EXPOSE XII

THEOREME DE CHANGEMENT DE BASE POUR UN MORPHISME PROPRE

par M. ARTIN

1. Introduction.

Nous donnons dans cet exposé le théorème fondamental qui dit, sous une forme un peu plus précise, que pour un morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ de schémas, et pour un faisceau abélien F de torsion sur X, la fibre de $R^q f_* F$ en un point géométrique de Y est isomorphe à la cohomologie $H^q(X_\xi, F|X_\xi)$ de la fibre X_ξ.

Rappelons que pour un morphisme propre d'espaces paracompacts le résultat analogue est bien connu (GODEMENT II 4.11) et facile. Il est beaucoup plus délicat dans le cas des schémas. Par exemple, l'hypothèse que F soit de torsion est bien nécessaire, contrairement à ce qui se passe pour les espaces paracompacts.

La démonstration se fait en plusieurs étapes : on se réduit par des méthodes de dévissage plus ou moins formelles au cas où Y est noethérien, où la dimension relative de f est ≤ 1, et où le faisceau F est constant. Pour traiter ce cas particulier, on se sert du théorème de spécialisation pour le groupe fondamental (5.9) qui est une variante non-abélienne du théorème énoncé plus haut, et qu'on peut démontrer directement dans le cas particulier envisagé (XIII 2).

2. Un exemple.

Montrons que l'hypothèse que F soit de torsion est nécessaire : Soit X une surface non singulière sur un corps k algébriquement clos, Y une courbe non singulière sur k, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre dont la fibre générique est lisse et la fibre géométrique en le point géométrique $\bar{y}$ de Y a un point double ordinaire, et est irréductible. Soit F le faisceau constant $\mathbb{Z}_X$.

Rappelons le fait suivant : pour un point quelconque z d'un schéma Z, soit $i : z \longrightarrow Z$ l'inclusion. On a $H^1(Z, i_* \mathbb{Z}_z) = 0$ (IX 3.6 (i)). Or puisque X est normal donc unibranche, il s'ensuit que $\mathbb{Z}_X \simeq i_* \mathbb{Z}_x$, où $i : x \longrightarrow X$ est l'inclusion du point générique. Donc $H^1(X, \mathbb{Z}_X) = 0$ et de même $R^1 f_* \mathbb{Z}_X = 0$. Mais je dis que pour la fibre géométrique X_o de X/Y avec le point double ordinaire on a $H^1(X_o, \mathbb{Z}_{X_o}) \simeq \mathbb{Z}$ (*), ce qui donne le contre-exemple, puisque $\mathbb{Z}_{X_o} \simeq \mathbb{Z}_X | X_o$.

Soit $i_o : x_o \longrightarrow X_o$ l'inclusion du point générique de X_o, et soit Q le point singulier de X_o. La courbe X_o a deux "branches" en Q et il s'ensuit que la fibre de $i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o})$ au point Q est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En dehors de Q la courbe X_o est normale et donc $i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o}) \simeq \mathbb{Z}_{X_o}$ dans X_o - Q. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{X_o} \longrightarrow i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o}) \longrightarrow (\mathbb{Z})_Q \longrightarrow 0 \quad ,$$

où le dernier membre est l'extension par 0 du faisceau $\mathbb{Z}$ au point Q. Tous les trois membres ont un H^0 isomorphe à $\mathbb{Z}$, et $H^1(X_o, i_{o*}(\mathbb{Z}_{x_o})) = 0$, d'où

(*) Comparer, du point de vue π_1, avec SGA 3 X (6, Exemples) et (1.6).

$H^1(X_o, \mathbb{Z}_{X_o}) = \mathbb{Z}$ par la suite exacte de cohomologie.

3. Rappels sur le H^1 non-abélien.

On va indiquer brièvement quelques résultats sur la cohomologie non-abélienne dont nous aurons besoin dans la suite. Nous omettrons la plupart des démonstrations, bien connues dans divers cas particuliers, et qu'on trouvera dans la thèse de GIRAUD [1].

Soient X un schéma, et F un faisceau en groupes sur X. Pour chaque X'/X étale, on définit un ensemble pointé $H^1(X',F)$, fonctoriel covariant en F et contravariant en X'. Le H^1 commute aux produits finis de faisceaux. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, on définit un faisceau d'ensembles pointés (c'est-à-dire, avec section distinguée) R^1f_*F. C'est le faisceau associé au préfaisceau (d'ensembles pointés) $\mathcal{R}^1F$, qui, à chaque Y'/Y étale, associe l'ensemble $H^1(X\times_Y Y',F)$.

On a les suites exactes de cohomologie habituelles, dont nous nous contenterons d'indiquer une :

Proposition 3.1. Soit $0 \longrightarrow F \xrightarrow{u} G$ une injection de faisceaux de groupes, et soit $C = G/F$ le faisceau d'ensembles homogènes sous G. On a une suite exacte de faisceaux d'ensembles pointés

$$0 \longrightarrow f_*F \longrightarrow f_*G \longrightarrow f_*C \xrightarrow{\partial} R^1f_*F \xrightarrow{u^1} R^1f_*G \quad .$$

Bien entendu, cette suite exacte est obtenue en passant à la suite de faisceaux associée à la suite exacte de préfaisceaux dont la valeur pour Y'/Y étale est

$$0 \longrightarrow F(X') \longrightarrow G(X') \longrightarrow C(X') \xrightarrow{\partial} H^1(X',F) \longrightarrow H^1(X',G) \quad ,$$

où $X' = X\times_Y Y'$. La relation d'équivalence induite par ∂ est celle donnée par l'opération de f_*G sur F_*C. On peut comme d'habitude expliciter la relation d'équivalence induite par u^1 grâce à la notion de "torsion" [1].

Proposition 3.2. *Soient* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ *des morphismes de schémas. On a une suite exacte pour chaque* Z'/Z *étale, posant* $Y' = Y\times_Z Z'$, $X' = X\times_Z Z'$:

$$0 \longrightarrow H^1(Y',f_*F) \longrightarrow H^1(X',F) \longrightarrow H^0(Y',R^1f_*F) \quad ,$$

d'où en passant aux faisceaux associés, une suite exacte de faisceaux pointés sur Z :

$$0 \longrightarrow (R^1g_*)f_*F \longrightarrow R^1(gf)_*F \longrightarrow f_*(R^1g_*)F \quad .$$

Proposition 3.3. *La famille des foncteurs de la forme* $H^1(X',F)$, *pour* X' *étale sur* X, *et de la forme* R^1f_*F, *pour un morphisme quelconque* $f : X \longrightarrow Y$, *est effaçable, c'est-à-dire il existe une injection* $F \xrightarrow{u} G$ *tel que les morphismes induits* $H^1(X',F) \longrightarrow H^1(X',G)$ *et* $R^1f_*F \longrightarrow R^1f_*G$ *soient tous nuls. Plus précisément, il existe une injection* $F \xrightarrow{u} G$ *tel que chacun des ensembles* $H^1(X',G)$, *avec* X' *étale sur* X, *et chacun des faisceaux pointés* R^1f_*G, *soient nuls. Si* X *est noethérien et* F *est un faisceau de ind-* $\mathbb{L}$*-groupes constructible, alors il existe une telle injection, où de plus* G *est un faisceau de ind-* $\mathbb{L}$*-groupes*.

Démonstration. La première assertion est sans doute vraie dans un topos quelconque, mais pour la topologie étale, il est commode de faire l'effacement avec la "résolution de Godement"

$$(3.4) \qquad F \longrightarrow G = \prod_{x \in X} i_{x*}i_x^{*}F \quad ,$$

où x parcourt l'ensemble des points de X et où $i_x : \bar{x} \longrightarrow X$ est un point géométrique de X au-dessus de x. Notons que pour X'/X étale, on a

$$G(X') = \prod_{x \in X} (i_x{}^*F)(X' \times_X \bar{x}) = \prod_{x \in X} \Big(\prod_{\bar{x}'/\bar{x}} F_{\bar{x}'} \Big) \quad ,$$

où les $\bar{x}'$ sont des points géométriques de X'. Or il est clair que pour chaque point de X' il y a au moins un $\bar{x}'$ au-dessus, d'où $F(X') \subset G(X')$ (VIII 3), donc $F \subset G$. D'autre part, un $\bar{u} / \bar{x}$ étale quelconque est somme de spectres de corps séparablement clos, d'où $H^1(\bar{u},\bar{G}) = 0$, quel que soit le faisceau $\bar{G}$ sur $\bar{x}$. Il résulte alors de 3.2 que $H^1(X', i_{x*}i_x{}^*F) = 0$ pour chaque X'/X étale, d'où (puisque H^1 commute aux produits) $H^1(X',G) = 0$, donc de même $R^1 f_* G = 0$ pour tout $f : X \longrightarrow Y$, grâce à la description de $R^1 f_*(G)$ comme faisceau associé au préfaisceau $Y' \longmapsto H^1(X \times_Y Y', G)$.

Supposons maintenant que de plus F est constructible et X noethérien. Alors on voit immédiatement qu'il existe un ensemble fini de points $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de X tel que le morphisme

$$F \longrightarrow \prod_{1 \le i \le n} i_{x*}i_x{}^*F$$

soit déjà injectif. Le faisceau $i_{x*}i_x{}^*F$ est un faisceau de groupes ind-fini (IX 1.5), donc le produit fini l'est aussi (IX 1.4 et 1.6 (iii)). En remplaçant G par ce faisceau, on obtient la dernière assertion.

3.5. Comme dans le cas de la cohomologie abélienne (traité dans V 2.4), on peut calculer le H^1 par le procédé de ČECH [1].

4. Le morphisme de changement de base.

Soit

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ S \arrow[from=u, "f"'] & S' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de morphisme de schémas. On en déduit un morphisme de foncteur $\varphi = \varphi_g$

(4.1) $$g^*f_* \xrightarrow{\varphi} f'_*g'^*$$

de la manière suivante : donner un tel morphisme équivaut à donner un morphisme de foncteurs

(4.1 adj) $$f_* \longrightarrow g_*f'_*g'^* \quad ,$$

parce que g_* et g^* sont adjoints. Nous prenons pour ce morphisme le morphisme

$$f_* \xrightarrow{(id \to g'_*g'^*)} f_*g'_*g'^* = g_*f'_*g'^* \quad ,$$

en tenant compte que

$$g_*f'_* = (gf')_* = (fg')_* = f_*g'_* \quad .$$

Notons qu'il y a un autre condidat pour (4.1). En effet, donner un tel morphisme équivaut à donner

$$f'^*g^*f_* \longrightarrow g'^*$$

et on peut prendre

$$f'^*g^*f_* \simeq g'^*f^*f_* \xrightarrow{(f^*f_* \to id)} g'^* \quad .$$

J'ignore si ces deux choix coïncident toujours (*), et en tout cas nous nous servirons uniquement du premier. Nous l'appellons <u>morphisme de changement de base</u>.

En restreignant (4.1) aux faisceaux abéliens (resp. de groupes) on déduit un morphisme $\varphi^q = \varphi^g_q$ pour chaque $q \geq 0$ (resp. pour $q = 0, 1$) :

(4.2) $$g^*(R^qf_*) \xrightarrow{\varphi^q} (R^qf'_*)g'^* \quad .$$

En effet, cela revient au même que de donner

(4.2 adj) $$(R^qf_*) \longrightarrow g_*(R^qf'_*)g'^* \quad ,$$

et on a des morphismes "évidents"

$$(R^qf_*) \xrightarrow{a} (R^qf_*)g'_*g'^* \xrightarrow{b} R^q{}'fg')_*g'^* =$$

$$= (R^q(gf')_*g'^* \xrightarrow{c} g^*(R^qf'_*)g'^* \quad .$$

<u>Remarque</u> 4.3. Supposons que g(donc g') soit une immersion fermée. Alors les morphismes b et c ci-dessus sont des isomorphismes (VIII 5.7). Il suit que (4.2) n'est autre essentiellement que le morphisme a ci-dessus, qui est défini en appliquant R^qf_* au morphisme canonique $F \longrightarrow g'_*g'^*F$.

<u>Proposition</u> 4.4. (<u>Composition des morphismes de changement de base</u>).

(i) <u>Soit</u>

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"'] & X'' \arrow[l, "h'"'] \arrow[d, "f''"'] \\ S & S' \arrow[l, "g"'] & S'' \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd}$$

(*) Mr. DELIGNE a résolu par l'affirmative cette perplexité, dans un contexte sensiblement plus général, cf. Exp. XVII.

un diagramme cartésien de morphismes de schémas. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(gh)^*f_* \arrow[rr, "gh"] \arrow[d, "\wr"] & & f''_*(g'h')^* \arrow[d, "\wr"] \\
h^*g^*f_* \arrow[r, "h^*{}_*g"] & h^*f'_*g'^* \arrow[r, "h{}^*g'^*"] & f''_*h'^*g'^*
\end{tikzcd}$$

et le diagramme avec $f_*, f'_* f''_*$ *remplacé par* $R^qf_*, R^qf'_*, R^qf''_*$ *l'est aussi, dans les domaines de définition naturels des foncteurs en question* (cf. n° 3).

