

LA FORMULE DE DUALITE GLOBALEpar P. DELIGNE0. Introduction

0.1 Le présent exposé est consacré à la dualité de Poincaré. Cette dualité est construite sur le modèle de VERDIER [1], qui traite le cas des espaces topologiques séparés localement compacts. On montre à priori que le foncteur $Rf_!$ de l'exposé XVII admet un adjoint à droite $Rf^!$ et on établit bon nombre de ses propriétés, avant de le calculer plus explicitement dans le cas des morphismes lisses.

La possibilité d'une telle construction semble reposer sur les propriétés suivantes du foncteur $Rf_!$

a) Pour l'existence d'un adjoint $Rf^!$ et ses propriétés formelles :

(I) le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base;

(II) les foncteurs $R^i f_!$ commutent aux limites inductives filtrantes; ils sont nuls pour i assez grand;

(III) le foncteur $Rf_!$ peut se calculer "au niveau des complexes", i.e. à partir d'un foncteur entre catégories de complexes.

b) Pour le calcul de cet adjoint dans le cas où f est lisse :

(IV) le calcul de $Rf_!((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_U)$ pour U "petit".

0.2 Au § 3 n° 1, qui est indépendant des §§ 1,2, on construit le foncteur $Rf^!$; on y utilise des constructions spéciales à la situation, et non seulement (I) (II) et (III). Cela rend ce n° assez déplaisant; le rédacteur confesse ne pas toujours avoir bien compris ce qui se passait.

Le § 2 est consacré au point (IV); il est purement formel

à partir du § 1, où est étudiée la cohomologie des courbes.

Au § 1, on établit nettement plus qu'il n'est nécessaire pour le § 2, en étudiant aussi le cas de coefficients continus. Ce paragraphe a été profondément influencé par SERRE [1]. Les points utiles pour la suite sont :

a) le n° 1.1, consacré au morphisme trace dans le cas des courbes, et généralisé en 2.9;

b) le théorème d'effacement 1.6.9. Le lecteur prêt à admettre un argument transcendant peut lire le n° 1.6, à partir de 1.6.6 (2ème démonstration), indépendamment des n° 1.2 à 1.5. L'ingrédient essentiel de 1.6.9 est l'une ou l'autre forme de la dualité de Poincaré pour les courbes lisses sur un corps algébriquement clos, et le lemme d'acyclicité XV 2.6, (préliminaire au théorème de changement de base lisse XVI 1.1). Sa conclusion est généralisée en 2.17.

Le n° 3.2 recueille les fruits du § 2.

0.3 La méthode de Verdier en dualité de Poincaré permet de définir le foncteur $Rf^!$ pour f compactifiable. Cette généralité a pour contrepartie que les compatibilités à vérifier ne sont pas familières, et parfois, même pour les plus triviales, telles 3.2.3, de démonstration abracadabrante. Le rédacteur avoue ne pas en avoir démontré autant qu'il aurait dû.

Le lecteur intéressé pourra sans difficulté, à partir de l'appendice à l'exposé XVII, étendre la définition de $Rf^!$ au cas des morphismes séparés de type fini de but, un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé).

0.4 Le résultat principal 3.2.5 est énoncé en termes concrets qui permettraient de revenir formellement au point de vue qui avait été celui du séminaire oral, où le foncteur $Rf^!$ était défini seulement pour

les morphismes limifiabiles via une factorisation par un morphisme lisse et une immersion. On trouvera une esquisse de la démonstration du séminaire oral dans VERDIER [2].

1. Cohomologie des courbes.

1.1. Le morphisme trace.

1.1.1. Soient n un entier ≥ 1 et X un schéma sur lequel n soit inversible. Le faisceau μ_n (IX 3.1) sur X est alors un faisceau de modules localement libre de rang 1 sur le faisceau d'anneaux constant $\underline{\mathbb{Z}}/n$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on désigne par la notation $\underline{\mathbb{Z}}/n(i)$ sa puissance tensorielle $i^{\text{ème}}$.

$$(1.1.1.1) \quad \underline{\mathbb{Z}}/n(i) = \underline{\text{Hom}}(\underline{\mathbb{Z}}/n, \mathcal{O}_m)^{\otimes i}$$

