

THEOREME DE FINITUDE POUR UN MORPHISME PROPRE ;
DIMENSION COHOMOLOGIQUE DES SCHEMAS ALGEBRIQUES AFFINES

par M. ARTIN

Cet exposé contient deux théorèmes importants qui se démontrent en utilisant le théorème de changement de base pour un morphisme propre.

1. Théorème de finitude pour un morphisme propre.

Théorème 1.1. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et de présentation finie. Soit A un anneau noethérien à gauche qui est une \mathbb{Z}/n -algèbre pour $n \in \mathbb{N}$ convenable. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de A -modules) constructible sur X . Alors le faisceau f_*F (resp. $R^1 f_*F$, resp. $R^q f_*F$ pour chaque $q \geq 0$) est également constructible.

En particulier, on a :

Corollaire 1.2. Soit X un schéma propre sur le spectre d'un corps séparablement clos k , et soit F un faisceau abélien de torsion constructible sur X . Alors les groupes $H^q(X, F)$ sont finis pour chaque $q \geq 0$.

Remarque 1.3. Le théorème est faux pour les faisceaux abéliens si l'on omet la condition que f soit propre, comme on voit en prenant $f = \mathbb{Z}/p$, $p = \text{car } k$, $X = \mathbb{A}_k^1$, l'espace affine, et f l'inclusion de X dans \mathbb{P}_k^1 , ou le morphisme structural $X \rightarrow \text{Spec } k$. Cependant, on conjecture qu'il est vrai si F est premier

aux caractéristiques résiduelles de S et S est "excellent" EGA IV 7.8. On peut le démontrer, lorsqu'on dispose du théorème de résolution des singularités (par exemple en caractéristique nulle) pour un schéma excellent S d'égales caractéristiques (XIX 5.1).

Démonstration de 1.1. L'assertion est locale sur S et on peut donc prendre S affine. Alors S est limite des spectres d'anneaux de type fini sur \mathbb{Z} , et les données du théorème sont telles qu'on peut les obtenir, par changement de base $S \rightarrow S_0$, d'un morphisme propre $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ avec S_0 de type fini sur \mathbb{Z} et un faisceau constructible F_0 sur X_0 , cf. EGA IV 8 et IX 2.7.4. Or, puisque l'image inverse d'un faisceau constructible est encore constructible (IX 2.4 (iii)), on est ramené, en appliquant XII 5.1 au morphisme de changement de base $S_0 \leftarrow S$, à démontrer la constructibilité de $f_{0*}F_0$ (resp. de $R^q f_{0*}F_0$), d'où le

Lemme 1.4. Il suffit de vérifier 1.1 avec S de type fini sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

Lemme 1.5. L'assertion ensembliste de 1.1 est vraie, c'est-à-dire f_*F est un faisceau constructible d'ensembles si F l'est.

Démonstration. On peut supposer S noethérien (1.4). Soit $F \rightarrow G = \prod_i \pi_{i*}(C_i)$ une injection avec $\pi_i : X_i \rightarrow X$ fini et C_i constant et constructible sur X_i (IX 2.14). On a $f_*F \subset f_*G$ et par suite (IX 2.9 (iii)) il suffit de traiter le cas $F = G$. Or $f_*G = \prod_i (f \pi_i)_* G_i$, et un produit fini de faisceaux constructibles sur S est constructible (IX 2.14). En remplaçant X par X_i , on est ramené au cas où $F = D_X$ est un faisceau constant constructible, à valeur D . Or en vertu de XII 5.1 (i), la fibre $f_*(F)_{\bar{S}}$ est isomorphe à $D^{C(S)}$, où

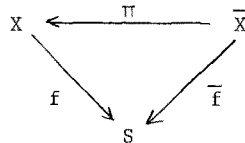
$C(S) = \pi_0(X_S^-)$, donc elle est finie. D'après IX 2.13 (iii) il suffit de démontrer que la fonction "nombre d'éléments de la fibre de f_*F " est constructible sur S . Or cette fonction est $\text{card}(D^C)$, où C est la fonction "nombre de composantes connexes dans la fibre géométrique", et C est constructible (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat.

Lemme 1.6. Soit S un schéma noethérien, $f : X \rightarrow S$ propre, F un faisceau de groupes (resp. de A -modules) constructible sur X , q un entier égal à 0 ou 1 (resp. un entier ≥ 0). Soient S_i ($1 \leq i \leq n$) des sous-schémas de S tels que $S = \bigcup_i S_i$ et soient F_i , $f_i : X_i \rightarrow S_i$ les "restrictions" des données aux S_i . Alors si pour tout i , $R^q_{f_i} F_i$ est constructible, il en est de même de $R^q_{f_*} F$.

Démonstration. La restriction de $R^q_{f_*} F$ à S_i est isomorphe à $R^q_{f_i} F_i$ d'après XII 5.1, et le lemme suit de IX 2.8.

On procède maintenant par des raisonnements analogues à ceux de XII 8:

Lemme 1.7. Soient S noethérien,



un diagramme commutatif de morphismes propres, et $j : U \rightarrow X$ un ouvert tel que l'ouvert $\bar{U} = U \times_X \bar{X}$ s'envoie isomorphiquement sur U . Soit $Y = X - U$ le schéma fermé réduit et soient $f_0 : Y \rightarrow S$ et $i : Y \rightarrow X$ les morphismes canoniques. Supposons le théorème 1.1 vrai pour \bar{f} , f_0 et π . Alors il est également vrai pour

Démonstration. Traitons d'abord le cas d'un faisceau de A-modules F sur X.

