <u>le</u> A-<u>Module à gauche</u> $\mathcal{H}om_B(M,I)$ <u>est</u> <u>injectif</u>.

2) <u>Un Module</u> M , <u>limite inductive pseudo-filtrante</u> (I 2.7.1) <u>de Modules plats</u>, <u>est plat</u>.

3) <u>Enfin</u>, <u>si</u> $M_\bullet = \ldots M_{i+1} \longrightarrow M_i \ldots$ <u>est un complexe acyclique</u> <u>de modules plats</u> ($M_i = 0$ <u>pour</u> $i < i_0$) , <u>alors pour tout Module</u> F , <u>le complexe</u> :

$$M. \otimes_A F = \dots M_{i+1} \otimes_A F \longrightarrow M_i \otimes_A F \dots$$

est acyclique.

Preuve : D'après (IV 12.12) on a un isomorphisme d'adjonction :

$$\mathrm{Hom}_B (M \otimes_A . , .) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A (. , \mathcal{H}om_B(M , .)) \quad .$$

Il suffit alors d'appliquer 0.2 pour obtenir l'équivalence (i)$\Longleftrightarrow$(ii) . Cet isomorphisme d'adjonction montre par ailleurs que le produit tensoriel commute aux limites inductives. Le fait que les limites inductives pseudo-filtrantes soient exactes (0.1) entraîne la deuxième assertion. Pour montrer que le complexe $M. \otimes_A F$ est acyclique, il suffit de montrer que pour tout faisceau abélien injectif I le complexe $\mathrm{Hom}^{\bullet}_Z(M. \otimes_A F, I)$ est acyclique. Ce complexe est isomorphe, en vertu des formules d'adjonction, au complexe $\mathrm{Hom}^{\bullet}_A(F, \mathcal{H}om_Z(M. , I))$. Or d'après l'équivalence (i) $\longleftrightarrow$(ii) , le complexe de faisceaux

$$\mathcal{H}om_Z(M. , I)$$

est un complexe acyclique dont les objets sont injectifs, d'où la conclusion.

Proposition 1.3.1 : Soient (E,A) un topos annelé, H un objet de E , M un $A_{/H}$-Module plat. Alors $j_{H!}M$ est un A-Module plat. En particulier A_H est plat à droite et à gauche.

Supposons, pour fixer les idées, que M soit un $A_{/H}$-Module à droite. Pour tout A-Module à gauche P , on a un isomorphisme canonique (IV 12)

$$P \otimes_A j_{H!}M \simeq j_{H!}(P \otimes_{A_{/H}} M) \quad .$$

Les foncteurs $j_{H!}$ et j_H^* sont exacts (IV 11.3.1 et 11.12.2) et par hypothèse, le foncteur $-\otimes_{A_{/H}} M$ est exact. Par suite le foncteur $P \longrightarrow P \otimes_A j_{H!}M$ est exact et $j_{H!}M$ est plat.

Proposition 1.3.2 (Formule de projection pour les immersions fermées) :

Soient (E,A) un topos annelé , $i : F \longrightarrow E$ un sous-topos fermé de E . Posons $i^*A = A_{/F}$. Pour tout $A_{/F}$-Module (à droite) M et tout A-Module (à gauche)

P , <u>on a un isomorphisme fonctoriel</u>

$$i_*(M \otimes_{A_{/F}} i^* P) \;\simeq\; (i_* M) \otimes_A P$$

Soient U l'ouvert complémentaire de F et $j : U \longrightarrow E$ le morphisme canonique d'immersion. On a $j^*(i_* M \otimes_A P) \simeq 0 \otimes_{A_{/U}} j^*(P)$ (IV 12) ; par suite $i_* M \otimes_A P$ a son support dans F . Donc le morphisme d'adjonction $i_* M \otimes_A P \longrightarrow i_* i^*(i_* M \,_A P)$ est un isomorphisme (IV 14). On a $i^*(i_* M \otimes_A P) \simeq i^* i_* M \otimes_{A_{/F}} i^* P$ (IV 12) et comme $i : F \longrightarrow E$ est une immersion fermée, $i^* i_* M \simeq M$ (IV 14) ; d'où l'isomorphisme annoncé.

<u>Corollaire</u> 1.3.3 : <u>Pour tout</u> $A_{/F}$-<u>Module plat</u> M , $i_* M$ <u>est plat</u>.

Il résulte de 1.3.2. et de (IV 14) que le foncteur $P \longmapsto (i_* M) \otimes_A P$ est un foncteur exact.

1.4 Soients (E,A) un topos annelé, $x : P \longrightarrow E$ un point de E (IV 6.1), vois(x) la catégorie des voisinages de x (IV 6.8). A tout objet V de vois(x) correspond un objet de E , encore noté V , et un point $x_V : P \longrightarrow E/V$ de E/V . De plus, à tout morphisme $u : V \longrightarrow W$ de vois(x) , correspond un diagramme essentiellement commutatif de morphisme de topos (IV 6.7)

(1.4.1)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "x_V"] \arrow[dr, "x_W"'] & E/V \arrow[d, "j_u"] \\ & E/W \end{tikzcd}$$

Soit N un A_x-module (resp. un ensemble). Du diagramme (1.4.1), on déduit un diagramme de A_x-modules (resp. d'ensembles) :

(1.4.2)

$$\begin{tikzcd} x_W^* x_{W*} N \arrow[r, "ad_W"] \arrow[d, dashed, "\phi(u)"'] & N \\ x_V^* x_{V*} N \arrow[ur, "ad_V"'] & \end{tikzcd}$$

où ad_W et ad_V sont les morphismes d'adjonction. De plus, on vérifie immédiatement que $\Phi(uv) = \Phi(v)\,\Phi(u)$. On a donc un foncteur de la catégorie filtrante $\mathrm{vois}(x)^\circ$ dans la catégorie des A_x-modules (resp. ensembles) et un homomorphisme :

(1.4.3) $$\Lambda(N) : \varinjlim_{V \in \mathrm{Vois}(x)^\circ} x_V^* \, x_{V*} N \longrightarrow N$$

<u>Proposition</u> 1.5 : <u>Pour tout</u> A_x<u>-modules</u> <u>(resp. ensemble)</u> N , $\Lambda(N)$ <u>est un isomorphisme</u>.

Cette proposition est un cas particulier d'une proposition due à Deligne (8.2.6). Donnons-en une démonstration directe. En passant aux ensembles sous-jacents il suffit de démontrer la proposition lorsque N est un ensemble (I 2.8). La catégorie cofiltrante $\mathrm{Fl}(\mathrm{vois}(x))$ des flèches de $\mathrm{vois}(x)$ est fibrée sur la catégorie $\mathrm{vois}(x)$ par le foncteur $p : \mathrm{Fl}(\mathrm{vois}(x)) \longrightarrow \mathrm{vois}(x)$ qui, à une flèche, associe son but. Soit D une catégorie et $F : \mathrm{Fl}(\mathrm{vois}(x)) \longrightarrow D$ un pro-objet (I 8.10). Pour tout objet V de $\mathrm{vois}(x)$, notons F_V le pro-objet obtenu en restreignant le foncteur F à la catégorie fibre $\mathrm{vois}(x)/V$. A tout morphisme $m : U \longrightarrow V$ de $\mathrm{vois}(x)$, le foncteur changement de base par m associe un morphisme du pro-objet F_U dans le pro-objet F_V et les morphismes canoniques de pro-objets $F \longrightarrow F_V$ déterminent un morphisme de pro-objets :

(1.5.1) $$F \longrightarrow \varprojlim_{V \in \mathrm{vois}(x)^\circ} F_V$$

dont on vérifie immédiatement que c'est un isomorphisme. Appliquons cette remarque au pro-objet d'ensembles pointés :

(1.5.2) $$(U,V,m) \longmapsto x_V^*(m) = F(U,V,m) \quad .$$

On obtient un isomorphisme de pro-objets :

(1.5.3) $$F \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathrm{Voix}(x)} \varprojlim_{\mathrm{Vois}(x)/V} x_V^*(m) \quad ;$$

d'où, pour tout ensemble N , une bijection

(1.5.4) $$\varinjlim_{\mathrm{F\ell}(\mathrm{vois}(x))^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m),N) \simeq \varinjlim_{\mathrm{vois}(x)^\circ} \varinjlim_{(\mathrm{vois}(x)/V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m),N) .$$

Mais, pour V fixé, $\varinjlim_{(\mathrm{vois}(x)/V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m),N)$ s'identifie à $x_V^* x_{V*} N$. En effet, on a $x_V^* x_{V*} N \simeq \varinjlim_{\mathrm{vois}(x_V)^\circ} \mathrm{Hom}_{E/V}(W, x_{V*}N)$ d'après IV 6.8.1 donc, par adjonction, on a

$x_V^* x_{V*} N \simeq \varinjlim_{\mathrm{vois}(x_V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(w),N)$ et de plus la catégorie $\mathrm{vois}(x_V)$ est équivalente à la catégorie vois(x)/V (IV 6.7.2). Enfin, les applications canoniques de transition $\varinjlim_{(\mathrm{vois}(x)/U)^\circ} \mathrm{Hom}(x_U^*(m),N) \longrightarrow \varinjlim_{(\mathrm{vois}(x)/V)^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(n),N)$ dans 1.5.4 s'identifient aux applications canoniques $x_U^* x_{U*} N \longrightarrow x_V^* x_{V*} N$ (1.4.3) ainsi que le lecteur voudra bien le vérifier. On a donc une bijection

(1.5.5) $\varinjlim_{F\ell(\mathrm{vois}(x))^\circ} \mathrm{Hom}(x_V^*(m),N) \simeq \varinjlim_{\mathrm{vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} N$

et l'application $\Lambda(N) : \varinjlim_{\mathrm{vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} N \longrightarrow N$ (1.4.3) composée avec la bijection 1.5.5.provient des applications $\mathrm{Hom}(x_V^*(m),N) \longrightarrow N$ qui a une application $r : x_V^*(m) \longrightarrow N$ associe l'image par r du point marqué de $x_V^*(m)$. Pour démontrer la proposition, il suffit alors de remarquer que tout objet (U,V,m) de Fl(vois(x)) est minoré par (U,U,id_U) et que $x_U^*(id_U)$ est réduit à un élément ou, en d'autres termes, que le morphisme canonique du pro-objet constant réduit à un élément dans F est un isomorphisme de pro-objets.

<u>Proposition</u> 1.6 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé</u>, M <u>un</u> A-<u>Module</u>,

1) <u>Lorsque</u> M <u>est plat</u>, <u>pour tout point</u> $x : P \longrightarrow E$ <u>de</u> E , <u>le</u> A_x-<u>module</u> M_x <u>est plat</u>.

2) <u>Soit</u> $(x_i)_{i \in I}$ <u>une famille conservatrice de point de</u> E <u>telle que pour tout</u> $i \in I$, M_{x_i} <u>soit un</u> A_{x_i}<u>-module plat</u>.

<u>Alors</u> M <u>est plat</u>.

<u>Lemme</u> 1.6.1 : <u>Soient</u> M <u>un Module plat et</u> V <u>un objet de</u> E . <u>Le</u> A/V-<u>Module</u> j_V^*M <u>est plat</u>.

Il faut montrer que le foncteur $P \longmapsto P \otimes_{A/V} j_V^*M$ est exact. Comme le foncteur prolongement par zéro $j_{V!}$ est exact et fidèle (IV 11.3.1), il suffit de montrer que le foncteur $P \longmapsto j_{V!}(P \otimes_{A/V} j_V^*M$ est exact. On a un isomorphisme fonctoriel $j_{V!}(P \otimes_{A/V} j_V^* M) \simeq j_{V!}(P) \otimes_A M$ (IV 12.11) et par suite le foncteur $P \longmapsto j_{V!}(P) \otimes_A M$ est exact (IV 11.3.1).

1.6.2 Démontrons 1). Supposons pour fixer les idées que M soit un A-Module à gauche plat et soit $x : P \longmapsto E$ un point de E. Montrons que le foncteur $N \longmapsto N \otimes_{A_x} M_x$ de la catégorie des A_x-modules à droite dans la catégorie des groupes commutatifs est exact. Il suffit pour cela de montrer que ce foncteur est exact à gauche. Avec les notations de 1.4, soient V un voisinage de x et $j_V : E/V \longrightarrow E$ le morphisme de localisation. On a, pour tout A_x-module N, $x_V^* x_{V*} N \otimes_{A_x} M_x \simeq x_V^* x_{V*} N \otimes_{A_x} v_V^*(j_V^* M \simeq x_V^*(x_{V*} N \otimes_{A_x} j_V^* M)$ (IV 12.11). Donc le foncteur $N \longmapsto x_V^* x_{V*} N \otimes_{A_x} M_x$ est exact à gauche. Par suite, le foncteur $N \longmapsto N \otimes_{A_x} M_x$, limite inductive filtrante de foncteurs exacts à gauche (1.5), est exact à gauche. Démontrons 2). Soit $0 \longrightarrow P' \longrightarrow P \longrightarrow P'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-Modules et montrons que la suite $0 \longrightarrow P' \otimes_A M \longrightarrow P \otimes_A M \longrightarrow P'' \otimes_A M \longrightarrow 0$ est exacte. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $i \in I$, la suite obtenue en passant aux fibres en x_i est exacte (IV 6). Or la suite des fibres en x_i est la suite (IV 13.5)

$$0 \longrightarrow P'_{x_i} \otimes_{A_x} M_x \longrightarrow P_{x_i} \otimes_{A_{x_i}} M_{x_i} \longrightarrow P''_{x_i} \otimes_{A_{x_i}} M_{x_i} \longrightarrow 0$$

et comme M_{x_i} est plat, cette suite est exacte.

<u>Proposition</u> 1.7 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé,</u>, $u : E' \longrightarrow E$ <u>un morphisme de topos et posons</u> $A' = u^*A$. <u>Soit</u> M <u>un</u> A'-<u>Module à droite</u> (<u>resp. à gauche</u>). <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) <u>Le foncteur</u> $N \longmapsto M \otimes_{A'} u^* N$ (<u>resp</u>. $N \longmapsto u^* N \otimes_{A'} M$) <u>de la catégorie des</u> A-<u>Modules à gauche</u> (<u>resp. à droite</u>) <u>dans la catégorie des faisceaux abéliens de</u> E' <u>est exact</u>.

ii) M <u>est un</u> A'-<u>Module plat</u>.

Il est clair que ii) $\Longrightarrow$ i) .

Montrons que i) $\Longrightarrow$ ii) . Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où E' possède une famille conservatrice de points $(x_i)_{i \in I}$. Le cas **général** est traité en (8.2.7). Dans ce cas particulier, qui couvre la plupart des applications, on est ramené au cas où E' est le topos ponctuel et où, par suite, le morphisme u, qu'on notera x, est un point de E (1.6. et IV 11.3.1). Nous nous bornerons au cas où M est un A'-Module à droite. Le cas où M est un A'-Module à gauche s'y ramène en passant aux anneaux opposés. Soient V un voisinage de x et V_x sa fibre en x. On a, avec les notations de 1.4, un diagramme essentiellement commutatif de morphismes de topos :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "x_V"'] & P/V_x \arrow[r, "j_{V_x}"] \arrow[d, "x/V"] & P \arrow[d, "x"] \\ & E/V \arrow[r] & E \end{tikzcd} ,$$

où x/V est le morphisme déduit de x par localisation sur V (IV 5.10) et j est le morphisme déduit du point marqué de V_x. Montrons que le foncteur $N' \longrightarrow M \otimes_{A'} x_V^* N'$ est exact. On a $x_V^* = j^*(x/V)^*$ et $id = j^* j_{V_x}^*$ et par suite, on a un isomorphisme canonique $M \otimes_{A'} x_V^* N' \simeq j^*(j_{V_x}^* M \otimes_{A'/V_x} (x/V)^* N')$. Comme le foncteur j^* est exact et comme le foncteur $j_{V_x!}$ est exact et fidèle (IV 11.3.1), il suffit de montrer que le foncteur $N' \longmapsto j_{V_x!}(j_{V_x}^* M \otimes (x/V)^* N')$ est exact, et par suite (IV 12.11), il suffit de montrer que le foncteur $N' \longmapsto M \otimes_{A'} j_{V_x!}(x/V)^* N'$ est exact. Mais il résulte de la définition de l'image inverse d'un topos induit (IV 5.10.2) que $j_{V_x!}(x/V)^* N'$ est égal à $x^* j_{V!} N'$ et comme le foncteur $j_{V!}$ est exact (IV 11.3.1), le foncteur $N' \longmapsto M \otimes_{A'} x^* j_{V!} N'$ est exact par hypothèse. Pour tout A'-module Q, on a un isomorphisme fonctoriel (1.5) :

$$Q \simeq \varinjlim_{\mathrm{vois}(x)^\circ} x_V^* x_{V*} Q .$$

D'après ce qui précède, le foncteur $Q \longmapsto M \otimes_{A'} Q$ est limite inductive filtrante de foncteurs exacts à gauche. Il est donc exact à gauche et par suite M est plat.

Corollaire 1.7.1 : Soient $u : (E',A') \longrightarrow (E,A)$ un morphisme de topos annelés, M un A-Module plat. Alors $u^* M$ est un A'-Module plat.

Résulte du critère donné dans 1.7 et de la formule (IV 13.4.5).

Corollaire 1.7.2 : Soit $u : (E',A') \longrightarrow (E,A)$ un morphisme de topos annelés. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) le $u^{-1}(A)$-Module à droite (resp. à gauche) A' est plat.

ii) le foncteur u^* de la catégorie des A-Modules à gauche (resp. à droite) dans la catégorie des A'-Module à gauche (resp. à droite) est exact.

L'équivalence résulte de 1.7 et de la définition de u^* (IV 13.2.1).

Définition 1.8 : Un morphisme de topos annelé qui possède les propriétés équivalentes de 1.7.2 est appelé un morphisme de topos plat à gauche (resp. à droite).

Proposition 1.9 : Soient $\underline{U} \subset \underline{V}$ deux univers , C un $\underline{U}$-site , $C^{\sim}_{\underline{U}}$ et $C^{\sim}_{\underline{V}}$ les catégories des $\underline{U}$ et $\underline{V}$-faisceaux d'ensembles respectivement , $\varepsilon : C^{\sim}_{\underline{U}} \longrightarrow C^{\sim}_{\underline{V}}$ le foncteur d'inclusion canonique , A un $\underline{U}$-faisceau d'anneaux sur C .

1) Le foncteur ε commute aux limites inductives et projectives $\underline{U}$-petites de Modules. Le foncteur ε est conservatif et pleinement fidèle sur les catégories de Modules.

2) Pour tout objet H de $C^{\sim}_{\underline{U}}$, il existe un isomorphisme canonique $\varepsilon(A_H) \simeq \varepsilon(A)_{\varepsilon(H)}$.

3) Tout A-Module injectif à gauche ou à droite est transformé par ε en $\varepsilon(A)$-Module injectif.

4) Tout A-Module plat à droite ou à gauche est transformé par ε en $\varepsilon(A)$-Module plat.

5) Le foncteur ε commute à la formation du produit tensoriel et du faisceau des homomorphismes.

La formation du faisceau associé ne dépend pas de l'univers (II 3.6). Il résulte alors de la construction des limites inductives et projectives dans les catégories de faisceaux (II 4.1 et 6.4) que le foncteur ε commute aux $\underline{U}$-petites limites projectives d'ensembles ou de Modules, d'où 1). Démontrons 2). En prenant une $\underline{U}$-petite sous-catégorie génératrice de $C^{\sim}_{\underline{U}}$, on peut se ramener au cas où C est

$\underline{U}$-petite (III 4.1). Il résulte alors de (II 6.5) que le A-Module libre engendré par H s'obtient en formant le préfaisceau de A-modules libres engendré par H , formation qui commute à l'agrandissement des univers, puis en formant le faisceau associé, opération qui elle aussi commute à l'agrandissement des univers (II 3.6). Pour démontrer 3) il suffit de montrer, en vertu de 0.5, que tout sous $\underline{V}$-faisceau d'un $\underline{U}$-faisceau est un $\underline{U}$-faisceau ce qui est bien clair. Démontrons 4). Soit M un A-Module plat. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon(A)$-Module injectif J , le faisceau abélien $\mathcal{H}om_{\varepsilon(A)}(\varepsilon(M),J)$ est injectif (1.2). En vertu de 0.5, J est sous-objet, donc facteur direct d'un objet du type $\prod_{\alpha} \varepsilon(I_\alpha)$, où les I_α sont injectifs. On peut donc supposer que $J = \varepsilon(I)$ où I est un objet injectif. Si l'homomorphisme $\varepsilon\ (\mathcal{H}om_A(M,I)) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\varepsilon A}(\varepsilon M,\varepsilon I)$ est un isomorphisme on en déduit que $\mathcal{H}om_{\varepsilon(A)}(\varepsilon(M),\varepsilon(I))$ est injectif d'après 3). Il reste donc à démontrer 5). Le fait que la formation du produit tensoriel commute au foncteur ε résulte de IV 12.6 et du fait que la formation du faisceau associé commute à l'agrandissement de l'univers (II 3.6). Pour tout objet X de $\tilde{C}_U$ et tout couple de A-Modules M et N de $\tilde{C}_U$ on a donc

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{C}_V}(\varepsilon X,\mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{C}_U}(X,\mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}} M,N)$$

en vertu de la pleine fidélité de ε , puis

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{Z}_X \otimes_{\mathbf{Z}} M,N) \simeq \mathrm{Hom}_{\varepsilon A}(\varepsilon(Z_X \otimes_{\mathbf{Z}} M),\varepsilon N) \simeq \mathrm{Hom}_{\varepsilon A}(\varepsilon Z_X \otimes_{\mathbf{Z}} \varepsilon M,\varepsilon N)$$

en vertu de la pleine fidélité de ε et de ce qui précède. Utilisant alors 2) et IV 12.14, on obtient en définitive un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{C}_V}(\varepsilon X,\varepsilon\mathcal{H}om_A(M,N)) \simeq \mathrm{Hom}_{\tilde{C}_V}(\varepsilon X,\mathcal{H}om_{\varepsilon A}(\varepsilon M,\varepsilon N)) \quad ;$$

d'où l'isomorphisme annoncé.

1.10 Soient E un topos , $\mathcal{U} = (U_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ une petite famille de morphismes de même but. Pour tout ensemble fini $\Delta_n = [0, \ldots, n]$, posons

$$S_n(\mathcal{U}) = \coprod_{f:\Delta \to I} U_{f(1)} \times_X \cdots \times_X U_{f(n)} \quad ,$$

la somme étant prise sur l'ensemble des applications de Δ_n dans I . Soient m et n deux entiers , $g : \Delta_m \longrightarrow \Delta_n$ une application. On définit un morphisme

1.10.1 $$s(g) : S_n(\mathcal{U}) \longrightarrow S_m(\mathcal{U}) \quad ,$$

de la manière suivante : pour tout $f : \Delta_n \longrightarrow I$, la restriction de $s(g)$ à $U_{f(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(n)}$ est le morphisme composé de l'inclusion canonique

$$U_{f(g(1))} \times_X \dots \times_X U_{f(g(m))} \hookrightarrow S_m(\mathcal{U}) \ ,$$

et de l'unique morphisme

$$s_f(g) : U_{f(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(n)} \longrightarrow U_{f(g(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(g(m))}$$

tel que pour tout $i \in \Delta_m$

$$pr_{f(g(i))} s_f(g) = pr_{f(gi))}$$

(pr_α désigne la α-ème projection). On obtient ainsi un foncteur contravariant $\Delta_n \longmapsto S_n$ de la catégorie des ensembles finis dans E ; autrement dit un complexe semi-simplicial $S.(\mathcal{U})$ d'objets de E . Notons que ce complexe est canoniquement augmenté vers X . Tout foncteur de E dans une catégorie C transforme $S.(\mathcal{U})$ en un objet simplicial de C . En particulier si A est un Anneau de E , le foncteur "A-Module libre engendré" transforme $S.(\mathcal{U})$ en un complexe simplicial de A-biModules augmenté vers A_X et noté $A.(\mathcal{U})$. On a

1.10.2 $$A_n(\mathcal{U}) = \bigoplus_{f:\Delta_n \to I} A_{U_{f(1)} \times_X \dots \times_X U_{f(\ )}} \ .$$

Ce complexe sera souvent noté

1.10.3 $$\cdots \ \substack{\xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_2}} \ \bigoplus_{i,j} A_{U_i \times_X U_j} \ \substack{\xrightarrow{s_0} \\ \xrightarrow{s_1}} \ \bigoplus_i A_{U_i} \longrightarrow A_X$$

où les flèches de 1.10.3 (sauf la dernière qui est l'augmentation) représententent les opérateurs faces du complexe simplicial $A.(\mathcal{U})$, c'est-à-dire les morphismes correspondants aux applications injectives croissantes de Δ_n dans Δ_{n+1} (s_i évite l'entier i). Au complexe $A.(\mathcal{U})$, on associe un complexe différentiel augmenté vers A_X :

1.10.4 $$\cdots \xrightarrow{d} \bigoplus_{i,j} A_{U_i \times_X U_j} \xrightarrow{d} \bigoplus_i A_{U_i} \longrightarrow A_X ,$$

en posant

1.10.5 $$d = \sum (-1)^i s_i \quad .$$

<u>Proposition</u> 1.11 : <u>Lorsque la famille</u> $\mathcal{U} = (U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ <u>est épimorphique</u>, <u>le complexe différentiel</u> 1.10.4 <u>est acyclique et fournit une résolution de</u> A_X .