(ii) Soit

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "e"'] & Y' \arrow[l, "g''"'] \arrow[d, "e'"] \\
X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\
S & S' \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de morphismes de schémas. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
g^*(fe)_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & (f'e')_*g''^* \arrow[d, equal] \\
g^*f_*e_* \arrow[r] & f'_*g'^*e_* \arrow[r] & f'_*e'_*g''^*
\end{tikzcd} ,$$

où les trois flèches horizontales proviennent des homomorphismes de changement de base pour fe, f *et* e *respectivement*.

Dans le cas abélien, les morphismes de changement de base pour fe *sont induits par un morphisme de suites spectrales*

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} = g^*(R^qf_*)(R^qe_*)F & \Longrightarrow & g^*R^{p+q}(fe)_*\,F \\ \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow \\ (R^pf'_*)(R^qe'_*)g''^*F & \Longrightarrow & R^{p+q}(f'e')_*\,g'^*F \end{array}$$

qui, pour les termes initiaux, est induit par les morphismes de changement de base pour e et f ; et pour un faisceau de groupes, on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & g^*(R^1f_*)e_*F & \longrightarrow & g^*R^1(fe)_*F & \longrightarrow & g^*f_*(R^1e_*)F \\ & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi \\ 0 \longrightarrow & (R^1f'_*)e'_*g''^*F) & \longrightarrow & R^1(f'e')_*g''^*F & \longrightarrow & f'_*(R^1e'_*)g''^*F \end{array}$$

Nous laissons la démonstration au lecteur.

5. Enoncé du théorème principal et de quelques variantes.

Le théorème est le suivant :

Théorème 5.1. (Théorème de changement de base pour un morphisme propre). Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

un diagramme cartésien de schémas, avec f propre.

(i) Soit F un faisceau d'ensembles sur X. Alors le morphisme (4.1)

$$\varphi : g^*f_*F \longrightarrow f'_*g'^*F$$

est bijectif.

(ii) Soit f un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) sur X. Alors le morphisme (4.2)

$$\varphi^1 \quad : \quad g^*(R^1 f_*)F \longrightarrow (R^1 f'_*)g'^*F$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) Soit F un faisceau abélien de torsion sur X. Alors le morphisme (4.2)

$$\varphi^q \quad : \quad g^*(R^q f_*)F \longrightarrow (R^q f'_*)g'^*F$$

est bijectif pour chaque $q \geq 0$.

On va d'abord énoncer des conséquences immédiates du théorème. Si $S' = \xi$ est un point géométrique de S, de sorte qu'un faisceau sur ξ est déterminé par ses sections globales, on a $H^o(\xi, R^q f'_* G) = H^q(X', G)$ pour chaque faisceau G sur X, d'où le corollaire suivant (qui est d'ailleurs essentiellement équivalent à (5.1)) :

Corollaire 5.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ propre, $\xi \longrightarrow S$ un point géométrique, et X_ξ la fibre de f au point ξ .

(i) Si F est un faisceau d'ensembles sur X, le morphisme canonique de changement de base

$$(f_* F)_\xi \longrightarrow H^o(X_\xi, F|X_\xi)$$

est bijectif.

(ii) Si F est un faisceau de groupes (resp. de groupes ind-finis) le morphisme de changement de base

$$R^1 f_*(F)_\xi \longrightarrow H^1(X_\xi, F|X_\xi)$$

est injectif (resp. bijectif).

(iii) *Si* F *est un faisceau abélien de torsion, alors pour chaque* $q \geq 0$ *le morphisme de changement de base*

$$(R^q f_*)F_\xi \longrightarrow H^q(X_\xi, F|X_\xi)$$

est bijectif.

Tenant compte de (X 4.3) et (X 5.2), on trouve :

Corollaire 5.3. *Sous les conditions de* (5.2), *soit* n *la dimension de la fibre* X_ξ. *Alors pour chaque faisceau abélien de torsion* F *sur* X, *la fibre* $(R^q f_* F)_\xi$ *est nulle pour* $q > 2n$. *Si* F *est un faisceau de* p-*torsion* (p *la caractéristique de* ξ), *alors la fibre de* $R^q f_*(F)$ *en* ξ *est nulle pour* $q > n$.

Rappelons qu'on dit que la *dimension relative de* X/S *est* $\leq n$ si la dimension de chaque fibre est $\leq n$. On a donc

Corollaire 5.3 bis. *Soit* $f : X \longrightarrow S$ *propre et* X/S *de dimension relative* $\leq n$. *Alors* $R^q f_* F = 0$ *si* $q > 2n$ *pour chaque faisceau abélien* F *de torsion sur* X. *Si* S *est de caractéristique* p, *et si* F *est un faisceau abélien de* p-*torsion, alors* $R^q f_* F = 0$ *si* $q > n$.

En appliquant (5.1) a un morphisme de spectres de corps séparablement clos, on obtient

Corollaire 5.4. (*Invariance de la cohomologie par changement de corps de base dans le cas* propre). *Soient* $k \subset K$ *des corps* séparablement clos *et* X *un schéma* propre *sur* Spec k. *Soit* $X' = X_K$. *Soit* F *un faisceau sur* X *et* F' *le faisceau image inverse sur* X'. *Alors*

(i) $$H^o(X,F) \xrightarrow{\sim} H^o(X',F') .$$

(ii) _Si_ F _est un faisceau de groupes_ (_resp._ _de groupes ind-finis_)

$$H^1(X,F) \xrightarrow{\sim} H^1(X',F')$$

est injectif (_resp._ _bijectif_).

(iii) _Si_ F _est un faisceau abélien de torsion_,

$$H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X',F')$$

pour tout q.

Une variante légèrement différente de (5.2) est la suivante :

Corollaire 5.5. _Soit_ S _le spectre d'un anneau hensélien et soit_ $S' = s_o$ _le point fermé_. _Soit_ $f : X \longrightarrow S$ _propre_. _Posons_ $X_o = X'$, $F_o = g'^*F$. _Alors on a_ :

(i) $$H^o(X,F) \xrightarrow{\sim} H^o(X_o,F_o)$$

pour tout faisceau d'ensembles F.

(ii) $$H^1(X,F) \longrightarrow H^1(X_o,F_o)$$

est injectif (_resp._ _bijectif_) _pour tout faisceau de groupes_ (_resp._ _de groupes ind-finis_) F.

(iii) $$H^q(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q(X_o,F_o)$$

pour tout faisceau abélien de torsion F, _et tout_ q .

En effet, cet énoncé n'est qu'un cas particulier de (5.2) si S est strictement local. Supposons que (5.2) soit connu. Soit $\overline{S}$ le localisé strict de S, $\overline{s}$ le point fermé de $\overline{S}$, et G le groupe de Galois de $\overline{S}/S$ (qui est aussi le groupe de Galois de $\overline{s}/s_o$). Alors G opère sur les fibres des R^q, et on a (avec des notations évidentes)

$$H^o(X,F) \simeq H^o(\overline{X},\overline{F})^G$$

$$H^o(X_o,F_o) \simeq H^o(\overline{X}_o,\overline{F}_o)^G$$

pour un faisceau d'ensembles F, d'où (i) puisque $H^{o}(\overline{X},\overline{F}) \xrightarrow{\sim} H^{o}(\overline{X}_{o},\overline{F}_{o})$ et que l'isomorphisme commute évidemment avec l'opération de G.

Si F est un faisceau de groupes, on définit aisément un morphisme de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{1}(G,H^{o}(\overline{X},\overline{F})) & \longrightarrow & H^{1}(X,F) & \longrightarrow & H^{1}(\overline{X},\overline{F})^{G} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^{1}(G,H^{o}(\overline{X}_{o},\overline{F}_{o})) & \longrightarrow & H^{1}(X_{o},F_{o}) & \longrightarrow & H^{1}(\overline{X}_{o},\overline{F}_{o}) \end{array} \tag{5.5.1}$$

où les flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes d'après (5.2). Soient α , $\beta \in H^{1}(X,F)$ des classes qui ont même image dans $H^{o}(X_{o},F_{o})$, et soit F^{α} le faisceau obtenu en tordant F à l'aide de α [1]. Soit β' la classe $H^{1}(X,F^{\alpha})$ correspondant à β. Alors, puisque la classe α' correspondant à α est nulle, l'image de β' dans $H^{1}(X_{o},(F^{\alpha})_{o})$ est nulle.

Examinons le diagramme déduit de (5.5.1) en remplaçant F par F^{α} : on trouve que l'image de β' dans $H^{o}(\overline{X},\overline{F}^{\alpha})^{G}$ est nulle, donc que β' est image d'un élément de $H^{1}(G,H^{o}(\overline{X},\overline{F}))$, et que cet élément doit être nul. Donc β' est nul, i.e. $\beta' = \alpha'$, d'où $\beta = \alpha$. Cela donne l'injectivité du morphisme de (ii).

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes ind-finis, et démontrons la surjectivité de la flèche (ii). Or il suffit de démontrer que le foncteur $F \longmapsto H^{1}(X_{o},F_{o})$ est effaçable. En effet, soit $0 \longrightarrow F \xrightarrow{u} G$ une injection qui efface ce foncteur. Soit $C = G/F$. On a un morphisme de suites exactes (4.4)

$$\begin{array}{ccccc} H^{o}(X,C) & \longrightarrow & H^{1}(X,F) & \longrightarrow & H^{1}(X,G) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow \\ H^{o}(X_{o},C_{o}) & \longrightarrow & H^{1}(X_{o},F_{o}) & \xrightarrow{u^{1}_{o}} & H^{1}(X_{o},G_{o}) \end{array}$$

où le morphisme u^{1}_{o} est nul, ce qui implique bien la surjectivité de ε .

Démontrons que le foncteur $F \longmapsto H^1(X_o,F_o)$ est effaçable pour les faisceaux F de groupes ind-finis. Soit $F \xrightarrow{u} C$ la "résolution de Godement" (3.4). On a

$$H^1(G,H^o(\overline{X}_o,\overline{C}_o)) \simeq H^1(G,H^o(\overline{X},\overline{C})) \subset H^1(X,C) = 0$$

De plus, on a le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\overline{X},\overline{F}) & \simeq & H^1(\overline{X}_o,\overline{F}_o) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = H^1(\overline{X},\overline{C}) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o,\overline{C}_o) \end{array}$$

(puisque $H^1(\overline{X},\overline{G}) = \varinjlim H^1(X',C) = 0$, X'/X étale), donc est nul. On a donc un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(G,H^o(\overline{X}_o,\overline{F}_o)) & \longrightarrow & H^1(X_o,F_o) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o,\overline{F}_o)^G \\ & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha^G \\ & & 0 & \longrightarrow & H^1(X_o,G_o) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_o,\overline{G}_o)^G \end{array}$$

où α^G est nul, ce qui implique que β est également nul, d'où l'effaçabilité.

Démontrons enfin l'assertion (iii) de (5.5) : On a un morphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(\overline{X},\overline{F}) & \Longrightarrow & H^n(X,F) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H^p(G,H^q,\overline{X}_o,\overline{F}_o)) & \Longrightarrow & H^n(\overline{X}_o,\overline{F}_o) \end{array}$$

D'après (5.2), les morphismes $H^q(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^q(\overline{X}_o,\overline{F}_o)$ sont des isomorphismes. Cela implique que φ est un isomorphisme pour $E_2^{p,q}$, donc pour les aboutissements, d'où le résultat, cqfd.

5.6. Examinons (5.5) (i) et (ii) dans le cas où F est constant : Soit $F = S_X$ un faisceau d'ensembles constant sur le schéma X, de valeur T. Alors F(X) n'est autre que l'ensemble des applications localement constantes de X dans T. Si X_o est un sous-schéma de X, et si T a au moins deux éléments, on en conclut que $F(X) \longrightarrow F(X_o)$ est bijectif si et seulement si l'application $U \mapsto U_o = U \cap X_o$ de l'ensemble $\theta(X)$ des parties à la fois ouvertes et fermées de X dans l'ensemble analogue $\theta(X_o)$ est bijective. Si l'ensemble $\pi_o(X_o)$ des composantes connexes de X_o est fini, cela revient au même que de dire que l'application $\pi_o(X_o) \longrightarrow \pi_o(X)$ est bijective. Ainsi, (5.5) (i) peut aussi se reformuler de la façon suivante (compte tenu que dans ce cas X_o est de type fini sur un corps, donc est noethérien, donc $\pi_o(X_o)$ est fini) :

<u>Corollaire</u> 5.7. <u>Soient</u> S <u>le spectre d'un anneau hensélien</u>, s_o <u>son point fermé</u>. <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme propre et</u> X_o <u>la fibre fermée de</u> X/S. <u>Alors l'application</u> $\pi_o(X) \longrightarrow \pi_o(X_o)$ <u>induite par</u> $X_o \longrightarrow X$ <u>est bijective</u>.

(En particulier, cela implique que l'ensemble $\pi_o(X)$ est fini). Nous alons démontrer directement (5.7) dans le cas noethérien :

<u>Lemme</u> 5.8. <u>L'énoncé</u> (5.7) <u>est vrai si</u> S <u>est noethérien</u> (*).