Si $n = dn'$, l'application d'exponentiation par d établit un isomorphisme

$$\mu_n \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n' \xrightarrow{\sim} \mu_{n'} ,$$

d'où des isomorphismes, dits canoniques :

$$(1.1.1.2) \quad \underline{\mathbb{Z}}/n(i) \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n' \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}/n'(i) .$$

Si F est un faisceau abélien tel que $nF = 0$, on pose

$$(1.1.1.3) \quad F(i) = F \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n(i) .$$

Si déjà $n'F = 0$, l'isomorphisme (1.1.1.2) permet d'identifier $F \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n} \underline{\mathbb{Z}}/n(i)$ et $F \otimes_{\underline{\mathbb{Z}}/n'} \underline{\mathbb{Z}}/n'(i)$, de sorte que $F(i)$ ne dépend que de F et non du choix de n . Plus généralement, si F est un faisceau de torsion premier aux caractéristiques résiduelles de X (XVII 0.13), et si ${}_m F$ est le noyau de la multiplication par m dans F , on définit $F(i)$ comme étant la limite inductive, pour m inversible sur X tendant multiplicativement vers l'infini

$$(1.1.1.4) \quad F(i) = \varinjlim_m {}_m F(i) .$$

Le foncteur $F \mapsto F(i)$ est exact. Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme de schémas (resp. un morphisme de schémas quasi-compact quasi-séparé), et si F est un faisceau de torsion sur X (resp. sur Y), pre-

mier aux caractéristiques résiduelles de X , on a $f^{\mathbf{x}}(F(i)) \simeq (f^{\mathbf{x}}F)(i)$ (resp. on a $(f_{\mathbf{x}}F)(i) \simeq f_{\mathbf{x}}(F(i))$). Si \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux sur X , annihilé par n inversible sur X , il se prolonge en un foncteur exact $K \mapsto K(i)$ de $D(X, \mathcal{A})$ dans $D(X, \mathcal{A})$. Ce foncteur commute aux foncteurs image réciproque et aux foncteurs image directe.

Les foncteurs $F \mapsto F(i)$ s'appellent parfois les foncteurs de "twist à la Tate"

Définition 1.1.2. Une courbe plate sur un schéma S est un morphisme $f : X \rightarrow S$ plat de présentation finie et séparé à fibres purement de dimension un.

L'expression "purement de dimension un" n'exclut pas le schéma vide. Contrairement à EGA II 7.4.2, on admet ici qu'une courbe sur un corps soit vide, mais on exige qu'elle soit séparée.

Lorsque S est le spectre d'un corps, on parlera simplement de courbe sur S ; une courbe sur un corps est quasi-projective.

1.1.3. Soit X une courbe sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p premier à un entier $n > 1$. Supposons d'abord X réduite, et soit \bar{X} une courbe complète sur k dont X soit un ouvert dense.

Le complément $Y = \bar{X} - X$ est de dimension 0. La suite exacte de cohomologie (XVII 5.1.16.3) induit donc un isomorphisme

$$(1.1.3.1) \quad H_{\mathbb{C}}^2(X, \mathbb{Z}/n(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(1)) \quad .$$

On dispose de plus d'un isomorphisme IX 4.7 (donné par la théorie de Kummer)

$$(1.1.3.2) \quad H^2(\bar{X}, \mathbb{Z}/n(1)) = \text{Pic}(\bar{X})/n \simeq (\mathbb{Z}/n)^c$$

où c désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X , ou de \bar{X} , cela revient au même.

Si X n'est plus nécessairement réduite, et si c est l'ensemble de ses composantes irréductibles, désignons, pour $i \in c$, par n_i la multiplicité de X au point générique η_i de la $i^{\text{ème}}$ composante irréductible de X :

$$n_i = \text{lg}(O_{X, \eta_i}) \quad .$$

On sait que l'application de restriction de $H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1))$ dans $H_c^2(X_{\text{red}}, \mathbb{Z}/n(1))$ est un isomorphisme, d'où, via (1.1.3.1) et (1.1.3.2) appliqués à X_{red} un isomorphisme canonique entre $H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1))$ et $(\mathbb{Z}/n)^c$. On désignera par Tr_X ou simplement Tr la flèche composée

$$(1.1.3.3) \quad \text{Tr} : H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1)) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n)^c \xrightarrow{t} \mathbb{Z}/n \quad ,$$