Notons $\underline{\underline{Z}}$ le faisceau constant de valeurs $\underline{\underline{Z}}$. Par définition du foncteur "A-Module libre engendré", on a, pour tout objet H de E ,

$$A_H \simeq \underline{\underline{Z}}_H \otimes_{\underline{\underline{Z}}} A \quad ,$$

d'où

$$A.(\mathcal{U}) \quad \underline{\underline{Z}}.(\mathcal{U}) \otimes_{\underline{\underline{Z}}} A \quad .$$

Comme les composantes de $\underline{\underline{Z}}.(\mathcal{U})$ sont des $\underline{\underline{Z}}$-Module plats((1.3.1), il suffit de montrer la proposition lorsque $A = \underline{\underline{Z}}$.

Supposons tout d'abord que E soit le topos des ensembles. Alors le complexe augmenté $S.(\mathcal{U})$ est somme directe de complexes augmentés du type

$$\cdots \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\end{smallmatrix} S\times S\times S \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\end{smallmatrix} S\times S \rightrightarrows S \longrightarrow \{e\}$$ ({e} ensemble à un élément).

Chacun de ces complexes augmentés est homotopiquement trivial. Donc $S.(\mathcal{U})$ est un complexe augmenté homotopiquement trivial et par suite son homologie est triviale d'où la proposition dans ce cas.

Soit maintenant $p : \mathrm{Ens} \longrightarrow E$ un point de E . Comme la formation du complexe $\underline{\underline{Z}}.(\mathcal{U})$ commute aux foncteurs image inverse par les morphismes de topos, $p^*(\underline{\underline{Z}}.(\mathcal{U})) \simeq \underline{\underline{Z}}.(p^*(\mathcal{U}))$ est une résolution de $\underline{\underline{Z}}_{p^*X} \simeq p^*(\underline{\underline{Z}}_X)$; d'où la proposition lorsque E possède suffisamment de foncteurs fibres (IV 4.6). Ceci est le cas en particulier lorsque E est un topos de préfaisceaux $C^\wedge$ car pour tout objet X de C , $\Gamma(X,-)$ est un foncteur fibre. Dans le cas général, E est équivalent à un topos de faisceaux sur un petit site C (IV 1) et la famille épimorphique $\mathcal{U} = (U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ est image, par le foncteur "faisceau associé", d'une famille épimorphique

$\mathcal{U}' = (U_i' \longrightarrow X')_{i\in I}$. Par suite $\underline{\underline{Z}}.(\mathcal{U}) \simeq \underline{\underline{aZ}}.(\mathcal{U}')$ est une résolution de $\underline{\underline{aZ}}_{X'} \simeq \underline{\underline{Z}}_X$.

2. Cohomologie de Čech. Notation cohomologique

2.1 Notation générale

2.1.1 Soient (E,A) un topos annelé, M,N deux A-Modules (à gauche pour fixer les idées). On note $\mathrm{Ext}^q_A(E;M,N)$ la valeur en N du q-ième foncteur dérivé droit du foncteur $\mathrm{Hom}_A(M,\ .\ )$ [11]. Les foncteurs $\mathrm{Ext}^q_A(E;M,N)$ $q \in \underline{\underline{N}}$, forment un δ-foncteur en la variable N . C'est aussi un δ-foncteur contravariant en la variable M . On a, par définition, $\mathrm{Ext}^0_A(E;M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$.

2.1.2 Soit X un objet de E . Lorsque $M = A_X$, le A-Module libre engendré par X (IV 12), on pose $\mathrm{Ext}^q_A(E;A_X,N) \simeq H^q(X,N)$. On remarquera que dans cette nouvelle notation, l'anneau A ne figure plus. Ceci ne peut prêter à confusion car nous montrerons (3.5) que la formation des $H^q(X,.)$ commutent à la restriction des scalaires. Le foncteur $H^q(X,.)$ est le q-ième foncteur dérivé droit du foncteur $\mathrm{Hom}_A(A_X,.) = \mathrm{Hom}_E(X,.)$ encore noté $\Gamma(X,\ .\ )$. Lorsque $M = A$, on pose $\mathrm{Ext}^q_A(E;A,N) = H^q(E,N)$.

2.2 Localisation.

Soient X un objet de E , $j : E_{/X} \longrightarrow E$ le morphisme de localisation (IV 8). Le foncteur j^*_X pour les Modules, est exact (4.11) et admet un foncteur adjoint à gauche $j_{X!}$ exact (4.11). Par suite il transforme les Modules injectifs en Modules injectifs. On a donc, pour un A-Module variable N de E et un $A|X$-Module M variable de $E_{/X}$, des isomorphismes fonctoriels

2.2.1 $$\mathrm{Ext}^q_{A|X}(E_{/X};M,j^*_X N) \simeq \mathrm{Ext}^q_A(E;j_{X!}M,N) \quad .$$

En particulier, on a des isomorphismes canoniques

$$H^q(E_{/X},j^*_X N) \simeq H^q(X,N) \quad .$$

Pour tout objet X de E et tout couple M et N de A-Modules, on pose :

2.2.2 $$\mathrm{Ext}^q_A(X;M,N) \simeq \mathrm{Ext}^q_{A\,X}(E_{/X};M|X,N|X) \quad .$$

D'après ce qui précède, les foncteurs $\mathrm{Ext}^q_A(X;M,.)$ sont les foncteurs dérivés des foncteurs $N \longmapsto \mathrm{Hom}_{A|X}(M|X,N|X)$. Le foncteur $(M,N) \longmapsto \mathrm{Ext}^q_A(X;M,N)$, $q > 0$, forment un δ-foncteur par rapport à chacune des variables.

2.3 Cas des topos de préfaisceaux. Cohomologie d'un recouvrement.

2.3.1 Soient C une petite catégorie munie d'un préfaisceau d'anneaux A , $C^\wedge$ le topos des préfaisceaux sur C , X un objet représentable sur $C^\wedge$. Le foncteur qui associe à un A-Module M le groupe $\Gamma(X,M) = M(X)$ est exact (I 3). Par suite $H^q(X,M) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout A-Module M ou encore que A_X est un A-Module projectif.

2.3.2 Soit S un préfaisceau sur C . On a un isomorphisme canonique pour tout A-Module M (I 2) :

$$\Gamma(S,M) \simeq \varprojlim_{C/S} M|S$$

De plus, pour tout A-Module injectif M , le $A|S$-Module $M|S$ est injectif (2.2). Par suite, les groupes $H^q(S,M)$ sont les valeurs en $M|S$ des foncteurs dérivés à droite du foncteur $\varprojlim_{C/S}$. En notant $\varprojlim^q_{C/S}$ ces foncteurs dérivés, on a des isomorphismes canoniques :

$$H^q(S,M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim^q_{C/S} M|S \quad .$$

En particulier, on a des isomorphismes canoniques

$$H^q(C^\wedge,M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim^q_{C/S} M \quad .$$

2.3.3. Soient X un objet de C et $\mathcal{U} = (U_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, une famille de morphismes de C telle que pour tout $i \in I$, $U_i \longrightarrow X$ soit quarrable (I 10). Notons $A_{.}$ le complexe simplicial étudié en 1.10 :

$$A_{.} = \cdots \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \coprod_{(i,j)\in I\times I} A_{U_i\times_X U_j} \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \coprod_{i\in I} A_{U_i} \quad .$$

Pour tout A-Module M , on pose $C^{\cdot}(\mathcal{U},M) = \mathrm{Hom}_A(A_{.},M)$:

(2.3.3.1) $$C^{\cdot}(\mathcal{U},M) : \prod_{i\in I} M(U_i) \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \prod_{(i,j)\in I\times I} M(U_i\times_X U_j) \;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}\; \cdots \quad .$$

On pose $H^q(\mathcal{U},M) = H^q(C^{\cdot}(\mathcal{U},M))$.

Proposition 2.3.4 :

1) Avec les notations de 2.3.3, soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par la famille $(U_i \longrightarrow X)$, $i \in I$. On a un isomorphisme canonique

$$H^q(\mathcal{U},M) \simeq H^q(R,M) \quad .$$

2) Les foncteurs $H^q(\mathcal{U},\ .\ )$ commutent aux restrictions des scalaires.

Comme R est un sous-objet de X dans $C^\wedge$, les produits fibrés $U_{i_1} \times_R U_{i_2} \times \dots \times_R U_{i_n}$ et $U_{i_1} \times_X U_{i_2} \times \dots \times_X U_{i_n}$ sont canoniquement isomorphes. Il résulte de 1.11 que le complexe $A_{\mathcal{U}}.$ est une résolution de A_R et de 2.3.1 que les composants de $A_{\mathcal{U}}.$ sont des Modules projectifs. Les groupes de cohomologies de $C^\cdot(\mathcal{U},M)$ sont donc canoniquement isomorphes à $\mathrm{Ext}^q_A(C^\wedge;A_R,M)$, d'où l'isomorphisme. L'assertion 2) résulte immédiatement de la description de $C^\cdot(\mathcal{U},M)$ (2.3.3.1).

Corollaire 2.3.5 : Soient $\mathcal{U} = (U_i \longrightarrow X\ ,\ i \in I)$ et $\mathcal{U}' = (U'_j \longrightarrow X\ ,\ j \in J\ )$ deux familles de morphismes de but X ; Soient $\Phi = (\phi : I \rightarrow J\ ,\ m_i : U_i \longrightarrow U'_{\phi(i)})$ et $\Phi' = (\phi' : I \rightarrow J\ ,\ m'_i ; U_i \longrightarrow H'_{\phi(i)})$ deux morphismes (au-dessus de X) de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$. Les morphismes Φ et Φ' induisent les morphismes Φ^q et Φ'^q : $\Phi'^q : H^q(\mathcal{U},M) \longrightarrow H^q(\mathcal{U}',M)$. Les morphismes Φ^q et Φ'^q sont égaux. En particulier si les familles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont équivalentes (i.e. s'il existe un morphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}'$ et un morphisme de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$) les A-Modules $H^q(\mathcal{U},M)$ et $H^q(\mathcal{U}',M)$ sont canoniquement isomorphes.

Preuve : En effet, soient R et R' les cribles de X engendrés par les familles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$. Les morphismes Φ et Φ' définisseent un même morphisme de R dans R' et induisent donc deux morphismes homotopes entre les résolutions projectives $A_{\mathcal{U}}.$ et $A_{\mathcal{U}'}.$.

Exercice 2.3.6 : (Résolution standard)

a) Soit C une petite catégorie. Pour tout entier $n > 0$, on note $Fl^n(C)$ l'ensemble des suites de morphismes de C : $(u_1, \dots, u_n)$ telles que pour tout i , $0 < i < n$, le but de u_i soit égal à la source de u_{i+1} de sorte que les morphismes u_i et u_{i+1} sont composables. Définir un ensemble semi-simplicial

$$ES(C) = \mathrm{ob}\, C \leftleftarrows Fl^1(C) \;\overset{\longleftarrow}{\leftleftarrows}\; Fl^2(C) \;\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\leftleftarrows}}\; Fl^3(C) \quad \dots ,$$

dont les opérateurs faces $s_i : Fl^n(C) \longrightarrow Fl^{n-1}(C)$ sont les suivants :

$s_o(u_1, \dots, u_n) = (u_2, \dots, u_n)$,

$s_i(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{i+1}u_i, \dots, u_n)$, $0 < i < n$,

$s_n(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_{n-1})$.

b) Montrer que lorsque C possède un objet initial ou un objet final, le complexe $ES(C)$ est homotopiquement trivial.

c) Pour tout bobjet X de C , on note ${}_{X\backslash}C$ la catégorie des flèches de source X . Définir un préfaisceau semi-simplicial $\underline{ES}(C)$ dont la valeur en tout objet X de C soit $ES({}_{X\backslash}C)$. On note $Z_{\underline{ES}(C)}$ le préfaisceau semi-simplicial abélien libre engendré par $\underline{ES}(C)$. Il est muni d'une augmentation canonique $Z_{\underline{ES}(C)} \longrightarrow Z$ dans le préfaisceau constant de valeur $\underline{\underline{Z}}$. Montrer que, en passant au complexe différentiel associé, le complexe $Z_{\underline{ES}(C)}$ est une résolution de Z et que les composants de ce complexe sont des préfaisceaux abéliens projectifs.

d) Pour tout préfaisceau abélien M , on pose $ST^{\cdot}(M) = \mathrm{Hom}(Z_{\underline{ES}(C)}, M)$. Expliciter les composants de $ST^{\cdot}(M)$. Montrer que pour tout entier $q \geqslant 0$, $H^q(ST^{\cdot}(M)) = H^q(C^{\wedge}, M)$.

e) Montrer que pour tout faisceau S sur C les foncteurs $H^q(S, .)$ commutent aux restrictions des scalaires.

f) Remarquer que lorsque C est un groupe, $Z_{\underline{ES}(C)}$ est la résolution standard du module trivial Z [3] .

g) Montrer que pour tout préfaisceau abélien M sur C , $Z_{\underline{ES}(C)} \otimes M$ est une résolution (à gauche) de M . Définir le foncteur $\varinjlim_C$ sur les préfaisceaux. Montrer qu'il est exact à droite. Noter $H_q(C,M)$ ses foncteurs dérivés à gauche. Montrer que les composants du complexe $Z_{\underline{ES}(C)} \otimes M$ sont acycliques pour $\varinjlim_C$. En déduire, en notant $ST.(M)$ le complexe $\varinjlim_C (Z_{\underline{ES}(C)} \otimes M)$, des isomorphismes $H_q(ST.(M) \sim H_q(C,M)$.

h) Soit $u : C^\wedge \longrightarrow Ens$ l'unique morphisme du topos $C^\wedge$ dans le topos ponctuel. On note $u_! : C^\wedge_{\mathbf{Z}} \longrightarrow Ab$ l'adjoint à gauche du foncteur $u^* : Ab \longrightarrow C^\wedge_{\mathbf{Z}}$. Montrer que pour tout préfaisceau abélien M , $u_! M = \varinjlim_{C} M$.

i) On note dorénavant $ST^\cdot(C,M)$ et $ST.(C,M)$ les complexes notés $ST^\cdot(M)$ et $ST.(M)$. Un préfaisceau M sur C est dit localement constant s'il transforme tous les morphismes de C en isomorphismes. Associer à tout préfaisceau localement constant M un préfaisceau localement constant M sur la catégorie C° (catégorie opposée à C) tel que pour tout morphisme u de C , $\check{M}(u) = M(u)^{-1}$. Trouver un isomorphisme canonique entre les complexes $ST^\cdot(C,M)$ et $ST^\cdot(C^\circ,\check{M})$ (resp. $ST.(C,M)$ et $ST.(C^\circ,\check{M})$).

j) Soit C une petite catégorie possédant un objet initial (resp. une petite catégorie filtrante). Montrer que pour tout préfaisceau constant M , $H^q(C^\wedge,M) = 0$ pour $q > 0$ (resp. $H_q(C,M) = 0$ pour $q > 0$) .

2.4 Cas des petits sites. Cohomologie de Čech.

2.4.1 Soient (C,A) un $\underline{U}$-site annelé , $C^\sim$ le topos des faisceaux sur C , $\varepsilon : C \longrightarrow C^\sim$ le foncteur canonique qui associe à un objet de C le faisceau associé au préfaisceau représenté par cet objet. Par abus de notation, pour tout objet X de C et tout faisceau de A-modules M nous poserons $H^q(\varepsilon X,M) = H^q(X,M)$ (cf.2.3.1). Rappelons que lorsque la topologie de C est moins fine que la topologie canonique, ce qui est toujours le cas dans la pratique, le foncteur ε est pleinement fidèle et permet d'identifier C avec son image par ε .

2.4.2 On note $\mathcal{H}^\circ : C^\sim_A \longrightarrow C^\wedge_A$ le foncteur d'inclusion des faisceaux de A-modules dans la catégorie des préfaisceaux de A-modules. Pour tout faisceau de A-modules M on a donc par définition :

(2.4.1) $$\mathcal{H}^\circ(M)(X) = H^\circ(X,M) = M(X) ,$$

pour tout objet X de C . Le foncteur $\mathcal{H}^\circ$ est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés à droite sont notés $\mathcal{H}^q$. Comme pour tout objet X de C , le foncteur "section sur X " est exact dans la catégorie des préfaisceaux, on a

(2.4.2.2) $\mathcal{H}^q(M)(X) = H^q(X,M)$,

pour tout objet X de C et tout faisceau de A-modules M , de sorte que le préfaisceau $\mathcal{H}^q(M)$ n'est autre que le préfaisceau $X \longmapsto H^q(X,M)$.

2.4.3 On suppose que (C,A) est un petit site annelé de sorte que $C^\wedge$ est un topos auquel on peut appliquer les résultats de 2.3. Soit X un objet de C et $R \hookrightarrow X$ un cible couvrant. Pour tout préfaisceau de A-modules G , les groupes $H^q(R,G)$ (qui sont donc calculés dans le topos $C^\wedge$) sont appelés les groupes de cohomologie de Čech du préfaisceau G relatifs au crible couvrant R .
Lorsque $R \hookrightarrow X$ est le crible engendré par une famille couvrante $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ de morphismes quarrables ces groupes peuvent se calculer à l'aide du complexe $C^\cdot(\mathcal{U},G)$ (2.3.3) appelé complexe de Čech de G relatif à la famille couvrante $\mathcal{U}$ (ou du recouvrement $\mathcal{U}$). Les groupes $H^q(\mathcal{U},G) = H^q(R,G)$ (2.3.4) sont alors appelés groupes de cohomologie de Čech de G relatifs à la famille couvrante $\mathcal{U}$.

2.4.4 Soit M un faisceau de A-modules sur C . Les groupes $H^q(\mathcal{U},\mathcal{H}^\circ(M))$ sont le plus souvent notés, abusivement, $H^q(\mathcal{U},M)$ et appelés groupes de cohomologie de Cech du faisceau M relatifs à la famille couvrante $\mathcal{U}$.

2.4.5 On note $\check{\mathcal{H}}^\circ : C^\wedge_A \longrightarrow C^\wedge_A$ l'extension naturelle aux préfaisceaux de A-modules, du foncteur L décrit en II. On a donc, par définition, pour un préfaisceau G et un objet X de C :

(2.4.5.1) $\check{\mathcal{H}}^\circ(G)(X) = \varinjlim_{R \hookrightarrow X} G(R)$,

la limite inductive étant prise suivant les cribles couvrant X . Il résulte de (2.4.5.1) que le foncteur $\check{\mathcal{H}}^\circ$ est exact à gauche. Les foncteurs dérivés à droite de $\check{\mathcal{H}}^\circ$ sont notés $\check{\mathcal{H}}^q$. Comme les foncteurs "section sur X" et "limite inductive filtrante" sont exacts, il résulte de (2.4.5.1) qu'on a

(2.4.5.2) $\check{\mathcal{H}}^q(G)(X) = \varinjlim_{R \hookrightarrow X} H^q(R,G)$,

la limite étant prise suivant les cribles couvrant X .

Les préfaisceaux $\check{\mathcal{H}}^q$ sont appelés les <u>préfaisceaux de cohomologie de Čech</u>. Pour tout objet X de C , on pose

$$(2.4.5.3) \qquad \check{H}^q(X,G) = \check{\mathcal{H}}^q(G)(X) \quad .$$

Les groupes $\check{H}^q(X,G)$ sont appelés les <u>groupes de cohomologie de Čech</u>. Lorsque la topologie de C est définie par une prétopologie, ce qui est le plus souvent le cas dans la pratique, on a, compte tenu de 2.3.4,

$$(2.4.5.4) \qquad \check{H}^q(X,G) \simeq \varinjlim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, G) \quad ,$$

la limite inductive étant prise suivant les familles couvrantes quarrables préordonnées par la relation d'ordre naturelle sur les cribles qui leur correspondent (2.3.5).

2.4.6 Soit M un faisceau de A-modules. On pose, abusivement

$$(2.4.6.1) \qquad \check{H}^q(X,M) = \check{H}^q(X, \mathcal{H}^\circ,(M) \quad , \quad \check{\mathcal{H}}^q(M) = \check{\mathcal{H}}^q(\check{\mathcal{H}}^\circ (M)) \quad ,$$

et les groupes $\check{H}^q(X,M)$ sont appelés groupes de cohomologie de Cech du faisceau M . Signalons que si les foncteurs $\check{H}^q$ sont des foncteurs dérivés sur la catégorie des préfaisceaux, ils ne forment pas, en général, un δ-foncteur sur la catégorie des faisceaux.

2.5 <u>Changement d'univers</u>. <u>Cohomologie de Cech dans le cas des $\underline{U}$-sites</u>

2.5.1 Soient (C,A) un $\underline{U}$-site annelé et $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$. Le site (C,A) est alors un $\underline{V}$-site et on a un $\underline{U}$-topos $C^{\sim}_{\underline{U}}$, un $\underline{V}$-topos $C^{\sim}_{\underline{V}}$ et un foncteur canonique d'inclusion $\varepsilon : C^{\sim}_{\underline{U}} \hookrightarrow C^{\sim}_{\underline{V}}$. Le foncteur ε est exact et pleinement fidèle sur les catégories de Modules et transforme les Modules injectifs en Modules injectifs (1.9). Pour tout couple de U-faisceaux de A-modules on a donc des isomorphismes canoniques

$$(2.5.1.1) \qquad \mathrm{Ext}^q_A(C^{\sim}_{\underline{U}};M,N) \simeq \mathrm{Ext}^q_{\varepsilon A}(C^{\sim}_{\underline{V}};\varepsilon M,\varepsilon N) \qquad q \geq 0 \ .$$

En particulier, pour tout $\underline{U}$-faisceau d'ensembles R sur C , on a des isomorphismes canoniques (2.1.1)

$$(2.5.1.2) \qquad H^q(R,M) \simeq H^q(\varepsilon R,\varepsilon M) \qquad q \geq 0 \quad ,$$

et plus particulièrement encore, pour tout objet X de C, on a des isomorphismes canoniques (2.4.1)

(2.5.1.3) $$H^q(X,M) \simeq H^q(X,\varepsilon M) \quad .$$

En termes vagues, on peut donc dire que la cohomologie des faisceaux ne dépend pas du choix des univers et on peut toujours, pour la nécessité d'une démonstration où d'une construction, augmenter l'univers pour calculer la cohomologie d'un faisceau.