On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^*F \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^*F \longrightarrow 0 \quad ,$$

et compte tenu de la suite exacte de cohomologie correspondante pour les $R^q f_{*}$, et de IX 2.6, on voit qu'il suffit de vérifier la constructibilité des $R^q f_{*}$ pour les membres extrêmes (notons que $i_* i^*F$ est constructible d'après IX 2.4 (iii) et IX 2.15(i), donc $j_! j^*F$ l'est aussi (IX 2.6). Puisque i est une immersion fermée,

$$(R^q f_{*}) i_* (i^*F) \simeq (R^q f_{o*}) (i^*F) \quad ,$$

(VIII 5.6), d'où la constructibilité dans ce cas d'après l'hypothèse sur f_o .

De plus, désignant par $\bar{j} : \bar{U} \longrightarrow \bar{X}$ le morphisme d'inclusion et $\bar{F} = \pi^* F$, on a

$$(*) \quad j_! j^*F \simeq \pi_* \bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F} \quad ,$$

comme on vérifie en définissant d'abord une flèche \longrightarrow , et prouvant qu'elle est inversible fibre par fibre en utilisant XII 5.1 (i). En chaque point géométrique \bar{y} de Y , la restriction de $\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}$ à la fibre $\bar{X}_{\bar{y}}$ de \bar{X} sur X est nulle, et par suite XII 5.1 (iii) la fibre de $(R^q \pi_*) (\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F})$ en \bar{y} est nulle pour chaque $q \geq 0$. Puisque d'autre part π induit un isomorphisme au-dessus de $X - Y$, on a $(R^q \pi_*) (\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}) = 0$ si $q > 0$. De la suite spectrale de Leray

$$E_2^{P,q} = (R^P f_{*}) (R^q \pi_*) (\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}) \implies R^{\bar{n}} f_{*} (\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F})$$

et (*) on déduit des isomorphismes

$$(R^q \bar{f}_{*}) (\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}) \simeq (R^q f_{*}) (j_! j^*F)$$

pour $q \geq 0$. Puisque $\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}$ est constructible (même raisonnement que pour $\bar{j}_! \bar{j}^* \bar{F}$) le membre de droite l'est aussi, d'où la constructibilité de

$(R^q f_*) (j_! j^* F)$ et donc de $R^q f_* F$.

Supposons maintenant que F soit un faisceau de groupes constructible sur X . Remplaçons $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ par $\pi \sqcup i : (\bar{X} \sqcup Y) \rightarrow X$. Il suffit ainsi de démontrer que si $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ est surjectif et si 1.1 est vrai pour π et pour \bar{f} , il l'est également pour f . Soit d'abord \bar{F} un faisceau de groupes constructible sur \bar{X} . Alors $\pi_* \bar{F}$ est constructible sur X (1.5) et on a une injection $(R^1 f_*) \pi_* \bar{F} \hookrightarrow (R^1 \bar{f}_*) \bar{F}$. Le membre de droite est constructible par hypothèse, et par suite le membre de gauche l'est aussi (IX 2.9 (ii)). Or puisque π est surjectif, on a une injection $F \rightarrow \pi_* \pi^* F = G$. Le faisceau $\bar{F} = \pi^* F$ est constructible, donc G et $R^1 f_* G$ sont aussi constructibles, comme on a vu ci-dessus. On est ainsi ramené au lemme suivant :

Lemme 1.8. Soient S noethérien, $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, et $F \xrightarrow{u} G$ une injection de faisceaux de groupes constructibles sur X . Si $R^1 f_* G$ est constructible, $R^1 f_* F$ l'est aussi.

Démonstration. Soit $C = G/F$ qui est un faisceau constructible d'espaces homogènes sous G (appliquer IX 2.6). Considérons la suite exacte

$$(*) \quad f_* C \xrightarrow{\delta} R^1 f_* F \xrightarrow{u^1} R^1 f_* G$$

Pour démontrer que $R^1 f_* F$ est constructible, il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de démontrer que si $S \neq \emptyset$, il existe un ouvert non-vide de S sur lequel $R^1 f_*(F)$ soit constructible. On peut donc supposer $R^1 f_* G$ localement constant, donc puisque la constructibilité est une notion locale pour la topologie étale, on peut supposer que S est irréductible et $R^1 f_* G$ est constant (et constructible), à valeur $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Soit D_i ($i = 1, \dots, n$) le

sous-faisceau de $R^1 f_* F$ image inverse de la section e_i par u^1 . On a, puisque dans un topos "les sommes sont universelles", $R^1 f_* F = \coprod_i D_i$, et il suffit donc de démontrer que chaque D_i est constructible sur un S' convenable étale sur S et non-vide.

Rappelons que $R^1 f_* F$ est le faisceau associé au préfaisceau \mathcal{R}^1_F , où $\mathcal{R}^1_F(S') = H^1(X', F)$. Par suite on peut supposer (en remplaçant S par un S' non-vide étale sur S) que D_i est le faisceau "vide" (donc constructible), ou qu'il existe un élément $\alpha \in H^1(X, F)$ qui induit une section α de D_i . Dans ce dernier cas, soit

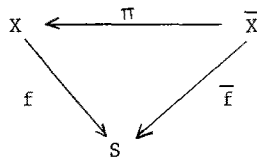
$$f_* C^\alpha \xrightarrow{\delta} R^1 f_* F^\alpha \longrightarrow R^1 f_* G^\alpha$$

la suite exacte déduite de (*) "en tordant à l'aide de α ". On a

$$R^1 f_* F^\alpha \simeq R^1 f_* F \quad , \quad R^1 f_* G^\alpha \simeq R^1 f_* G \quad ,$$

et la section de $R^1 f_* F^\alpha$ correspondant à $\bar{\alpha}$ est la section unité. Donc le sous-faisceau D_i^α de $R^1 f_* F^\alpha$ correspondant à D_i est l'image inverse de la section unité de $R^1 f_* G^\alpha$, i.e., D_i^α est l'image de $f_* G^\alpha$ par δ . Puisque $f_* G$ est constructible (1.5) il en est de même de D_i^α , donc de D_i (appliquer IX 2.6), d'où le lemme.