où

$$t((a_i)_{i \in c}) = \sum n_i a_i \quad .$$

Si F est un groupe abélien annihilé par n , on dispose d'un isomorphisme

$$H_c^2(X, F(1)) \xleftarrow{\sim} F \otimes H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1))$$

et donc via (1.1.3.3) d'un morphisme trace

$$(1.1.3.4) \quad \text{Tr} : H_c^2(X, F(1)) \longrightarrow F \quad .$$

Si $n = n'd$, le diagramme

$$(1.1.3.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x^n} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow x^d & & \downarrow x^d & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_{n'} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x^{n'}} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif et donc aussi le diagramme

$$(1.1.3.6) \quad \begin{array}{ccc} H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1)) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{Z}/n)^c \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^2(X, \mathbb{Z}/n'(1)) & \xrightarrow{\sim} & (\mathbb{Z}/n')^c \end{array}$$

d'après la définition IX 4.7 de l'isomorphisme (1.1.3.2).

La flèche (1.1.3.4) ne dépend donc que de F , et non du choix de l'entier n premier à p tel que $nF = 0$. Par passage à la limite, on la définit pour tout groupe abélien F de torsion premier à p .

Le lemme suivant résulte aussitôt des définitions.

Lemme 1.1.4. Sous les hypothèses précédentes, si, pour $i \in \mathbb{C}$, U_i est un ouvert non vide de X contenu dans la $i^{\text{ème}}$ composante irréductible, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{i \in \mathbb{C}} H_c^2(U_i, F(1)) & \xrightarrow{\sim} & H_c^2(X, F(1)) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 \bigoplus_{i \in \mathbb{C}} \text{Tr}_{U_i} & & \text{Tr}_X \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & F &
 \end{array}$$

est commutatif.

Lemme 1.1.5. Soient X et Y deux courbes sur un corps algébriquement clos k , $u : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-fini et plat et n un entier premier à l'exposant caractéristique p de k .

Le diagramme suivant, dans lequel Tr_u est la flèche (XVII 6.2.3), est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1)) & \xrightarrow{\text{Tr}_u} & H_c^2(Y, \mathbb{Z}/n(1)) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 \text{Tr}_X & & \text{Tr}_Y \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \mathbb{Z}/n &
 \end{array}$$

Le lemme 1.1.4 permet de se réduire au cas où X et Y sont irréductibles, X_{red} et Y_{red} étant de plus lisses. Si e (resp. f) est la multiplicité de X (resp. Y) au point générique, et si $e = df$, les triangles marqués + du diagramme suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 H_C^2(X, \mathbb{Z}/n(1)) & \xrightarrow{\sim} & H_C^2(X_{\text{red}}, \mathbb{Z}/n(1)) \\
 \downarrow \text{Tr}_u & \begin{array}{c} \searrow \text{Tr}_X \\ + \\ \swarrow e \cdot \text{Tr}_{X_{\text{red}}} \end{array} & \downarrow d \cdot \text{Tr}_{u_{\text{red}}} \\
 & \mathbb{Z}/n & \\
 & \begin{array}{c} \swarrow \text{Tr}_Y \\ + \\ \searrow f \cdot \text{Tr}_{Y_{\text{red}}} \end{array} & \\
 H_C^2(Y, \mathbb{Z}/n(1)) & \xrightarrow{\sim} & H_C^2(Y_{\text{red}}, \mathbb{Z}/n(1)) \quad ,
 \end{array}$$

Son contour est commutatif, ainsi qu'on le déduit de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 u_! \mathbb{Z}/n_{X(1)} & \xrightarrow{\sim} & u_{\text{red}!} \mathbb{Z}/n_{X_{\text{red}}(1)} \\
 \downarrow \text{Tr}_u & & \downarrow d \cdot \text{Tr}_{u_{\text{red}}} \\
 \mathbb{Z}/n_Y(1) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/n_{Y_{\text{red}}}(1) \quad .
 \end{array}$$

Il suffit de vérifier cette dernière compatibilité au point générique de Y , ce qui est trivial.

Soient \bar{X} et \bar{Y} les courbes complètes non lisses contenant X_{red} et Y_{red} comme ouverts denses (EGA II 7.4.11). Le morphisme u_{red} se prolonge en un morphisme plat $\bar{u} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ (EGA II 7.4.9) et, d'après 1.1.4, il suffit de vérifier 1.1.5 pour \bar{u} .