Démonstration. Dans le cas noethérien, $\pi_o(X)$ est certainement fini, et en remplaçant X par une composante connexe on peut supposer que $\pi_o(X)$ est un ensemble à un élément, c'est-à-dire que X est connexe et non-vide. Il faut démontrer qu'alors X_o est également connexe et non-vide. Or l'image de X dans S est fermée puisque f est propre et non-vide car X est non-vide, donc contient S_o, ce qui explique que X_o est non-vide. Soit

---

(*) Cf. EGA IV 18.5.19.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ S & S' \arrow[l, "\pi"] \end{tikzcd}$$

la factorisation de Stein de f (EGA III 4.3.3) de sorte que S'/S est fini et S' est connexe. On sait que chaque fibre de f' est connexe non-vide, et l'espace sous-jacent à X_o est la réunion des espaces sous-jacents aux fibres fermées de S'. Tout revient donc à démontrer que S' est le spectre d'un anneau *local*. Mais puisque S est hensélien, l'anneau A' de S' est produit d'anneaux locaux (VII 4.1 (i)), donc A' est local puisque S' est connexe, ce qui prouve 5.8.

5.9.0. Suppossons maintenant que $F = G_X$ est un faisceau constant de groupes, de valeur G, où G est un groupe fini. Alors $H^1(X,G_X)$ classifie les revêtements principaux galoisiens de X, de groupe G (VII 2.1)). Le corollaire 5.5 (ii) dit que le morphisme $X_o \longrightarrow X$ induit une bijection entre les ensembles de classes de ces revêtements. Il s'ensuit donc, de la définition des π_1, que 5.5 (ii) pour les faisceaux de groupes finis constants (en présence de (i) équivaut à :

Théorème 5.9. (*Théorème de spécialisation pour le groupe fondamental*). *Avec les notations de* (5.5), *supposons* X *connexe non-vide*. *Alors* X_o *est connexe non-vide*, *et si* $\overline{x}_o$ *est un point géométrique de* X_o, *le morphisme de groupes fondamentaux*

$$\pi_1(X_o,\overline{x}_o) \longrightarrow \pi_1(X,\overline{x}_o)$$

est bijectif.

D'autre part, d'après la théorie de Galois (SGA V) l'énoncé 5.9 (dans le cas X_o connexe, ce qu'on peut supposer, grâce à 5.7) équivaut à

Théorème 5.9 bis. *Soient S le spectre d'un anneau hensélien, s_o le point fermé de S, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre, et X_o la fibre fermée de X/S. Pour un schéma Z, notons Et(Z) la catégorie des revêtements étales de Z. Alors le foncteur restriction*

$$Et(X) \longrightarrow Et(X_o)$$

est une équivalence de catégories.

Remarque 5.10. Rappelons que 5.9 a été déjà démontré (SGA 1 X 2.1) dans le cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien complet. Malheureusement on n'arrive pas à utiliser ce résultat pour prouver 5.9 en général (*), et la démonstration donnée de 5.9, dans le présent exposé et le suivant, est très différente de celle donnée dans SGA 1 X.

5.11. On peut donner une autre variante "non commutative" de (5.5) (ii), en utilisant la théorie de la 2-cohomologie de J. GIRAUD (cf. Thèse de J. GIRAUD, en préparation). Supposons S noethérien. Prenons un *lien* L sur X, et supposons que L se réalise localement (pour la topologie étale) par un faisceau en groupes ind-finis. Considérons l'application

$$\varphi^{(2)} \ : \ H^2(X,L) \longrightarrow H^2(X_o,L_o) \quad ,$$

où L_o est la restriction de L à X_o . Alors on a

(5.11.1) $$(\varphi^{(2)})^{-1} \ (H^2(X_o,L_o)') \ = \ H^2(X,L)' \quad ,$$

(*) La situation a changé depuis ces lignes ont été écrites, cf. th. 3.1 dans M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings (à paraître).

où les "primes" désignent les parties formées des éléments neutres.

Compte tenu de 5.5 (iii), cet énoncé équivaut aussi au suivant :

Pour toute gerbe $\mathcal{G}$ sur X, de lien L comme ci-dessus, désignant par $\mathcal{G}_o$ la restriction de $\mathcal{G}$ à X_o, le foncteur restriction sur les catégories de sections

$$\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}_o(X_o)$$

est une équivalence de catégories.

Le fait que ce foncteur soit pleinement fidèle résulte en effet de 5.5 (i), et le fait qu'il soit essentiellement surjectif lorsque $\mathcal{G}(X) \neq \emptyset$ i.e. lorsque la classe $\xi \in H^2(X,\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ est neutre, résulte de 5.5 (ii). Il reste donc à exprimer que $\mathcal{G}_o(X_o) \neq \emptyset$ implique $\mathcal{G}(X) \neq \emptyset$, ce qui n'est autre que (5.11.1).

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de (5.11.1), et nous nous contenterons de signaler que pour tout schéma noethérien X et tout sous-schéma fermé, on peut montrer en fait que la validité des énoncés 5.5 (i) (ii) implique celle de (5.11.1) ; la démonstration se fait assez élémentairement, en utilisant le résultat de descente VIII 9.4 a).

6. Premières réductions.

Nous utilisons l'abréviation (f,F,g) pour désigner les données de 5.1 dans l'un quelconque des trois cas (i), (ii) ou (iii) de ce théorème.

Lemme 6.1. Pour que 5.1 soit vrai pour les données (f,F,g), où f,F sont fixés, et g queldonque, il suffit que pour tout S-schéma $\overline{S}$, localisé strict d'un schéma *localement de type fini* S' *sur* S *en un point qui est fermé dans sa fibre, le théorème soit vrai pour* $(\bar{f},\bar{F},\bar{g})$, *où* $\bar{f},\bar{F}$ *sont déduits de* f,F *par le changement de base* $\bar{S} \longrightarrow S$, *et où* $\bar{g} : \bar{s} \longrightarrow \bar{S}$ *est l'inclusion du point fermé de* $\bar{S}$.

Démonstration. On peut supposer évidemment S,S' affines, spectres d'anneaux A,A' . Alors A' est la limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini A'_i , et utilisant la théorie de passage à la limite (VII 5.11 et 5.14), on est ramené à prouver 5.1 pour les (f,F,g_i) où $g_i : \mathrm{Spec}(A'_i) = S'_i \longrightarrow S$, ce qui nous ramène au cas où g est de type fini. Pour prouver que les homomorphisme de changement de base sont des isomorphismes, il suffit de prouver qu'ils induisent des isomorphismes sur les fibres des faisceaux en jeu, et il suffit de regarder les fibres géométriques en des points s' de S' qui sont fermés dans leur fibre sur S (VIII 3.13). Soit $\bar{s}'$ un point géométrique de S' correspondant à une clôture séparable de k(s') ; comme s' est algébrique sur le point corespondant s de S, $k(\bar{s}')$ est donc aussi une clôture séparable de k(s). Désignons par $\bar{s}$ le préschéma $\bar{s}'$, considéré comme étant au-dessus de S, i.e. considéré comme point géométrique de S, et considérons les localisés stricts $\bar{S}$ et $\bar{S}'$ de S en $\bar{s}$ et en $\bar{s}'$ respectivement, de sorte qu'on a un carré commutatif.

$$\begin{tikzcd} \bar{s}' \arrow[r] \arrow[d] & \bar{s} \arrow[d] \\ \bar{S}' \arrow[r] & \bar{S} \end{tikzcd} ,$$

où la première flèche horizontale est un isomorphisme. Compte tenu de VIII 5.2 et 5.3, l'homomorphisme induit sur les fibres en $\bar{s}'$ par l'homomorphisme de changement de base relatif à (f,F,g) s'identifie à l'homomorphisme

$$H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}',\overline{F}')$$

induit par $\overline{X}' \longrightarrow \overline{X}$, où $\overline{X}$ et $\overline{X}'$ désignent les schémas déduits de X par les changements de base $\overline{S} \longrightarrow S$ et $\overline{S}' \longrightarrow S$. Or le carré commutatif ci-dessus fournit de façon évidente un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(X_{\overline{s}}\ ,\ \overline{F}) & \longrightarrow & H^i(X'_{\overline{s}'}\ ,\ \overline{F}') \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^i(\overline{X},\overline{F}) & \longrightarrow & H^i(\overline{X}',\overline{F}') \end{array} \quad ,$$

où la première flèche horizontale est encore un isomorphisme, donc la deuxième flèche horizontale est un isomorphisme dès que les deux flèches verticales le sont. Or c'est ce qu'assure l'hypothèse de (6.1), cqfd.

6.1.1 Ainsi, pour prouver 5.1 dans une situation (F,f,-), on est ramené à étudier le cas particulier 5.5, avec S strictement local. Cela nous amène à étudier de façon générale la situation où on a un morphisme $h : Y \longrightarrow X$ de schémas, et où on se propose de donner les conditions générales moyennant lesquelles les homomorphismes correspondants

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,h^*(F))$$

sont bijectifs. Le présent numéro donnera quelques résultats auxiliaires faciles sur cette situation, que (pour la commodité de références ultérieures) nous énoncerons avec plus de généralité et de précision qu'il ne serait nécessaire pour la démonstration de 5.1.

Lemme 6.2. *Soient* C,C' *deux catégories abéliennes*, $T^\cdot = (T^i)$ *et* $T'^\cdot = (T'^i)$ *deux foncteurs cohomologiques de* C *dans* C', $\varphi = (\varphi^i)$ *un homomorphisme de* foncteurs cohomologiques de $T^{\cdot}$ dans $T'^{\cdot}$. On suppose $T^{\cdot}$ et $T'^{\cdot}$ nuls en degrés < 0, et T^{i} effaçable pour $i > 0$. Soit n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) φ^{i} est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n+1$.

b) (Si $n \geq -1$). L'homomorphisme φ^{i} est un monomorphisme si $i = 0$, et un épimorphisme si $i \leq n$.

c) (Si $n \geq 0$). L'homomorphisme φ^{o} est un isomorphisme, et les T'^{i} sont effaçables pour $0 < i \leq n$.

Si ces conditions sont remplies, et si $A \in Ob(C)$, alors $\varphi^{n+1}(A) : T^{n+1}(A) \longrightarrow T'^{n+1}(A)$ est un épimorphisme (donc un isomorphisme) si et seulement si $T'^{n+1}(A)$ est effaçable, i.e. s'il existe un monomorphisme $A \longrightarrow B$ tel que l'homomorphisme $T'^{n+1}(A) \longrightarrow T'^{n+1}(B)$ correspondant soit nul. Si $C' = (Ab)$ (catégorie des groupes abéliens), et si $\xi \in T'^{n+1}(A)$, alors ξ est dans l'image de $T^{n+1}(A)$ si et seulement si ξ est effaçable, i.e. s'il existe un monomorphisme $A \longrightarrow B$ tel que l'image de ξ dans $T'^{n+1}(B)$ soit nulle.

Démonstration. Evidemment a) implique b) et c). Comme les hypothèses faites sur $T^{\cdot}$ impliquent que les T^{i} $(i > 0)$ sont les satellites droits de T^{o}, l'implication c) $\Longrightarrow$ b) résulte de la caractérisation axiomatique des foncteurs satellites ; elle résulte également, par récurrence sur n, de la dernière assertion de 6.2, qui se démontre par l'argument bien connu qu'on se dispense se répéter ici (cf. démonstration de 6." ci-dessous). L'implication b) $\Longrightarrow$ c) est triviale si $n = 1$, et si $n \geq 0$ on procède par récurrence sur n : l'hypothèse de récurrence nous permet de supposer que φ^{i} est un isomorphisme pour

$i \leq n-1$, un monomorphisme pour $i = n$, donc par l'hypothèse un isomorphisme aussi pour $i = n$, et il reste à montrer que c'est un monomorphisme pour $i = n+1$, utilisant que φ^n est un isomorphisme. Soit $A \longrightarrow B$ un monomorphisme qui efface T^{n+1}, d'où une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ dans C, et un homomorphisme de suites exactes dans C' :

$$\begin{tikzcd}
T^n(B) \arrow[r] \arrow[d] & T^n(C) \arrow[r] \arrow[d] & R^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(B) \arrow[d] \\
T'^n(B) \arrow[r] & T'^n(C) \arrow[r] & T'^{n+1}(A) \arrow[r] & T'^{n+1}(B)
\end{tikzcd} ,$$

où les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes d'après ce qu'on vient de voir, et $T^{n+1}(A) \longrightarrow T^{n+1}(B)$ est nul par construction. Alors le lemme des cinq implique que $T^{n+1}(A) \longrightarrow T'^{n+1}(A)$ est un monomorphisme, cqfd.

Corollaire 6.3. Supposons que $T^{\cdot}$, $T'^{\cdot}$ proviennent de foncteurs cohomologiques (dénotés par les mêmes symboles) sur la catégorie dérivée droite [3] $D^+(C)$, à valeur dans C' ; on ne suppose pas nécessairement les $T^i (i > 0)$ effaçables. On suppose que $K^{\cdot} \in D^+(C)$, $H^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$ implique $T^i(K^{\cdot}) = T'^{\cdot}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$. Soit $K^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\, D^+(C)$ un complexe borné à gauche dans C tel que $H^i(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$.