Lemme 1.9. Soit S noethérien et



un diagramme commutatif de morphismes propres. Si le théorème 1.1 est vrai

pour f et π , il l'est également pour \bar{f} .

Démonstration. Dans le cas d'un faisceau \bar{F} de A-modules constructible, on utilise la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = (R^p f_*) (R^q \pi_*) \bar{F} \implies (R^p \bar{f}_*) \bar{F} \quad .$$

Par hypothèse, on trouve que $E_2^{p,q}$ est constructible pour chaque p,q, et par suite l'aboutissement l'est aussi, comme il résulte alors de IX 2.6.

Soit \bar{F} un faisceau de groupes constructible. On a la suite exacte (XII 3.2)

$$(*) \quad 0 \longrightarrow (R^1 f_*) \pi_* \bar{F} \longrightarrow (R^1 \bar{f}_*) \bar{F} \longrightarrow f_* (R^1 \pi_*) \bar{F} \quad ,$$

où les membres extrêmes sont constructibles d'après l'hypothèse et 1.5. On procède comme dans la démonstration de 1.8 : Il suffit par récurrence noethérienne et 1.6 de supposer $S \neq \emptyset$, et de démontrer la constructibilité sur un ouvert non-vide convenable. On peut donc supposer $f_* (R^1 \pi_*) \bar{F}$ localement constant, et (par localisation étale) même constant et constructible (IX 2.8) à valeur $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. Soit D_i le sous-faisceau de $(R^1 \bar{f}_*) \bar{F}$ image inverse de e_i , de sorte que $(R^1 \bar{f}_*) \bar{F} = \coprod_i D_i$. Il suffit de démontrer que chacun des faisceaux D_i induit un faisceau constructible sur un S'/S étale connexe et non-vide convenable. Si D_i n'est pas le "faisceau vide", on se ramène au cas où il existe un élément $\alpha \in H^1(\bar{X}, \bar{F})$ qui induit une section $\bar{\alpha}$ de D_i . Soit

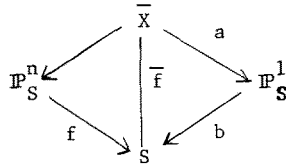
$$0 \longrightarrow (R^1 f_*) \pi_* \bar{F} \longrightarrow (R^1 \bar{f}_*) \bar{F} \longrightarrow f_* (R^1 \pi_*) \bar{F}$$

la suite exacte déduite de (*) en tordant \bar{F} à l'aide de α . La section de $(R^1 \bar{f}_*) \bar{F}^\alpha$ correspondant à $\bar{\alpha}$ est la section unité, et par suite le sous-faisceau D_i^α de $(R^1 \bar{f}_*) \bar{F}^\alpha$ correspondant à D_i est l'image inverse de la section unité de

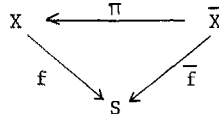
$f_*(R^1\pi_*) \overline{F}^\alpha$, d'où $D_i^\alpha \simeq (R^1f_*) \pi_* \overline{F}^\alpha$, qui est bien un faisceau constructible, cqfd.

Lemme 1.10. Il suffit de vérifier 1.1 dans le cas où S est de type fini sur Spec Z, et f est projectif et de dimension relative ≤ 1 .

Démonstration. Supposons d'abord que f soit projectif et procédons par récurrence sur la dimension relative de f, qu'on peut supposer finie, quitte à remplacer S par un ouvert affine. Si f est de dimension relative $\leq n$, avec $n \geq 2$, on peut trouver, localement sur S, un morphisme fini $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_S^n$, et on se ramène par 1.9 et IX 2.15 (i) au cas où f est le morphisme structural de \mathbb{P}_S^n . Considérons le diagramme commutatif de morphismes



déjà envisagé dans la démonstration de XII 8.3, où \overline{X} est déduit de \mathbb{P}_S^n en faisant éclater le sous-schéma fermé $Y \simeq \mathbb{P}_S^{n-2}$. La dimension relative de b est ≤ 1 , celle de a est $\leq n-1$, et par suite le théorème est vrai pour a et b par l'hypothèse de récurrence, donc pour \overline{f} par (1.9). De plus, la dimension de \mathbb{P}_S^n est ≤ 1 , celle de $f : Y \rightarrow S$ est $\leq n-1$. Il résulte donc de 1.7 que 1.1 est vrai pour f, donc pour tout morphisme projectif. Soit maintenant f propre arbitraire, et procédons par récurrence noethérienne sur X : on peut supposer le théorème vrai pour chaque sous-schéma fermé distinct de X et que $X \neq \emptyset$. Soit



un diagramme du type donné par le lemme de Chow XII 7.1. En appliquant 1.7 à ce diagramme, on déduit 1.1 pour f , d'où le lemme.