D'après (XVII 6.3.18.2), le diagramme de faisceaux sur Y , dans lequel N désigne la norme,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bar{u}_* \mu_n & \longrightarrow & \bar{u}_* \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x^n} & \bar{u}_* \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{Tr}_u & & \downarrow N & & \downarrow N \\
 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{x^n} & \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \quad ,
 \end{array}$$

est commutatif, donc aussi le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Pic}(X)/n & \xrightarrow{\sim} & H_c^2(X, \mathbb{Z}/n(1)) \\
 \downarrow N & & \downarrow \text{Tr}_u \\
 \text{Pic}(Y)/n & \xrightarrow{\sim} & H_c^2(Y, \mathbb{Z}/n(1)) \quad ,
 \end{array}$$

et il reste à noter que si \mathcal{L} est un faisceau inversible de degré 1 sur X , sa norme est encore de degré 1 (ce fait résultant de la compatibilité EGA IV 21.10.7, compte tenu de la définition EGA IV 21.5.5 de la norme d'un diviseur).

Proposition 1.1.6 Il est d'une et d'une seule façon possible de définir, pour toute courbe plate compactifiable $f : X \rightarrow S$ et pour tout faisceau de torsion F sur S , premier aux caractéristiques résiduelles de S , un morphisme trace

$$\text{Tr}_f : R^2 f_! (f^* F(1)) \longrightarrow F \quad ,$$

fonctoriel en F , de formation compatible à tout changement de base (cf. XVII 6.2.3, (VAR 2)) et qui, pour S le spectre d'un corps algébriquement clos, coïncide avec le morphisme trace (1.1.3.4).

Le morphisme Tr_f nous est donné fibre par fibre; son unicité est donc claire.

Soit $p : \mathbb{P}_S^1 \rightarrow S$ la droite projective sur S et n un entier inversible sur S . On a $\text{Pic}_S(\mathbb{P}_S^1) = \mathbb{Z}_S$, d'où par la théorie de Kummer (IX 3.2) un morphisme $\mathbb{Z}/n \rightarrow R^1 p_* \mathbb{Z}/n(1)$, dont on vérifie fibre par fibre (XII 5.2) que c'est un isomorphisme. Son inverse Tr_p induit fibre par fibre le morphisme trace (1.1.3.4).

Soit $f : X \rightarrow S$ une courbe plate sur S telle qu'il existe un S -morphisme quasi-fini et plat u de X dans \mathbb{P}_S^1 . En vertu de 1.1.5., le morphisme composé $\text{Tr}_p \circ \text{Tr}_u$ (XVII 6.2.3) admet pour fibre en un quelconque point géométrique de S le morphisme trace (1.1.3.4). En particulier, il ne dépend pas du choix de u .

Supposons que X soit une réunion de sous-schémas ouverts U_i tels qu'il existe un morphisme quasi-fini et plat de U_i dans \mathbb{P}_S^1 . Si α_i (resp. α_{ij}) est l'inclusion de U_i (resp. $U_{ij} = U_i \cap U_j$) dans X , la suite

$$\Sigma R^2(f\alpha_{ij})_! \mathbb{Z}/n(1) \rightrightarrows \Sigma R^2(f\alpha_i)_! \mathbb{Z}/n(1) \longrightarrow R^2f_! \mathbb{Z}/n(1) \longrightarrow 0 .$$

est exacte, d'après (XVII 6.2.8) et l'exactitude à droite de $R^2f_!$ (puisque $R^3f_! = 0$). On vérifie fibre par fibre, par 1.1.5., que la somme des morphismes trace $\Sigma R^2(f\alpha_i)_! \mathbb{Z}/n(1) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$, se factorise par un morphisme trace Tr_F de $R^2f_! \mathbb{Z}/n(1)$ dans \mathbb{Z}/n qui, fibre par fibre, induit (1.1.3.4).