(i) Si la condition a) de 6.2 est satisfaite, alors l'homomorphisme $\varphi^i(K^{\cdot}) = T^i(K^{\cdot}) \longrightarrow T'^i(K^{\cdot})$ est un isomorphisme pour $i < n$, un monomorphisme pour $i = n+1$.

(ii) Soit de plus $L^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\, D^+(C)$ tel que $H^i(L^{\cdot}) = 0$ pour $i < 0$, et soit $u : L^{\cdot} \longrightarrow K^{\cdot}$ un homomorphisme dans $D^+(C)$, induisant un homomorphisme injectif $H^o(u) : H^o(L^{\cdot}) \longrightarrow H^o(K^{\cdot})$. Alors, pour que $T^{n+1}(L^{\cdot}) \longrightarrow T'^{n+1}(L^{\cdot})$ soit

<u>surjectif, il faut et il suffit que l'image de</u> $T^{n+1}(L^{\cdot})$ <u>dans</u> $T^{n+1}(K^{\cdot})$ <u>soit contenue dans celle de</u> $T^{n+1}(K\ )$. <u>Si</u> $C' = (Ab)$, <u>et si</u> $\xi \in T'^{n+1}(A)$, <u>alors</u> ξ <u>est dans l'image de</u> $T^{n+1}(A)$ <u>si et seulement si son image dans</u> $T'^{n+1}(K^{\cdot})$ <u>est dans celle de</u> $T^{n+1}(K^{\cdot})$.

Rappelons que l'hypothèse que $T^{\cdot}$ et $T'^{\cdot}$ proviennent de foncteurs cohomologiques sur $D^{+}(C)$ peut s'expliciter en disant qu'ils proviennent de foncteurs cohomologiques sur la catégorie abélienne des complexes bornés à gauche de C, commutant aux translations des degrés, transformant des homomorphismes de complexes homotopes à zéro en des homomorphismes nuls de C', et transformant tout homomorphisme $u : K^{\cdot} \longrightarrow L^{\cdot}$ de complexes qui est un quasi-isomorphisme (i.e. qui induit des isomorphismes $H^{i}(K^{\cdot}) \longrightarrow H^{i}(L^{\cdot})$) en un isomorphisme de C'. Pratiquement, tous les foncteurs cohomologiques de C dans C' qu'on rencontre sont obtenus ainsi.

<u>Démonstration de</u> 6.3. Prouvons d'abord (i). L'assertion est évidente si $H^{i}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i \leq n+1$, car alors d'après les propriétés de degrés imposées à $T^{\cdot}$, $T'^{\cdot}$, on aura $T^{i}(K^{\cdot}) = T'^{i}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i \leq n+1$. Soit d'autre part m un entier ≥ 0 tel que $H^{i}(K^{\cdot}) = 0$ pour $i < m$: il en existe, par exemple $m = 0$ fait l'affaire. Nous procédons par récurrence descendante sur m, l'assertion étant prouvée si $m = n+2$. Nous supposons donc l'assertion prouvée pour les $m' > m$, et la prouvons pour m. D'après l'hypothèse sur les degrés de $K^{\cdot}$, $K^{\cdot}$ est quasi-isomorphe à un complexe à degrés $\geq m$, donc on peut le supposer à degrés $\geq m$. Il s'ensuit une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow H^{m}[-m] \longrightarrow K^{\cdot} \longrightarrow K'^{\cdot} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où $H^{m} = H^{m}(K^{\cdot})$, où le signe $[-m]$ indique translation de $-m$ sur les degrés d'un complexe, et où K'' est défini comme conoyau. Donc les objets de cohomologie de K'' sont ceux de $K^\cdot$ en degrés $\geq m+1$, et nuls en degrés $\leq m+1$; en particulier, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à K'' . La suite exacte précédente donne lieu à un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
T^{i-1}(K'') & \longrightarrow & T^{i-m}(H^m) & \longrightarrow & T^{i}(K^\cdot) & \longrightarrow & T^{i}(K'') & \longrightarrow & T^{i+1-m}(H^m) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T'^{i-1}(K'') & \longrightarrow & T'^{i-m}(H^m) & \longrightarrow & T'^{i}(K^\cdot) & \longrightarrow & T'^{i}(K'') & \longrightarrow & T'^{i+1-m}(H^m)
\end{array}$$

Faisant alors $i \leq n$ dans le diagramme précédent, et tenant compte de l'hypothèse de récurrence et de $m \geq 0$, on trouve que les flèches verticales autours de la flèche verticale médiane sont des isomorphismes et a fortiori des épimorphismes, et que la flèche verticale de droite est un monomorphisme, donc par le lemme des cinq la flèche verticale médiane est un épimorphisme. Faisant $i \leq n+1$, on trouve de même que les flèches verticales autour de la médiane sont des monomorphismes, la flèche verticale de gauche étant un isomorphisme et a fortiori un épimorphisme, d'où on conclut par le lemme des cinq que la flèche verticale médiane est un monomorphisme, ce qui établit 6.3 (i).

Pour établir la deuxième assertion 6.3 (ii), on utilise de même la suite exacte

$$0 \longrightarrow L^\cdot \longrightarrow K^\cdot \longrightarrow K'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

où K' est défini comme le mapping-cylinders de $L^\cdot \longrightarrow K^\cdot$, donc est encore à cohomologie à degrés positifs. La "chasse au diagramme" habituelle dans

$$\begin{array}{ccccccccc}
T^{n}(K^\cdot) & \longrightarrow & T^{n}(K'') & \longrightarrow & T^{n+1}(L^\cdot) & \longrightarrow & T^{n+1}(K^\cdot) & \longrightarrow & T^{n+1}(K'') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T'^{n}(K^\cdot) & \longrightarrow & T'^{n}(K'') & \longrightarrow & T'^{n+1}(L^\cdot) & \longrightarrow & T'^{n+1}(K^\cdot) & \longrightarrow & T'^{n+1}(K'')
\end{array}$$

donne alors la dernière assertion de 6.3, compte tenu du fait que (en vertu de la première partie déjà démontrée) les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, les deux dernières des monomorphismes. Cela achève la démonstration de 6.3.

Lemme 6.4. *Le théorème (5.1) est vrai si f est fini.*

Cela résulte aussitôt en effet de VIII 5.5 et 5.8.

Proposition 6.5. *Soit $h : Y \longrightarrow X$ un morphisme de schémas quasi-compacts et quasi-séparés. Dans (i) ci-dessous, I désigne un ensemble donné ayant au moins deux points, dans (ii) et (iii), $\mathbb{L}$ désigne une partie non-vide de l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers, et dans (iii) n désigne un entier.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application canonique*

$$H^{o}(X,F) \longrightarrow H^{o}(Y,h^{*}(F))$$

est injective (resp. bijective).

b) *Pour tout morphisme fini $X' \longrightarrow X$, désignant par $h^{o} : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme déduit de h par le changement de base $X' \longrightarrow X$, l'application canonique*

$$H^{o}(X',I_{X'}) \longrightarrow H^{o}(Y',I_{Y'})$$

déduite de h' est injective (resp. bijective).

b') *Avec les notations de b), l'application $U \longmapsto h'^{-1}(U)$ de l'ensemble des parties de Y' à la fois ouvertes et fermées dans l'ensemble des parties de X' à la fois ouvertes et fermées est injective (resp. bijective).*

b") (Si X localement noethérien). Avec les notations de b), l'application induite sur les ensembles de composantes connexes

$$\pi_o(h') : \pi_o(X') \longrightarrow \pi_o(Y')$$

est surjective (resp. bijective), ou encore : si X' est non-vide (resp. connexe non-vide) il en est de même de Y' .

De plus, si ces conditions sont satisfaites, alors pour tout faisceau en groupes F sur X, le foncteur $P \longmapsto h^*(P)$ de la catégorie des torseurs (=fibrés principaux homogènes) sous F dans la catégorie des torseurs sous $h^*(F)$ est fidèle (resp. pleinement fidèle), et a fortiori, dans le cas respé, l'application canonique

$$H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$$

est injective. Enfin, sous les mêmes hypothèses, le foncteur $X' \longmapsto Y' = X'\times_X Y$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de Y est fidèle (resp. pleinement fidèle).

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau F de groupes ind-$\mathbb{L}$-finis sur X, l'application canonique

$$H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$$

est bijective pour i = 0,1.

b) Pour tout morphisme fini $X' \longrightarrow X$, désignant par $h' : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme déduit de h par changement de base, et pour tout $\mathbb{L}$-groupe fini ordinaire G, l'application canonique

$$H^1(X',G_{X'}) \longrightarrow H^1(Y',G_{X'})$$

est bijective pour i = 0,1 .

b') (Si $\mathbb{L} = \mathbb{P}$). Avec les notations de b), le foncteur image inverse par h' induit une équivalence de la catégorie des revêtements étales de X' avec la catégorie des revêtements étales de Y'.

b") (Si X noethérien, $\mathbb{L} = \mathbb{P}$). Avec les notations de b), si X' est non-vide, il en est de même de Y', et si y' est un point géométrique de Y', x' son image dans X', l'application canonique

$$\pi_i(Y',y') \longrightarrow \pi_i(X',x') \quad , \quad \text{pour } i = 0,1 \quad ,$$

est bijective.

(iii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout faisceau F de $\mathbb{L}$-torsion sur X, l'homomorphisme

$$H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,h^*(F))$$

est un isomorphisme si $i \leq n$, un monomorphisme si $i = n+1$.

a') (Si $n \geq -1$). Pour tout F comme ci-dessus, l'homomorphisme envisagé est injectif si $i = 0$, et surjectif si $i \leq n$.

b) (Si $n \geq -1$). Pour tout morphisme fini $X' \longrightarrow X$, désignant par $h' : Y' \longrightarrow X'$ le morphisme déduit de h par changement de base $X' \longrightarrow X$, et pour tout $\ell \in \mathbb{L}$, $\nu > 0$, l'homomorphisme canonique

$$H^i(X',(\mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}_{X'}) \longrightarrow H^i(Y', \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z})_{Y'})$$

est injectif pour $i = 0$, surjectif pour $i \leq n$.

De plus, on a le complément suivant à l'énoncé précédent :

Corollaire 6.6. (i) Supposons la condition non respée 6.5 (i) a) satisfaite, soit F un faisceau d'ensembles sur X, et soit $\xi \in H^0(Y,h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme de faisceaux d'ensembles $F \longrightarrow G$ tel que l'image de ξ dans $H^o(Y,h^*(G))$ soit dans l'image de $H^o(X,G)$. Alors ξ est dans l'image de $H^o(X,F)$.

(ii) Supposons la condition 6.5 (i) a) respée satisfaite, soit F un faisceau de groupes sur X, et soit $\xi \in H^1(Y,h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme de faisceaux de groupes $F \longrightarrow G$ tel que l'image de ξ dans $H^1(Y,h^*(G))$ soit dans l'image de $H^1(X,G)$, alors ξ est dans l'image de $H^1(X,F)$.

(iii) Supposons la condition 6.5 (iii) a) satisfaite (pour une valeur donnée n), soit F un faisceau de $\mathbb{L}$-torsion sur X et soit $\xi \in H^{n+1}(Y,h^*(F))$. Supposons qu'il existe un monomorphisme $F \longrightarrow G$ de faisceaux de $\mathbb{L}$-torsion, tel que l'image de ξ dans $H^{n+1}(Y,h^*(G))$ soit dans l'image de $H^{n+1}(X,G)$, alors ξ est dans l'image de $H^{n+1}(X,F)$.

Démonstration de 6.5 et 6.6. Prouvons d'abord 6.6. Le cas de 6.6 (iii) est un cas particulier de la dernière assertion dans 6.3, appliqué au cas où C est la catégorie des faisceaux abéliens de $\mathbb{L}$-torsion sur X, C' est la catégorie (Ab), et $T^i(F) = H^i(X,F)$, $T'^i(F) = H^i(Y,g^*(F))$ (noter que $T'^{\cdot}$ est bien un foncteur cohomologique en F, grâce au fait que le foncteur $h^{\cdot}$ est exact). Bien entendu, ici la considération des complexes comme dans 6.3 est inutile (elle nous sera commode plus loin (6.8)) et nous utilisons uniquement la dernière assertion de 6.3.

Pour prouver (i), considérons la somme amalgamée $H = G \amalg_F G$, limite inductive, dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, du diagramme

$$\begin{tikzcd} & G \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & G \end{tikzcd}$$

Les propriétés d'exactitude habituelles du topos des faisceaux d'ensembles montrent, comme $F \longrightarrow G$ est un monomorphisme, que l'on a un diagramme exact de faisceaux d'ensembles sur X

$$F \longrightarrow G \rightrightarrows H$$

(ce que l'on peut exprimer en disant que dans un topos, tout monomorphisme est effectif, et prouver en se ramenant comme d'habitude à la catégorie des ensembles). Comme les foncteurs H^o et h^* sont exacts à gauche, on en conclut un homomorphisme de diagrammes exacts d'ensembles

$$\begin{array}{ccccc} H^o(X,F) & \longrightarrow & H^o(X,G) & \rightrightarrows & H^o(X,H) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^o(Y,h^*(F)) & \longrightarrow & H^o(Y,h^*(G)) & \rightrightarrows & H^o(Y,h^*(H)) \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont injectives. Une "chasse de diagramme" immédiate prouve alors l'assertion 6.6 (i).