1.11. Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 1.1. Si F est un faisceau de groupes constructibles, on peut trouver une injection $F \hookrightarrow G = \prod_i \pi_{i*} C_i$ avec π_i fini et C_i constant et constructible (IX 2.15), et il résulte de 1.8 qu'on peut supposer F constant. De même, si F est un faisceau de A -modules constructible, on peut, en appliquant IX 2.15, trouver une résolution $F \rightarrow G'$, $G' = \{0 \rightarrow G^0 \rightarrow G^1 \rightarrow G^2 \rightarrow \dots\}$, de F , telle que chaque G^{ν} soit de la forme $G^{\nu} = \prod_i \pi_{i*} C_i^{\nu}$, et on se réduit par la suite spectrale de la résolution G' ,

$$E_2^{p,q} = H^q((R^q f_*)G') \implies (R^n f_*)F \quad ,$$

au cas où F est constant et constructible, à valeur M .

Rappelons que A est une \mathbb{Z}/n -algèbre. Soit ℓ un nombre premier qui divise n . On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ell M \longrightarrow M \longrightarrow M/\ell M \longrightarrow 0 \quad ,$$

et il suffit encore de prouver 1.1 pour ℓM et $M/\ell M$.

On se réduit alors, par une récurrence facile, au cas A est une \mathbb{Z}/ℓ -algèbre, $\ell \in \mathbb{P}$, et où M est un A -module de type fini. Alors M est un espace vectoriel sur \mathbb{Z}/ℓ , et par suite le morphisme canonique

$$H^q(Y, \mathbb{Z}/\ell) \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} M \longrightarrow H^q(Y, M)$$

est bijectif, quel que soit Y quasi-compact et quasi-séparé (en effet, c'est trivial si M est de rang fini, et les deux membres commutent aux limites

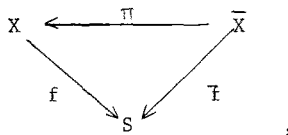
inductives (VI 1.6)), donc

$$[R^q f_* (\mathbb{Z}/\ell)] \otimes_{\mathbb{Z}/\ell} M \xrightarrow{\sim} R^q f_* (M).$$

Il suffit donc évidemment de démontrer que $R^q f_* (\mathbb{Z}/\ell)$ est constructible en tant que \mathbb{Z}/ℓ -Module, c'est-à-dire, on est réduit au cas $A = \mathbb{Z}/\ell$, ce que nous supposons désormais.

Notons que le cas où F est de dimension relative ≤ 0 (i.e. où f est fini) et F est arbitraire résulte maintenant de VIII 5.6 et de 1.5.

Procédons par récurrence noethérienne sur S . D'après 1.6, on peut supposer $S \neq \emptyset$, et se permettre de remplacer S par un ouvert non-vide quelconque. De plus, on peut supposer S intègre, de point générique s . La fibre X_s est un schéma algébrique de dimension ≤ 1 , et par suite il existe une extension radicielle K' de $k(s) = K$, telle que le normalisé Y de $(X_s \otimes_K K')$ red soit lisse au-dessus de $\text{Spec } K'$ (*). En remplaçant S par un ouvert non-vide, on peut supposer qu'il existe un morphisme fini radiciel surjectif $S' \rightarrow S$ tel que S'_s soit K -isomorphe à $\text{Spec } K'$, et un morphisme fini surjectif, un morphisme lisse et projectif $\bar{X}' \rightarrow S'$ et un S' -morphisme fini surjectif $\pi : \bar{X}' \rightarrow X' = X \times_S S'$ qui induise $Y \rightarrow X'_s \otimes_K K'$ sur les fibres en le point générique s de S (EGA IV 9.6.1). Or d'après VIII 1.1 il est inoffensif de faire une extension radicielle. On peut donc remplacer S par S' et X par X' , c'est-à-dire, on peut supposer que f s'insère dans un diagramme



(*) Cf. EGA IV 17.15.14.

où π est surjectif et fini, et \bar{f} est lisse. De plus, d'après la construction, on peut supposer qu'il existe un sous-schéma fermé Y de X tel que la fibre générique de Y soit finie, et tel que π induise un isomorphisme au-dessus de $X - Y$. En remplaçant encore S par un ouvert non-vide, on se ramène au cas où de plus $f_0 : Y \rightarrow S$ est un morphisme fini.

Comme F est constant, π^*F est également constant, et $F \rightarrow \pi_*\pi^*F$ est injectif parce que π est surjectif. Si F est un faisceau de groupes, il suffit de démontrer que $(R^1f_{**})(\pi_*\pi^*F) \simeq (R^1\bar{f}_{**})(\pi^*F)$ est constructible (1.8). Si F est un faisceau de \mathbb{Z}/ℓ -modules, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow F \rightarrow \pi_*\pi^*F \rightarrow C \rightarrow 0 \quad ,$$

où C est concentré sur Y , parce que π induit un isomorphisme au-dessus de $X - Y$. Il s'ensuit que $R^qf_{**}C = R^qf_{0**}C$ est constructible (nul si $q > 0$), et ainsi il suffit encore de démontrer que $(R^qf_{**})(\pi_*\pi^*F) = (R^q\bar{f}_{**})(\pi^*F)$ est constructible. En remplaçant f par \bar{f} et F par π^*F , on est réduit au cas F constant et constructible et f est lisse.

Traisons le cas d'un faisceau de groupes constant, $f = G_X$. Toutes les fibres de $(R^1f_{**})G_X$ sont finies ; en effet, en appliquant XII 5.2 (ii) on est réduit, pour le prouver, au cas où S est le spectre d'un corps séparablement clos et où X est lisse et de dimension ≤ 1 au-dessus de S . Le résultat est connu dans ce cas (SGA 1 X 2.6). Il suffit donc de démontrer que les morphismes de spécialisation sont injectifs (IX 2.13 (ii)). Pour cela, on est réduit au cas S strictement local, et par le théorème de changement de base XII 5.1 (ii) on peut même remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète et strictement local. De plus, on peut supposer X connexe.