Pour un X général, soit $j : X' \rightarrow X$ le plus grand ouvert de X tel que $f|_{X'}$ soit un morphisme de Cohen-Macaulay (cf. EGA IV 12.1.1 (vi)). Tout point x de X' a un voisinage U_x dans X' tel qu'il existe un S -morphisme quasi-fini u_x de U_x dans \mathbb{P}_S^1 . Ce morphisme est automatiquement plat (EGA IV 11.3.10 et 15.4.2) et X' vérifie donc les hypothèses précédentes. De plus, X' est dense fibre par fibre dans X ; le morphisme de $R^2(fj_!) \mathbb{Z}/n(1)$ dans $R^2f_! \mathbb{Z}/n(1)$ est donc un isomorphisme comme on le voit fibre par fibre et la flèche composée

$$\text{Tr}_F : R^2F_! \mathbb{Z}/n(1) \xleftarrow{\sim} R^2(fj_!) \mathbb{Z}/n(1) \xrightarrow{\text{Tr}_{fj}} \mathbb{Z}/n$$

induit fibre par fibre (1.1.3.4).

Si F vérifie $nF = 0$, on a (XVII 5.2.6)

$$(1.1.6.1) \quad R^2f_! \mathbb{Z}/n(1) \otimes F \xrightarrow{\sim} R^2f_!(f^*F(1))$$

et on définit Tr_F comme la flèche composée

$$\text{Tr}_F : R^2f_!(f^*F(1)) \xleftarrow{\sim} R^2f_! \mathbb{Z}/n(1) \otimes F \longrightarrow F .$$

Dans le cas général, on définit Tr_F comme limite inductive des morphismes trace relatifs aux faisceaux F_n pour n inversible sur S . Ces flèches induisent fibre par fibre (1.1.3.4) et commutent donc à tout changement de base, cqfd.

On vérifie fibre par fibre à l'aide de 1.1.4, 1.1.5 et (1.1.6.1), les résultats suivants :

Lemme 1.1.7. Soient $f : Y \rightarrow S$ une courbe plate compactifiable sur S , $u : X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie, et F un faisceau de torsion sur S , de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^2(fu)_!(fu)^*F(1) & \xlongequal{\quad} & R^2f_!(u_!u^*)f^*F(1) \xrightarrow{\text{Tr}_u} R^2f_!f^*F(1) \\ \downarrow \text{Tr}_{fu} & & \downarrow \text{Tr}_f \\ F & \xlongequal{\quad} & F \end{array},$$

Lemme 1.1.8. Soient $u : Y \rightarrow S$ un morphisme quasi-fini plat de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ une courbe plate S -compactifiable (XVII 3.2.1), et F comme en 1.1.7. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^2(uf)_!(uf)^*F(1) & \xlongequal{\quad} & u_!R^2f_!f^*u^*F(1) \xrightarrow{\text{Tr}_f} u_!u^*F \\ \downarrow \text{Tr}_{uf} & & \downarrow \text{Tr}_u \\ F & \xlongequal{\quad} & F \end{array}$$

On vérifie de même à partir de (1.1.3.2) :

Lemme 1.1.9. Si $f : X \rightarrow S$ est une courbe lisse compactifiable, et si les fibres géométriques de f sont irréductibles, alors le morphisme trace (1.1.6) est un isomorphisme.

1.2. 1-acyclicité de l'espace projectif.

Dans ce n°, on utilise en principe toujours la topologie fppf (XVII 0.10).

1.2.1. Soient ε un Module localement libre sur un schéma S , supposé

partout de rang ≥ 2 , $p : \mathbb{P}(\varepsilon) \rightarrow S$ le fibré projectif correspondant et G un faisceau abélien sur le grand site fppf de S (XVII 0.10). Chaque couple (K_0, φ) formé d'un torseur K_0 sous G et d'un homomorphisme $\varphi : \mathbb{G}_{mS} \rightarrow G$ définit un p^*G -torseur $K(K_0, \varphi)$ sur $\mathbb{P}(\varepsilon)$, somme de K_0 et de l'image par φ du \mathbb{G}_m -torseur $\mathcal{O}(1)$.

$$(1.2.1.1) \quad K(K_0, \varphi) = K_0 + \varphi\mathcal{O}(1) \quad .$$

On fait des couples (K_0, φ) une catégorie en posant

$$\text{Hom}((K_0, \varphi), (K'_0, \varphi')) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \varphi \neq \varphi' \\ \text{Hom}(K_0, K'_0) & \text{si } \varphi = \varphi' \end{cases} \quad .$$

Le torseur $K(K_0, \varphi)$ dépend alors fonctoriellement de (K_0, φ) .