2.5.2 Soient (C,A) un $\underline{U}$-site annelé et $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$. Notons $C^{\sim}_{A}$ la catégorie des $\underline{U}$-faisceaux $\hat{\varepsilon} : C^{\wedge}_{A,\underline{U}} \longrightarrow C^{\wedge}_{A,\underline{V}}$ le foncteur d'inclusion des U-préfaisceaux dans les $\underline{V}$-préfaisceaux de A-modules. Le foncteur $\hat{\varepsilon}$ est exact et par suite les foncteurs dérivés du foncteur $\hat{\varepsilon}\mathcal{H}^{\circ} : C^{\sim}_{A} \longrightarrow C^{\wedge}_{A,\underline{V}}$ ( ) sont les foncteurs $\hat{\varepsilon}\mathcal{H}^q$, $q \geq 0$. Par abus de notation, nous noterons encore $\mathcal{H}^q : C^{\sim}_{A} \longrightarrow C^{\wedge}_{A,\underline{V}}$, $q \geq 0$, les foncteurs $\hat{\varepsilon}\mathcal{H}^q$. Cet agrandissement de l'univers présente lorsque C est $\underline{V}$-petit l'avantage suivant: La catégorie $C^{\wedge}_{\underline{U}}$ n'est pas en général un $\underline{U}$-topos et les $\underline{U}$-préfaisceaux de A-modules ne sont pas nécessairement des sous-modules de $\underline{U}$-préfaisceaux injectifs, alors que la catégorie des $\underline{V}$-préfaisceaux est un topos (un $\underline{V}$-topos) et que par suite tout $\underline{V}$-préfaisceau de A-modules est un sous-objet d'un $\underline{V}$-préfaisceau injectif (0.1.1). Ainsi pour tout $\underline{V}$-préfaisceau d'ensembles R (et en particulier lorsque R est un $\underline{U}$-préfaisceau) et pour tout tout $\underline{U}$-faisceau de A-modules M, les groupes $H^q(R,\mathcal{H}^q(M))$ sont définis par 2.1.1 et il résulte de (2.5.1.2) que ces groupes ne dépendent pas de l'univers $\underline{V}$ considéré. De même, pour tout couple d'entiers ≥ 0 p et q, les préfaisceaux $\check{\mathcal{H}}^p(\mathcal{H}^q(M))$ sont définis par 2.4.5 et il résulte de (2.5.1.2) et de (2.4.5.4) que ces préfaisceaux ne dépendent pas de l'univers $\underline{V}$ utilisé pour les définir.

3. La suite spectrale de Cartan-Leray relative à un recouvrement

Proposition 3.1 : Soient (C,A) un U-site annelé, V un univers contenant U . Le foncteur $\mathcal{H}^\circ : C_A^\sim \longrightarrow C^\wedge_{A,\underline{V}}$ (2.5.2) transforme les A-Modules injectifs en préfaisceaux injectifs. Pour tout entier $q > 0$, et tout A-Module M , le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{H}^q(M)$ est nul.

Notons $\underline{a}_{\underline{V}}$ le foncteur "faisceau associé" pour les V-préfaisceaux et $\varepsilon : C_A^\sim \hookrightarrow C^\sim_{A,\underline{V}}$ le foncteur d'inclusion des U-faisceaux dans les V-faisceaux. On a $\underline{a}_{\underline{V}}\mathcal{H}^\circ = \varepsilon$ (II 3.6) et comme les foncteurs $\underline{a}_{\underline{V}}$ et ε sont exacts, on a $\underline{a}_{\underline{V}}\mathcal{H}^q = 0$ pour tout entier $q > 0$. Pour tout U-faisceau M et tout V-préfaisceau N on a un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_{C^\wedge_{A,\underline{V}}}(N,\mathcal{H}^\circ(M)) \simeq \mathrm{Hom}_{C^\sim_{A,\underline{V}}}(\underline{a}_{\underline{V}}N,\varepsilon M)$. Lorsque M est injectif, εM est injectif (1.9) et comme le foncteur $\underline{a}_{\underline{V}}$ est exact, le foncteur $N \longmapsto \mathrm{Hom}_{C_{A,\underline{V}}}(N,\mathcal{H}^\circ(M))$ est exact. Par suite $\mathcal{H}^\circ(M)$ est injectif.

Théorème 3.2 : Soient (C,A) un U-site annelé, R un U-préfaisceau d'ensembles sur C , M un faisceau de A-Modules. Il existe une suite spectrale, fonctorielle en R et en M :

$$H^{p+q}(\underline{a}R,M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(R,\mathcal{H}^q(M)) \quad . \tag{3.2.1}$$

(Lorsque C n'est pas U-petit, le terme $H^p(R,\mathcal{H}^q(M))$ doit être interprété comme la cohomologie du préfaisceau $\mathcal{H}^q(M)$ dans le topos $C^\wedge_{\underline{V}}$ où V est un univers contenant U tel que C soit V-petit (2.5.2)).

Par définition du foncteur "faisceau associé" (cf. II) on a un isomorphisme de foncteur $H^\circ(\underline{a}R,M) \simeq H^0(R,\mathcal{H}^\circ(M))$. Le foncteur $\mathcal{H}^\circ$ transforme les objets injectifs en objets injectifs. La suite spectrale des foncteurs composés (0.3) est la suite spectrale cherchée.

Corollaire 3.3 : Soient X un objet de C et $\mathcal{U} = (U_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, une famille couvrante telle que pour tout $i \in I$, le morphisme $U_i \longrightarrow X$ soit quarrable. On a alors une suite spectrale (dite de Cartan-Leray) :

$$H^{p+q}(X,M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(M)) \quad . \tag{3.3.1}$$

Soit $R \hookrightarrow X$ le crible engendré par $\mathcal{U}$. Comme ce crible est couvrant, le faisceau associé à R est le faisceau associé à X (II 5.2). Compte tenu de 2.4.1, on a $H^{p+q}(\underline{a}R,M) = H^{p+q}(X,M)$. Le corollaire résulte alors de 2.3.4.

Corollaire 3.4 : Il existe une suite spectrale fonctorielle en le faisceau M et l'objet X de C

(3.4.1) $$H^{p+q}(X,M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = \check{H}^p(X,\mathcal{H}^q(M)) \quad .$$

Cette suite spectrale fournit, lorsque X varie dans C , la suite spectrale de préfaisceaux :

(3.4.2) $$\mathcal{H}^{p+q}(M) \Longleftarrow E_2^{p,q} = \check{\mathcal{H}}^p(\mathcal{H}^q(M)) \quad .$$

Ces suites spectrales fournissent des morphismes fonctoriels (morphismes de coin) :

(3.4.3) $$\Phi^q(M) \ : \ \check{\mathcal{H}}^q(M) \longrightarrow \mathcal{H}^q(M) \quad ,$$

(3.4.4) $$\Phi^q_X(M) \ : \ \check{H}^q(X,M) \longrightarrow H^q(X,M) \quad .$$

Les morphismes Φ^q et Φ^q_X sont des isomorphismes lorsque q égale 0 ou 1 . Les morphismes Φ^2 et Φ^2_X sont des monomorphismes. Plus généralement, lorsque les préfaisceaux $\mathcal{H}^i(M)$ sont nuls pour $0 < i < n$, les morphismes $\Phi^q(M)$ et $\Phi^q_X(M)$ sont des isomorphismes pour $0 \leq q \leq n$ et des monomorphismes pour $q = n+1$.

La première suite spectrale s'obtient en passant à la limite inductive dans la suite spectrale (3.2.1) sur les cribles $R \hookrightarrow X$ couvrant X (2.4.5.2). La deuxième suite spectrale s'en déduit aussitôt (2.4.5.3). Les faisceaux associés aux préfaisceaux $\mathcal{H}^q(M)$ sont nuls lorsque $q > 0$ (3.1). On a donc $\check{\mathcal{H}}^\circ \check{\mathcal{H}}^\circ \check{\mathcal{H}}^q(M) = 0$ pour tout $q > 0$ (II.3.4). Par suite $\check{\mathcal{H}}^\circ \mathcal{H}^q(M)$ est un préfaisceau séparé dont le faisceau associé est nul. On a donc $\check{\mathcal{H}}^\circ \mathcal{H}^q(M) = 0$ pour $q > 0$ (II 3.2). Les assertions sur les morphismes Φ^q et Φ^q_X s'en déduisent aussitôt.

Corollaire 3.5 : Soient (E,A) un topos annelé et M un A-Module (à gauche pour fixer les idées). Notons $\underline{M}$ le Groupe abélien sous-jacent à M . Le foncteur $M \longmapsto \underline{M}$ est exact et par suite, pour tout objet X de E , l'isomorphisme canonique

$$H^\circ(X,M) \xrightarrow{\sim} H^\circ(X,\underline{M})$$

<u>se prolonge en des morphismes</u>

$$H^q(X,M) \longrightarrow H^q(X,\underline{M}) \qquad q \geqslant 0 \ .$$

<u>Ces morphismes sont des isomorphismes</u>.

Pour tout objet Y de E , on a (2.4.5.4) :

$$H^p(Y,M) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},M) \qquad\qquad H^p(Y,\underline{M}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},\underline{M})$$

la limite inductive étant prise sur les familles épimorphiques $\mathcal{U} = (Y_i \longrightarrow Y)$, $i \in I$.

Par suite, l'homomorphisme canonique $\check{H}^p(Y,M) \longrightarrow \check{H}^p(Y,\underline{M})$ est un isomorphisme (2.3.4). Donc (2.4.5.3), l'homomorphisme canonique $\check{\mathcal{H}}^p(M) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^p(\underline{M})$ est un isomorphisme. Si M est un A-Module injectif, on a $\check{\mathcal{H}}^p(\underline{M}) = 0$ pour $p > 0$; D'où $\mathcal{H}^1(\underline{M}) = 0$ et par récurrence sur p , $\mathcal{H}^p(\underline{M}) = 0$, $p > 0$ (3.4). Donc $H^p(X,\underline{M}) = 0$ pour $p > 0$ (2.4.2.2) et (2.5). Par suite, le foncteur $M \longmapsto \underline{M}$ transforme les objets injectifs en objets acycliques pour le foncteur $H^o(X, \ . \ )$, d'où l'isomorphisme annoncé.

<u>Exercice</u> 3.6 : Soient G un groupe topologique et B_G son topos classifiant (IV 2.5). Notons E_G l'objet de B_G constitué par l'espace topologique sous-jacent à G muni de l'opération de translation à gauche par les éléments de G . Le morphisme canonique de E_G dans l'objet final e_G de B_G est un épimorphisme ; d'où un recouvrement $\mathcal{U} = (E_G \longrightarrow e_G)$ et, pour tout faisceau abélien F de B_G , une suite spectrale

$$\text{(3.6.1)} \qquad E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U},\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(B_G,F) \quad ,$$

qu'on se propose d'étudier.

1) Montrer que pour tout entier n , le topos

$$B_{G/ \ E_G \times E_G \times \ \ldots \times E_G} \qquad (\text{ n facteurs})$$

est canoniquement équivalent au topos (IV 2.5)

$$\mathrm{TOP}(G\times G\times G\times\ldots\times G) \quad (\ n-1 \ \text{facteurs})$$

Pour tout entier n, notons F_n le faisceau sur l'espace topologique $G\times\ldots\times G$ (n facteurs) induit par F.

2) En déduire que le terme $E_2^{p,q}$ de (3.6.1) est canoniquement isomorphe au p-ème groupe de cohomologie d'un complexe du type

$$H^q(e,F_o) \longrightarrow H^q(G,F_1) \longrightarrow H^q(G\times G,F_2) \longrightarrow \quad \ldots ,$$

qu'on explicitera (e désigne l'espace topologique réduit à un point).

3) En déduire que la cohomologie du topos classifiant B_G à valeur dans les faisceaux localement constants est isomorphe à la cohomologie singulière correspondante des espaces classifiants utilisés en topologie lorsque pour les espaces topologiques du type $G\times G\times\ldots\times G$, la cohomologie des faisceaux localement constants coïncide avec la cohomologie singulière correspondante (Ce qui est le cas lorsque, par exemple, G est localement contractile) ; (Pour les espaces classifiants, on pourra consulter [15]).

4. Faisceaux acycliques

Définition 4.1. : Soient (E,A) un topos annelé, F un A-Module, S une famille topologiquement génératrice de E. On dit que F est S-acyclique si pour tout objet X de S, et tout entier $q > 0$, on a $H^q(X,F) = 0$. Lorsque S est égal à ob E, les faisceaux S-acycliques sont appelés les faisceaux flasques.

4.2. Soient (C,A) un $\underline{U}$-site annelé, F un faisceau de A-modules sur C. On dit que F est C-acyclique si F est S-acyclique où S est la famille des faisceaux associés aux objets de C.

Proposition 4.3 : Soient (C,A) un $\underline{U}$-site annelé, F un faisceau de A-modules. Notons $\mathcal{H}^o : C_A^{\sim} \longrightarrow C_A^{\wedge}$ le foncteur d'inclusion des A-Modules dans la catégorie des préfaisceaux de A-modules (il s'agit ici des $\underline{V}$-préfaisceaux où $\underline{V}$ est un univers tel que C soit $\underline{V}$-petit). Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) F <u>est</u> C-<u>acyclique</u>.

ii) <u>Pour tout objet</u> X <u>de</u> C <u>et tout crible couvrant</u> $R \hookrightarrow X$, <u>on a</u> :

$$H^q(R, \mathcal{H}^\circ(F)) = 0 \quad \text{pour tout } q > 0 \ .$$

iii) <u>Pour tout objet</u> X <u>de</u> C , <u>on a</u> :

$$\check{H}^q(X,F) = 0 \quad \text{pour tout } q > 0 \ ;$$

i) $\Longrightarrow$ ii) : Comme F est C-acyclique, les préfaisceaux $\mathcal{H}^q(F)$ sont nuls pour $q > 0$. La suite spectrale 3.2.1 fournit alors un isomorphisme $H^q(R,\mathcal{H}^\circ(F)) \simeq H^q(X,F)$ pour tout q . Par suite $H^q(R,\mathcal{H}^\circ(F)) = 0$ pour $q > 0$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) : clair par passage à la limite inductive.

iii) $\Longrightarrow$ i) : on démontre par récurrence sur q que les préfaisceaux $\mathcal{H}^q(F)$ sont nuls pour $q > 0$. Pour cela, on utilise 3.4.2.

4.4. Il résulte du critère 4.3 ii) et de 3.5 que la propriété de S-acyclicité ne dépend que du faisceau abélien sous-jacent. En particulier, un faisceau de A-modules est flasque si et seulement si le faisceau abélien sous-jacent est flasque.

<u>Corollaire</u> 4.5 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé et</u> F <u>un</u> A-<u>Module</u>. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i) F <u>est flasque</u> ;

ii) <u>Pour toute famille épimorphique</u> $\mathfrak{X} = (X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$,

$$H^q(\mathfrak{X}, F) = 0 \quad \text{pour tout } q > 0 \ .$$

Dans 4.2, on prend pour C le topos E lui-même. Le corollaire résulte alors de l'équivalence i) $\Longleftrightarrow$ ii) de 4.2.

4.6. Les faisceaux injectifs sont flasques. Les faisceaux flasques sont S-acycliques pour toute famille topologiquement génératrice S . Les faisceaux flasques ne sont pas nécessairement injectifs (prendre pour topos E le topos des ensembles). Les faisceaux S-acycliques ne sont pas nécessairement flasques (exercice 4.1.3).

<u>Proposition</u> 4.7 : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos</u>, F <u>un</u> A-<u>Module flasque</u>, X <u>un objet de</u> E . <u>Pour tout sous-objet</u> Y <u>de</u> X <u>l'homomorphisme canonique</u> $H^o(X,F) \longrightarrow H^o(Y,F)$

est surjectif.

Soit Y un sous-objet de X tel que le morphisme $H^{o}(X,F) \longrightarrow H^{o}(Y,F)$ ne soit pas surjectif. Soit Z l'objet obtenu en recollant deux copies X_1 et X_2 de X le long de Y. L'objet Z est recouvert par les deux sous-objets X_1 et X_2 on a $X_1 \times_Z X_2 = Y$. Notons $\mathfrak{X} = (X_1 , X_2)$ le recouvrement ainsi obtenu. On constate aussitôt que $H^1(\mathfrak{X},F) \neq 0$. Contradiction.

4.8. La propriété décrite dans 4.7 ne caractérise pas, dans le cas des topos généraux, les faisceaux flasques (exer. 4.15). Elle la caractérise cependant dans le cas des topos engendrés par leurs ouverts et en particulier dans le cas des topos associés aux espaces topologiques (exer. 4.16). La terminologie de flasque adoptée ici coïncide dans le cas des espaces topologiques avec la terminologie de [7] (exer. 4.16).

Proposition 4.9. : Soient $u : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ un morphisme de topos annelés.

1) Le foncteur u_* transforme les A-Modules flasques en A'-Modules flasques.

2) Soient S et S' des familles topologiquement génératrices de E et E' respectivement telles que $u^*(S') \subset S$. Le foncteur u_* transforme les A-Modules S-acycliques en A'-Modules S'-acycliques.

3) Lorsque u est un morphisme plat (1.8) le foncteur u_* transforme les A-Modules injectifs en A'-Modules injectifs.

Soient X un objet de E', $\mathfrak{X} = (X_i \longrightarrow X)_{i \in I}$ une famille épimorphique, F un A-Module flasque, $C^{\cdot}(\mathfrak{X},u_*F)$ le complexe de Čech du recouvrement $\mathfrak{X}$. On a un isomorphisme canonique $C^{\cdot}(\mathfrak{X},u_*F) \simeq C^{\cdot}(u^*(\mathfrak{X}),F)$ en utilisant l'adjonction de u_* et de u^* et le fait que u^* commute aux produits fibrés. De plus u^* commute aux limites inductives et par suite $u^*(\mathfrak{X}) = (u^*X_i \longrightarrow u^*X)_{i \in I}$ est une famille épimorphique. Comme F est flasque, on a $H^q(u^*(\mathfrak{X}),F)$ pour $q > 0$ et par suite $H^q(\mathfrak{X},u_*F) = H^q(C^{\cdot}(\mathfrak{X},u_*F)) = H^q(C^{\cdot}(u^*(\mathfrak{X},F)) = H^q(u^*(\mathfrak{X}),F) = 0$ pour $q > 0$. Donc u_*F est flasque.

Démontrons 2). Lorsque S' est stable par produits fibrés une démonstration analogue à celle qui précède permet de démontrer 2). Dans le cas général, nous utiliserons la suite spectrale du morphisme u (5.3.2). L'assertion 2) ne sera pas utili-

sée avant 5.3.2. Soit F un faisceau S-acyclique. Les faisceaux $R^q u_* F$ sont les faisceaux associés aux préfaisceaux $X \longmapsto H^q(u^* X, F)$. Comme S' est une famille topologiquement génératrice et comme F est S-acyclique, on a $R^q u_* F = 0$ pour tout $q > 0$. La suite spectrale 5.3.2 fournit alors un isomorphisme, pour tout objet X de E' : $H^q(X, u_* F) \simeq H^q(u^* X, F)$ et par suite, pour tout X dans S', $H^q(X, u_* F) = 0$.
Démontrons 3). Lorsque le morphisme u est plat, le foncteur u^* pour les Modules est exact (1.8). Par suite le foncteur u_* adjoint à droite de u^* transforme les objets injectifs en objets injectifs (0.2).

Proposition 4.10 : Soient F un A-Module du topos annelé (E,A), G un A-Module injectif.

1) Le foncteur $F \longmapsto \mathcal{H}om_A(F,G)$ est exact.

2) Le groupe abélien $\mathcal{H}om_A(F,G)$ est flasque.

Preuve : Montrons 1). Soit :

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte. Il nous faut montrer que la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_A(F'',G) \longrightarrow \mathcal{H}om_A(F,G) \longrightarrow \mathcal{H}om_A(F',G) \longrightarrow 0$$

est exacte et pour cela il suffit de montrer que pour tout objet H de E, la suite :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, \mathcal{H}om_A(F'',G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, \mathcal{H}om_A(F,G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(H, \mathcal{H}om_A(F',G)) \longrightarrow 0$$

est exacte. Or (IV 6.12) cette dernière suite est isomorphe à la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_H \otimes_A F'', G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_H \otimes_A F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A_H \otimes_A F', G) \longrightarrow 0$$

et le A-Module A_H est plat (1.3.1).

2) Montrons que $\mathcal{H}om_A(F,G)$ est flasque. Soit :

$$\mathfrak{X} = (X_i \longrightarrow X) \quad , i \in I \ ,$$

une famille épimorphique de E, et

$$C.(\mathfrak{X}) : \quad \cdots \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\end{smallmatrix} \coprod_{i,j} \mathbb{Z}_{X_i \times X_j} \rightrightarrows \coprod_i \mathbb{Z}_{X_i}$$

le complexe défini en 1.5. Ce complexe est une résolution plate de l'objet $\mathbb{Z}_X$ qui est lui-même plat (1.4 et 1.3).

Calculons alors les groupes :

$$H^q(\mathfrak{X},\mathcal{H}om_A(F,G) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathbb{Z}}(C.(\mathfrak{X}),\mathcal{H}om_A(F,G)) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathrm{Hom}_A(C.(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} F,G)$$

Le complexe

$$C.(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} F$$

est acyclique en degré $\neq 0$, car $C.(\mathfrak{X})$ est une résolution plate d'un module plat. Par suite $\mathrm{Hom}(C.(\mathfrak{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} F,G)$ est acyclique en degré $\neq 0$.

Proposition 4.11 : *Soient* (E,A) *un topos annelé,* F *un faisceau flasque (resp. injectif) de* A*-modules.*

1) *Pour tout objet* X *de* E *le* $A|X$*-Module* $j_X^{*} F$ *est flasque (resp. injectif)*

2) *Pour tout fermé* Z *de* E, *le faisceau des sections de* F *à supports dans* Z (IV 14) *est flasque (resp. injectif).*

L'assertion 1) résulte de 4.5 lorsque F est flasque. Le foncteur j_X^{*} admet un adjoint à gauche exact $j_{X!}$ (IV 11). Par suite, lorsque F est injectif, $j_X^{*} F$ est injectif (0.2). Démontrons 2). Notons $i : Z \longrightarrow E$ le morphisme d'inclusion. Le faisceau des sections de F à support dans Z est alors le faisceau $i_{*}i^{!}F$ (IV 14). Le foncteur $i_{*}i^{!}$ est adjoint à droite au foncteur $i_{*}i^{*}$ qui est exact (IV 14). Par suite il transforme faisceau injectif en faisceau injectif. Soient U l'ouvert complémentaire de Z, $j : U \longrightarrow E$ le morphisme d'inclusion et F un faisceau flasque. On a une suite exacte (IV 14) :

$$(4.11.1) \qquad 0 \longrightarrow i_{*}i^{!}F \longrightarrow F \longrightarrow j_{*}j^{*}F \qquad .$$

Pour tout objet X de E, on a $j_{*}j^{*}F(X) = F(X\times U)$ et le morphisme $F(X) \longrightarrow j_{*}j^{*}F(X)$ induit par la dernière flèche de (4.11.1) provient de l'injection canonique $X\times U \hookrightarrow X$. Comme F est flasque, ce morphisme est surjectif (4.7) et par suite, la dernière flèche de 4.11.1 est un épimorphisme de préfaisceaux. Pour tout objet X de E, la suite exacte de cohomologie déduite de 4.11.1 fournit $H^q(X,i_{*}i^{!}F) = 0$ pour $q > 0$ et par suite $i_{*}i^{!}F$ est flasque.

4.12 La propriété pour un faisceau d'être flasque (resp. injectif) se localise (4.11 1)). Mais ce n'est pas, en général, une propriété de caractère local (exer. 4.15). Cependant, c'est une propriété de caractère local dans le cas des topos engendrés par leurs ouverts et en particulier dans le cas des topos associés aux espaces topologiques (exer. 4.16).

Exercice 4.13 : Soient X un espace localement compact et F un faisceau c-mou [7]. En utilisant le caractère local de la mollesse (loc. cit.), montrer que la restriction de F à tout ouvert paracompact de X est un faisceau mou. Montrer que les ouverts paracompacts forment une base de la topologie de X. En déduire que, en notant S la famille des ouverts paracompacts de X, le faisceau F est S-acyclique. Montrer que le faisceau des fonctions continues sur X est S-acyclique mais n'est pas flasque lorsque X n'est pas discret.