Puisque $H^1(X, G)$ classe les revêtements principaux galoisiens de X de groupe G , il suffit de vérifier que si $X' \rightarrow X$ est un revêtement étale connexe alors la fibre géométrique est également connexe. Cela résulte facilement du fait que f est lisse et propre, à fibres géométriques connexes.

Traitons maintenant le cas $F = (\mathbb{Z}/\ell)_X$. Pour les valeurs 0 et 1 de q le résultat est déjà connu ((1.5) et ci-dessus). D'après X 4.3 et XII 5.3 bis, il reste seulement le cas $q = 2$, et de plus, si S est de caractéristique ℓ , on a $R^2 f_* (\mathbb{Z}/\ell) = 0$. En remplaçant S par un ouvert non-vide convenable, on est donc réduit au cas où ℓ est inversible sur S . Alors, d'après XII 5.2 (ii) et X 4.7, la fibre de $R^2 f_* (\mathbb{Z}/\ell)$ en un point géométrique \bar{s} au-dessus de $s \in S$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell)^{c(s)}$, où $c(s)$ est le nombre des composantes irréductibles de dimension 1 de la fibre géométrique $X_{\bar{s}}$. Or c est une fonction constructible sur S (EGA IV 9.7.9), d'où le résultat (IX 2.13 (iii)).

Remarque 1.11. La démonstration de 1.1 se simplifie beaucoup en utilisant le formalisme de la cohomologie à supports propres, qui sera développé dans XVII comme conséquence directe du théorème de changement de base pour un morphisme propre XII 5.1. D'autre part, l'énoncé 1.1 se généralise au cas où on se donne sur Y un faisceau quelconque d'anneaux de torsion \underline{A} , et qu'on prend sur X un complexe K' de $f^* (\underline{A})$ -Modules satisfaisant une condition de "constructibilité" qui, dans le cas particulier 1.1, s'exprimerait simplement en disant que des faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i(K')$ de K' sont des A -modules constructibles, nuls pour i assez grand.

2. Une variante de la dimension.

2.1. Soit X un schéma. On va noter

$$(2.1.1) \quad d(x) = \dim \overline{\{x\}}$$

pour $x \in X$, où $\overline{\{x\}}$ est l'adhérence de $\{x\}$. Si F est un faisceau abélien sur X , on pose

$$(2.1.2) \quad d(F) = \sup \{d(x) \mid x \in X \text{ et } F_x^- \neq 0\} .$$

On aura besoin d'une notion rectifiée dans le cas local :

Définition 2.2. Soient Y le spectre d'un anneau local noethérien universellement caténaire (EGA IV 5.6.2) et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini.

Soit $x \in X$ et $y = f(x)$. On pose

$$\delta(x) = \dim \overline{\{y\}} + \text{deg. tr. } k(x)/k(y) .$$

Si F est un faisceau abélien sur X , on pose

$$\delta(F) = \sup \{\delta(x) \mid x \in X \text{ et } F_x^- \neq 0\} .$$

Proposition 2.3. (i) Soit $i : X' \rightarrow X$ une immersion et $x' \in X'$. Alors

$$\delta(i(x')) = \delta(x') .$$

(ii) Soit X_0 la fibre fermée de X/Y . On a

$$\delta(x) = \begin{cases} d(x) & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_0 \neq \emptyset \\ d(x)+1 & \text{si } \overline{\{x\}} \cap X_0 = \emptyset ; \end{cases}$$

(iii) $\delta(x) = d(x)$ si f est propre.

Démonstration. L'assertion (i) est triviale à partir de la définition.

Puisque $\overline{\{x\}} \cap X_0$ n'est pas vide dans le cas f propre, (iii) est conséquence de (ii). Pour (ii), nous pouvons remplacer X par $\overline{\{x\}}$ et Y

par $\overline{\{y\}}$ (avec la structure induite réduite), ce qui est permis d'après (i).

Soient $x' \in X'$ et $y' = f(x')$. On a la formule (EGA IV 5.6.1.1)

$$\dim O_{X,x'} = \dim O_{Y,y'} + \text{deg. tr. } k(x)/k(y) - \text{deg. tr. } k(x')/k(y') \quad .$$

Supposons que $X_0 \neq \emptyset$. Alors il est clair que $\sup_{x'} \{\dim O_{X,x'}\} = \dim X$ est obtenu en prenant pour x' un point fermé de X_0 , d'où

$$\dim X = \dim O_{X,x'} = \dim Y + \text{deg. tr. } k(x)/k(y) = \delta(x) \quad .$$

Si $X_0 = \emptyset$, le supremum est évidemment obtenu en prenant pour x' un point fermé dans sa fibre $f^{-1}(y')$, tel que $\dim \overline{\{y'\}} = 1$. Il existe de tels points, parce que les $y' \in Y$ avec $\dim \overline{\{y'\}} = 1$ forment un ensemble très dense (EGA IV 10.1.3, 10.5.9, 1.8.4). On a donc :

$$\begin{aligned} \dim X &= \dim O_{X,x'} = \dim O_{Y,y'} + \text{deg. tr. } k(x)/k(y) \\ &= \dim Y - 1 + \text{deg. tr. } k(x)/k(y) = \delta(x) = 1 \quad , \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Proposition 2.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur le spectre d'un corps k . Soient $x \in X$, $y = f(x)$, et y_0 une spécialisation de y . Soient $f' : X' \rightarrow Y'$ le localisé strict de f en un point géométrique \overline{y}_0 au-dessus de y_0 , et $x' \in X'$ un point au-dessus de x . Alors on a