Pour prouver 6.6 (ii), nous allons d'abord prouver la deuxième assertion de 6.5 (i), savoir que moyennant la condition a) de 6.5 (i), pour tout faisceau de groupes F sur X, le foncteur $P \longmapsto h^*(P)$, de la catégorie des torseurs sous F dans la catégorie des torseurs sous $h^*(F)$, est fidèle (resp. pleinement fidèle), donc, dans le cas respé, induit une injection sur les H^1. Pour ceci, si P et P' sont deux torseurs sous F, désignons par $\underline{\mathrm{Isom}}_F(P,P')$ le faisceau des F-isomorphismes de P sur P'. Il est immédiat que la formation de ce faisceau commute à toute extension de la base, en particulier à l'extension de la base par h . (C'est là une assertion valable pour tout morphisme de sites). Utilisant l'hypothèse sur l'effet de h^* sur les H^o pour le faisceau $\underline{\mathrm{Isom}}_F(P,P')$, on trouve que l'application $\mathrm{Isom}_F(P,P') \longrightarrow \mathrm{Isom}_F(h^*(P),h^*(P'))$ est injective (resp. bijective), ce qui signifie que le foncteur $P \longmapsto h^*(P)$

est fidèle (resp. pleinement fidèle). (NB dans la catégorie des torseurs sous un faisceau en groupes, tout homomorphisme est un isomorphisme). Notons d'autre part, que si F est un sous-faisceau en groupes d'un faisceau en groupes G, alors la donnée d'un torseur P sous F revient à la donnée d'un torseur sous G (savoir celui déduit de P par extension $F \longrightarrow G$ du Groupe structural), <u>muni</u> d'une section de Q/F (qui s'interprète en effet comme une "restriction du Groupe structural" de G à F). Ceci posé, avec les notations de 6.6 (ii), comme l'image de η de ξ dans $H^1(Y,h^*(G))$ provient d'un élément de $H^1(X,G)$, ce dernier est défini par un torseur Q sous G, de sorte que η est la classe du torseur $h^*(Q)$ sous $h^*(G)$. Le fait que η provient d'un $\xi \in H^1(Y,h^*(F))$ s'explicite alors en disant que ξ est la classe du $h^*(F)$-torseur défini par $h^*(Q)$ et une section convenable de $h^*(Q)/h^*(F)$. Comme le foncteur h^* est exact à droite, ce dernier faisceau n'est autre que $h^*(Q/F)$, et comme h^* induit une bijection sur les H^o des faisceaux d'ensembles, il s'ensuit que la section envisagée de $h^*(Q)/h^*(F)$ provient d'une section de Q/F. Cette dernière définit alors un F-torseur par restriction du groupe structural, et la classe de ce torseur dans $H^1(X,F)$ a évidemment ξ comme image dans $H^1(Y,h\xi(F))$. Cela prouve 6.6 (ii) et achève la démonstration de 6.6.

Prouvons maintenant 6.5, en commençant par 6.5 (iii). Evidemment a) implique a'), et l'implication inverse est un cas particulier de 6.2 (appliqué encore au cas où C est la catégorie des faisceaux de $\mathbb{L}$-torsion sur X, et C' la catégorie des faisceaux de groupes abéliens), pourvu qu'on prouve l'effaçabilité dans C des foncteurs $H^i(X,F)$ pour $i > 0$. Cela n'offre en effet pas de difficulté, mais nous pouvons aussi nous dispenser de prouver ce résultat, en notant que F est limite inductive filtrante de ses sous-faisceaux F_i pour lesquels il existe un entier $n > 0$ annulant F_i (IX 1.1). Alors $h^*(F)$ est limite inductive des $h^*(F_i)$, et compte tenu de la commutation de la cohomologie à la limite inductive (VII 3.3), résultant des hypothèses de quasi-compacité et de quasi-séparation faites sur X et Y (qui n'avaient pas servi pour 6.6), on se ramène à prouver la condition a) pour les F_i , ce qui nous ramène au cas où il existe un entier $m > 0$ tel que $mF = 0$. On peut évidemment supposer que les diviseurs premiers de m sont $\in \mathbb{L}$, et on peut alors prendre pour C la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Z}/m\,\mathbb{Z}$-Modules sur X. Or on sait que dans cette catégorie, les foncteurs $H^i(X, -)$ pour $i \geq 1$ sont effaçables ( ). Cela montre l'équivalence des conditions a) et a') de 6.5 (iii). D'autre part, appliquant a) à l'image directe d'un faisceau de $\mathbb{L}$-torsion F' sur X', X' fini sur X, qui est de $\mathbb{L}$-torsion grâce à IX 1.2 (v), 1.6 (iii), et utilisant 6.4 et VIII 5.5, on trouve que l'homomorphisme

$$H^i(X',F') \longrightarrow H^i(Y',h'^*(F'))$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n+1$, d'où a fortiori la condition b). Reste à prouver que cette condition implique a'). Pour ceci, utilisons le fait (IX 2.7.2) que tout faisceau de $\mathbb{L}$-torsion F sur X est limite inductive filtrante de faisceaux de $\mathbb{L}$-torsion constructibles ; alors l'argument de passage à la limite déjà utilisé montre que dans a'), on peut se limiter au cas où F est constructible. En vertu de IX 2.14 il existe alors un nombre fini de morphismes finis $p_i : X'_i \longrightarrow X$, de faisceaux constants de $\mathbb{L}$-torsion $G_{X'_i}$ sur les X'_i , et un homomorphisme injectif

$$F \longrightarrow \prod_i p_{i_*}(G_{i\, X'_i})$$

Ceci dit, si n = -1, i.e. lorsque la conclusion voulue se réduit à l'assertion d'injectivité pour $H^o(X,F) \longrightarrow H^o(Y,h^*(F))$, on voit aussitôt qu'on peut dans cette question remplacer F par un faisceau G tel qu'il existe un monomorphisme $F \longrightarrow G$, et par suite on peut remplacer F par le produit des $p_{i*}(G_{i\, X'_i})$. Compte tenu de 6.4, on est donc ramené à prouver l'assertion d'injectivité en remplaçant $h : Y \longrightarrow X$ par $h' : Y' \longrightarrow X'$, et F par un faisceau constant sur X' de valeur un groupe fini de $\mathbb{L}$-torsion ordinaire G. Or G est isomorphe à une somme de groupes de la forme $\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}$, avec $\ell \in \mathbb{L}$. On est donc bien réduit à vérifier b). Lorsque $n \geq 0$, on procède de façon analogue. Par récurrence sur n, on peut supposer la conclusion voulue (et par suite a)) prouvée pour l'entier n-1 au lieu de n. Utilisant alors 6.6 (iii), on voit qu'on peut encore remplacer F par un faisceau G tel qu'il existe un monomorphisme $F \longrightarrow G$, et on prendra encore pour G le faisceau $p_*(G_{X'})$. Compte tenu de 6.4 et de la nullité des $R^i p_*$ $(i \geq 1)$ pour un morphisme fini (VIII 5.5), cela nous ramène encore à prouver la surjectivité pour H^n en remplaçant $h : Y \longrightarrow X$ par un $h' : Y' \longrightarrow X'$, et F par un faisceau constant sur X' de valeur un groupe fini de $\mathbb{L}$-torsion ordinaire. Comme l'injectivité est déjà acquise grâce à l'hypothèse de récurrence et l'implication a') $\Longrightarrow$ a), on est encore ramené, par dévissage sur G, au cas où G est de la forme $\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire au cas envisagé dans la condition b) de 6.5 (iii). Cela prouve le cas (iii) de 6.5.

Les cas (i) et (ii) se démontrent exactement de la même façon, pour ce qui est de l'équivalence des conditions a) et b) dans 6.5 (i) resp. 6.5 (ii):

on utilise IX 2.7.2 et la commutation du H^o et H^1 aux limites inductives filtrantes de faisceaux (VII 5.14) pour se ramener au cas où F est constructible, puis IX 2.14, 6.6 (i)(ii) et VIII 5.8 pour se ramener au cas particulier envisgé dans b). Par ailleurs, dans (i), l'équivalence des conditions b), b') et b") est triviale et n'est mise que pour mémoire, ainsi que le fait qu'elles impliquent la fidélité (resp. la pleine fidélité) du foncteur $X' \longmapsto Y'$ de la catégorie des revêtements étales de X dans la catégorie des revêtements étales de Y. Il en est de même de l'équivalence des conditions b), b') et b") dans 6.5 (ii), qui ont été ajoutées pour faire bon poids. La démonstration de 6.5 est ainsi achevée.

Remarque 6.7 (*). 1) Evidemment, les arguments démontrant 6.5 et 6.6 sont de nature très générale et essentiellement triviale et auraient intérêt à être dégagés en des lemmes abstraits de la même eau que 6.2 (les faisceaux $p_*(G_{X'})$ jouant le rôle de cogénérateurs de la catégorie C dans laquelle on travaille). On laisse ce plaisant exercice au lecteur, et nous nous bornons à signaler que le même énoncé essentiellement pourrait être donné en regardant des foncteurs tels que $R^i f_*$ au lieu des foncteurs H^i. Les mêmes remarques s'appliquent à 6.8, 6.11 ci-dessous.

2) Lorsque X est noethérien, alors les arguments donnés montrent que dans l'énoncé des conditions b) et leurs variantes dans 6.5 (i) (ii) (iii), on peut se borner à prendre X' intègre ; lorsque X est universellement japonais, on peut même les prendre intègre et normaux ; c'est également possible sans

(*) Le rédacteur recommande d'omettre la lecture de ces remarques, ainsi que de (6.13), introduites subrepticement (en même temps que diverses autres modifications plus ou moins heureuses du texte original) par un collaborateur irrévérencieux.

la restriction japonaise sur X, à condition de prendre des morphismes $p : X' \longrightarrow X$ <u>entiers</u> au lieu de morphismes finis. Nous ne nous servirons d'aucune de ces variantes dans la suite du séminaire.

3) La démonstration de 6.6 n'utilise pas l'hypothèse de quasi-compacité et de quasi-séparation faite sur X, et il en est de même pour le fait que dans (i) (ii) (iii) la condition a) implique les autres, ainsi que pour l'équivalence des conditions b), b'), b") entre elles. Notons d'autre part que la forme b) des conditions 6.5 (i) montre que, pour $\mathbb{L} = \emptyset$, ce sont des cas particuliers (lorsque X est quasi-compact quasi-séparé) de 6.5 (iii), pour $n = -1$ resp. pour $n = 0$. Cela reste d'ailleurs vrai (en se bornant aux conditions sous la forme a)) sans la restriction énoncée sur X, comme on voit aisément grâce au fait que pour tout faisceau d'ensembles F, et tout nombre premier ℓ, on peut trouver deux faisceaux abéliens de ℓ-torsion G et H, et un homomorphisme $u : G \longrightarrow H$ des faisceaux d'ensembles sous-jacents, tels que F soit isomorphe à l'image inverse de la section nulle (on prendra pour F le $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -Module libre engendré par F, et pour H le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ sur X). Le même argument montre que (sans restriction de quasi-compacité et de quasi-séparation) 6.5 (ii) a) (où il suffit même de faire $i = 0$) implique la condition respée 6.5(i) a) ; cela permet par suite, compte tenu que cette dernière implique déjà l'injectivité de $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$ pour tout faisceau en groupes F sur X, de se borner dans l'énoncé de 6.5 (ii) a) d'exiger pour $i = 1$ la <u>surjectivité</u> de $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$. Malheureusement, le cas 6.5 (ii) ne peut être envisagé comme cas particulier de 6.5 (iii), ce qui nous oblige souvent de répéter dans le cas non commutatif un argument déjà fait pour l'essentiel dans le cas commutatif. Notons également que, sauf 6.10, les résultats qui suivent sont énoncés de sorte qu'ils sont valables

sans hypothèse de quasi-compacité et de quasi-séparation.

Proposition 6.8. (Lemme de descente). Avec les notations générales de 6.5, supposons donné de plus un morphisme $p : \bar{X} \longrightarrow X$, désignons par $\bar{h} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}$ le morphisme déduit de h par le changement de base p, et par $p_Y : \bar{Y} \longrightarrow Y$ le morphisme canonique. Nous supposons, ou bien que p est surjectif, ou bien que h est une immersion fermée et que $X = p(\bar{X}) \cup h(Y)$.

(i) Supposons que le morphisme $\bar{h} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}$ satisfasse à la condition d'injectivité (resp. de bijectivité) de 6.5 (i) a). Dans le cas respé, supposons de plus que le morphisme de changement de base

$$(*) \qquad h^*(p_*(\bar{F})) \longrightarrow p_{Y_*}(\bar{h}^*(\bar{F}))$$

est injectif pour tout faisceau d'ensembles $\bar{F}$ sur $\bar{X}$. Alors le morphisme $h : X \longrightarrow Y$ satisfait également la condition d'injectivité (resp. de bijectivité) de 6.5 (i) a).

(ii) Supposons que $\bar{h} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}$ satisfasse la condition de 6.5 (ii) a), et que pour tout faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes $\bar{F}$ sur $\bar{X}$, le morphisme de changement de base (*) soit bijectif. Alors $h : Y \longrightarrow X$ satisfait également la condition de 6.5 (ii) a).