Problème 4.14 : Etudier les topos totalement acycliques, i.e. les topos tels que $H^q(X,F) = 0$ pour tout $q > 0$, tout objet X, tout faisceau abélien F.

Exercice 4.15 : Soient G un groupe discret, B_G son topos classifiant (IV 2.4). Montrer que pour tout faisceau abélien F et tout monomorphisme $X \hookrightarrow Y$, l'homomorphisme $F(Y) \longrightarrow F(X)$ est surjectif. Soit $E(G)$ le groupe G considéré comme espace homogène sous lui-même. C'est un objet de B_G. Le topos $B_{G\,/E(G)}$ est équivalent au topos ponctuel (IV 8). Le morphisme $E(G) \longrightarrow e$ (e objet final de B_G) est un épimorphisme. Pour tout faisceau abélien F de B_G, le faisceau $F|E(G)$ est flasque. En déduire que la propriété d'être flasque ou injectif n'est pas de caractère local.

Exercice 4.16 : On dit qu'un topos E est engendré par ses ouverts si les ouverts de E (i.e. les sous-objets de l'objet final e de E) forment une famille génératrice (I 7). Un tel topos possède la propriété suivante :

(P) Toute famille épimorphique $X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, est majorée par une famille épimorphique $U_j \longrightarrow X$, $j \in J$, où les $U_j \longrightarrow X$ sont des monomorphismes.

a) Existe-t-il des topos qui possèdent la propriété (P) et qui ne sont pas engendrés par leurs ouverts ? Les topos associés aux espaces topologiques sont engendrés par leurs ouverts. Si E est engendré par ses ouverts (resp. jouit de (P)), pour tout objet X de E, $E_{/X}$ est engendré par ses ouverts (resp. jouit de (P)). Tout sous-topos d'un topos engendré par ses ouverts est engendré par ses ouverts. La propriété (P) n'est pas une propriété de caractère local.

b) Soient E un topos, $\mathrm{Ouv}(E)$ la catégorie des ouverts de E munie de la topologie induite. Le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ouv}(E) \longrightarrow E$ est un morphisme de sites, d'où un morphisme de topos $\Pi : E \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E)^{\sim}$. Le foncteur Π^{*} est pleinement fidèle. Le morphisme Π possède vis à vis de la 2-catégorie des topos engendrés par leurs ouverts une propriété universelle que le lecteur explicitera.

c) Soient E un topos engendré par ses ouverts et $\mathrm{Point}(E)$ l'ensemble des points à isomorphismes près de E. Montrer que $\mathrm{Point}(E)$ est petit. Mettre une topologie sur $\mathrm{Point}(E)$ et définir un morphisme $\mathrm{Top}(\mathrm{Point}(E)) \longrightarrow \mathrm{Ouv}(E)^{\sim}$ faisant de $\mathrm{Top}(\mathrm{Point}(E))$ un sous-topos de $\mathrm{Ouv}(E)^{\sim}$. Pour tout espace topologique X, montrer que tout morphisme de $\mathrm{Top}(X)$ dans E fournit un morphisme de $\mathrm{Top}(X)$ dans $\mathrm{Top}(\mathrm{Point}(E))$. Montrer qu'un topos engendré par ses ouverts est équivalent à un topos $\mathrm{Top}(X)$ (X espace topologique) si et seulement s'il possède suffisamment de points. Montrer qu'il existe des topos engendrés par leurs ouverts qui ne sont pas équivalents à des topos $\mathrm{Top}(X)$ où X est un espace topologique.

d) Soit E un topos possèdant la propriété (P). Pour qu'un faisceau abélien F sur E soit flasque, il faut et il suffit que pour tout monomorphisme $X \hookrightarrow Y$, l'homomorphisme $F(Y) \longrightarrow F(X)$ soit surjectif.

e) Soit E un topos possèdant la propriété (P). Montrer que la propriété pour un faisceau F d'être flasque est une propriété de nature locale.

f) Soient E un topos engendré par ses ouverts, e l'objet final de E. Pour qu'un faisceau abélien F soit flasque il faut et il suffit que pour tout ouvert U de e, le morphisme canonique $F(e) \longrightarrow F(U)$ soit surjectif.

Exercice 4.17 (Faisceaux flasques et changement d'univers)

Soient C un $\underline{U}$-site (par exemple un $\underline{U}$-topos) et $\underline{V}$ un univers contenant $\underline{U}$. Notons $\varepsilon : C^{\sim}_{\underline{U}} \longrightarrow C^{\sim}_{\underline{V}}$ les catégories de faisceaux correspondantes et l'injection canonique. Soit F un $\underline{U}$-faisceau abélien flasque sur C . On se propose de montrer que εF est flasque. On remarque tout d'abord que pour tout objet X de $C^{\sim}_{\underline{U}}$ on a $H^q(\varepsilon X, \varepsilon F) = 0$ pour $q > 0$. Tout objet Y de $C^{\sim}_{\underline{V}}$ admet une famille épimorphique $\varepsilon X_i \longrightarrow Y$, $i \in I$ où les $\varepsilon X_i \longrightarrow Y$ sont des monomorphismes. On en conclut que $H^q(Y, \varepsilon F) = \varprojlim^q_{\varepsilon X \hookrightarrow Y} F(X)$. Pour montrer que ces $\varprojlim^q$ sont nuls pour $q \neq 0$, on peut se ramener au topos $\mathrm{Ouv}(C_{\underline{V}/Y})^{\sim}$ et utiliser le fait que pour ce topos, un faisceau est flasque s'il l'est localement.

5. Les $R^q u_*$ et la suite spectrale de Cartan-Leray relative à un morphisme de topos

5.0. Soient $u : (E,A) \longrightarrow (E',A')$ un morphisme de topos annelés, $u_* = E \longrightarrow E'$ le foncteur image directe. La notation u_* désignera encore l'extension aux Modules du foncteur image directe. Le foncteur u_* pour les Modules (à gauche pour fixer les idées) est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés droits sont notés $R^q u_*$, $q \geq 0$.

Proposition 5.1 :

1) Pour tout A-Module M , le faisceau $R^q u_* M$ est le faisceau associé au préfaisceau $X' \longmapsto H^q(u^* X', M)$ $(X' \in \mathrm{ob}\, E')$.

2) La formation des foncteurs $R^q u_*$ commute aux restrictions des scalaires.

3) La formation des $R^q u_*$ commute aux localisations. De manière précise, pour tout objet X' de E' , si on désigne par $u_{/X} : E/_{u^*X'} \longrightarrow E'_{/X'}$ le morphisme déduit de u par localisation (IV 8), on a, pour tout A-Module M , un isomorphisme canonique

$$R^q(u_{/X'})_* \quad (M|u^*X') \simeq R^q u_*(M) \mid X' \qquad q \geq 0 \ .\tag{5.1.1}$$

Désignons par $u^{\wedge}_* : E^{\wedge} \longrightarrow E'^{\wedge}$ le foncteur image directe pour les $\underline{U}$-préfaisceaux ($u^{\wedge}_* M = M \circ u^*$). Comme u^* et u_* sont adjoints, on a un isomorphisme

$$u_* \simeq \underline{a} u^{\wedge}_* \circ \quad ,$$

où $\underline{a}$ est le foncteur faisceau associé pour E' . Comme les foncteurs $\underline{a}$ et $u_{\ast}^{\wedge}$ sont exacts, on a

$$R^q u_{\ast} \simeq \underline{a} u_{\ast}^{\wedge} \mathcal{H}^q \quad ,$$

ce qui est une autre manière d'énoncer 1). L'assertion 2) résulte alors de 1) et de 3.5. Par définition du morphisme $u_{/X'}$ on a un isomorphisme canonique 5.1.1 pour $q = 0$. Le cas général s'en déduit en remarquant que les foncteurs de localisation (IV 8) sont exacts et transforment les objets injectifs en objets injectifs (4.11).

<u>Proposition</u> 5.2 : <u>Soient</u> $u : E \longrightarrow E'$ <u>un morphisme de topos et</u> S' <u>une famille génératrice de</u> E' . <u>Les faisceaux</u> M <u>acycliques pour les foncteurs</u> $H^o(u^{\ast}X',.)$, $X' \in S'$, <u>sont acycliques pour le foncteur</u> $u_{\ast}$. <u>En particulier</u>, <u>les faisceaux flasques sont acycliques pour</u> $u_{\ast}$.

Résulte de 5.1, 1).

<u>Proposition</u> 5.3 : <u>Soient</u> $u : E \longrightarrow E'$ <u>un morphisme de topos et</u> M <u>un Groupe abélien de</u> E . <u>On a une suite spectrale</u> :

$$(5.3.1) \qquad E_2^{p,q} = H^p(E',R^q u_{\ast} M) \Longrightarrow H^{p+q}(E,M) \quad .$$

<u>Plus généralement</u>, <u>pour tout objet</u> X' <u>de</u> E' , <u>on a une suite spectrale</u> :

$$(5.3.2) \qquad E_2^{p,q} = H^p(X',R^q u_{\ast} M) \Longrightarrow H^{p+q}(u^{\ast}X',M) \quad .$$

Par définition des foncteurs images directe et réciproque, on a un isomorphisme $H^o(X',u_{\ast}M) \simeq H^o(u^{\ast}X',M)$. Le foncteur $u_{\ast}$ transforme les objets injectifs en faisceaux flasques (4.6 et 4.9). Les suites spectrales proposées sont donc des suites spectrales de foncteurs composés (0.3).

<u>Proposition</u> 5.4 : <u>Soient</u> $u : E \longrightarrow E'$ <u>et</u> $v : E' \longrightarrow E''$ <u>deux morphismes de topos</u>. <u>On a une suite spectrale</u>

$$R^p v_{\ast} R^q u_{\ast} \Longrightarrow R^{p+q}(v \circ u)_{\ast} \quad .$$

On a $v_{\ast}u_{\ast} \simeq (vu)_{\ast}$ et le foncteur $u_{\ast}$ transforme les objets injectifs en flasceaux flasques (4.9) donc acycliques pour v_x (5.2). On a donc une suite spectrale des foncteurs composés (0.3).

6. $\mathcal{E}xt$ locaux et cohomologie à supports

6.0. Soient (E,A) un topos annelé, M un A-Module, à gauche pour fixer les idées. Le foncteur $N \longmapsto \mathcal{H}om_A(M,N)$, sur la catégorie des A-Modules à gauches et à valeurs dans la catégorie des Groupes abéliens est exact à gauche (IV 12). Ses foncteurs dérivés droits sont notés :

(6.0.1) $$\mathcal{E}xt^q_A(M,N) \quad .$$

En particulier, on a

(6.0.2) $$\mathcal{E}xt^o_A(M,N) = \mathcal{H}om_A(M,N) \quad .$$

Par définition, on a des isomorphismes canoniques (2.1 et IV 12).

(6.0.3) $$H^o(E,\mathcal{E}xt^o_A(M,N)) = Ext^o_A(E;M,N) = Hom_A(M,N) \quad .$$

Plus généralement, pour tout objet X de E , on a (2.2)

(6.0.4) $$H^o(X, \mathcal{E}xt^o_A(M,N) = Ext^o_A(X;M,N) = Hom_{A|X}(M|X,N|X) \quad .$$

Proposition 6.1 :

1) La formation des foncteurs $\mathcal{E}xt^q_A$ commute aux localisations. De manière précise, pour tout objet X de E , on a des isomorphismes fonctoriels :

(6.1.1) $$\mathcal{E}xt^q_A(M,N)\,|X \simeq \mathcal{E}xt^q_{A|X}(M|X,N|X) \quad .$$

2) Le faisceau $\mathcal{E}xt^q_A(M,N)$ est isomorphe au faisceau associé au préfaisceau $X \longmapsto Ext^q_A(X;M,N)$.

3) Il existe une suite spectrale

(6.1.2) $$Ext^{p+q}_A(E;M,N) \Longleftarrow E^{p,q}_2 = H^p(E,\mathcal{E}xt^q_A(F,G)) \quad .$$

Plus généralement, pour tout objet X de E , on a une suite spectrale fonctorielle en X et en les arguments M et N

$$\mathrm{Ext}_A^{p+q}(X;M,N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(X,\mathcal{E}xt_A^q(M,N)) \quad . \tag{6.1.3}$$

Par définition, on a un isomorphisme (6.1.1) lorsque $q = 0$ (IV 12). Le cas général s'en déduit compte tenu du fait que les foncteurs de localisation sont exacts et transforment les Modules injectifs et Modules injectifs (2.2). Le foncteur $N \longmapsto \mathcal{H}om_A(M,N) = \mathcal{E}xt_A^0(M,N)$ transforme les Modules injectifs en faisceaux flasques donc en faisceaux acycliques pour $H^0(X,.)$ (4.10). Les suites spectrales (6.1.2) et (6.1.3) sont des suites spectrales de foncteurs composés compte tenu de (6.0.3) et (6.0.4). Lorsque X varie dans E , la suite spectrale (6.1.3) fournit une suite spectrale de préfaisceaux, d'où en passant aux faisceaux associés, une suite spectrale de faisceaux. Comme les faisceaux associés aux préfaisceaux $X \longmapsto H^p(X,.)$ sont nuls lorsque $p \neq 0$ (3.1), cette suite spectrale dégénère et fournit l'isomorphisme annoncé dans 2).

Proposition 6.2 : Les foncteurs $(M,N) \longmapsto \mathcal{E}xt_A^q(M,N)$, $q \geqslant 0$, forment un δ-foncteur en la variable M et la variable N . De manière explicite, pour toute suite exacte $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ (resp. $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$) on a des longues suites exactes :

$$\ldots \to \mathcal{E}xt_A^q(M,N') \to \mathcal{E}xt_A^q(M,N) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^q(M,N'') \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}xt_A^{q+1}(M,N') \longrightarrow \ldots \tag{6.2.1}$$

(resp.

$$\ldots \to \mathcal{E}xt_A^q(M'',N) \to \mathcal{E}xt_A^q(M,N) \longrightarrow \mathcal{E}xt_A^q(M',N) \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}xt_A^{q+1}(M'',N) \longrightarrow \ldots). \tag{6.2.2}$$

Il résulte des propriétés générales des foncteurs Ext^q que pour tout objet X de E , les foncteurs $(M,N) \longmapsto \mathrm{Ext}_A^q(X;M,N)$, $q \geqslant 0$, forment un δ-foncteur en chacun des arguments, d'où l'assertion, en faisant varier X et en prenant le faisceau associé (6.1).

6.3. Soients (E,A) un topos annelé, M un A-Module, Z un fermé de E (IV 9), U l'ouvert complémentaire. On note $H_Z^0(E,M)$ le groupe des sections de M dont le support est contenu dans Z (IV 14) et $\underline{H}^{o}_{Z}(M)$ le sous-faisceau de M défini par les sections de M "à supports dans Z " (IV 14). Les foncteurs $H^{o}_{Z}(E,.)$ et $\underline{H}^{o}_{Z}(.)$ sont exacts à gauche (IV 14). Les foncteurs dérivés sont notés $H^{q}_{Z}(E,.)$ et $\underline{H}^{q}_{Z}(.)$ respectivement et appelés les <u>groupes</u> (resp. <u>faisceaux</u>) <u>de cohomologie de</u> M <u>à support dans</u> Z (x).

On a des isomorphismes canoniques (IV 14)

(6.3.1) $$H^{o}_{Z}(E,M) \simeq \mathrm{Hom}_{A}(A_{Z},M) \simeq \mathrm{Ext}^{o}_{A}(E;A_{Z},M) \quad ,$$

(6.3.2) $$\underline{H}^{o}_{Z}(M) \simeq \mathcal{H}om_{A}(A_{Z},M) \simeq \mathcal{E}xt^{o}_{A}(A_{Z},M) \quad ,$$

d'où des isomorphismes pour tout $q \geqslant 0$

(6.3.3) $$H^{q}_{Z}(E,M) \simeq \mathrm{Ext}^{q}_{A}(E;A_{Z},M) \quad ,$$

(6.3.4) $$\underline{H}^{q}_{Z}(M) \simeq \mathcal{E}xt^{q}_{A}(A_{Z},M) \quad .$$

On remarquera que A_{Z} étant un biModule, les faisceaux $\mathcal{E}xt^{q}_{A}(A_{Z},M) \simeq \underline{H}^{q}_{Z}(M)$ sont munis canoniquement de structures de A-Module.

Pour tout objet X de E , notons $Z_{/X}$ le sous-topos fermé de $E_{/X}$ déduit de Z par localisation (c'est le complémentaire de $U \times X$). Par définition, on a des isomorphismes canoniques

(6.3.5) $$H^{o}(X,\underline{H}^{o}_{Z}(M)) \simeq \underline{H}^{o}_{Z_{/X}}(E_{/X},M|X) \quad .$$

On pose

(6.3.6) $$H^{q}_{Z}(X,M) \simeq H^{q}_{Z_{/X}}(E_{/X},M|X) \quad .$$

Compte-tenu de (6.3.2), on a des isomorphismes canoniques

(6.3.7) $$H^{q}_{Z}(X,M) \simeq \mathrm{Ext}^{q}_{A}(X;A_{Z},M) \quad .$$

(x) Comparer avec SGA 2 I pour le cas des espaces topologiques ordinaires, ainsi que l'exposé de HARTSHORNE cité p.80 plus bas.

Proposition 6.4. :

1) La formation des foncteurs $\underline{H}^q_Z$ commute à la localisation. De manière précise, pour tout objet X de E , et tout A-Module M , on a des isomorphismes canoniques

(6.4.1) $$\underline{H}^o_Z(M)|X \simeq \underline{H}^q_{Z/X}(M|X) \quad .$$

2) Le faisceau $\underline{H}^q_Z(M)$ est le faisceau associé au préfaisceau $X \longmapsto H^q_Z(X,M)$.

3) Il existe une suite spectrale :

(6.4.2) $$H^{p+q}_Z(E,M) \Longleftarrow H^p(E,\underline{H}^q_Z(M)) \quad .$$

Plus généralement, pour tout objet X de E , il existe une suite spectrale

(6.4.3) $$H^{p+q}_Z(X,M) \Longleftarrow H^p(X,\underline{H}^q_Z(M)) \quad .$$

On ne fait que traduire la proposition 6.1 à l'aide du dictionnaire 6.3.

Proposition 6.5 : Avec les notations de 6.3, notons $j : U \longrightarrow E$ le morphisme canonique. Pour tout A-Module M , il existe une suite exacte de faisceaux :

(6.5.1) $$0 \longrightarrow \underline{H}^o_Z(M) \longrightarrow M \longrightarrow j_*(M|U) \longrightarrow \underline{H}^1_Z(M) \longrightarrow 0 \quad ,$$

et des isomorphismes pour $q \geqslant 2$:

(6.5.2) $$\underline{H}^q_Z(M) \simeq \mathcal{E}xt^{q-1}_A(A_U,M) \simeq R^{q-1}j_*(M|U) \quad .$$

On a de plus, une longue suite exacte

(6.5.3) $$\cdots \longrightarrow H^q_Z(E,M) \longrightarrow H^q(E,M) \longrightarrow H^q(U,M) \longrightarrow H^{q+1}_Z(E,M) \longrightarrow \cdots \quad ^{(x)} ,$$

et plus généralement, pour tout objet X de E , on a une longue suite exacte

(6.5.4) $$\cdots \longrightarrow H^q_Z(X,M) \longrightarrow H^q(X,M) \longrightarrow H^q(X\times U,M) \longrightarrow H^{q+1}_Z(X,M) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Par définition de A_Z , on a une suite exacte (IV 14)

(6.5.5) $$0 \longrightarrow A_U \longrightarrow A \longrightarrow A_Z \longrightarrow 0 \quad .$$

(x) cette suite exacte précise le rôle des invariants cohomologiques globaux $H^q_Z(E,N)$ comme des "groupes de cohomologie de E modulo l'ouvert U , à coefficient dans M ".

Les foncteurs $\mathcal{E}xt^q_A(A,.)$ sont nuls pour $q > 0$. On a $\mathcal{H}om_A(A_U,M) \simeq j_*(M|U)$ (IV 14) et par suite (2.2) $\mathcal{E}xt^q_A(A_U,M) \simeq R^q j_*(M|U)$. Enfin $\mathcal{E}xt^q_A(A_Z,M) \simeq \underline{H}^q_Z(M)$ (6.3.4). La longue suite exacte (6.2.2) fournit dans ce cas (6.5.1) et (6.5.2). Les suites exactes (6.5.3) et (6.5.4) résultent du dictionnaire 6.3 et de la longue suite exacte du δ-foncteur $\mathrm{Ext}^q_A(X;\ .\ ,M)$, $q \geqslant 0$, associée à (6.5.5).

<u>Proposition</u> 6.6. :

1) <u>Les faisceaux flasques sont acycliques pour les foncteurs</u> $\underline{H}^o_Z$ et $H^o_Z(X,\ .\ )$.

2) <u>Les foncteurs</u> $\underline{H}^q_Z$ et $H^q_Z(X,\ .\ )$ <u>commutent aux restrictions des scalaires</u>.

Soit M un faisceau flasque. La suite exacte (6.5.4) fournit des égalités $H^q_Z(X,M) = 0$ pour tout X et tout $q \geqslant 2$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^o_Z(X,M) \longrightarrow H^o(X,M) \longrightarrow H^o(X\times U,M) \longrightarrow H^1_Z(X,M) \longrightarrow 0 \qquad .$$

Mais le faisceau M étant flasque, le morphisme $H^o(X,M) \longrightarrow H^o(X\times U,M)$ est surjectif (4.). Par suite $H^1_Z(X,M) = 0$ et M est acyclique pour $H^o_Z(X;M)$. En passant aux faisceaux associés, on en déduit que M est acyclique pour le foncteur $\underline{H}^o_Z$ (6.4). Il est clair que les foncteurs $\underline{H}^o_Z$ et $H^o_Z(X,\ .\ )$ commutent aux restrictions des scalaires et comme les faisceaux flasques sont acycliques pour ces deux foncteurs, la propriété 2) en résulte.

<u>Proposition</u> 6.7. : <u>Soient</u> (E,A) <u>un topos annelé</u>, Z <u>un fermé de</u> E , U <u>l'ouvert complémentaire</u>, M <u>et</u> N <u>deux A-Modules. Il existe des isomorphismes fonctoriels en</u> M <u>et</u> N <u>compatibles avec les changements de fermés</u> :

$$H^o_Z(\mathcal{H}om_A(M,N)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_A(M,\underline{H}^o_Z(N)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_A(M \otimes_A A_Z,N) \qquad .$$

Résulte de (IV 14) compte-tenu de (6.3.2).