$$\delta(x') = d(x) - d(y_0) \quad .$$

Démonstration. On a

$$d(x) = d(y) + \text{deg. tr. } k(x)/k(y)$$

$$\delta(x') = d(y') + \text{deg. tr. } k(x')/k(y') ,$$

où $y' = f'(x')$. De plus

$$\text{deg. tr. } k(x)/k(y) = \text{deg. tr. } k(x')/k(y') ,$$

parce que les extensions $k(x')/k(x)$ et $k(y')/k(y)$ sont algébriques. Il reste donc à démontrer que

$$d(y') = d(y) - d(y_0) .$$

On peut supposer y maximal dans Y , donc y' maximal dans Y' , et alors

$$\begin{aligned}
d(y') &= \dim \underline{O}_{Y', \bar{y}_0} \\
&= \dim \underline{O}_{Y, y_0} \quad (\text{EGA IV 6.1.3}) \\
&= \dim Y - d(y_0) \quad (\text{EGA IV 5.2.3.1}) \\
&= d(y) = d(y_0) ,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Dimension cohomologique des schémas algébriques affines.

Théorème 3.1 (d). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme affine de schémas de type fini sur un corps k . Soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$ (cf. 2.1). Alors $d(R^q f_* F) \leq d - q$.

En particulier, prenant $Y = \text{Spec}(k)$:

Corollaire 3.2. Soit X un schéma affine de type fini sur un corps k sépa-
rablement clos. Alors

$$cd X \leq \dim X .$$

Corollaire 3.3. Soit $X \subset \mathbb{P}_k^N$ un schéma projectif de dimension n sur un corps
séparablement clos k, et soit $Y = H \cap X$ une "section hyperplane" de X. Alors
pour tout faisceau de torsion F sur X, l'homomorphisme canonique

$$H_Y^q(X, F) \longrightarrow H^q(X, F)$$

est bijectif pour $q > n+1$, et surjectif pour $q = n+1$.

Le corollaire est trivial à partir de 2.2 et de la suite exacte pour un sous-ensemble fermé (IV 3.7.1), compte tenu que $X - Y = \mathcal{U}$ est affine de dimension $\leq n$. Remarquons que 3.3 est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz sur les sections hyperplanes : en effet, si X est lisse sur k et F est localement constant et premier à la caractéristique, on peut calculer la cohomologie $H_Y^q(X, F)$ explicitement en utilisant le théorème de pureté cohomologique relatif (XVI 3) et la suite spectrale (), et on trouve que

$$H_Y^q(X, \mathbb{Z}/n) \simeq H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \text{ pour tout } q ;$$

l'homomorphisme $H^{q-2}(Y, \mu_n^{-1}) \longrightarrow H^q(X, \mathbb{Z}/n)$ déduit de 3.3 n'étant autre que l' "homomorphisme de Gysin", qui sera étudié ultérieurement (*).

Le théorème 3.1 (d) équivaut au suivant :

Corollaire 3.4 (d). Soit Y' un schéma strictement local qui est un localisé
strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f' : X' \longrightarrow Y'$ un morphisme

(*) Cf. SGA 2 XIV pour une étude systématique des théorèmes du type de Lefschetz.

affine de type fini, et F' un faisceau de torsion sur X' tel que $\delta(F') \leq d$
(cf. (2.2)). Alors $H^q(X', F') = 0$ pour $q > d$.

En effet, supposons que 3.4 (d) soit vrai. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme affine de schémas algébriques sur k et soit F un faisceau de torsion sur X tel que $d(F) \leq d$. Soit y un point de Y et ξ un point géométrique au-dessus de y . Pour démontrer 2.1 (d), il faut démontrer que la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ est nulle si $d(y) > d - q$.

Soit $f' : X' \rightarrow Y'$ le localisé strict de f au point ξ , c'est-à-dire, soit Y' le localisé strict de Y en ξ et soit $X' = X \times_Y Y'$.

Soit F' le faisceau induit de F sur X , de sorte que $(R^q f'_* F')_\xi = H^q(X', F')$ (VIII 5.2). On a

$$\delta(F') \leq d(F) - d(y) \leq d - d(y) \quad (2.4) ,$$

et en appliquant 3.4 (d), on trouve $H^q(X', F') = 0$ si $q > d - d(y)$, d'où le résultat.

Inversement, supposons que 2.1 (d) soit vrai, et soient F' , $f' : X' \rightarrow Y'$ comme dans l'énoncé de 3.4 (d). Puisque la cohomologie commute aux limites inductives (VII 3.3) et F' est limite inductive de ses sous-faisceaux constructibles (IX 2.9), on peut supposer F' constructible. Or Y' est localisé strict d'un schéma algébrique Y en un point géométrique ξ au-dessus d'un point fermé y_0 (X 3.3). Ecrivons $Y' = \varprojlim_{\alpha} Y_\alpha$, où (Y_α) est un système projectif filtrant de schémas affines étales sur Y (VIII 4.5). D'après IX 2.7.4, F' est induit d'un faisceau de torsion constructible sur $X = X \times_Y Y_K$ pour α suffisamment grand, et on voit immédiatement, utilisant 2.4

et EGA IV 9.5.5, qu'on peut de plus supposer que $d(F_\alpha) = \delta(F') \leq d$. En remplaçant Y par Y_α , on est réduit au cas où F' est induit par un faisceau F sur X , avec $d(F) \leq d$. On a alors $R^q_{f_*} F = 0$ si $q > D$, d'après 2.1 (d), donc en particulier

$$(R^q_{f_*} F)_\xi = H^q(X', F') = 0 \text{ si } q > d,$$

d'où 3.4 (d).