(iii) Supposons que $\bar{h} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}$ satisfasse à la condition de 6.5 (iii) a), et que pour tout faisceau abélien $\bar{F}$ de $\mathbb{L}$-torsion sur $\bar{X}$, l'homomorphisme de changement de base

$$h^*(R^i p_*(\bar{F})) \longrightarrow R^i p_{Y_*}(\bar{h}^*(\bar{F}))$$

soit bijectif pour $i \leq n-1$, injectif pour $i = n$ (où n est un entier ≥ 1 donné). Alors le morphisme $h : Y \longrightarrow X$ satisfait également à la condition de 6.5 (iii) a).

<u>Démonstration de</u> 6.8. Dans le cas où on ne suppose pas p surjectif, mais h une immersion fermée et $X = p(\overline{X}) \cup h(Y)$, nous considérons le schéma somme $\overline{X}'$ de $\overline{X}$ et Y, et le morphisme $p' : \overline{X}' \longrightarrow X$ déduit de p et h. Alors p' est surjectif, de plus on vérifie trivialement, dans chacun des trois cas envisagés (i) (ii) (iii), que les hypothèses faites sur le couple (h,p) sont encore satisfaites pour le couple (h,p'). Cela nous ramène donc au cas où p est surjectif, dans lequel nous allons nous placer dans la suite. Dans ce cas pour tout faisceau F sur X, l'homomorphisme canonique

$$F \longrightarrow p_*(p^*(F))$$

est injectif. Dans le cas (i), pour vérifier l'injectivité de $H^o(X,F) \longrightarrow H^o(Y,h^*(F))$, on est ramené aussitôt au cas où on remplace F par $p_*(\overline{F})$ (où on pose $\overline{F} = p^*(F)$). Or considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^o(X,p_*(\overline{F})) \arrow[rr] \arrow[dd, "\wr"] & & H^o(Y,h^*(\overline{F})) \arrow[d] \\
& & H^o(Y,p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \arrow[d, "\wr"'] \\
H^o(\overline{X},\overline{F}) \arrow[rr] & & H^o(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))
\end{tikzcd} ,$$

où la flèche verticale gauche et la deuxième flèche verticale droite sont les isomorphismes canoniques, la première flèche verticale droite provenant de l'homomorphisme de changement de base par h. Par hypothèse la deuxième flèche horizontale est injective, ce qui implique aussitôt qu'il en est de même de la première, ce qui prouve l'assertion non respée de (i). Pour l'assertion respée, on suppose que la deuxième flèche horizontale est surjective, de plus l'homomorphisme de changement de base étant un monomorphisme par hypothèse, il en est de même de la première flèche verticale droite, donc du composé des deux flèches verticales droites. Il s'ensuit aussitôt que la première flèche horizontale est également surjective, ce qui achève de prouver (i). Pour prouver (ii), grâce à ce qui précède et 6.5 (i) on est ramené à prouver la surjectivité pour $H^1(X,F) \longrightarrow H^1(Y,h^*(F))$. Utilisant 6.6 (ii) on est encore ramené à la prouver pour F de la forme $p_*(\overline{F})$, où $\overline{F}$ est un faisceau de ind-$\mathbb{L}$-groupes sur $\overline{X}$ (IX 1.6 (ii)). Ecrivant les suites exactes pour les H^1, (variantes de (3.2)) pour les morphismes p et p_Y, on trouve un homomorphisme de suites exactes non commutatives :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,p_*(\overline{F})) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\overline{X},\overline{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^o(X,R^1p_*(\overline{F})) \arrow[d] \\
H^1(Y,p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \arrow[r] & H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F})) \arrow[r] & H^o(Y,R^1(p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))
\end{tikzcd} ,$$

où dans chaque ligne la première flèche est injective et identifie le premier terme à l'image inverse, par la deuxième flèche, du point marqué du troisième terme. Par hypothèse sur $\overline{h}$, la flèche verticale médiane est bijective. D'autre part, les deux flèches verticales extrêmes se factorisent respectivement par $H^1(Y,h^*(p_*(\overline{F}))$ et $H^o(Y,h^*(R^1(p_*(\overline{F}))$, en composant les homomorphismes $H^i(X,-) \longrightarrow H^1(Y,-)$ (pour i = 1 et i = 0 respectivement) et les homomorphismes déduits en appliquant $H^i(Y,-)$ (pour ces mêmes valeurs de i) à l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ resp. $h^*(R^1p_*(\overline{F})) \rightarrow R^1p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$. Comme la première de ces flèches est un isomorphisme par hypothèse, il s'ensuit que la première flèche verticale du diagramme ci-dessus s'identifie à l'homomorphisme $H^1(C,-) \longrightarrow H^1(Y,-)$ que nous voulons étudier. Pour prouver sa bijectivité, il reste donc à prouver que la dernière flèche verticale du diagramme est injective. Or d'après ce qu'on vient de dire, elle est composée de deux applications, dont la première est un homomorphisme canonique $H^o(X,-) \longrightarrow H^o(Y,-)$, donc bijective, et la deuxième est injective, car déduite par le foncteur exact à gauche $H^o(Y,-)$ d'un homomorphisme $H^*(R^1(p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^1p_*(\overline{h}^*(\overline{F}))$ qui est un monomorphisme. Ce dernier fait résulte en effet aisément de l'hypothèse de bijectivité faite pour l'homomorphisme de changement de base dans la dimension précédente 0, par exemple en utilisant la deuxième assertion de 6.5 (i) et le calcul habituel des fibres des images directes supérieures (VIII 5.3). Cela prouve 6.8 (ii).

Reste à prouver 6.8 (iii). Pour ceci, il nous sera plus commode, au lieu d'utiliser directement l'injection $F \longrightarrow p_*(p^*(F))$ comme ci-dessus, d'utiliser l'homomorphisme

$$F \longrightarrow Rp_*(\overline{F})$$

dans la catégorie dérivée droite $D^+(C)$, où C désigne la catégorie des faisceaux abéliens sur X. Rappelons que par définition, $Rp_*(\overline{F})$ est le complexe $p_*(C(\overline{F}))$, où $C(\overline{F})$ est un complexe résolution injective de $\overline{F}$ dans la catégorie des faisceaux abéliens sur $\overline{X}$. Si $K^\cdot$ est un complexe sur X, nous désignons par $H^i(X,K^\cdot)$ les groupes d'hypercohomologie de X à coefficients dans K , et on utilise les notations analogues sur Y. En vertu de 6.3, on est ramené à prouver la surjectivité pour

$$(1) \qquad H^n(X,Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^n(Y,h^*Rp_*(\overline{F}))$$

Or par hypothèse, l'homomorphisme de changement de base

$$(2) \qquad H^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$$

induit un isomorphisme sur les faisceaux de cohomologie en degrés $\leq n-1$, et un monomorphisme en degrés n, ce qui peut s'exprimer en disant que le "mapping-cylinder" $K^{\cdot}$ de l'homomorphisme précédent n'a des faisceaux de cohomologie non nuls qu'en degrés $\geq n$. Donc $H^i(Y,K^{\cdot}) = 0$ si $i < n$, ce qui implique, par la suite exacte de cohomologie, que les homomorphismes

$$(3) \qquad H^i(Y,h^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^i(Y,Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \quad ,$$

induits par l'homomorphisme ci-dessus, sont des isomorphismes pour $i \leq n-1$, un monomorphisme pour $i = n$. Considérons le composé de (1) et (3)

$$(4) \qquad H^n(X,Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow H^n(Y,h^*(Rp_*(\overline{F}))) \longrightarrow H^n(Y,Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F})) \quad .$$

Les termes extrêmes sont respectivement isomorphes, en vertu des définitions, à $H^n(\overline{X},\overline{F})$ et $H^n(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$, et le composé de (4) n'est autre que l'homomorphisme déduit de $\overline{h}$, qui est bijectif grâce à l'hypothèse faite sur $\overline{h}$. Comme la deuxième flèche de (4) est injective d'après ce qu'on vient de voir, la première est également bijective, ce qui achève la démonstration de 6.8.

D'ailleurs, on constate aussitôt que la démonstration précédente fournit le résultat suivant, légèrement plus précis et plus général :

<u>Corollaire</u> 6.9. <u>Les notations sont celles de</u> 6.8. <u>On suppose de plus satisfaite pour</u> h <u>la condition non respée de</u> 6.5 (i) (<u>resp</u>. <u>la condition respée de</u> 6.5 (i), <u>resp</u>. <u>la condition de</u> 6.5 (iii), <u>avec</u> $n \geq -1$), <u>et que pour tout faisceau d'ensembles</u> $\overline{F}$ <u>sur</u> $\overline{X}$, <u>l'homomorphisme de changement de base</u> $h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ <u>est injectif</u> (<u>resp</u>. <u>bijectif</u>, <u>resp</u>. <u>que pour tout faisceau de</u> $\mathbb{L}$-<u>torsion</u> $\overline{F}$ <u>sur</u> $\overline{X}$, <u>l'homomorphisme de changement de base</u> $h^*R^ip_*(\overline{F}) \longrightarrow R^ip_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ <u>soit bijectif pour</u> $i \leq n$, <u>injectif pour</u> $i = n+1$). <u>Soit</u> F <u>un faisceau d'ensembles</u> (<u>resp</u>. <u>de ind</u>-$\mathbb{L}$-<u>groupes</u>, <u>resp</u>. <u>un faisceau de</u> $\mathbb{L}$-<u>torsion</u>) <u>sur</u> X, <u>et soit</u> $\xi \in H^{n+1}(Y,h^*(F))$ (<u>où on prend</u> $n = -1$ <u>dans le</u>

cas (i), $n = 0$ dans le cas (ii)). Posons $\overline{F} = p^*(F)$. Alors, pour que ξ soit dans l'image de $H^{n+1}(X,F)$, il faut et il suffit que son image inverse dans $H^{n+1}(\overline{Y},p_{Y*}(h^*(F)) = H^{n+1}(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$ soit dans l'image de $H^{n+1}(\overline{X},\overline{F})$.

Nous utiliserons cette forme précisée de 6.8 pour prouver le

Corollaire 6.10. Les notations sont celles de 6.5. On suppose, pour simplifier, vérifiée la condition non respée de 6.5 (i).

(i) Pour que la condition respée de 6.5 (i) soit satisfaite (resp. pour qu'on ait 6.5 (ii) a), resp. pour qu'on ait 6.5 (iii) a)), il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : Pour tout faisceau F d'ensembles (resp. de ind- $\mathbb{L}$-groupes, resp. de groupes abéliens de $\mathbb{L}$-torsion) sur X, tout $\xi \in H^0(Y,h^*(F))$ (resp. tout $\xi \in H^i(Y,h^*(F))$ avec $i = 0,1$, resp. tout $\xi \in H^i(Y,h^*(F))$ avec $i \leq n$), et toute partie fermée non vide X' de X, désignant par Y' son image inverse dans Y, il existe un morphisme $p : \overline{X} \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :

1°) L'image $p(\overline{X})$ est contenue dans X' et contient un ouvert non vide de X'.

2°) Pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ (resp....) l'homomorphisme de changement de base $h^*(p_*(\overline{F})) \longrightarrow p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est un isomorphisme (resp. pour tout faisceau de ind- $\mathbb{L}$-groupes $\overline{F}$ sur X, l'homomorphisme de changement de base $h^*(R^ip_*(\overline{F})) \longrightarrow R^ip_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ pour $i = 0,1$ est bijectif, resp. pour tout faisceau abélien de $\mathbb{L}$-torsion $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base est bijectif pour $i \leq n$).

3°) L'image inverse de ξ dans $H^i(\overline{Y},p_Y^*(h^*(F))) = H^i(\overline{Y},\overline{h}^*(p^*(F))$ est contenue dans l'image de $H^i(\overline{X},p^*(F))$.

(ii) _Soit_ $n \geq -1$, _et supposons que pour tout faisceau d'ensembles_ F _(resp. tout faisceau de ind-_ $\mathbb{L}$_-groupes, resp. tout faisceau abélien de_ $\mathbb{L}$_-torsion)_ F _sur_ X, _l'homomorphisme_ $H^i(X,F) \longrightarrow H^i(Y,h^*(F))$ _soit bijectif pour_ $i \leq n$, _injectif pour_ $i = n+1$, _(dans le premier cas, on suppose_ $n = 1$, _dans le deuxième_, $n = -1$ _ou_ 0). _Soit_ $\xi \in H^{n+1}(Y,h^*(F))$. _Pour que_ ξ _soit dans l'image de_ $H^{n+1}(X,F)$, _il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition énoncée dans_ (i) _ci-dessus, avec_ $i = n+1$).

Démonstration de 6.10. Utilisant 6.5 et une récurrence immédiate sur n, on constate que 6.10 (i) est conséquence de 6.10 (ii), que nous allons maintenant démontrer.