6.8 On pose

$$(6.8.1) \qquad \mathcal{H}om_{A,Z}(M,N) = \underline{H}^o_Z(\mathcal{H}om_A(M,N)) \qquad .$$

Le foncteur $N \longmapsto \mathcal{H}om_{A,Z}(M,N)$ est exact à gauche. Ses foncteurs dérivés sont notés $\mathcal{E}xt^q_{A,Z}(M,N)$: ce sont <u>les faisceaux</u> $\mathcal{E}xt$ <u>à supports dans</u> Z . On a donc

(6.8.2) $$\mathcal{E}xt^{o}_{A,Z}(M,N) = \mathcal{H}om_{A,Z}(M,N) \quad .$$

Posons $M_Z = M \otimes_A A_Z$. Il résulte de IV 14 que M_Z est l'image directe sur E de l'image réciproque sur Z de M . On a donc, compte tenu de 6.7 des isomorphismes

(6.8.3) $$\mathcal{E}xt^{q}_{A,Z}(M,N) \simeq \mathcal{E}xt^{q}_{A}(M_Z,N) \quad .$$

Passons maintenant aux invariants globaux. On pose

(6.8.4) $$\mathrm{Hom}_{A,Z}(M,N) = \mathrm{Ext}^{o}_{A,Z}(E;M,N) = H^{o}_{Z}(E,\mathcal{H}om_{A}(M,N)) \quad .$$

Le groupe $\mathrm{Hom}_{A,Z}(M,N)$ est le sous-groupe du groupe des morphismes de M dans N dont le support est dans Z (IV 14) i.e. qui sont nuls sur U . Plus généralement, pour tout objet X de E , on pose

(6.8.5) $$\mathrm{Ext}^{o}_{A,Z}(X;M,N) = H^{o}_{Z}(X,\mathcal{H}om_{A}(M,N) \quad .$$

Les foncteurs $N \longmapsto \mathrm{Ext}^{o}_{A,Z}(X;M,N)$ sont exacts à gauche. Les foncteurs dérivés sont notés $\mathrm{Ext}^{q}_{A,Z}(X,M,N)$. Ce sont les <u>groupes Ext à supports dans</u> Z . Les définitions 6.3.6, 6.8.1 et 6.8.5 et les isomorphismes 6.7 fournissent des isomorphismes

(6.8.6) $$\mathrm{Ext}^{o}_{A,Z}(X;M,N) \simeq \begin{cases} H^{o}(X,\mathcal{H}om_{A,Z}(M,N) & , \\ \mathrm{Ext}^{o}_{A}(X;M,\underline{H}^{o}_{Z}(N)) & , \\ \mathrm{Ext}^{o}_{A}(X;M_Z,N) & . \end{cases}$$

Le dernier isomorphisme de (6.8.6) fournit des isomorphismes

(6.8.7) $$\mathrm{Ext}^{q}_{A,Z}(X;M,N) \simeq \mathrm{Ext}^{q}_{A}(X;M_Z,N) \quad .$$

<u>Proposition</u> 6.9. :

1) <u>Il existe deux suites spectrales fonctorielles en</u> M <u>et</u> N <u>compatibles avec les changements de fermés</u>

(6.9.1) $$\mathcal{E}xt^{p+q}_{A,Z}(M,N) \Longleftarrow \begin{cases} E^{p,q}_{2} = \underline{H}^{p}_{Z}(\mathcal{E}xt^{q}_{A}(M,N)) & , \\ 'E^{p,q}_{2} = \mathcal{E}xt^{p}_{A}(M,\underline{H}^{q}_{Z}(N)) & . \end{cases}$$

2) <u>Il existe trois suites spectrales fonctorielles en</u> X , <u>M et</u> N <u>compatibles avec les changements de fermés</u>

$$(6.9.2) \qquad \mathrm{Ext}^{p+q}_{A,Z}(M,N) \Longleftarrow \begin{cases} E_2^{p,q} = H^p_Z(X,\mathcal{E}xt^q_A(M,N)) & , \\ {}'E_2^{p,q} = H^p(X,\mathcal{E}xt^q_{A,Z}(M,N)) & , \\ {}''E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_A(X;M,\underline{H}^q_Z(N)) & . \end{cases}$$

3) <u>Les faisceaux</u> $\mathcal{E}xt^q_{A,Z}(M,N)$ <u>sont canoniquement isomorphes aux faisceaux associés aux préfaisceaux</u> $X \longmapsto \mathrm{Ext}^q_{A,Z}(X;M,N)$.

Lorsque N est injectif, le faisceau $\mathcal{H}om_A(M,N)$ est flasque 4.10 donc acyclique pour $\underline{H}^o_Z$ (6.6) . La première suite spectrale de 6.9.1 est une suite spectrale de foncteurs composés (6.8.1). De même, lorsque N est injectif, $\underline{H}^o_Z(N)$ est injectif (4.11) et la deuxième suite spectrale de 6.9.1 est une suite spectrale de foncteurs composés déduite de 6.7. Les suites spectrales de 6.9.2 sont des suites spectrales de foncteurs composés déduites de la définition 6.8.5 et les deux premiers isomorphismes de 6.8.6. Enfin, en faisant varier X dans la deuxième suite spectrale de 6.9.2 et en prenant les faisceaux associés, on obtient une suite spectrale de faisceaux qui dégénère grâce à 3.1 et qui fournit les isomorphismes de 3).

<u>Proposition</u> 6.10 : <u>Les foncteurs</u> $(M,N) \longmapsto \mathcal{E}xt^q_{A,Z}(M,N)$, $q \geqslant 0$, <u>et</u> $(M,N) \longmapsto \mathrm{Ext}^q_{A,Z}(X;M,N)$, $q \geqslant 0$, <u>sont des</u> δ-<u>foncteurs en chacune des variables</u> M <u>et</u> N . <u>En notant</u> M_U <u>le faisceau</u> $M \otimes_A A_U$ (cf.IV 11), <u>on a une longue suite exacte</u>

$$(6.10.1) \qquad \dots \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}xt^q_{A,Z}(M,N) \longrightarrow \mathcal{E}xt^q_A(M,N) \longrightarrow \mathcal{E}xt^q_A(M_U,N) \xrightarrow{\delta} \mathcal{E}xt^{q+1}_{A,Z}(M,N) \longrightarrow \dots$$

<u>et une suite exacte analogue par les groupes</u> Ext .

Les foncteurs $\mathcal{E}xt^q_A(\ . \ , \ . \ )$ et $\mathrm{Ext}^q_A(X; \ . \ , \ . \ )$ forment des δ-foncteurs par rapport à chacune des variables (6.2) et le foncteur $M \longmapsto M_Z$ est exact car A_Z est plat (1.3.3). La première assertion résulte donc des isomorphismes 6.8.3 et 6.8.7. La suite exacte 6.10.1 et la suite exacte analogue pour les groupes Ext est la longue suite exacte du δ-foncteur

$\mathcal{E}xt^q_A(\ . \ , N)$, $q \geqslant 0$ (resp. $\mathrm{Ext}^q_A(X; \ . \ ,N)$, $q \geqslant 0$)

relative à la suite exacte $0 \longrightarrow M_U \longrightarrow M \longrightarrow M_Z \longrightarrow 0$, compte tenu de 6.8.3 et 6.8.7.

6.11. Indiquons brièvement comment on peut étendre ces résultats au cas des familles de supports. Soit E un topos. Pour tout objet X de E désignons par Fer(X) l'ensemble des fermés du topos $E_{/X}$. Cet ensemble est en correspondance biunivoque, par passage au complémentaire, avec l'ensemble des ouverts du topos $E_{/X}$, i.e. avec l'ensemble des sous-objets de X (IV 8). Le préfaisceau Fer : $X \longmapsto \mathrm{Fer}(X)$ est en fait un U-faisceau ainsi qu'on le vérifie immédiatement, il est donc représentable. En d'autres termes, il existe un objet de E noté encore Fer et un fermé Z_{Fer} de $E_{/\mathrm{Fer}}$ tel que pour tout X , tout élément de Fer(X) se déduise de Z_{Fer} par un changement de base par un morphisme $u_Z : X \longrightarrow \mathrm{Fer}$ uniquement déterminé par Z .

Définition 6.12. : On appelle famille de supports de E un sous-ensemble Φ de l'ensemble des fermés de E qui possède les propriétés suivantes :

(S1) La réunion d'une famille finie d'éléments de Φ appartient à Φ .

(S2) Tout fermé de E contenu dans un élément de Φ est un élément de Φ .

6.12.1 Soient E un topos , Φ une famille de supports de E , X un objet de E . On désigne par $\Phi(X)$ la plus petite famille de supports de $E_{/X}$ qui contient les fermés de $E_{/X}$ déduits de fermés de Φ par le changement de base $X \longrightarrow e$ (e objet final de E). Le foncteur $X \longmapsto \Phi(X)$ est un sous-préfaisceau du faisceau Fer . Il est donc séparé.

6.12.2 On dit qu'une famille Φ de supports de E est de caractère local si elle possède la propriété suivante :

(CL) Pour toute famille épimorphique $(X_i \longrightarrow e)$, $i \in I$ (où e est l'objet final de E) la suite d'ensembles

$$\Phi \longrightarrow \prod_i \Phi(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \Phi(X_i \times X_j)$$

est exacte.

Soit $\underline{a}\Phi$ le faisceau associé au préfaisceau $X \longmapsto \Phi(X)$ (6.12.1). La condition (CL) est équivalente à la condition que le morphisme canonique $\Phi \longrightarrow \underline{a}\Phi(e)$

soit une bijection. (cf. la construction du faisceau associé dans II dans le cas d'un préfaisceau séparé). Pour vérifier (CL) on peut donc se limiter à une famille finale de familles épimorphiques $(X_i \longrightarrow e)$, $i \in I$.

Exemple 6.12.3 :

1) Soit Z un fermé de E . L'ensemble des fermés de E contenus dans Z est une famille de supports de E . Elle est de caractère local.

2) Soit T un espace topologique et Φ une famille de supports paracompactifiants de T [7]. La famille Φ n'est pas, en général, de caractère local.

3) Soient T un espace topologique et p un entier. La famille de Φ_p des fermés de T de codimension de Krull $\geqslant p$, est une famille de supports de T . Elle est de caractère local.

4) Soit E un topos possédant la propriété suivante : toute famille épimorphique $(X_i \longrightarrow e)$, $i \in I$, est majorée par une famille épimorphique finie. Alors toute famille de supports de E est de caractère local. En effet, en utilisant l'exemple 1), il suffit de montrer qu'une limite inductive filtrante Φ_λ de familles de caractère local est une famille de caractère local, ce qui résulte immédiatement du passage à la limite inductive sur la suite d'ensembles

$$\Phi_\lambda \longrightarrow \prod_i \Phi_\lambda(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \Phi_\lambda(X_i \times X_j) \quad ,$$

où $(X_i \longrightarrow e)$, $i \in I$, est une famille épimorphique finie. En effet d'après 6.12.2 et l'hypothèse sur E , on peut se limiter à des familles épimorphiques finies pour vérifier les conditions (CL) et comme les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies (I 2), l'exactitude de ces suites d'ensembles est conservée par passage à la limite inductive.

5) Soit E un topos cohérent (VI 2.3). Alors d'après ce qui précède toute famille de support de E est de caractère local.

6.13 Soient (E,A) un topos annelé, Φ une famille de supports de E , N un A-Module (à gauche pour fixer les idées), X un objet de E . On pose

(6.13.1) $$\underline{H}^{0}_{\Phi}(N) = \varinjlim_{Z\in\Phi} \underline{H}^{0}_{Z}(N) \quad ,$$

(6.13.2) $$H^{0}_{\Phi}(E,N) = \varinjlim_{Z\in\Phi} H^{0}_{Z}(E,N) \quad .$$

Soit M un A-Module à gauche, on pose :

(6.13.3) $$\mathcal{E}xt^{0}_{A,\Phi}(M,N) = \mathcal{H}om_{A,\Phi}(M,N) = \varinjlim_{Z\in\Phi} \mathcal{E}xt^{0}_{A,Z}(M,N) \quad ,$$

(6.13.4) $$\mathrm{Ext}^{0}_{A,\Phi}(X;M,N) = \mathrm{Hom}_{A|X,\Phi(X)}(M|X,N|X) = \varinjlim_{Z\in\Phi} \mathrm{Ext}^{0}_{A,Z}(X;M,N) \quad .$$

On a des isomorphismes canoniques :

(6.13.5) $$\mathcal{E}xt^{0}_{A,\Phi}(M,N) \simeq \underline{H}^{0}_{\Phi}(\mathcal{E}xt^{0}_{A}(M,N)) \quad ,$$

(6.13.6) $$\mathrm{Ext}^{0}_{A,\Phi}(X;M,N) \simeq H^{0}((X,\mathcal{E}xt^{0}_{A}(M,N)) \quad .$$

Lorsque Φ est la famille des fermés contenus dans un fermé Z , on a des isomorphismes :

(6.13.7) $$\begin{cases} \underline{H}^{0}_{\Phi} \simeq \underline{H}^{0}_{Z} \\ H^{0}_{\Phi} \simeq H^{0}_{Z} \\ \mathcal{E}xt^{0}_{A,\Phi}(\cdot\ ,\ \cdot) \simeq \mathcal{E}xt^{0}_{A,Z}(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) \\ \mathrm{Ext}^{0}_{A,\Phi}(X;\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) \simeq \mathrm{Ext}^{0}_{A,Z}(X;\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) \end{cases} \quad .$$

Les limites inductives qui définissent les foncteurs précédents sont filtrantes. Par suite ces foncteurs sont exacts à gauche. Leurs foncteurs dérivés droits sont notés :

(6.13.8) $$\underline{H}^{q}_{\Phi} \quad , \quad H^{q}_{\Phi} \quad , \quad \mathcal{E}xt^{q}_{A,\Phi}(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) \quad , \quad \mathrm{Ext}^{q}_{A,\Phi}(X;\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) \quad .$$

Ils se calculent eux aussi par limites inductives des foncteurs $\underline{H}^{q}_{Z}$, H^{q}_{Z} , etc.,. pour Z parcourant Φ .

Des isomorphismes 6.13.5 et 6.13.6, on tire deux suites spectrales par passage à la limite inductive sur la première suite spectrale de 6.9.1 et la première suite spectrale de 6.9.2 :

(6.13.9) $$\mathcal{E}xt^{p+q}_{A,\Phi}(M,N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = \underline{H}^p_{\Phi}(\mathcal{E}xt^q_A(M,N)) ,$$

(6.13.10) $$\mathrm{Ext}^{p+q}_{A,\Phi}(X;M,N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p_{\Phi}(X,\mathcal{E}xt^q_A(M,N)) .$$

6.14 Avec les notations de 6.13, on a, sans hypothèse sur Φ , un morphisme fonctoriel

(6.14.1) $$\theta : H^o_{\Phi}(N) \longrightarrow H^o(E, \underline{H}^o_{\Phi}(N)) .$$

Ce morphisme est toujours injectif mais n'est pas en général un isomorphisme. Cependant, si Φ est de caractère local, le morphisme θ est un isomorphisme ainsi qu'on le vérifie immédiatement. De même si Φ est de caractère local, on a un isomorphisme

(6.14.2) $$\theta' : \mathrm{Ext}^o_{A,\Phi}(E;M,N) \simeq H^o(E,\mathcal{E}xt^o_{A,\Phi}(M,N)) .$$

Proposition 6.15 : Soient (E,A) un topos annelé, tel que E soit cohérent (VI Φ une famille de supports de E , M et N deux A-Modules. Il existe deux suites spectrales :

(6.15.1) $$H^{p+q}_{\Phi}(E,N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p_{\Phi}(E, \underline{H}^q_{\Phi}(N)) ,$$

(6.15.2) $$\mathrm{Exp}^{p+q}_{A,\Phi}(E;M,N) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(E,\mathcal{E}xt^q_{A,\Phi}(M,N)) .$$

Ces suites spectrales se déduisent de la suite spectrale 6.4.2 et de la deuxième suite spectrale 6.9.2 par passage à la limite inductive sur les fermés Z de Φ , compte tenu de ce que la cohomologie d'un topos cohérent commute aux limites inductives de faisceaux (IV 5).

6.16 Signalons, sans démonstration, qu'on peut étendre au cas des famille de supports la deuxième suite spectrale de 6.9.1 et la troisième suite spectrale de 6.9.2 (avec X = objet final de E) en supposant que le topos E est cohérent et que le Module M est parfait [13].

Enfin on peut aussi généraliser la notion de familles de supports en introduisant les préfaisceaux de familles de supports, les faisceaux de familles de supports et les groupes et faisceaux de cohomologie correspondants (*).

7. Appendice : Cohomologie de Cech.

En développant une idée due à P. Cartier, on montre dans ce paragraphe comment on peut dans un topos quelconque, calculer la cohomologie d'un faisceau à l'aide de recouvrements. Pour la théorie classique des espaces paracompacts, on renvoit à [7]; pour une autre méthode qui s'applique à certains topos, et en particulier au topos étale, voir [14].

7.1 Squelette et cosquelette

7.1.0 Soit Δ la catégorie des simplexes types (les objets de Δ sont les ensembles ordonnés $\Delta_n = [0, \ldots, n]$, les morphismes sont les applications croissantes). Soient E un U-topos et $\Delta(E)$ de catégorie des préfaisceaux sur Δ à valeur dans E, autrement dit la catégorie des objets semi-simpliciaux de E. Désignons par $\Delta[n]$ la sous-catégorie pleine de Δ définie par les objets Δ_p, $p \leq n$, par $i_n : \Delta[n] \longrightarrow \Delta$ le foncteur d'inclusion et par $\Delta E[n]$ la catégorie des préfaisceaux sur $\Delta[n]$ à valeur dans E, autrement dit, la catégorie des objets semi-simpliciaux tronqués à l'ordre n de E. D'après I 5.1, on a une suite de trois foncteurs adjoints (I 5.3)

$$\Delta E[n] \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad i_{n!} \quad} \\ \xleftarrow{\quad i_n^* \quad} \\ \xrightarrow{\quad i_{n*} \quad} \end{array} \quad \Delta E$$

où le foncteur i_n^* est le foncteur restriction à la catégorie $\Delta[n]$, et où les foncteurs i_{n*} et $i_{n!}$ sont respectivement ses adjoints à droite et à gauche. On notera que ΔE et $\Delta E[n]$ sont des U-topos (IV 1.2) et que (i_n^*, i_{n*}) est un morphisme de topos (IV 3.1) qui est un plongement de $\Delta E[n]$ dans ΔE (I 5.6 et IV 9.1.1).

(*) cf. [12] chap. IV, § 1 (Lecture Notes 20, Springer) pour le développement de ces notions sous forme de fugue avec variations.

Définition 7.1.1 : On note sk_n (resp. $cosk_n$) et on appelle foncteur squelette d'ordre n (resp. foncteur cosquelette d'ordre n) le foncteur $i_{n!}i_n^*$) (resp. $i_{n*}i_n^*$) de ΔE dans ΔE .

Les foncteurs squelette et cosquelette sont d'un usage constant en théorie des ensembles semi-simpliciaux [3].

Proposition 7.1.2 :

1) Le morphisme d'adjonction $sk_n \longrightarrow id$ est un monomorphisme. Les morphismes canoniques $sk_n sk_m \longrightarrow sk_n$ (resp. $cosk_n \longrightarrow cosk_n cosk_m$) sont des isomorphismes lorsque $n \leqslant m$ (resp. $n \geqslant m$).

2) Soit $u : E \longrightarrow E'$ un morphisme de topos. Le foncteur u^* , prolongé aux objets semi-simpliciaux et semi-simpliciaux tronqués, commute aux foncteurs $i_{n!}$, i_n^* , sk_n , $cosk_n$.

La première assertion résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer 2), il suffit de constater que, d'après I 5.1, les foncteurs $i_{n!}$ ..., $cosk_n$ se calculent à l'aide de limites inductives et de limites projectives finies.

7.2 Un lemme d'acyclicité

7.2.0 Soit M un groupe abélien de E . L'homologie d'un objet semi-simplicial K de E , à coefficients dans M , se définit de la manière usuelle : On considère d'abord A(K) , le groupe semi-simplicial abélien libre engendré par K , puis on forme le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} A(K)$; on obtient ainsi un groupe semi-simplicial abélien de E . On considère alors le complexe de groupe abélien associé (en formant la somme alternée des opérateurs bord) et on en prend l'homologie. Les objets d'homologie sont notés $H_i(K,M)$. Ce sont des groupes abéliens de E.. Lorsque M est le groupe $\mathbb{Z}_E$ (groupe abélien libre engendré par l'objet final de E), on note plus simplement $H_i(K)$. Les groupes $H_i(K)$ sont appelés les groupes d'homologie de K . On dit qu'un objet semi-simplicial K est acyclique si pour tout groupe abélien M de E , les groupes $H_i(K,M)$ sont nuls $(i > 0)$ ou, ce qui est équivalent, si les groupes $H_i(K,M)$ sont nuls $(i > 0)$.

La formation de l'homologie commute aux images réciproques par les morphismes de topos.

Le but de ce numéro est de prouver le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 7.2.1 : <u>Soient</u> E <u>un topos</u>, K. <u>et</u> L. <u>deux objets semi-simpliciaux de</u> E , v. : K. $\longrightarrow$ L. <u>un morphisme d'objets semi-simpliciaux</u>, n <u>un entier</u> ≥ 0. <u>On suppose que le morphisme</u> v <u>possède les propriétés</u> :

1) <u>Pour tout entier</u> $p < n$ $(p \geq 0)$ <u>le morphisme</u> $v_p : K_p \longrightarrow L_p$ <u>est un isomorphisme</u>.

2) <u>Le morphisme</u> $K_n \xrightarrow{v_n} L_n$ <u>est un épimorphisme</u>.

3) <u>Les morphismes canoniques</u> $K. \longrightarrow \mathrm{cosk}_n(K.)$, $L. \longrightarrow \mathrm{cosk}_n(L.)$ <u>sont des isomorphismes</u>.

<u>Alors, pour tout entier</u> p , <u>le morphisme</u> v_p <u>est un épimorphisme et le morphisme</u> v. <u>induit un isomorphisme sur les objets d'homologie</u>.

<u>Remarque</u> : La démonstration montre en fait, qu'en adoptant une définition convenable de l'homotopie dans les topos, le morphisme v. est une équivalence d'homotopie.

<u>Preuve</u> : On peut supposer que E est le topos des faisceaux sur un petit site C (IV 1) et que par suite E est un sous-topos d'un topos E' ayant suffisamment de foncteurs fibres (par exemple le topos $C^{\wedge}$). Notons $a^{*} : E' \longrightarrow E$ le foncteur image inverse par le morphisme de plongement $E \hookrightarrow E'$. Soit

$$v.[n] : K.[n] \longrightarrow L.[n]$$

le morphisme d'objets semi-simpliciaux tronqués obtenu en tronquant v. à l'ordre n . Notons $L.[n]'$ l'image (dans E') de $K.[n]$ par $v.[n]$, $v.[n]' : K.[n] \longrightarrow L.[n]'$ le morphisme induit par $v.[n]$. Posons $L! = i_{n*}L.[n]'$, $K! = i_{n*}K.[n]$, $v! = i_{n*}v.[n]'$ (le foncteur i_{n*} est ici relatif à E'). D'après 1), le morphisme $v! : K! \longrightarrow L!$ possède les propriétés 1), 2), 3) du lemme. De plus, d'après 2), 3) et 7.1.2, le morphisme $a^{*}v!$ n'est autre que v. . Il suffit donc de démontrer le lemme pour v! et par suite on peut supposer que E possède suffisamment de foncteurs fibres ; donc, en utilisant ces foncteurs fibres, on peut se ramener au cas où E est la catégorie des ensembles.

On constate tout d'abord que les hypothèses du lemme sur le morphisme v.

sont stables par tout changement de bases $M. \longrightarrow L.$ où $M.$ est un cosquelette d'ordre n . Par suite la fibre $P.$ de $v.$ en un point base quelconque de $L.$ est du type $i_{nx}P.[n]$ où $P.[n]$ est un complexe non vide tronqué à l'ordre n de la forme

(7.2.2) $$P_n \longrightarrow e \longrightarrow e \longrightarrow e \longrightarrow \cdots \longrightarrow e \quad .$$

Notons, pour tout entier i , $\delta \underline{\Delta}_i$ l'ensemble semi-simplicial bord du simplexe $\underline{\Delta}_i$. Tout morphisme de $\delta\underline{\Delta}_i$ dans $P.$ se prolonge en un morphisme de $\underline{\Delta}_i$ dans $P.$. En effet, la propriété est évidente si $i \geqslant n$ car $P.$ est un cosquelette d'ordre n et elle est claire pour $i < n$ d'après la description 7.2.2. Comme $P.$ est un complexe de Kan, $P.$ est homotopiquement trivial [6]. Notons que le morphisme $v.$ est une fibration au sens de Kan [6]. Comme les fibres de cette fibration sont homotopiquement triviales, $v.$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie de $K.$ et $L.$ en tous les points bases de $K.$. D'après le théorème d'Hurewitz, ceci implique que $v.$ induit un isomorphisme sur l'homologie [6]. Ceci démontre la deuxième assertion du lemme. Pour démontrer la première assertion, on remarque que tout morphisme d'un complexe tronqué à l'ordre n dans $L.[n]$ se relève en un morphisme dans $K.[n]$. Par suite, d'après 3), tout morphisme d'un complexe dans $L.$ se relève en un morphisme dans $L.$. Donc $v.$ est surjectif.