Comme cas particulier de 3.4 (d), on a

Corollaire 3.5. Soit Y' un schéma strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps k . Soit $U \subset Y'$ un ouvert affine. Alors $\text{cd } U \leq d$.

Remarque 3.6. Il semble très plausible que 3.4, donc 3.5, reste valable pour tout schéma local noethérien Y' (pas nécessairement un localisé strict d'un schéma algébrique), du moins si Y' est excellent (EGA IV 7.8). C'est ce qui sera prouvé dans (XX 6) lorsqu'on suppose de plus Y de caractéristique nulle.

4. Démonstration du théorème 3.1.

La démonstration se fait par récurrence sur d .

Lemme 4.1. 3.1 (0) et 3.1 (1) sont vrais.

Démonstration. Triviale pour $d = 0$, auquel cas $\text{supp } F$ est fini sur k , et on applique (VIII 5.5). Soient $F, f : X \rightarrow Y$ comme dans l'énoncé de 3.1 et supposons que $d(F) \leq 1$. En remplaçant F par un sous-faisceau constructible (IX 2.9 et VII 3.3), on se réduit au cas où F est constructible. Alors le

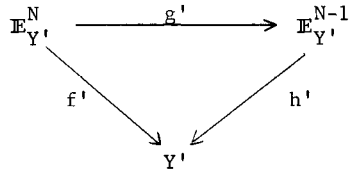
support de F est contenu dans un sous-schéma fermé de X de dimension ≤ 1 (IX 2.3 (ii)), et on peut remplacer X par ce sous-schéma, c'est-à-dire, on peut supposer qu'on a $\dim X \leq 1$. D'après IX 5.7, la dimension cohomologique d'un schéma algébrique affine de dimension 1 sur un corps séparablement clos est ≤ 1 . Il suffit d'ailleurs de traiter le cas où k est séparablement clos : en effet, soit $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ le morphisme déduit de f par le changement de base $\text{Spec } \bar{k} \rightarrow \text{Spec } k$ (\bar{k} la clôture séparable de k). Pour un point géométrique ξ de Y , le localisé strict $f' : X' \rightarrow Y'$ de f en ξ s'identifie à un localisé strict de \bar{f} , donc la fibre $(R^q f_* F)_\xi$ à une fibre de $R^q \bar{f}_* \bar{F}$. Puisque f est affine, on trouve donc que $R^q f_* F = 0$ si $q > 1$. De plus, il est évident que $d(f_* F) \leq 1$. Pour le cas $q = 1$, notons que l'hypothèse que X soit de dimension ≤ 1 . Pour le cas $q = 1$, notons que l'hypothèse que X soit de dimension ≤ 1 implique qu'il existe une partie fermée finie Z de Y telle que f soit fini au-dessus de $Y - Z$. Il en résulte que $R^1 f_* F$ est nul dans $Y - Z$ (VIII 5.6), d'où $d(R^1 f_* F) \leq 1$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Soit $d \geq 2$ et supposons maintenant que 3.1 (d') (ou, ce qui revient au même, 3.4 (d')) est vrai pour $d' < d$.

Lemme 4.2. Pour démontrer 3.4 (d) dans tous les cas, il suffit de traiter le cas où $X' = \mathbb{E}_Y^1$, est l'espace affine dimension 1 sur Y' , et où f est le morphisme structural.

Démonstration. Evidemment, on peut supposer $X' = \mathbb{E}_Y^N$, pour n convenable, parce qu'on peut plonger X' dans un \mathbb{E}_Y^N . Supposons $N > 1$ et le résultat connu pour tout Y' et pour \mathbb{E}_Y^r , avec $r < N$. Soit F' un faisceau de torsion sur \mathbb{E}_Y^N ,

avec $d(F') \leq d$. Considérons le diagramme



g' et h' les projections canoniques, de sorte que $\mathbb{E}_{Y'}^N$ est isomorphe à l'espace affine de dimension 1 au-dessus de $\mathbb{E}_{Y'}^{N-1}$. Puisque évidemment chaque anneau localisé strict de $\mathbb{E}_{Y'}^{N-1}$ est aussi le localisé strict d'un schéma algébrique, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux fibres de $R^q g'_* F'$, et on trouve que

$$(*) \quad \delta(R^q g'_* F') \leq d - q \quad .$$

De plus, 3.4 (d') est vrai pour h' , $d' \leq d$, par l'hypothèse de récurrence sur N .

Considérons la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{E}_{Y'}^{N-1}, R^q g'_*(F')) \implies H^n(\mathbb{E}_{Y'}^N, F') \quad .$$

On a $E_2^{p,q} = 0$ si $p > d - q$, comme on trouve en appliquant (*) et 3.4 (d') au morphisme h' . Il s'ensuit que l'aboutissement est nul si $n > d$, d'où le lemme.

Considérons l'énoncé supplémentaire suivant, qui est un cas spécial de 3.5 :

Enoncé 4.3 (d) : Soit X' strictement local de dimension $\leq d$, localisé strict d'un schéma algébrique sur un corps. Soit $f \in \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ et soit $U \subset X'$ l'ouvert $U = X' - V(f)$. Alors $\text{cd } U \leq d$.

Lemme 4.4. 4.3 (d) implique 3.4 (d).