Supposons que ξ ne soit pas dans l'image de $H^n(X,F)$. Soit Φ l'ensemble des parties fermées X' de X telles que l'image ξ dans $H^n(Y',h^*(F)|Y')$ ne soit pas contenue dans celle de $H^n(X',F|X')$. Par hypothèse, $X \in \Phi$, donc Φ n'est pas vide. Ordonnons Φ par la relation $\supset$, et montrons que Φ est inductif. Pour ceci, il suffit de prouver que si (X'_λ) est une famille totalement ordonnée d'éléments de Φ, et si X' est leur intersection, alors $X' \in \Phi$. Or, munissant les X'_λ et X' de la structure induite réduite, on voit que les morphismes $X'_\lambda \longrightarrow X$ sont affines (puisque ce sont des immersions fermées), donc le système projectif des X'_λ satisfait aux conditions envisagées dans VII 5. De plus, on constate aussitôt que X' est la limite projective des X'_λ . De même, Y' est la limite projective du système projectif des Y'_λ , qui sont affines sur Y. Utilisant VII 5.8, on trouve donc

$$\varinjlim H^n(X'_\lambda , F|X'_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^n(X',F|X') , \quad \varinjlim H^n(Y'_\lambda , h^*(F)| Y'_\lambda) \xrightarrow{\sim} H^n(Y',h^*(F)|Y').$$

De ceci, on conclut aussitôt que si on avait $(\xi|Y') \in \mathrm{Im}\, H^n(X',F|X')$, alors il existerait un indice λ tel que $(\xi|Y'_\lambda) \in \mathrm{Im}\, H^n(X'_\lambda, F|X'_\lambda)$, ce qui est absurde ; donc on a bien $X' \in \Phi$. Donc Φ est inductif, et contient par suite un élément minimal, soit X'. Comme évidemment $\emptyset \notin \Phi$, X' est non-vide. Appliquons à ξ et à X' l'hypothèse de 6.10, d'où un morphisme $p : \overline{X} \longrightarrow X$ satisfaisant aux conditions 1°) à 3°) énoncées dans 6.10. Notons qu'on peut supposer même p surjectif. En effet, soit U un ouvert non vide de X' contenu dans $p(\overline{X})$, et soit X'_1 son complémentaire dans X', de sorte que par construction on a $X'_1 \notin \Phi$. Utilisant cette relation, on voit tout de suite que, posant $\overline{X}_1 = \overline{X} \amalg X'_1$ et désignant par $\overline{p}_1 : \overline{X}_1 \longrightarrow X$ le morphisme défini par $\overline{p}$ et l'inclusion de X'_1 dans X, le morphisme $\overline{p}_1$ satisfait encore aux mêmes hypothèses que $\overline{p}$; de plus, il est surjectif. Nous supposons donc p surjectif, et appliquons maintenant 6.9, en y remplaçant le morphisme $h : Y \longrightarrow X$ par le morphisme $h' : Y' \longrightarrow X'$ (X' étant muni, disons, de la structure induite réduite), et ξ par $\xi|Y'$. On conclut alors de 6.9 que l'on a $(\xi|Y') \in \mathrm{Im}\, H^n(X', F|X')$, ce qui contredit la relation $X' \in \Phi$ et achève la démonstration de 6.10.

Nous utiliserons 6.10 pour ramener 5.5 au cas où f est un morphisme projectif ; mais pour ceci, dans le cas non noethérien, nous aurons besoin d'une variante non noethérienne du lemme de Chow, qui sera donnée au numéro suivant.

Proposition 6.11. (Lemme de transitivité). Les notations sont celles de 6.8, mais on ne fait aucune hypothèse de surjectivité relativement à p. On suppose que h satisfait à la condition (i) a) (resp. (ii) a), resp. (iii) a) de 6.5. On suppose de plus, dans le cas (i), que pour tout faisceau d'ensembles $\overline{F}$ sur $\overline{X}$, l'homomorphisme de changement de base de 6.8 est un monomorphisme (resp. un isomorphisme) ; dans le cas (ii), que $\overline{X}$ est noethérien et que pour tout faisceau $\overline{F}$ de ind- $\mathbb{L}$-groupes, l'homomorphisme de changement de base

$h^*(R^1 p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^1 p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ <u>est bijectif pour</u> $i = 0,1$; <u>enfin</u>, <u>dans le cas</u> (iii), <u>que l'homomorphisme de changement de base est bijectif pour</u> $i \leq n$, <u>injectif pour</u> $i = n+1$. <u>Alors le morphisme</u> $\overline{h} : \overline{Y} \longrightarrow \overline{X}$ <u>satisfait également à la condition</u> (i) (<u>resp</u>. (ii), <u>resp</u>. (iii)) <u>de</u> 6.5.

<u>Démonstration de</u> 6.11. Dans le cas (i), on considère le diagramme commutatif de la démonstration de 6.8 (i). Ici les hypothèses impliquent que la première flèche horizontale et la première flèche verticale de droite sont injectives (resp. bijectives), donc il en est de même de la deuxième flèche horizontale, ce qu'on voulait établir. Dans le cas (ii), on se donne un faisceau $\overline{F}$ de ind-$\mathbb{L}$-groupes sur $\overline{X}$, et il faut montrer que tout élément de $H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$ provient d'un élément de $H^1(\overline{X},\overline{F})$. En vertu de 6.6 (ii) appliqué à $\overline{h}$, il suffit de trouver un monomorphisme $\overline{F} \longrightarrow \overline{G}$ de faisceaux en groupes sur $\overline{X}$ qui <u>efface</u> $H^1(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$. Or considérons la deuxième ligne du diagramme utilisé dans la démonstration de 6.8 (ii). Il suffit successivement de trouver un monomorphisme $\overline{F} \longrightarrow \overline{G}$, avec $\overline{G}$ un faisceau en groupes in-$\mathbb{L}$-finis, qui efface le dernier terme $H^o(Y,R^1\, p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$, puis un monomorphisme de faisceaux en groupes $\overline{G} \longrightarrow \overline{H}$ qui efface $H^1(Y,p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$. Or, comme on a remarqué dans la démonstration de 6.8 (i), les deux termes qu'il s'agit d'effacer sont isomorphes respectivement, par les flèches verticales extrêmes du diagramme envisagé, à $H^o(X,R^1 p_*(\overline{F}))$ et à $H^1(X,p_*(\overline{F}))$, compte tenu de l'hypothèse sur les homomorphismes de changement de base faites ici sur p,h. D'ailleurs, les isomorphismes envisagés sont évidemment fonctoriels en $\overline{F}$, de sorte qu'il suffit d'effacer les deux termes précédents. Or en vertu de 3.3 on peut effacer $R^1 p_*(\overline{F})$ (et à fortiori $H^o(X,R^1 p_*(\overline{F}))$ par un monomorphisme de $\overline{F}$ dans un ind-$\mathbb{L}$-groupe $\underline{G}$. Il reste à effacer $H^1(X,p_*(\overline{F}))$, ce qui est possible grâce au fait que par

le diagramme envisagé, ce dernier terme s'envoie dans $H^1(\overline{X},\overline{F})$ par un monomorphisme fonctoriel en $\overline{F}$, et que $H^1(\overline{X},\overline{F})$ est encore effaçable grâce à 3.3.

Il reste à traiter le cas (iii), et pour celui-ci encore nous reprenons à rebours la démonstration de 6.8 (*). Il faut prouver que l'homomorphisme

$$H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$$

est un isomorphisme pour $i \leq n$, et un monomorphisme pour $i = n+1$. Or les homomorphismes précédents sont induits par un homomorphisme de complexes

$$\mathbb{R}\,\Gamma_{\overline{X}}\,(\overline{F}) \longrightarrow \mathbb{R}\,\Gamma_{\overline{Y}}\,(\overline{h}^*(\overline{F}))\ ,$$

déduit d'une résolution injective $C(\overline{F})$ et d'un homomorphisme de $\overline{h}^*(C(\overline{F}))$ (qui est une résolution de $h^*(\overline{F})$) dans une résolution injective de $\overline{h}^*(\overline{F})$. L'homomorphisme ci-dessus s'identifie également à l'homomorphisme composé

$$\mathbb{R}\,\Gamma_X(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbb{R}\,\Gamma_Y(h^*(Rp_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbb{R}\,\Gamma_Y(Rp_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))\quad ,$$

où le premier homomorphisme est l'homomorphisme h^* relatif à $\mathbb{R}p_*(\overline{F})$, et le deuxième est déduit des homomorphismes de changement de base $h^*(\mathbb{R}p_*(\overline{F})) \longrightarrow \mathbb{R}p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ en appliquant $\mathbb{R}\,\Gamma_Y$. Le premier homomorphisme induit donc un isomorphisme sur les groupes de cohomologie des complexes envisagés, en vertu de l'hypothèse faite sur h et de 6.3 (i). Il en est de même pour le deuxième, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite sur les homomorphismes de changement de base, en utilisant l'argument donné dans la démonstration de 6.8 (iii). Par suite, la même conclusion s'applique au composé des deux, ce qui achève de prouver 6.11.

(*) On pourrait aussi, au lieu de 6.3, utiliser la suite spectrale de Leray pour p , p_Y .

Remarque 6.12. L'argument donné pour 6.11 dans les cas (i) et (iii) donne encore un résultat plus précis : pour pouvoir conclure, pour un faisceau $\overline{F}$ donné sur $\overline{X}$, que $H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{Y},\overline{h}^*(\overline{F}))$ est bijectif pour $i \leq n$, injectif pour $i = n+1$, il suffit de supposer

1°) l'homomorphisme de changement de base $h^*(R^i p_*(\overline{F})) \longrightarrow R^i p_{Y*}(\overline{h}^*(\overline{F}))$ est un isomorphisme pour $i \leq n$, un monomorphisme pour $i = n+1$, et

2°) pour tout couple d'entiers $i,j \geq 0$, l'homomorphisme $H^i(X,\mathbb{R}^j p_*(\overline{F})) \longrightarrow H^i(Y,h^*(\mathbb{R}^j p_*(\overline{F}))$ induit par h est un isomorphisme si $i+j \leq n$, un monomorphisme si $i+j = n+1$.

Il est plausible qu'on a un résultat analogue dans le cas (ii), mais son énoncé devrait nécessairement faire intervenir de la 2-cohomologie non commutative. C'est pour éviter le recours à cette théorie que nous avons utilisé un argument différent dans 6.10 (ii), utilisant les propriétés d'effaçabilité du H^1 non commutatif, argument qui ne donne pas en revanche de résultat, comme ci-dessus, pour un $\overline{F}$ fixé.

Remarques 6.13. Le cas le plus important où les conditions de 6.5 (i) (ii) (iii) sont remplies est celui envisagé dans 5.5, qui sera prouvé dans l'exposé suivant en utilisant les réductions faites dans le présent exposé. Un autre cas intéressant (où h n'est plus une immersion fermée comme dans 5.5 sera étudié dans XV. Signalons également le cas, assez voisin de 5.5, où X est le spectre d'un anneau noethérien, séparé et complet pour la topologie définie par un idéal J, et où Y = Spec (A/J) est le sous-schéma fermé de X défini par J. On vérifie alors directement les conditions de 6.5 (ii) (avec $\mathbb{L} = \mathbb{P}$) sous la forme b") (EGA IV 18.3.2) ; il est très plausible que les conditions de 6.5 (iii) sont également vérifiées pour tout n , i.e. que pour tout faisceau de torsion F sur X, les homomorphismes $H^n(X,F) \longrightarrow H^n(Y,F|Y)$ soient bijectifs. On peut faire des conjectures considérablement plus générales, liées à une généralisation à des schémas non locaux de la construction de hensélisation. Tout d'abord, notons qu'on ne connait pas d'exmeple, h étant une immersion fermée, où les conditions de 6.5 (ii) (iii) ne soient satisfaites (avec $\mathbb{L} = \mathbb{P}$) lorsque la condition respée de 6.5 (i) l'est, c'est-à-dire lorsque le couple (X,Y) est un couple hensélien dans la terminologie de (EGA IV 18.5.5) ; on peut donc conjecturer qu'un tel couple satisfait aux conditions de 6.5 (ii) (iii) (avec $\mathbb{L} = \mathbb{P}$, tout n). D'autre part, on peut se demander sous quelles conditions la propriété suivante pour un couple (X,Y) d'un schéma X quasi-complet et quasi-séparé et d'un sous-schéma fermé Y implique que le couple est hensélien :

(*) Pour tout schéma X' étale sur X, posant $Y' = X'\times_X Y$, l'application canonique $\Gamma(Y'/Y) \longrightarrow \Gamma(X'/X)$ est bijective.

(Cf. EGA IV 18.5.4 b)). Cette condition est évidemment plus faible à priori que la condition hensélienne 6.5 (i) ; elle est même strictement plus faible, car elle est vérifiée par exemple si X est un schéma projectif normal irréductible de dimension ≥ 2 sur un corps k, et Y une section hyperplane de X (comme il résulte facilement de SGA 2 XII 2.1, où on fait S = Spec(k)), mais évidemment le couple (X,Y) n'est pas hensélien. Il est possible par contre que si X est affine, la condition (*) implique que (X,Y) est un couple hensélien ; s'il en était ainsi, pour tout schéma affine X et tout partie fermée Y de X, un procédé de localisation étale le long dé Y, analogue à celui de la hensélisation des anneaux locaux, devrait permettre de lui associer un couple *hensélien* (X',Y), où X' est "proétale" sur X. Une autre hypothèse sur (X,Y) (suggérée par des résultats de Hironaka et Rossi sur la contractibilité de certaines sous-variétés de variétés algébriques), qui permettrait peut-être de déduire la propriété hensélienne de la propriété plus faible (*), est la suivante : l'immersion $Y \longrightarrow X$ est régulière de codimension 1, et le faisceau conormal $\underline{N}_{Y/X} = \underline{J}/\underline{J}^2$ (où $\underline{J}$ est l'idéal qui définit Y dans X) est un faisceau inversible *ample* sur Y. (NB. Dans le cas du contre-exemple envisagé plus haut, ce faisceau conormal était un contraire anti-ample, i.e. son inverse étant ample).