7.3. <u>Hyper-recouvrements</u>

7.3.0 Soit C un site, appartenant à l'univers U , où les produits fibrés et les produits de deux objets soient représentables. Désignons par $C^\wedge$ le topos des U-préfaisceaux sur C et par $C^\sim$ le topos des U-faisceaux sur C . Un objet K de $C^\wedge$ est dit <u>semi-représentable</u> s'il est isomorphe à une somme directe de préfaisceaux représentables.

Soit $SR(C)$ la sous-catégorie pleine de $C^\wedge$ définie par les objets semi-représentables. Dans la catégorie $SR(C)$ les limites projectives pour des catégories d'indices finies non vides sont représentables, et le foncteur d'inclusion $SR(C) \hookrightarrow C^\wedge$ commute à ces limites projectives finies. D'après une remarque déjà faite, on en déduit que si $K.$ est un objet semi-simplicial tronqué à l'ordre n de $C^\wedge$ dont tous les objets sont semi-représentables, le prolongement $i_n^+(K.)$ possède la même propriété. Donc si K. est un objet semi-simplicial de $C^\wedge$ dont tout les objets sont semi-représentables, alors pour tout n , l'objet $\mathrm{cosk}_n(K.)$ possède la même propriété.

7.3.1 Définitions et notation

7.3.1.1 Soit $p > 0$ un entier. Un objet semi-simplicial K. de $C^\wedge$ est appelé un hyper-recouvrement de type p de C , ou lorsqu'aucune confusion n'en résulte, un hyper-recouvrement de type p , s'il possède les propriétés suivantes :

HR1) Pour tout entier $n \geq 0$, K_n est semi-représentable.

HR2) Le morphisme canonique $K. \longrightarrow \mathrm{cosk}_p(K.)$ est un isomorphisme.

HR3) Pour tout entier $n \geq 0$ le morphisme canonique de préfaisceaux :
$K_{n+1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_n(K.))_{n+1}$ est un isomorphisme couvrant de préfaisceaux (II 6.2). Le morphisme canonique de préfaisceaux $K_o \longrightarrow e$, où e est l'objet final de $C^\wedge$, est un morphisme couvrant de préfaisceaux.

7.3.1.2 Un hyper-recouvrement de type p est un hyper-recouvrement de type q pour tout $q \geq p$. Un objet semi-simplicial K. sera appelé un hyper-recouvrement (de C) s'il possède les propriétés HR 1) et HR3).

7.3.1.3 On désignera par HR_p (resp. HR) et on appellera catégorie des hyper-recouvrements de type p (resp. catégorie des hyper-recouvrements) la catégorie suivante :

a) Les objets de HR_p (resp. HR) sont les hyper-recouvrements de type p (resp. les hyper-recouvrements).

b) Soient K. et L. deux objets de HR_p (resp. HR). Un morphisme de HR_p (resp. HR) de source K. et de but L. est un morphisme $v. : K. \longrightarrow L.$ d'objets semi-simpliciaux de $C^\wedge$.

7.3.1.4 Soient C un site où les produits fibrés soients représentables et X un objet de C . Un hyper-recouvrement de X (resp. un hyper-reoouvrement de type p de X) sera un hyper-recouvrement du site C/X (resp. un hyper-recouvrement de type p de C/X). On définit de même la catégorie des hyper-recouvrements de X (resp.

du hyper-recouvrement de type p de X). On a une suite de foncteurs d'inclusion :

$$\dots \mathrm{HR}_p \hookrightarrow \mathrm{HR}_{p+1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathrm{HR}$$

Ces foncteurs sont pleinement fidèles. Nous noterons HR_∞ la limite inductive des catégories HR_p .

7.3.1.6 Désignons, pour tout entier $n \geq 0$, par $\underline{\Delta}_n^c$ l'objet semi-simplicial type de dimension n à valeur dans la catégorie des ensembles, i.e. le foncteur sur Δ représenté par l'ensemble ordonné $[o, n]$. On désigne par $\underline{\Delta}_n^c$ le préfaisceau sur C (à valeur dans la catégorie des ensembles semi-simpliciaux constant de valeur $\underline{\Delta}_n$. Le préfaisceau $\underline{\Delta}_n^c$ est donc un préfaisceau d'ensemble semi-simplicial. Les deux injections canoniques de Δ_o dans Δ_1 définissent deux morphismes de préfaisceaux semi-simpliciaux :

$$\underline{\Delta}_0^c \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} \underline{\Delta}_1^c \qquad ,$$

et définissent, par suite, pour tout préfaisceau semi-simplicial K. , deux injections canoniques :

$$K. \underset{e_1}{\overset{e_0}{\rightrightarrows}} K. \times \underline{\Delta}_1^c \qquad .$$

Deux morphismes $K. \underset{u_1}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} L.$ de préfaisceaux semi-simpliciaux sont dits <u>morphismes homotopes</u> s'il existe un morphisme

$$v \; : \; K. \times \underline{\Delta}_1^c \longrightarrow L.$$

tel que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} K. \arrow[rr, "e_i"] \arrow[dr, "u_i"'] & & K. \times \underline{\Delta}_1^c \arrow[dl, "v"] \\ & L. & \end{tikzcd} \qquad i = 0,1$$

soient commutatifs. Le morphisme v est appelé une homotopie reliant u_o à u_1. La relation : u_o et u_1 sont deux morphismes homotopes de $K.$ dans $L.$, n'est pas, en général, une relation d'équivalence. Cependant la relation d'équivalence engendrée par cette relation est compatible avec la composition des morphismes. Cela nous permet donc de définir la catégorie des préfaisceaux semi-simpliciaux à homotopie près, en passant au quotient par la relation d'équivalence engendrée par la relation d'homotopie.

7.3.1.7 On définit ainsi les catégories $\underline{HR}_p$, $\underline{HR}_\infty$, $\underline{HR}$, catégories des hyper-recouvrements à homotopie près.

Théorème 7.3.2 Soit C un site satisfaisant aux conditions 7.3.0.

1) La catégorie $\underline{HR}_p^\circ$ (resp. $\underline{HR}^\circ$) est filtrante (I 2.7).

2) Soient $K.$ un objet de HR_p (resp. de HR), n un entier tel que $0 \leqslant n \leqslant p$ (resp. $0 \leqslant n$), et

$$u : X \longrightarrow K_n$$

un morphisme couvrant de préfaisceaux. Il existe un objet $L.$ de HR_p (resp. de HR) et un morphisme $f : L. \longrightarrow K.$, tels que le morphisme

$$f_n : L_n \longrightarrow K_n$$

se factorise par u .

3) Les faisceaux semi-simpliciaux associés (II 3.5) aux hyper-recouvrements sont acycliques (7.2.0) en degrés strictement positifs. Le 0-ème faisceau d'homologie est isomorphe au faisceau associé au faisceau constant $\underline{Z}$.

Preuve : Démontrons 3). Soit $\tilde{K.}$ le faisceau semi-simplicial associé à $K.$. Le foncteur "faisceau associé" commute au foncteur cosk_n (7.1.2. 2)). Par suite le faisceau semi-simplicial $\tilde{K.}$ possède les propriétés suivantes :

a) Le morphisme canonique $K_0 \longrightarrow e$ est un épimorphisme de faisceaux.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, le morphisme canonique $K_{n+1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_n(K.))_{n+1}$ est un épimorphisme de faisceaux.

Posons alors, pour $n \geqslant 0$, $L._n = \mathrm{cosk}_n \tilde{K.}$. On a alors, pour tout n , une suite de morphismes de faisceaux semi-simpliciaux :

$$K.^{\sim} \xrightarrow{u_n} L._n \xrightarrow{v_n} L._{n-1} \cdots \longrightarrow L._0 \xrightarrow{v_0} e. \qquad ,$$

et pour tout j , $0 \leqslant j \leqslant n$, v_j possède les propriétés de 7.2.1. De plus, le morphisme u_n induit un isomorphisme sur les composants de degré $\leqslant n$. On déduit alors de 2.1 par récurrence sur n , que K. est acyclique.

Pour démontrer 1) et 2) nous introduirons une terminologie.

Définition 7.3.3 : Soit $f : X. \longrightarrow Y.$ un morphisme de préfaisceaux semi-simpliciaux. On dit que f est spécial de type p (resp. spécial) si :

1) Les objets X. et Y. sont canoniquement isomorphes à leurs cosquelettes d'ordre p et $\mathrm{cosk}_p(f) = f$ (resp. pas de conditions sur f , $X^{\bullet}$ et $Y^{\bullet}$).

2) Pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$ (resp. $0 \leqslant n$), le morphisme Φ_{n+1} figurant dans le diagramme ci-après est couvrant :

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[rr, "f_{n+1}"] \arrow[dr, "\Phi_{n+1}"] \arrow[dd, dashed] & & Y_{n+1} \arrow[dd] \\
& P_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
(\mathrm{cosk}_n X.)_{n+1} \arrow[rr, "(\mathrm{cosk}_n f)_{n+1}"'] & & (\mathrm{cosk}_n Y.)_{n+1}
\end{tikzcd} \qquad .$$

(Les flèches verticales sont définies par les morphismes canoniques $X. \longrightarrow \mathrm{cosk}_n X.$ et $Y. \longrightarrow \mathrm{cosk}_n Y.$. L'objet P_{n+1} est le produit fibré et Φ_{n+1} est l'unique flèche rendant le diagramme commutatif).

3) Le morphisme $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ est couvrant.

Un préfaisceau semi-simplicial K. est dit spécial de type p (resp. spécial) si le morphisme canonique :

$$K. \longrightarrow e. \qquad (\ e.\ \text{est l'objet semi-simplicial final})$$

est spécial de type p (resp. spécial), i.e. si K. satisfait les conditions HR 2) et HR 3) (resp. HR 3)) de 7.3.1.1.

Lemme 7.3.4 :

1) Le composé de deux morphismes spéciaux (resp. spéciaux de type p) est un morphisme spécial (resp. spécial de type p).

2) Soient $K.$ un préfaisceau semi-simplicial spécial (resp. spécial de type p), $X. \xrightarrow{f} Y.$ un morphisme spécial (resp. spécial de type p) et $u : K. \longrightarrow Y.$ un morphisme de complexes. Alors le produit fibré $P. = K. \times_{Y.} X.$ est spécial (resp spécial de type p).

La preuve de ce lemme est laissée au lecteur.

7.3.5 Démonstration de l'assertion 2) de 7.3.2.: On peut tout d'abord supposer que X est semi-représentable. Pour tout objet semi-simplicial $L.$, désignons par $\mathrm{Hom}_{(X)}(L.,K.)$ l'ensemble des morphismes d'objets semi-simpliciaux munis d'une factorisation $L_n \longrightarrow X \xrightarrow{u} K_n$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{(X)}(\cdot , K.)$ est représentable. En effet ce foncteur transforme les limites inductives en limites projectives, et la catégorie $\Delta(C^\wedge)$ est un topos. On désignera par P un objet qui représente ce foncteur. Pour un objet Z de $C^\wedge$, désignons de même par $j_n^+(Z)$ l'objet qui représente le foncteur. $L. \longmapsto \mathrm{Hom}(L_n,Z)$ sur $\Delta C^\wedge$, dont la construction par $\varprojlim$ est explicitée dans III 1.1. On constate ici que cette construction ne fait intervenir que des $\varprojlim$ finies, d'où on conclut aussitôt que j_n^+ transforme préfaisceaux semi-représentables en préfaisceaux semi-simpliciaux à composantes semi-représentables, et morphismes couvrants $Z' \longrightarrow Z$ en morphismes spéciaux (7.3.3).

Par définition de $P.$, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} P. \arrow[r] \arrow[d] & j_n^+(X) \arrow[d, "j_n^+(u)"] \\ K. \arrow[r] & j_n^+(K_n) \end{tikzcd} .$$

D'après ce qu'on vient de signaler, les objets semi-simpliciaux $j_n^+(X)$ et $j_n^+(K_n)$ sont semi-représentables et le morphisme $j_n^+(u)$ est un morphisme spécial de type n . Il suffit alors pour conclure d'appliquer 3.4. et le sorite 7.3.0.

7.3.6.0 Soient M. et N. deux préfaisceaux semi-simpliciaux. Le foncteur :

$$L. \longmapsto \mathrm{Hom}(L. \times M.\ ,\ N.\ )$$

est représentable. Le préfaisceau semi-simplicial qui le représente sera noté

$$\mathcal{H}om.(M.,N.)\quad .$$

Le préfaisceau composant de degré n de cet objet sera noté $\mathcal{H}om_n(M.,N.)$. On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om_n(M.,N.) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_0(M. \times \underline{\Delta}_n^c, N\ ) \quad .$$

<u>Lemme</u> 7.3.6 : <u>Soit</u>

$$\begin{array}{ccc} M. & \hookrightarrow & N. \\ \uparrow & & \uparrow \\ sk_n\, \underline{\Delta}^c_{n+1} & \overset{u}{\hookrightarrow} & \underline{\Delta}^c_{n+1} \end{array} \qquad \text{(u l'injection canonique)}$$

<u>un diagramme co-cartésien de préfaisceaux semi-simpliciaux.</u>

<u>Pour tout hyper-recouvrement</u> L. , <u>le morphisme</u> :

$$\mathcal{H}om_o(N.,L.) \longrightarrow \mathcal{H}om_o(M.,L.)$$

<u>est couvrant</u>.

<u>Preuve</u>. On a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_o(N.,L.) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_o(M.,L.) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_o(\underline{\Delta}^c_{n+1},L.) & \xrightarrow{(x)} & \mathcal{H}om_o(sk_n\, \underline{\Delta}^c_{n+1},L.\ ) \end{array} \quad .$$

Il suffit donc de montrer que le morphisme (x) est couvrant. Or le morphisme (x) est isomorphe au morphisme :

$$L_{n+1} \longrightarrow (\mathrm{cosk}_n L.)_{n+1}$$

qui est couvrant par hypothèse, c.q.f.d.

7.3.7. Démonstration de l'assertion 1) de 7.3.2. : Le produit de deux objets HR_p (resp. de HR) est encore un objet de HR_p (resp. de HR) (7.3.4). Pour démontrer que la catégorie $\underline{HR}_p^o$ (resp. $\underline{HR}^o$) est filtrante, il suffit de montrer qu'étant donnés deux morphismes de HR_p (resp. HR)

$$K. \underset{u_1}{\overset{u_o}{\rightrightarrows}} L.$$

il existe un morphisme $v : M. \longrightarrow K.$ de HR_p (resp. de HR) tel que les morphismes :

$$M. \underset{u_1 v}{\overset{u_o v}{\rightrightarrows}} L.$$

soient homotopes, i.e. tel qu'il existe $w : M. \times \underline{\Delta}_1^c \longrightarrow L.$ rendant commutatifs les diagrammes

(x)
$$\begin{tikzcd} M. \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, "v"'] & M. \times \underline{\Delta}_1^c \arrow[d, "w"] \\ K. \arrow[r, "u_i"] & L. \end{tikzcd} \qquad i = 0,1 \quad .$$

Soit alors, pour tout objet semi-simplicial $M.$ de $C^\wedge$ (non nécessairement un hyper-recouvrement), $F(M.)$ l'ensemble des couples (v,w) : $v : M. \longrightarrow K.$, $w : M. \times \underline{\Delta}_1^c \longrightarrow L.$ tels que les diagrammes (x) soient commutatifs. Le foncteur $M. \longmapsto F(M.)$ est un foncteur contravariant en $M.$ qui transforme les limites inductives en limites projectives, et qui par suite est représentable par un objet semi-simplicial $F.$. L'objet $F.$ est évidemment le sommet d'un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} F. \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om.(\underline{\Delta}_1^c, L.) \arrow[d, "\pi"] \\ K. \arrow[r, "u_o, u_1"'] & L. \times L. \end{tikzcd} ,$$

où π est défini par les deux inclusions de $\underline{\Delta}_o^c$ dans $\underline{\Delta}_1^c$. Il suffit donc, pour démontrer l'assertion, de montrer que $F.$ est un objet de HR_p (resp. de HR) et pour cela, d'après 7.3.4.2) et le sorite 7.3.0, il suffit de montrer que

a) $\mathcal{H}om.(\underline{\Delta}^c_1,L.)$ est semi-représentable ,

b) le morphisme π est spécial de type p (resp. spécial).

On vérifie tout d'abord immédiatement que $\mathcal{H}om.(\underline{\Delta}^c_1,L.)$ est un objet semi-simplicial semi-représentable. En effet les composantes de cet objet se calculent par limites projectives finies à partir des L_n , et par suite sont semi-représentables. Vérifions maintenant b). Tout d'abord on montre que, lorsque L. est spécial de type p , le morphisme

$$\mathcal{H}om.\ (\underline{\Delta}^c_1,L.) \longrightarrow \mathrm{cosk}_p\,\mathcal{H}om.(\underline{\Delta}^c_1,L.)$$

est un isomorphisme ; ce qui permet de vérifier la propriété 1) de 7.3.3. Ensuite, le morphisme :

$$\pi_o\ : \mathcal{H}om_o(\underline{\Delta}^c_1,L.) \longrightarrow L_o \times L_o$$

est isomorphe au morphisme canonique :

$$L_1 \xrightarrow{(d_o,d_1)} L_o \times L_o$$

qui est couvrant par hypothèse (L. est hyper-recouvrement).
Il reste donc à vérifier la propriété 2) de 7.3.3, i..e. à vérifier que $\forall$ n , dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om._{n+1}(\underline{\Delta}^c_1,L.) \arrow[rr, "\pi_{n+1}"] \arrow[dd] \arrow[dr, "\Phi_{n+1}"'] & & L_{n+1} \times L_{n+1} \arrow[dd] \\
& P_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
(\mathrm{cosk}_n\,\mathcal{H}om.(\underline{\Delta}^c_1,L.))_{n+1} \arrow[rr, "(\mathrm{cosk}_n\pi)_{n+1}"] & & (\mathrm{cosk}_n L.)_{n+1} \times (\mathrm{cosk}_n L.)_{n+1}
\end{tikzcd}$$

(P_{n+1} est le produit fibré), le morphisme Φ_{n+1} est couvrant. Or un "adjoint functors chasing" simple montre que :

$$P_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_o(\mathrm{sk}_{n+1}(\underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1),L.) \qquad ,$$

$$\mathcal{H}om_{n+1}(\underline{\Delta}^c_1,L.) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_o(\ \underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1,L.) \qquad ,$$

et que le morphisme Φ_{n+1} est isomorphe au morphisme

$$\mathcal{H}om_o(\underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1, L.) \longrightarrow \mathcal{H}om_o(sk_{n+1}(\underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1), L.)$$

provenant de l'injection

$$sk_{n+1}(\underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1) \hookrightarrow \underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1$$

Or il existe une suite de sous-objets de $\underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1$:

$$sk_{n+1}(\underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1) = M_o \hookrightarrow M_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow M_k = \underline{\Delta}^c_{n+1} \times \underline{\Delta}^c_1 \quad ,$$

telle que pour tout $o \leqslant i \leqslant k$, le morphisme

$$M_i \hookrightarrow M_{i+1}$$

s'insère dans un diagramme cocartésien :

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, hook] & M_{i+1} \\ sk_{n+1}\underline{\Delta}^c_{n+2} \arrow[u] \arrow[r, hook] & \underline{\Delta}^c_{n+2} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad .$$

(On ajoute l'un après l'autre les simplexes non dégénérés de dimension n+2 de $\underline{\Delta}_{n+1} \times \underline{\Delta}_1$). D'après 7.3.6 le morphisme Φ_{n+1} est un composé de morphismes couvrants et par suite est lui-même couvrant, ce qui achève la démonstration de 7.3.2.

7.4. Le théorème d'isomorphisme

7.4.0 Soit F un préfaisceau en groupes abéliens sur un site C satisfaisant à la condition 7.3.0. Pour tout hyper-recouvrement K. , on posera :

$$H^q(K.,F) = H^q(\mathrm{Hom}_{C^\wedge}(K.,F))$$

Les $H^q(K.,F)$ forment un δ-foncteur sur la catégorie des préfaiceaux abéliens sur C , mais ils ne sont pas, en général, les foncteurs dérivés du foncteur $H^o(K.,F)$.

Posons alors :

$$(7.4.0.1) \qquad \overset{r}{\check{H}}{}^q(C,F) = \varinjlim_{\underline{HR}_r} H^q(\,.\,,F) \qquad (r \text{ peut être infini}) \quad ,$$

et

$$(7.4.0.2) \qquad \check{\check{H}}{}^q(C,F) = \varinjlim_{\underline{HR}} H^q(\,.\,,F) \quad .$$

Les $\overset{r}{\check{H}}{}^q(C,F)$ (resp. $\check{\check{H}}{}^q(C,F)$) forment encore un δ-foncteur car la catégorie $\underline{HR}_p^{\circ}$ (resp. $\underline{HR}^{\circ}$) est filtrante (7.3.2). Comme les catégories $\underline{HR}_p$ ne sont pas nécessairement des U-catégories, ces δ-foncteurs sont à valeurs dans la catégorie des V-groupes abéliens, pour un univers V convenable.

Supposons maintenant que le préfaisceau F soit un faisceau. Comme le faisceau semi-simplicial associé à un hyper-recouvrement est acyclique (7.3.2), on a une suite spectrale fonctorielle en F et en K. :

$$(7.4.0.3) \qquad H^p(K.,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(C^{\sim},F) \quad .$$

D'où, en passant à la limite, des suites spectrales :

$$(7.4.0.4) \qquad \begin{aligned} &\overset{r}{\check{H}}{}^p(C,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(C^{\sim},F) \quad , \\ &\check{\check{H}}{}^p(C,\mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(C^{\sim},F) \quad . \end{aligned}$$

<u>Théorème</u> 7.4.1. : <u>Soient</u> C <u>un site satisfaisant la condition</u> 7.3.0, F <u>un faisceau abélien sur</u> C .

1) <u>Les suites spectrales</u> (7.4.0.4) <u>définissent des</u> isomorphismes

$$\overset{r}{\check{H}}{}^q(C,F) \xrightarrow{\sim} H^q(C^{\sim},F) \ , \qquad q \leqslant r+1$$

<u>et un monomorphisme</u>

$$\overset{r}{\check{H}}{}^{r+2}(C,F) \longrightarrow H^{r+2}(C^{\sim},F) \ .$$

2) *On a un isomorphisme de* δ*-foncteurs* :

$$\overset{\infty}{\check{H}}{}^q(C,F) \xrightarrow{\sim} \check{\check{H}}{}^q(C,F) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F) \qquad \text{(pour tout } q \text{)} .$$

3) *Soient* G *un préfaisceau de groupes abéliens et* F *le faisceau associé. Il existe des isomorphismes de foncteurs* :

$$\overset{r}{\check{H}}{}^q(C,G) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F) \quad , \qquad q \leqslant r-1 \quad ,$$

et un monomorphisme :

$$\overset{r}{\check{H}}{}^r(C,G) \longrightarrow H^r(C^\sim,F) \quad .$$

Lorsque G *est un préfaisceau séparé, ce dernier morphisme est un isomorphisme et il existe un monomorphisme* :

$$\overset{r}{\check{H}}{}^{r+1}(C,G) \longrightarrow H^{r+1}(C^\sim,F) \quad .$$

4) *On a des isomorphismes* :

$$\overset{\infty}{\check{H}}{}^q(C,G) \xrightarrow{\sim} \check{\check{H}}{}^q(G,G) \xrightarrow{\sim} H^q(C^\sim,F) \qquad \text{(tout } q) \quad .$$

Preuve.: Il suffit de montrer que si N est un préfaisceau abélien dont le faisceau associé est nul, on a $\overset{r}{\check{H}}{}^q(C,N) = 0$ pour $q \leqslant r$ (resp. $\check{\check{H}}{}^q(C,N) = 0$ pour tout q) ; ce qui se fait immédiatement en utilisant 3.2.