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{E}_{Y'}^1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_{Y'}^1 \\
 & \searrow f' & \swarrow g' \\
 & Y' &
 \end{array}$$

où Y' est comme dans l'énoncé de 2.6 et où $\mathbb{P}_{Y'}^1$ est l'espace projectif, déduit de \mathbb{E}^1 "en ajoutant la section Y'_∞ à l'infini". Soit F' un faisceau de torsion sur \mathbb{E}^1 avec $d(\text{supp } F') \leq d$. On a la suite spectrale

$$H^p(\mathbb{P}^1, R^q i_* F') \implies H^n(\mathbb{E}^1, F') \quad .$$

Or les $R^q i_* F'$, pour $q > 0$, sont concentrés sur Y'_∞ , qui est Y' -isomorphe à Y' . Puisque Y' est strictement local, il s'ensuit que $H^p(\mathbb{P}^1, R^q i_* F') = 0$ si $p, q > 0$. De plus, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre (XII 5.1), la cohomologie d'un faisceau de torsion sur \mathbb{P}^1 peut-être calculée sur la fibre fermée, qui est un schéma de dimension cohomologique ≤ 2 (X 4.3). On a donc $H^p(\mathbb{P}^1, i_* F') = 0$, si $p > 2$. Comme on veut démontrer $H^n(\mathbb{E}^1, F') = 0$ pour $n > d$, et comme $d \geq 2$, on est réduit à démontrer que $H^0(\mathbb{P}^1, R^q i_* F') = 0$ pour $q > d$. Ce groupe, isomorphe aussi à $H^0(Y'_\infty, R^1 i_*(F'))$, est en vertu de (VIII 4.6) isomorphe à la fibre de $R^q i_* F'$ au point Q , Q étant le point à l'infini de \mathbb{P}^1 dans la fibre fermée.

Il suffit (VII 3.3 et IX 2.9) de traiter le cas où F' est constructible. Alors, puisque $\delta(\text{supp } F') \leq d$, il existe un sous-schéma fermé X' de \mathbb{P}^1 avec $\dim X' \leq d$, tel que X' contienne le support de F' . Soit \tilde{X}' le localisé de X' au point géométrique Q , soit $\tilde{U} = \tilde{X}' - \tilde{X}' \times_{\mathbb{P}^1} Y'_\infty$, et soit F le

faisceau induit par F' sur U par le morphisme $\tilde{U} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Alors la fibre de $R^q i_* F$ au point Q n'est autre que $H^p(\tilde{U}, \tilde{F})$ (VIII 5.2), et on applique 4.3 (d) au schéma strictement local X' et à l'ouvert \tilde{U} .

Le lemme ci-dessous, joint à 4.4, achèvera la démonstration.

Lemme 4.5. 3.4 (d') pour $d' < d$ implique 4.3 (d') pour $d' \leq d$.

Démonstration. Supposons 3.4 (d') pour $d' < d$. Par récurrence, nous pouvons supposer que 4.3 (d') est vrai pour $d' < d$. Soient les données X', f, U comme dans l'énoncé 4.3 (d). Alors X est localisé strict d'un schéma algébrique X_0 sur un corps k en un point géométrique fermé. On peut prendre X_0 affine et de dimension $\leq d$, quitte à le remplacer par un voisinage de x_0 . Alors X est limite projective de schémas affines et étales X_i au-dessus de X_0 (VIII 4.5).

Soit F un faisceau de torsion sur U . Il faut démontrer que $H^q(U, F) = 0$ si $q > d$, et il suffit encore de traiter le cas où F est constructible. Alors les données f, F, U proviennent de données analogues sur l'un des X_i (IX 2.7). On aura un faisceau F_i sur $U_i = X_i - V(f_i)$ qui "induit" F sur U . Puisque $U = \varprojlim U_i$, on a (VII 5.8)

$$H^q(U, F) = \varinjlim H^q(U_i, F_i) \quad .$$

Il suffit donc de démontrer le fait suivant : Quel que soit i , il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U'' \\ & \searrow & \swarrow \\ & U_i & \end{array}$$

où $U \rightarrow U_i$ est la flèche donnée, tel que $cd(U'') < d$. En effet, cela impliquera

que chaque élément de $H^q(U_i, F_i)$, pour $q > d$, a une image nulle dans $H^q(U, F)$.

Supposons $i = 0$, et considérons le morphisme $g : X_0 \rightarrow \mathbb{E}_k^1 = Y_0$ donnée par $f_0 \in \Gamma(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$. Soit Y'' le localisé strict de \mathbb{E}_k^1 en un point géométrique au-dessus de l'origine, donc Y'' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et soit $X'' = X_0 \times_{Y_0} Y''$.

Le morphisme $X \rightarrow X_0$ se factorise par X'' puisque X est strictement local. De plus, l'ouvert $U'' = X'' \times_{X_0} U_0$ n'est autre que la fibre générique de X''/Y'' . C'est donc un schéma algébrique affine au-dessus du point générique de Y' , et on a évidemment $\dim U'' \leq d-1$.

Vérifions que $cd U'' \leq d$ (ce qui achèvera la démonstration). Soit K le corps résiduel de Y'' au point générique. C'est un corps de dimension cohomologique 1, c'est-à-dire, on a $cd(G) = 1$, G le groupe de Galois de la clôture séparable \bar{K} de K (X 2.2). Soit $\bar{U}'' = U'' \times_{\text{Spec } K} (\text{Spec } \bar{K})$. On a $cd \bar{U}'' \leq d-1$ par hypothèse de récurrence sur d (c'est 2.2 pour un schéma de dimension $\leq d$). Le fait que $cd U'' \leq d$ suit alors de la suite spectrale de Hochschild-Serre (VIII 8.4)

$$H^q(G, H^q(\bar{U}'', \bar{F})) \implies H^n(U, F) \quad ,$$

d'où le lemme 4.5.