7. *Une variante du Lemme de Chow* (*).

Nous aurons besoin de la variante suivante de (EGA II 5.6.1) débarrassée de toutes hypothèses noethérienne ou d'irréductibilité.

Lemme 7.1. *Soit* S *un schéma quasi-compact et quasi-séparé*, *et* $f : X \longrightarrow S$ *un morphisme séparé de type fini*, *avec* X *non vide*. *Il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & \overline{X} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

(*) Le lecteur qui ne s'intéresse aux énoncés du par.5 que dans le cas noethérien peut omettre la lecture du présent numéro.

<u>avec</u> π <u>projectif et</u> $\bar{f}$ <u>quasi-projectif</u>, <u>et un ouvert</u> non-vide U <u>de</u> X, <u>tels que</u> π <u>induise un isomorphisme de</u> $\bar{U} = U\times_X \bar{X} = \pi^{-1}(U)$ <u>sur</u> U.

<u>Démonstration</u>. Notons d'abord : Soit $i : X' \longrightarrow X$ un sous-schéma fermé de X/S et $V \subset X'$ un sous-schéma ouvert dans X et dense dans X'. Si le lemme est vrai pour X', il l'est pour X. En effet, soit

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[dr, "f'"'] & & \bar{X}' \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\bar{f}'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un diagramme comme dans l'énoncé, et $U' \neq \emptyset$ un ouvert de X' tel que π' induise un isomorphisme $\bar{U}' = \pi'^{-1}(U') \longrightarrow U'$. Puisque V est dense dans X', $U' \cap V \neq \emptyset$ et on peut donc remplacer U' par cet ouvert. Alors U' est un ouvert de X, et on pose $\pi = i\,\pi'$, $\bar{f} = \bar{f}'$, $U = U'$.

Or il existe un recouvrement fini de X par des ouverts affines non vides U_k , $k=1,\ldots,n$; de l'hypothèse sur S résulte que chaque $U_k \longrightarrow S$ est quasi-affine, et a fortiori quasi-compact. Démontrons le théorème pour tout X, par récurrence sur n : Si l'intersection U des U_k est dense dans X on peut copier la démonstration de (EGA II 5.6, B, C, D), tenant compte des modifications de la notation. Si l'intersection est non-vide, on se ramène au cas où elle est dense en remplaçant X par l'adhérence X' de U (cf. plus haut), et U_k par $U'_k = U_k \cap X'$. Supposons enfin que U soit vide et choisissons r, $1 \leq r \leq n$, tel que $V = \bigcap_{k=1}^{n} U_k \neq \emptyset$ mais $V \cap U_{r+1} = \emptyset$ - c'est évidemment possible puisque $U_1 \neq \emptyset$. Nous pouvons maintenant remplacer X par l'adhérence X' de V et les U par les $U_k \cap V$ non-vides. Comme alors $U_{r+1} \cap V$ est vide, on obtient le résultat par l'hypothèse de récurrence.

8. Réductions définitives

Lemme 8.1. Pour prouver l'un des énoncés 5.1 (i) (ii) (iii), il suffit de le faire lorsque l'on suppose f projectif et S noethérien.

Supposons d'abord 5.1 démontré pour f projectif, montrons comment on en conclut le même énoncé pour tout f. Utilisant 6.1, on est réduit au cas de 5.5, avec S strictement local. Appliquons maintenant 6.10 en faisant $Y = X_o$. Etant donné (ξ, X') comme énoncé dans 6.10, nous appliquons le lemme de Chow 7.1 pour trouver un S-morphisme $p : \overline{X} \longrightarrow X'$, avec $\overline{X}$ projectif sur S, tel que $p(\overline{X})$ contienne un ouvert non vide de X' (condition 1°) de 6.10). Comme p est projectif, par hypothèse les homomorphismes de changement de base pour (p,h) sont des isomorphismes (condition 2°) de 6.10). Enfin, comme X est projectif sur S, par hypothèse le morphisme d'inclusion $\overline{Y} = \overline{X}_o \longrightarrow \overline{X}$ induit un isomorphisme pour les groupes de cohomologie $H^i(\overline{X},\overline{F}) \longrightarrow H^i(\overline{X}_o,\overline{h}^*(\overline{F}))$, (condition 3°) de 6.10). Donc les conditions de 6.10 sont bien satisfaites, d'où la conclusion.

Montrons maintenant que pour vérifier l'un des trois énoncés 5.1 pour toute situation (f,F,g), avec f projectif, on peut supposer de plus que S est noethérien. Pour ceci, on note qu'on peut supposer grâce à 6.1 que S est strictement local et que $S' \longrightarrow S$ est l'inclusion du point fermé, et on est ramené à vérifier l'énoncé 5.5 avec S strictement local. De plus, comme X se plonge dans le schéma projectif-type $\underline{P}^r_S$, on peut (grâce à la compatibilité 4.4 (ii)) remplacer X par $\underline{P}^r_S$, F par son image dans $\underline{P}^r_S$, ce qui nous ramène au cas où $X = \underline{P}^r_S$. Notons que A est limite inductive filtrante de sous-anneaux locaux henséliens noethériens A_i tels que l'homomorphisme d'inclusion $A_i \longrightarrow A$ soit local : prendre les hensélisés stricts des sous-$\underline{Z}$-algèbres de type fini de A en les idéaux premiers induits par l'idéal maximal de A. Sous ces conditions, le corps résiduel k de A est également la limite inductive des corps k des A_i (EGA IV 5.13.1). Soient S = Spec (A_i), $X_i = \underline{P}^r_{S_i}$, et supposons donné un système inductif (F_i) de faisceaux d'ensembles (resp. ...) sur les X_i comme dans VII 5.7, et soit F le faisceau qu'il définit sur X. Soit $F_{i\,o}$ (resp. F_o) le faisceau induit par F_i sur la fibre X_{io} du point fermé s_i de S_i (resp. sur la fibre X_o du point fermé s de S). Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim_i H^n(X_i,F_i) & \longrightarrow & H^n(X,F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varinjlim_i H^n(X_{io},F_{io}) & \longrightarrow & H^n(X_o,F_o)
\end{array} \quad ,$$

dont les deux flèches horizontales sont des isomorphismes, en vertu de VII 5.7. Par suite, pour prouver que la deuxième flèche verticale est un isomorphe, il suffit de le prouver pour la première, donc il suffit de prouver que les homomorphismes $H^n(X_i,F_i) \longrightarrow H^n(X_{io},F_{io})$ sont des isomorphismes. D'autre part, tout faisceau d'ensembles (resp. ...) F sur X est isomorphe à la limite d'un système inductif comme ci-dessus, en prenant par exemple $F_i = u_{i*}(F)$, $u_i : X \longrightarrow X_i$ étant le morphisme canonique, en vertu de (5.2) et (IX 1.6 (iii)). Cela achève la démonstration de 8.1.

<u>Corollaire</u> 8.2. <u>Le théorème</u> 5.1 (i) <u>est vrai</u>.

En effet, il suffit de conjuguer 8.1, le critère 6.5 (i) b"), et 5.8.

Lemme 8.3. *Pour prouver l'un des énoncés* 5.1 (i) (ii) (iii), *il suffit de le faire lorsqu'on suppose* f *projectif de dimension relative* ≤ 1, *et* S *noethérien*.

En effet, nous savons déjà par 8.1 qu'on peut se borner au cas f projectif, S noethérien, et un argument déjà signalé nous permet de supposer de plus qu'on a $X = \mathbf{P}^r_S$. Nous procédons alors par récurrence sur r, en notant que le théorème est vrai par hypothèse pour $r = 1$. On peut donc supposer $r \geq 2$, et le théorème démontré pour $\mathbf{P}^{r-1}_S \longrightarrow S$ (toute base S). Considérons $Z = \mathbf{P}^{r-2}_S$ come plongé dans $X = \mathbf{P}^r_S$ de la façon habituelle, et soit $p : \overline{X} \to X$ obtenu en faisant éclater Z dans X. Un calcul immédiat (cf. EGA V) montre que l'on a un morphisme naturel $p_1 : \overline{X} \longrightarrow X_1 = \mathbf{P}^1_S$, qui fait de $\overline{X}$ un X_1-schéma localement isomorphe à $\mathbf{P}^{r-1}_{X_1}$ (c'est le fibré projectif sur X_1 associé à un faisceau localement libre de rang r convenable sur X_1). D'autre part, les fibres de p sont de dimension ≤ 1, ainsi que celles de $f_1 : X_1 \longrightarrow X$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse, et l'hypothèse de récurrence, aux trois morphismes p, p_1, f_1 dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \overline{X} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & X_1 \arrow[dl, "f_1"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Comme p est surjectif, le lemme 6.8 nous ramène à prouver 5.1 pour le composé $\overline{f} = fp = f_1p_1$. Or nous pouvons déjà appliquer 5.1 aux deux morphismes f_1 et p_1 Compte tenu de 6.11, on en conclut que 5.1 est vrai également pour leur composé f_1p_1. Cela achève la démonstration de 8.3.

<u>Lemme</u> 8.4. <u>Pour démontrer</u> 5.1 (ii), <u>il suffit de démontrer le</u> "<u>théorème de spécialisation pour le groupe fondamental</u>" 5.9 bis, <u>dans le cas où</u> f <u>est projectif de dimension relative</u> ≤ 1, <u>et où</u> S <u>est strictement local noethérien</u>.

Cela résulte en effet aussitôt de 8.3, 6.1 et 6.5 (ii) (critère b)).

On démontrera directement le théorème de spécialisation, dans le cas 8.4, dans l'exposé suivant (XIII 2).

<u>Lemme</u> 8.5. <u>Pour démontrer</u> 5.1 (iii), <u>il suffit de démontrer</u> 5.1 (ii) <u>et</u>, <u>de plus</u>, <u>la proposition suivante</u> (<u>qui sera démontrée dans l'exposé suivant</u> (XIII 3) <u>ou</u> (EGA IV 21.9.12)) :

<u>Proposition</u> 8.6. <u>Soit</u> S <u>hensélien et noethérien</u>, $f : X \longrightarrow S$ <u>projectif de dimension relative</u> ≤ 1, <u>et</u> X_0 <u>la fibre fermée de</u> X/S. <u>Pour tout schéma</u> Z, <u>soit</u> Pic Z = $H^1(Z,(G_m)_Z)$ <u>le groupe de Picard de</u> Z. <u>Le morphisme de restriction</u>

$$\mathrm{Pic}\ X \longrightarrow \mathrm{Pic}\ X_0$$

<u>est</u> surjectif.

<u>Démonstration de</u> 8.5. D'après 6.5 (iii) et 8.2, il suffit de démontrer que

$$\varphi^q : H^q(X, \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}) \longrightarrow H^q(X_0, \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z})$$

est surjectif pour tout $q \geq 1$, et tout nombre premier l. Or on connaît la surjectivité si q = 1, d'après 5.1 (ii). De plus, puisque X_0 est un schéma projectif de dimension ≤ 1 sur un corps k séparablement clos, on a

$$H^q(X_0, \mathbb{Z}/\ell^\nu \mathbb{Z}) = 0$$

si $q > 2$ dans le cas $\ell \neq$ car. k (X 4.3), et si $q > 1$ dans le cas $\ell =$ car. k (X 5.2). La surjectivité est donc triviale pour ces valeurs de q !

Il reste à traiter le cas $q = 2$ et $\ell \neq$ car. k . Notons $n = \ell^{\nu}$. Comme le faisceau des racines n-ièmes de l'unité $(\mu_n)_S$ est localement isomorphe à $(\mathbb{Z}/n)_S$, et que S est strictement local, il existe un isomorphisme (non canonique) $(\mu_n)_S \simeq (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})_S$ d'où $(\mu_n)_X \simeq (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})_X$.

Par théorie de Kummer IX 3.2 appliquée à X et X_o, on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}\ X \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & H^2(X,\ {}_n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^2"] & H^2(X,\ G_m) \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}\ X_o \arrow[r] & H^2(X_o,\ {}_n) \arrow[r] & H^2(X_o, G_m)
\end{tikzcd} .$$

Or $H^2(X_o,\ G_m) = 0$ d'après IX 4.6. Donc la surjectivité de ϵ implique celle de φ^2, d'où le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GIRAUD J., Cohomologie non-abélienne, thèse (à paraître), et deux notes aux C.R. t.260, p.2392 et 2656 (1965).

[2] GODEMENT R., Théorie des faisceaux, Paris (1958).

[3] VERDIER J.L., Catégories dérivées, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1964).