Remarque 7.4.2 :

1) On notera que pour les sites satisfaisants à la condition de 7.3.0, les hyper-recouvrements de type 0 sont les recouvrements ordinaires et les foncteurs $\overset{\circ}{\check{H}}{}^q$ ne sont autres que les foncteurs $\check{H}^q$ introduits en (2.4.5.1) .

2) Soit C un site à limites projectives finies représentables tel que pour tout objet X de C et toute famille couvrante $(X_i \longrightarrow X)$, $i \in I$, il existe un $i_o \in I$ tel que $X_{i_o} \longrightarrow X$ soit couvrant. On peut montrer alors que les hyper-recouvrements de type p dont les composants sont représentables sont cofinaux dans $\underline{HR}_p$. De même, les hyper-recouvrements K. tels qu'il existe un entier p tel que K. soit de type p et tels que les composants de K. soient représentables, sont

cofinaux dans $\underline{HR}$. (On peut le démontrer en s'inspirant de 3.5). Ces hyper-recouvrements à composants représentables suffisent donc, dans le cas envisagé, pour calculer la cohomologie des faisceaux associés aux préfaisceaux.

8. Appendice. Limites inductives locales. (par P. Deligne)

Le rédacteur recommande au lecteur d'éviter, en principe, de lire cet appendice. Il expose une technique qui permet parfois d'étendre à des topos n'ayant pas assez de points des assertions que l'existence de points rend triviales. Cette technique permet d'obtenir une variante faisceautique du théorème de D. Lazard affirmant que les modules plats sur un anneau sont les limites inductives de modules libres de type fini.

8.1. Catégories localement filtrantes

8.1.0 Si $\mathcal{B}$ est une catégorie et si $p : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est une catégorie sur $\mathcal{B}$, on utilisera les notations suivantes

- Pour $U \in \mathrm{Ob}$, $\mathcal{A}_U$ est la catégorie fibre $p^{-1}(U)$
- Pour $f : U \longrightarrow V$ dans $\mathcal{B}$ et $\lambda, \mu \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$ tels que $p(\lambda) = U$ et $p(\mu) = V$, on pose

$$\mathrm{Hom}_f(\lambda,\mu) = p^{-1}(f) \text{ , où } p : \mathrm{Hom}(\lambda,\mu) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V) \text{ .}$$

Définition 8.1.1. Soit $\mathcal{S}$ un site. On appelle catégorie localement co-filtrante (ou localement filtrante à gauche) sur $\mathcal{S}$ une catégorie $p : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

($\mathcal{L}$0) Quels que soient $f : U \longrightarrow V$ dans $\mathcal{S}$ et $\mu \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{L}_V$, il existe $\lambda \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{L}_V$ tel que $\mathrm{Hom}_f(\lambda,\mu) \neq \emptyset$,

($\mathcal{L}$1) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ et la famille finie $(\mathcal{S}_i)$ d'objets de $\mathcal{L}_U$, il existe un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$ de U et des objets $\mu_j \in \mathrm{Ob}\mathcal{L}_{U_j}$ tels que pour tout i et j , on ait $\mathrm{Hom}_{f_j}(\mu_j , \lambda_i) \neq \emptyset$,

($\mathcal{L}$2) Quelles que soient $f : U \longrightarrow V$ dans $\mathcal{S}$ et la double flèche $(\phi_0,\phi_1) : \mathcal{S} \rightrightarrows \mu$ au-dessus de f, il existe un recouvrement $f_j : V_j \longrightarrow V$ de V et des flèches ψ_j de but λ telles que $p(\psi_j) = f_j$ et que $\phi_0\psi_j = \phi_1,\psi_j$.

8.1.1.1. Cette définition se simplifie lorsque $\mathcal{L}$ est fibrée sur $\mathcal{S}^{x}$: l'axiome ($\mathcal{L}_x$ o) est alors satisfait, et ($\mathcal{L}$1), ($\mathcal{L}$2) peuvent s'énoncer :

($\mathcal{L}$'1) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\ S$ et la famille finie λ_i d'objets de $\mathcal{L}_U$, localement sur U , il existe μ s'envoyant dans tous les λ_i .

($\mathcal{L}$'2) Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\ S$, toute double flèche $(\phi_0,\phi_1) : \lambda \rightrightarrows \mu$ dans $\mathcal{L}_U$ peut, localement sur U , être égalisée par une flèche de but λ .

8.1.2. Soient $\mathcal{S}$ un site, $\mathcal{L}$ une catégorie sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ un champ sur $\mathcal{S}$. On désigne par $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ la catégorie des sections globales $\underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S},C)$ de $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{S}$ a un objet final S , $\underline{\Gamma}\mathcal{C}$ "n'est autre" que $\mathcal{C}_S$.

<u>Définition</u> 8.1.2.1. <u>La catégorie des</u> systèmes projectifs locaux d'objets de C , indexés par $\mathcal{L}$ <u>est la catégorie</u> $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L},\mathcal{C})$.

Désignons par c ("système projectif local constant associé") le foncteur composé

$$\underline{\Gamma}C = \underline{\mathrm{Hom}}^{\mathrm{cart}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S},C) \longleftrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S},C) \xrightarrow{u \longmapsto u\circ p} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L},C)$$

Lorsqu'on devra expliciter la dépendance en $\mathcal{L}$, on écrira plutôt $c_{\mathcal{L}}$.

<u>Définition</u> 8.1.3. <u>Le foncteur</u> limite projective locale, <u>noté</u> $\varprojlim_{\lambda\in\mathcal{L}}$, <u>est le foncteur partiellement défini adjoint à droite au foncteur</u> c .

Le foncteur

$$\varprojlim : \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L},C) \longrightarrow \underline{\Gamma}\ \mathcal{C}$$

vérifie donc

$$\mathrm{Hom}(X,\varprojlim_{\lambda\in\mathcal{L}} X_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}(cX,(X_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{L}})$$

<u>Définition</u> 8.1.4 <u>Un</u> $\mathcal{S}$-<u>foncteur</u> $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ <u>entre catégories localement cofiltrantes sur</u> $\mathcal{S}$ <u>est dit</u> cofinal <u>s'il vérifie les deux conditions suivantes</u> :

(C$\mathfrak{f}$1) Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ et $\mu \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{M}_U$, il existe un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$ de U et des objets $\lambda_j \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{L}_{U_j}$ tels que $\mathrm{Hom}_{f_j}(F(\lambda_j),\mu) \neq \emptyset$

(C$\mathfrak{f}$2) Quels que soient $f : U \longrightarrow V$ dans $\mathcal{S}$ et la double flèche $(\phi_o,\phi_1) : f(\lambda) \rightrightarrows \mu$ au-dessus de f, il existe un recouvrement $f_j : U_j \rightrightarrows U$ de U et des flèches ψ_j de but λ dans $\mathcal{L}$ telles que $p(\psi_j) = f_j$ et que $\phi_o\, F(\psi_j) = \phi_1\, F(\psi_j)$.

Le composé de deux foncteurs cofinaux est un foncteur cofinal ; les équivalences de catégories localement filtrantes sont cofinales (la démonstration est laissée au lecteur).

Proposition 8.1.5 Soient $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ un foncteur cofinal de catégories localement cofiltrantes sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$ un champ sur $\mathcal{S}$ et $(X_\mu)_{\mu\in\mathcal{M}}$ un système projectif local indexé par $\mathcal{M}$. Alors, le morphisme de foncteurs en X de $\Gamma\mathcal{C}$ dans (ens) :

$$F^{\mathbf{x}} : \mathrm{Hom}(c_{\mathcal{M}}(X),(X_\mu)_{\mu\in\mathcal{M}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(c_{\mathcal{L}}(X),X_{F(\lambda)})_{\lambda\in\mathcal{L}})$$

est un isomorphisme, de sorte que

$$F^{\mathbf{x}} : \varprojlim_{\mathcal{M}} X_\mu \longrightarrow \varprojlim_{\mathcal{L}} X_{F(\lambda)}$$

est un isomorphisme, les deux membres étant simultanément définis ou non définis.

La démonstration utilise le lemme suivant, laissé au lecteur :

Lemme 8.1.6 Si $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ est cofinal, alors, quels que soient $f : U \longrightarrow V$ dans $\mathcal{S}$ et les flèches au-dessus de f $\phi_i : F(\lambda'_i) \longrightarrow \mu$ $(i = 1,2)$ il existe un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$ de U , des objets $\lambda'_j \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{L}_{U_j}$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & F(\lambda_1) \arrow[dr, "\phi_1"] & \\
F(\lambda'_j) \arrow[ur, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \mu \\
 & F(\lambda_2) \arrow[ur, "\phi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$U_j \xrightarrow{f_j} U \longrightarrow V$$

<u>de projection</u> (f_j, f) <u>dans</u> $\mathcal{S}$.

Quels que soient $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ et $\mu \in \mathcal{M}_U$, il existe par (C$\mathcal{F}$1) un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$ de U et des flèches $\phi_j : F(\lambda_j) \longrightarrow \mu$ au-dessus des f_j . Si

$$\psi = (\psi_\lambda) \in \mathrm{Hom}(c_{\mathcal{L}}X, (X_{F(\lambda)})_{\lambda \in \mathcal{L}}) : \psi_\lambda : X \mid p(\lambda) \longrightarrow X_{F(\lambda)}$$

est image de

$$\phi = (\phi_\mu) \in \mathrm{Hom}(c_{\mathcal{M}}X, (X_\mu)_{\mu \in \mathcal{L}}) \quad \phi_\mu : X \mid p(\mu) \longrightarrow X_\mu \quad ,$$

les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & X_{F(\lambda_j)} \arrow[dl, "\psi_{\lambda_j}"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\
X|U_j \arrow[rr, "\phi_\mu |U_j"'] & & X_\mu|U_j
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs, de sorte que les ϕ_μ sont déterminés, localement, par ψ ; puisque $\mathbf{C}$ est un champ, on conclut que F^* est injectif. Pour prouver F^* surjectif, partons de ψ et construisons ϕ tel que $\psi = F^* \phi$. La construction précédente fournit les flèches composées :

$$\phi_{\mu,j} : \phi_j \circ \psi_{\lambda j} : X \mid U_j \longrightarrow X_\mu \mid U_j \quad .$$

Vérifions que ces flèches se recollent, de sorte qu'il existe $\phi_\mu : X \mid U \longrightarrow X_\mu$ tel que $\phi_\mu \mid U_j = \phi_{\mu,j}$. Soit un diagramme commutatif dans

$$\begin{tikzcd}
 & U_{ij} \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "g_j"] & \\
U_i \arrow[dr, "f_i"'] & & U_j \arrow[dl, "f_j"] \\
 & U &
\end{tikzcd}$$

Pour vérifier que $\phi_{\mu,j} \mid U_{ij} = \phi_{\mu,i} \mid U_{ij}$, il suffit de le faire localement sur U_{ij} , ce qui permet, d'après 8.1.6 et ($\mathcal{L}$o), de se limiter au cas où il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & F(\lambda_{ij}) \arrow[dl, "F(a_{ij})"'] \arrow[dr, "F(a_{ji})"] & \\ F(\lambda_i) \arrow[dr, "\phi_i"'] & & F(\lambda_j) \arrow[dl, "\phi_j"] \\ & \mu & \end{tikzcd}$$

au-dessus du précédent. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_{F(\lambda_{ij})} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{F(\lambda_i)} \arrow[dr] & X|U_{ij} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, bend right] & X_{F(\lambda_j)} \arrow[dl] \\ & X_\mu & \end{tikzcd}$$

est alors commutatif, et il existe (ϕ_μ) tel que, quel que soit $\phi : F(\lambda) \longrightarrow \mu$ au-dessus de $f : V \longrightarrow U$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_{F(\lambda)} \arrow[dr, "\phi"] & \\ X|V \arrow[ur, "\psi_\lambda"] \arrow[rr, "\phi_\mu|V"'] & & X_\mu|V \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Si $\sigma : \mu \longrightarrow \mu'$ est une flèche de $\mathcal{M}$, on aura $(\sigma|V)(\phi_\mu| V) = (\sigma|V)\ \phi.\psi_\lambda = (\sigma\phi|V)\ .\ \psi_\lambda = \phi_{\mu'}| V$, et dès lors, $\phi = (\phi_\mu)$ est un morphisme de foncteur tel que $\psi = F^{*}$ comme requis.

Si E est un ensemble ordonné, on désignera encore par E la catégorie, ayant E pour ensemble d'objets, telle que $\mathrm{Hom}(i,j)$ est réduit à 1 élément ou vide selon que $i \leqslant j$ ou non.

Proposition 8.1.7. *Soit* $\mathcal{L}$ *une catégorie localement cofiltrante sur un site* $\mathcal{S}$. *Il existe un ensemble ordonné* E *et un foncteur* F *de* E *dans* $\mathcal{L}$ *tel que*

(i) E , *regardé comme catégorie sur* $\mathcal{S}$ *à l'aide de* $p^F : E \longrightarrow \mathcal{S}$, *est localement cofiltrante*.

(ii) *Le foncteur* F *est cofinal*.

Soit $\mathcal{L}'$ la catégorie localement cofiltrante produit de $\mathcal{L}$ et de la catégorie définie par l'ensemble ordonné $\mathbf{Z}$. La projection de $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$ est cofinale, de sorte qu'il suffit de prouver (8.1.7) pour $\mathcal{L}'$

Si X est un ensemble fini de flèches dans $\mathcal{L}'$, on désignera par X° l'ensemble des extrémités des flèches dans X . Soit E l'ensemble des parties finies non vides de $F\ell(\mathcal{L}')$, telles qu'il existe $\mathcal{S}_X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{L}'$ vérifiant

a) aucune flèche de X , sauf 1_{λ_X} , n'aboutit à λ_X ,

b) si $\mu \in X^\circ$, alors $1_\mu \in X$ et $\mathrm{Hom}(\mathcal{S}_X,\mu) \cap X \neq \emptyset$,

c) Tout diagramme du type

$$\begin{tikzcd}
\lambda_X \arrow[r] \arrow[dr] & \mu \arrow[d] \\
 & \mu'
\end{tikzcd}$$

de flèches de X est commutatif.

On ordonne E par la relation opposée à la relation d'inclusion. Si $X \in E$, et si $\mu \in X^\circ$, il existe une et une seule flèche de λ_X dans μ qui se trouve dans X . Si $X,Y \in E$ et $X \supset Y$, soit $\lambda_{X,Y}$ l'unique flèche dans X de λ_X vers λ_Y . Les fonctions $X \longmapsto \lambda_X$ et $(X \supset Y) \longmapsto \lambda_{X,Y}$ forment un foncteur de E dans $\mathcal{L}'$.

<u>Lemme</u> 8.1.8. <u>La catégorie E est localement cofiltrante sur $\mathcal{S}$ et le foncteur</u> $\lambda : E \longrightarrow \mathcal{L}'$ <u>est cofinal</u>.

Il faut vérifier successivement les axiomes :

(i) <u>axiome</u> ($\mathcal{L}$o). Soit $f : V \longrightarrow U$ et $X \in E_U$. Il existe $\lambda \in \mathrm{Ob}\mathcal{L}'_V$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_f(\lambda,\lambda_X)$. De plus, on peut choisir λ tel que $\lambda \notin X°$ (ici sert $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \times \mathbb{Z}$). Soit $X' = X \cup \{ 1_\lambda \} \cup Y$ où Y est l'ensemble des flèches composées $\lambda \xrightarrow{\phi} \lambda_X \xrightarrow{\psi} \mu$ ($\psi \in X$). Alors, $X' \in E$, $\lambda_{X'} = \lambda$ et $\mathrm{Hom}(X',X) \neq \emptyset$.

(ii) <u>axiome</u> ($\mathcal{L}$1). Soit X_i une famille finie d'objets de E_U. Il existe un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$, des objets $\lambda_j \in \mathrm{Ob}\mathcal{L}_{U_j}$ et des flèches $\phi_{ji} \in \mathrm{Hom}_{f_j}(\lambda_j,\lambda_{X_i})$. Si $x \in X_a° \cap X_b°$, il existe pour chaque j un recouvrement $g_{jk} : U_{jk} \longrightarrow U_j$ et des flèches $\psi_{jk} : \lambda_{jk} \longrightarrow \lambda_j$ telles que $p(\psi_{jk}) = g_{jk}$ et qui égalisent la double flèche $\lambda_j \rightrightarrows x$, où une flèche appartient à X_a, l'autre à X_b. On peut s'arranger pour que les λ_{jk} n'appartiennent à aucun des $X_i°$. Remplaçons les $(f_j, \lambda_j, \phi_{ji})$ par les $(f_j g_{jk}, \lambda_{jk}, \phi_{ji}\psi_{jk})$, et répétons cette construction pour tous les x dans une intersection de X_i. On obtient un nouveau système $(f_j, \lambda_j, \phi_{ji})$; posons

$$X_j = \bigcup_i X_i \cup \{1_{\lambda_j}\} \cup Y_j$$

où Y_j est l'ensemble des flèches composées

$$\lambda_j \xrightarrow{\phi_{ji}} \lambda_{X_i} \xrightarrow{\psi} x \qquad (\psi \in X_i) .$$

Alors, $X_j \in E_{V_j}$, et ces X_j vérifient ($\mathcal{L}$1).

(iii) <u>axiome</u> ($\mathcal{L}$3). Trivial, faute de doubles flèches non triviales !

(iv) <u>axiome</u> (C$\mathcal{F}$1). Trivial, car le foncteur λ est surjectif.

((v) <u>axiome</u> (C$\mathcal{F}$2). Soient $f : U \longrightarrow V$ et une double flèche $(\phi_o,\phi_1) : \lambda_X \rightrightarrows \lambda$ au-dessus de f. Il existe un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$ de U et des flèches $\psi_j : \lambda_j \longrightarrow \lambda_X$ telles que $p(\psi_j) = f_j$, $\phi_o,\psi_j = \phi_1\psi_j$ et $\lambda_j \notin X°$. Soit $X_j = X \cup \{1_{\lambda_j}\} \cup Y_j$, où Y_j est l'ensemble des flèches composées

$$\lambda_j \xrightarrow{\psi_j} \lambda_X \xrightarrow{\psi} \mu \qquad (\psi \in X)$$

Alors, $X_j \in E_{V_j}$, et $F(\lambda_{X_j,X}) = \psi_j$ égalise (ϕ_o,ϕ_1) .

8.1.9.0. Supposons que $\mathcal{S}$ soit (le site des ouverts non vides de) l'espace topologique réduit à un point. Une catégorie localement cofiltrante sur $\mathcal{S}$ n'est alors autre qu'une catégorie filtrante à gauche (i.e. telle que $\mathcal{S}°$ soit filtrante au sens de I 2.7), les foncteurs cofinaux correspondant aux foncteurs cofinaux de catégories filtrantes à gauche (I 8). La proposition 8.1.7 se reformule

<u>Proposition</u> 8.1.9. <u>Pour toute catégorie cofiltrante</u> $\mathcal{L}$ <u>il existe un ensemble ordonné cofiltrant</u> E <u>et un foncteur cofinal de</u> E <u>dans</u> $\mathcal{L}$.

Dans ce cas particulier, la démonstration de 8.1.7 se réduit essentiellement à la démonstration de (8.1.9) donnée dans I 8.

8.1.10. Soient $q : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ un morphisme de sites et $p : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{S}$ une catégorie localement cofiltrante sur $\mathcal{S}$. Désignons par $\mathcal{L}^*$ la catégorie suivante :

(i) un objet de $\mathcal{L}^*$ est un quadruple (V,U,ϕ,λ) tel que $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{T}$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, $\phi \in \mathrm{Hom}(V,q^*U)$ et $\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{L}_U$.

(ii) une flèche $f : V,U,\phi,\lambda) \longrightarrow (V',\phi',U',\lambda')$ est un triple (f_1,f_2,F_3) avec $f_1 \in \mathrm{Hom}(V,V')$, $f_2 \in \mathrm{Hom}(U,U')$, $f_3 \in \mathrm{Hom}\,(\lambda,\lambda')$ et $q^*f_2 \circ \phi = \phi' \circ f_1$, $p(f_3) = f_2$.

Le foncteur $f \longmapsto f_1$ fait de $\mathcal{L}^*$ une catégorie sur $\mathcal{T}$.

<u>Lemme</u> 8.1.11. <u>La catégorie</u> $\mathcal{L}^*$ <u>est localement cofiltrante sur</u> $\mathcal{T}$.

L'axiome $(\mathcal{L}o)$ est trivial. Vérifions $(\mathcal{L}_1)$:

Soit une famille finie $L_i = (V,U_i,\phi_i,\lambda_i)$. Les ϕ_i définissent un morphisme de V dans le faisceau $q^*\, a\, \Pi\, U_i = a\, \Pi\, q^*\, U_i$, de sorte qu'il existe des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V_j & \xrightarrow{\ f_j\ } & V \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \psi_j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_i} \\ q^*U_j & \xrightarrow[\ q^*(P_{ij})\ ]{} & q^*U_i \end{array}$$

tels que les f_j recouvrent V .

Soit λ_{ji} vérifiant $\mathrm{Hom}_{p_{ij}}(\lambda_{ji},\lambda_i) \neq \emptyset$. D'après ($\mathcal{L}1$), quitte à raffiner U_j (et V_j) , on peut prendre $\lambda_{ji} = \lambda_j$ indépendant de i , et les $L_j = (V_j,U_j,\psi_j,\lambda_j)$ vérifient ($\mathcal{L}1$).

Vérifions ($\mathcal{L}2$). Soit $(f_1,f_2) : L^1 \rightrightarrows L^2$, avec $L^i = (V^i,U^i,\phi^i,\lambda^i)$ et $f_i = (f,g_i,h_i)$. Les ϕ_i définissent un morphisme de V dans le faisceau $q^* \, a \,\mathrm{Ker}(U^1 \rightrightarrows U^2) = a\,\mathrm{Ker}(q^*U^1 \rightrightarrows q^* U_2)$, de sorte qu'il existe des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
V_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, dash, "\psi_j"] & V^1 \arrow[r] \arrow[d, dash, "\phi^1"] & V^2 \arrow[d, dash, "\phi^2"] \\
q^*U_j \arrow[r, "p_j"'] & q^*U^1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & U^2
\end{tikzcd} \qquad (g_1p_j = g_2p_j) \quad ,$$

tels que les f_j recouvrent V . Soit $\chi_j : \lambda_j \longrightarrow \lambda^1$ tel que $p(\chi_j) = p_j$. D'après ($\mathcal{L}2$) appliqué aux $(\lambda_1\chi_j \, , \, h_2\chi_j)$, quitte à raffiner U_j (et V_j), on peut se débrouiller pour que $h_1\,\chi_j = h_2\,\chi_j$, et les $L_j = (V_j,U_j,\psi_j,\lambda_j)$ vérifient ($\mathcal{L}2$).

<u>Proposition</u> 8.1.12. <u>Soit</u> $t^* : \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathcal{S}$ <u>une catégorie localement cofiltrante sur</u> $\mathcal{S}$, <u>et munissons</u> $\mathcal{S}^*$ <u>de la topologie induite par celle de</u> $\mathcal{S}$ <u>à l'aide de</u> t^* . <u>Alors</u>, t^* <u>est une équivalence de sites</u> $t : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^*$.

Par construction, $t_* : \mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F} \circ t^*$ transforme faisceaux sur $\mathcal{S}$ en faisceaux sur $\mathcal{S}^*$. D'après ($\mathcal{L}o$), et ($\mathcal{L}1$) appliqué à la famille vide, tout objet "assez petit" de $\mathcal{S}$ est dans l'image de t^* (i.e. l'image de t^* est un <u>crible couvrant</u> dans $\mathcal{S}$), donc par le "lemme de comparaison" (III 4) l'inclusion dans $\mathcal{S}$ de sa sous-catégorie **pleine** définie par $t^*(\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}^*)$ est une équivalence de sites, ce qui permet de supposer t^* surjectif sur les objets.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur $\mathcal{S}^*$.

(i) Soient $f_j : U_j \longrightarrow U$ un recouvrement dans $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$ dans $\mathcal{S}^*U$ et $f_j^i \in \mathrm{Hom}_{f_j}(\mu_j,\lambda^i)$ pour $i = 1,2$. Alors, $\mathcal{F}(\mathcal{S}^1)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{S}^2)$ ont même image dans $\prod_j \mathcal{F}(\mu_j)$.

Soit en effet $x = (x_j)$ dans l'image de $\mathfrak{F}(\mathcal{S}^1)$. Pour que x soit dans celle de $\mathfrak{F}(\lambda^2)$, il suffit que pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mu \arrow[r] \arrow[d] & \mu_j \arrow[d] \\ \mu_k \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

x_j et x_k aient même image dans $\mathfrak{F}(\mu)$. Puisque $\mathfrak{F}$ est un faisceau, il suffit de vérifier cela après avoir remplacé μ par les différents objets d'un de ses recouvrements ; d'après ($\mathcal{L}$2), ceci permet de supposer les diagrammes analogues au précédent, avec $\mathcal{S}^2$ remplacé par $\mathcal{S}^1$, également commutatifs, auquel cas l'assertion est évidente.

(ii) Soient $f : U \longrightarrow V$ dans $\mathcal{S}^{*}$, $\lambda \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{S}^{*}_U$ et $\mu \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{S}^{*}_V$. Il existe alors un recouvrement $f_j : U_j \longrightarrow U$, un objet $\mu' \in \mathrm{Ob}\ {}^{*}_{U}$ et des flèches

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} & \\ \lambda_j \arrow[ur, "\phi_j"] \arrow[dr, "\psi_j"'] & & \mu \\ & \mu \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

sur

$$U_j \xrightarrow{f_j} U \xrightarrow{f} V \quad .$$

D'après (i), il existe une et une seule flèche $\bar{f}$ rendant commutatif le diagramme suivant::

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}(\mu) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{F}(\lambda) \arrow[d, "\phi_j"] \\ \mathfrak{F}(\mu') \arrow[r, "\Psi_j"'] & \mathfrak{F}(\mathcal{S}_j) \end{tikzcd}$$

La flèche $\bar{f}$ ne change pas quand on remplace (f_j) par un recouvrement plus fin donné par $f_k : U_k \longrightarrow U_{j(k)}$, qu'on remplace λ_j par $\mathcal{S}_k$, muni de

$\phi_k \in \mathrm{Hom}_{f_k}(\lambda_k, \lambda_{j(k)})$, et qu'on remplace $\phi_j(\psi_j)$ par $\phi_{j(k)} \circ \phi_k$ $(\psi_{j(k)} \circ \phi_k)$.

On laisse au lecteur le soin d'en déduire que $\bar{f}$ ne dépend que de f .

(iii) Prouvons que $\bar{f}$ est fonctoriel en f . Soient donc

$$W \xrightarrow{h} V \xrightarrow{g} U$$

dans $\mathcal{S}$ et $\lambda°$, $\mu°$, $\nu°$ dans $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_U$, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_V$ et $\mathrm{Ob}\,\mathcal{S}_W$ respectivement. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\nu^\circ & & \mu^\circ & & \lambda^\circ \\
& \nu^1 \arrow[ur] & & \mu^1 \arrow[ur] & \\
& \nu^2 \arrow[urr] & & & \\
\nu_{jk} \arrow[uuu, "e^\circ_{jk}"] \arrow[uur, "e^1_{jk}"] \arrow[ur, "e^2_{jk}"] \arrow[rr] & & \mu_j \arrow[uuu, "f^\circ_j"] \arrow[uur, "f^1_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

tel que

a) $t^*(\nu^i)$, $t^*(\mu^i)$, $t^*(e^i_{jk})$, $t^*(f^i_j)$ ne dépendent pas de i ,

b) i étant fixé, les e^i_{jk} recouvrent W et les f^i_j recouvrent V .

On construit tout d'abord μ^1 , ν^1 et ν^2 par $(\mathcal{L}0)$, et les μ_j comme en (ii). Soit W'_{jk} un recouvrement de W s'envoyant dans le recouvrement $V_j = t^*(\mu_j)$ comme requis par le diagramme. Raffinant W'_{jk} et appliquant $(\mathcal{L}0)$ et $(\mathcal{L}1)$, on obtient un diagramme non nécessairement commutatif, du type requis, vérifiant a) et b). Raffinant encore et appliquant $(\mathcal{L}2)$, on le rend commutatif.

Reste alors à contempler le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\lambda^\circ) \arrow[r, "\bar{g}"] & \mathcal{F}(\mu^\circ) \arrow[rr, "\bar{h}"] \arrow[d] \arrow[dr] & & \mathcal{F}(\nu^\circ) \arrow[dd] \\
\mathcal{F}(\mu^1) \arrow[r] & \Pi\, \mathcal{F}(\mu_j) \arrow[drr] & \mathcal{F}(\nu^1) \arrow[dr] & \\
\mathcal{F}(\nu^2) \arrow[rrr] & & & \Pi\, \mathcal{F}(\nu_{jk})
\end{tikzcd}$$

(iv) Il est clair que $\bar{g}$ est fonctoriel en $\mathfrak{F}$: tout faisceau $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$ est donc image directe par t d'un préfaisceau $\mathfrak{F}_o$ (uniquement déterminé) sur $\mathcal{S}$, et tout morphisme de faisceau $f : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ est image d'un et d'un seul morphisme de préfaisceau $f_o : \mathfrak{F}_o \longrightarrow \mathfrak{G}_o$.

Il en résulte déjà que $t_{\mathtt{x}}$ est pleinement fidèle ; il reste à prouver que $\mathfrak{F}_o$ est un faisceau. Si $f_j : U_j \longrightarrow U$ est un recouvrement, ce recouvrement est image d'un recouvrement dans $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$, de sorte que $\mathfrak{F}_o(U)$ s'injecte dans $\prod_j \mathfrak{F}_o(U_j)$. Si des $x_j \in \mathfrak{F}_o(U_j)$ se recollent, alors, à fortiori, ils se recollent dans $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$ donc proviennent d'un élément de $\mathfrak{F}_o(U)$. Ceci achève la démonstration de (8.1.12).

8.1.13.0. Soient $q : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{S}$, $p : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{S}$ et $\mathcal{L}^{\mathtt{x}}$ comme en (8.1.10) et $\mathcal{C}$ un champ sur $\mathcal{E}$. Le champ $q_{\mathtt{x}}\mathcal{C}$ sur $\mathcal{S}$ est le champ "défini" par $(q_{\mathtt{x}}\mathcal{C})_U = \mathcal{C}_{q^{\mathtt{x}}U}$.

Si $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ est un système projectif local indexé par $\mathcal{L}$ à valeur dans $q_{\mathtt{x}}\mathcal{C}$, on définit un système projectif local indexé par $\mathcal{L}^{\mathtt{x}}$ et à valeur dans $\mathcal{C}$: $(X_L)_{L \in \mathcal{L}^{\mathtt{x}}}$ par la formule

$$X_L = \phi^{\mathtt{x}} X_\lambda \qquad \text{pour } L = (V , U , \phi , \lambda) \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que :

<u>Proposition</u> 8.1.13.1. <u>Avec les notations précédentes</u>, <u>on a</u>

$$\varprojlim_{\lambda \in \mathcal{L}} X_\lambda \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{L \in \mathcal{L}^{\mathtt{x}}} X_L \quad ,$$

<u>les deux membres étant simultanément définis ou non</u>.

Soient $\mathcal{S}$ un site et $p^{\mathtt{x}} : \mathcal{S}^{\mathtt{x}} \longrightarrow \mathcal{S}$ une catégorie localement filtrante sur $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{C}$ est un champ sur $\mathcal{S}$, alors $p_{\mathtt{x}}\mathcal{C}$ est un champ sur $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$ (8.1.13.0); de plus, le foncteur identique : $\mathcal{S}^{\mathtt{x}} \longrightarrow \mathcal{S}^{\mathtt{x}}$ est une catégorie localement filtrante sur $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$, muni de la topologie induite, et tout système inductif local (X_λ) indexé par $\lambda^{\mathtt{x}}$ définit un système inductif local, indexé par $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$, sur $\mathcal{S}^{\mathtt{x}}$.

On vérifie aisément :

Proposition 8.1.14. Avec les notations précédentes, on a

$$\varinjlim_{\lambda \in \mathcal{S}^{x}/\mathcal{S}} X_{\lambda} = \varinjlim_{\lambda \in \mathcal{S}^{x}/\mathcal{S}^{x}} X_{\lambda} ,$$

les deux membres étant simultanément définis ou non.

8.2. Limites inductives locales dans les catégories de faisceaux

8.2.0. Soit $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ un morphisme de sites. Soit $\mathfrak{C}$ le champ sur $\mathcal{S}$ suivant

(i) Un objet de $\mathfrak{C}$ est un couple $(U,\mathcal{F})$ d'un objet de $\mathcal{S}$ et d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur $p^{x}U$.

(ii) Une flèche $f : (U,\mathcal{F}) \longrightarrow (V,\mathcal{G})$ est un couple formé d'une flèche $f_o : U \longrightarrow V$ et d'un morphisme de $\mathcal{C}/U$-faisceaux :

$$f_1 : p^{x}(f_o)^{x} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$$

(iii) Le foncteur de $\mathfrak{C}$ dans $\mathcal{S}$ est donné par $f \longmapsto f_o$.

On prendra garde que $\mathfrak{C}_U$ est la catégorie opposée de la catégorie des faisceaux sur $p^{x}U$.

Soit $\mathcal{L}$ une catégorie localement cofiltrante (à gauche) sur $\mathcal{S}$.

Définition 8.2.1. Avec les notations précédentes, la catégorie des systèmes inductifs locaux, indexés par $\mathcal{L}$, de faisceaux sur $\mathcal{C}$, est la catégorie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L},\mathfrak{C})^{\circ}$.

Le foncteur "limite projective" de 8.1.3 s'appelle ici foncteur "limite inductive locale". C'est un foncteur de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{L},\mathfrak{C})^{\circ}$ dans $(\Gamma\mathfrak{C})^{\circ} = (\mathcal{C})^{\sim}$.

Théorème 8.2.2. Le foncteur "limite inductive locale" de la catégorie des systèmes inductifs de faisceaux sur $\mathcal{C}$, indexés par $\mathcal{L}$, dans la catégorie des faisceaux sur $\mathcal{C}$, est partout défini, commute aux limites projectives finies et commute aux limites inductives quelconques.

Les propositions 8.1.13, 8.1.14 et 8.1.12 permettent de se ramener au cas où $\mathcal{S} = \mathcal{Z} = \mathcal{L}$. Un système inductif local est alors la donnée, pour chaque $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, duun faisceau $\mathcal{F}_U$ sur $\mathcal{S}/_U$ et, pour chaque flèche $f : V \longrightarrow U$ dans $\mathcal{S}$ d'une flèche, fonctorielle en f , de $f^{*}\mathcal{F}_U$ dans $\mathcal{F}_V$.

Pour de tels systèmes inductifs, les $\varinjlim$ se calculent comme suit :

<u>Lemme</u> 8.2.3. <u>Soit</u> $U \longrightarrow \mathcal{F}_U$ <u>une section de la catégorie des préfaisceaux sur les objets de</u> $\mathcal{S}$. <u>On a</u>

$$a(U \longmapsto \Gamma(U,\mathcal{F}_U)) \simeq \varinjlim_{U} a\,\mathcal{F}_U$$

Par définition, le second membre représente le foncteur qui, à chaque faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}$, associe l'ensemble des systèmes cohérents de flèches $\phi_U : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}|U$. A son tour, une flèche ϕ_U est un système cohérent de flèches ϕ_g , une pour chaque $g : V \longrightarrow U$, $\phi_g : \mathcal{F}_U(V) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$. Appliquons 8.1.11 au foncteur identique de $\mathcal{S}$, obtenant ainsi $\mathcal{S}^{*}$ localement filtrante sur $\mathcal{S}$. On a vu que

$$\varinjlim_{g \in \mathcal{S}^{*}} \mathcal{F}_U(V_g)^{\sim} \simeq \varinjlim_{U} a\,\mathcal{F}'_U ,$$

où V_g est la source de g et $\sim$ le foncteur "faisceau constant engendré". Le foncteur $U \longmapsto 1_U$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}^{*}$ est cofinal, d'où encore par 8.1.5

$$\varinjlim_{U} \mathcal{F}_U(U)^{\sim} \simeq \varinjlim_{U} a\,\mathcal{F}_U .$$

Revenant aux définitions, on trouve enfin

$$\varinjlim_{U} \mathcal{F}_U(U)^{\sim} \simeq a\,(U \longmapsto \Gamma(U,\mathcal{F}_U)) .$$

Ceci montre que dans le cas auquel on s'est réduit, le foncteur $\varinjlim$ est partout défini, et qu'il se calcule comme composé du foncteur "faisceau engendré par un préfaisceau" et du foncteur $(\mathcal{F}_U) \longmapsto (U \longmapsto \Gamma\,(U,\mathcal{F}_U))$. Ces deux foncteurs commutent aux limites projectives finies, et le foncteur $\varinjlim$ commute de plus aux limites inductives quelconques de par sa définition comme foncteur adjoint.

Le lemme 8.2.3 fournit un procédé systématique pour démontrer des propriétés du foncteur limite inductive locale à partir des propriétés analogues du foncteur "faisceau associé à un préfaisceau". On trouve ainsi :

Proposition 8.2.4. Soit $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{L}$ comme précédemment, $\mathcal{A}_\lambda$ un système inductif local de faisceaux d'anneaux sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}_\lambda$ (resp. $\mathcal{M}_\lambda$) un système inductif local de faisceaux de modules à droite (resp. à gauche) sur $\mathcal{A}_\lambda$, tous trois indexés par $\mathcal{L}$. On a

$$\varinjlim (\mathcal{L}_\lambda \otimes_{\mathcal{A}_\lambda} \mathcal{M}_\lambda) = \varinjlim \mathcal{L}_\lambda \otimes_{\varinjlim \mathcal{A}_\lambda} \varinjlim \mathcal{M}_\lambda .$$

(Se ramener au cas $\mathcal{C} = \mathcal{S} = \mathcal{L}$, et noter que les deux membres coïncident avec le faisceau engendré par le préfaisceau des

$$\mathcal{L}_U(U) \otimes_{\mathcal{A}_U(U)} \mathcal{M}_U(U) \quad).$$

Proposition 8.2.5. Soit $\mathcal{C}_1 \xrightarrow{q} \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{S}$ deux morphismes de sites, et (F_λ) un système inductif local de faisceau sur $\mathcal{C}_2$ indexé par une catégorie localement cofiltrante $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{S}$. On a

$$q^* \varinjlim_{\lambda \in \mathcal{L}} F_\lambda \simeq \varinjlim_{\lambda \in \mathcal{L}} q^* F_\lambda .$$

Ceci résulte aussitôt de ce que q^* admet un adjoint à droite q_* .

Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ deux sites dans lesquels les $\varprojlim$ finies sont représentables, soit $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ un morphisme de sites tel que $p^* : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}$ commute aux $\varprojlim$ finies, et soit $\mathcal{L}$ la catégorie localement cofiltrante sur $\mathcal{C}$ ayant pour objets les triples (V,U,ϕ) où $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ et $\phi \in \mathrm{Hom}(V,p^*U)$. On l'obtient en appliquant 8.1.11 à $1_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$.

Proposition 8.2.6. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$, on a

$$\mathcal{F} = \varinjlim_{\lambda \in \mathcal{L}} \phi^* \phi_* \mathcal{F}$$

où, par abus de notation, ϕ désigne le morphisme induit par p de $\mathcal{C}/V$ dans $\mathcal{S}/V$.

Soit ϕ' le foncteur image réciproque au sens des préfaisceaux ; de 8.2.3, on tire

$$\varinjlim_{\lambda\in\mathcal{L}} \phi^{*} \phi_{*} \mathcal{F} = \varinjlim_{\lambda\in\mathcal{L}} a\,\phi' \phi_{*} \mathcal{F} = \varinjlim_{\lambda\in\mathcal{L}} \mathcal{F}(V)^{\sim} = \varinjlim_{V} \mathcal{F}(V)^{\sim} = \mathcal{F} .$$

Proposition 8.2.7. Soient $p : T \longrightarrow S$ un morphisme de topos, $\mathcal{O}_S$ un faisceau d'anneaux sur S et $\mathcal{O}_T$ son image réciproque sur T. Pour qu'un $\mathcal{O}_T$-Module à droite $\mathcal{M}$ soit plat sur $\mathcal{O}_T$, il faut et il suffit que le foncteur

(8.2.7.1) $$\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} p^{*}\mathcal{N}$$

de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-Module à gauche dans celle des faisceaux abéliens sur T soit exact.

L'assertion "il faut" est triviale ; supposons donc le foncteur (8.2.7.1) exact, et prouvons que $\mathcal{M}$ est plat.

On peut supposer p défini par un morphisme de sites $p : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ vérifiant les hypothèses faites en 2.6. Soit $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$ et $\phi : V \longrightarrow p^{*}U$. On désigne encore par ϕ le morphisme de sites induit : $\phi : \mathcal{C}/V \longrightarrow \mathcal{S}/U$.

Lemme 8.2.8. Le foncteur $\mathcal{N} \longmapsto \mathcal{M}|V \otimes_{\mathcal{O}_V} \phi^{*}\mathcal{N}$, de la catégorie des $\mathcal{O}_S|U$-modules sur $\mathcal{S}/U$ dans celle des $\mathcal{O}_T|V$-modules sur $\mathcal{C}/V$, est exact.

On se ramène à prendre $V = p^{*}U$. Soient j et j' les "morphismes d'inclusion" : $j : \mathcal{S}/U \longrightarrow \mathcal{S}$ et $j' : \mathcal{C}/p^{*}U \longrightarrow \mathcal{C}$. On a :

$$j'_!\,(\mathcal{M}|V \otimes_{\mathcal{O}_V} \phi^{*}\mathcal{N}) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} p^{*} j_!\,\mathcal{N} ,$$

d'où 8.2.8 puisque $j_!$ et $j'_!$ sont exacts et fidèles.

Soit alors Q un $\mathcal{O}_T$-Module. On a (8.2.6)

$$Q = \varinjlim_{\phi : V \to p^{*}U} \phi^{*} \phi_{*} Q|V$$

de sorte que (8.2.4)

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} Q = \varinjlim_{\phi : V \to p^{*}U} \mathcal{M}|V \otimes_{\mathcal{O}_V} \phi^{*} \phi_{*} Q|V$$

D'après 8.2.8, les foncteurs $Q \longmapsto \mathcal{M}|V \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \phi^{*}\phi_{*} Q|V$ sont exacts à gauche, de sorte que $\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} Q$ est exact à gauche en Q, donc exact.

Corollaire 8.2.9. *Soit $f : (T,\mathcal{O}_T) \longrightarrow (S,\mathcal{O}_S)$ un morphisme de topos annelés. Alors, l'image réciproque par f d'un faisceau de modules (à droite) plats est un faisceau de modules plats.*

Factorisant f par $(T, f^{*}\mathcal{O}_S)$, on se ramène au cas $\mathcal{O}_T = f^{*}\mathcal{O}_S$. Soit alors $\mathcal{M}$ un faisceau de modules plats sur S. D'après 8.2.7, pour vérifier que $f^{*}\mathcal{M}$ est plat, il suffit de vérifier l'exactitude du foncteur

$$\mathcal{N} \longmapsto f^{*}\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_T}{\otimes} f^{*}\mathcal{N} = f^{*}(\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathcal{N})$$

d'où l'assertion, puisque f^{*} est exact.

Lemme 8.2.10. *Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un topos annelé, $\mathcal{F}$ un faisceau de modules à gauche localement de présentation finie, $\mathcal{G}$ un faisceau de bimodules et $\mathcal{H}$ un faisceau plat de modules à gauche. Alors, la flèche canonique*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G}\otimes\mathcal{H})$$

est un isomorphisme.

La question est locale sur S, ce qui permet de supposer que $\mathcal{F}$ admet une présentation finie

$$\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

La première ligne du diagramme suivant est exacte, car $\mathcal{H}$ est plat :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "s"] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}) \otimes \mathcal{H} \arrow[d, "s"] \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G}\otimes\mathcal{H}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{G}\otimes\mathcal{H}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_2,\mathcal{G}\otimes\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

d'où l'assertion. Faisant $\mathcal{G} = \mathcal{A}$, on déduit de 8.2.10 :

Lemme 8.2.11. *Tout morphisme d'un faisceau de modules localement de présentation finie dans un faisceau de modules plat se factorise, localement sur* S , *par un faisceau libre* $\mathcal{O}_S^n$ ($n \in \mathbb{N}$) .

Théorème 8.2.12. (D. Lazard). *Pour qu'un faisceau de modules* $\mathcal{M}$ *sur un site annelé* $(S, \mathcal{O}_S)$ *soit plat, il faut et il suffit qu'il soit limite inductive locale de modules libres de type fini.*

Le "il suffit" résulte de 8.2.2, 8.2.4.

Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, soit $\mathcal{L}_0(U)$ (resp. $\mathcal{L}_1(U)$) la catégorie des faisceaux de modules libres de type fini (resp. de présentation finie) sur U , munis d'une application linéaire dans $\mathcal{M}|U$. Pour toute flèche $f : V \longrightarrow U$ dans $\mathcal{S}$, soit f^* le foncteur de restriction de $\mathcal{L}_i(U)$ dans $\mathcal{L}_i(V)$. Les foncteurs définissent une catégorie $\mathcal{L}_i$, fibrée sur $\mathcal{S}$, dont les fibres sont les catégories opposées des catégories $\mathcal{L}_i(U)$.

Le lecteur vérifiera que la catégorie $\mathcal{L}_1$ est localement filtrante sur $\mathcal{S}$, et que

$$\mathcal{M} = \varinjlim_{(M,f)\in\mathcal{L}_1} M$$

Si $\mathcal{M}$ est plat, l'inclusion de $\mathcal{L}_0$ dans $\mathcal{L}_1$ est pleinement fidèle et, d'après 8.2.11, vérifie (C$\mathcal{F}$1) de 8.1.4. Elle vérifie dès lors automatiquement (C$\mathcal{F}$2), et $\mathcal{L}_0$ est localement filtrante. D'après 8.1.5, on a

$$\mathcal{M} = \varinjlim_{(M,f)\in\mathcal{L}_2} M \qquad ,$$

d'où l'assertion 8.2.12.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin et B. Mazure : Etale Homotopy Theory, Lecture Notes n° , Springer Verlag.

[2] Blum et Herrera : Article à paraître aux Inventiones.

[3] H. Cartan et S. Eilenberg : Homological Algebra.

[4] P. Deligne : Théorie de Hodge (Publication de l'I.H.E.S).

[5] P. Gabriel et N. Popescu : CRAS.

[6] P. Gabriel et M. Zisman : Homotopie Theory and Calculus of Fraction, Ergebnisse der Mathematik, Bd 35.

[7] R. Godement : Théorie des faisceaux. Herman.

[8] J. Giraud : Méthode de la Descente. Mémoire de la S.M.F.

[9] J. Giraud : Algèbre homologique non commutative (à paraître).

[10] A. Grothendieck : On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties, I.H.E.S n°29.

[11] A. Grothendieck : Sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku, Math. Journal.

[12] R. Hartshorne : Residues and Duality. Lecture notes n° 20, Springer Verlag.

[13] L. Illusie : S.G.A. 6 I.

[14] S. Lubkin : On a Conjecture of A. Weil. Am. J. of Math. p.456, 1967.

[15] G. Segal : Classifying spaces and Spectral Sequences, I.H.E.S. n° 34.

[16] Séminaire Cartan 1957-1957.

[17] D. Sullivan : Geometric Topology, part I, Notes miméographiées. M.I.T. 1970.