Il est compatible à la localisation, et définit donc un foncteur du champ sur S des couples (K_0, φ) dans le champ sur S des p^*G -torseurs sur $\mathbb{P}(\varepsilon)$ (= le champ ayant pour sections sur U/S les p^*G -torseurs sur $U \times_S \mathbb{P}(\varepsilon)$). Ces champs sont des champs en groupoïde (= tout morphisme au-dessus d'un U/S est un isomorphisme).

Théorème 1.2.2. Sous les hypothèses 1.2.1, si G est un schéma en groupe commutatif plat de présentation finie sur S , alors le foncteur K de 1.2.1 est une équivalence.

1.2.2.1 Cet énoncé équivaut à la conjonction de

$$G \xrightarrow{\sim} p_{\mathbb{X}} p^{\mathbb{X}} G \quad \text{et} \\ \underline{\text{Hom}}(\mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} R^1 p_{\mathbb{X}} p^{\mathbb{X}} G \quad .$$

En effet, un morphisme de champs en groupoïde est une équivalence si et seulement si il induit un isomorphisme sur le faisceau engendré par le préfaisceau des classes d'isomorphie d'objets (2ème formule) et un isomorphisme sur le faisceau des automorphismes d'un objet local quelconque (1ère formule).

On donnera deux démonstrations (1.2.4 et 1.2.5) de la pleine fidélité.

Lemme 1.2.3. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat. On suppose que $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universellement et $R^1 f_* \mathcal{O}_X = 0$ universellement. Tout S -morphisme de X dans un S -schéma en groupes de type fini G se factorise alors par f et une section de G ; plus précisément, $G \xrightarrow{\sim} f_* f^* G$.

Il suffit de prouver la dernière assertion.

D'après le lemme de rigidité (Mumford [1, 6.1. pg 115]); on notera que Mumford n'utilise pas l'hypothèse noethérienne faite sur S), il suffit de traiter le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Supposons tout d'abord que G soit un schéma abélien, et soit G^* le schéma abélien dual. Puisque $G = G^{**}$, la donnée de $\varphi : X \rightarrow G$ équivaut à la donnée d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur $X \times G^*$, trivialisé le long de $X \times \{e\}$ et algébriquement équivalent à zéro sur les fibres de la projection pr_1 de $X \times G^*$ sur X . Si $x : S \rightarrow X$ est un point rationnel de X , on a $\mathcal{L} \sim \text{pr}_2^*(x_{G^*})^* \mathcal{L}' \otimes \mathcal{N}$ avec \mathcal{N} trivialisé le long de $x \times G^*$ et $X \times \{e\}$. La donnée de \mathcal{N} équivaut à la donnée d'un morphisme de schémas de G^* dans $\text{Pic}_{X/S}$, transformant e en e . Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, on a $\text{Pic}_{X/S}^0 = 0$, $\mathcal{N} \sim \mathcal{O}$ et $\mathcal{L} \sim \text{pr}_2^* \mathcal{L}'$ avec \mathcal{L}' équivalent à zéro sur G^* , donc définissant $g \in G(S)$ tel que $\varphi = \text{gof}$.

Dans le cas général, G est extension d'un schéma abélien A par un groupe affine G_0 . Le résultat précédent nous ramène au cas où $A = 0$, et on a alors

$$\text{Hom}_S(\text{Spec}(H^0(X, \mathcal{O}_X)), G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(X, G).$$

Lemme 1.2.4. Sous les hypothèses 1.2.1, si G est un schéma en groupes de présentation finie sur S ou est défini par un faisceau quasi-cohérent sur S , alors le foncteur (1.2.1.1) est pleinement fidèle.

A. Prouvons que si $K(K_0, \varphi)$ est isomorphe à $K(K'_0, \varphi')$, alors $\varphi = \varphi'$. Pour G quasi-cohérent, on a $\varphi = \varphi' = 0$, et l'assertion est vide. Pour G de présentation finie, d'après (SGA 3 IX 5.1), il suffit

de prouver l'assertion pour S spectre d'un corps algébriquement clos k . Soit alors T le plus grand sous-tore de G , et $H = G/T$. La suite exacte de cohomologie fournit

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(\epsilon), T) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}(\epsilon), G) \xrightarrow{\alpha} H^0(\mathbb{P}(\epsilon), H) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{P}(\epsilon), T) \xrightarrow{\beta} H^1(\mathbb{P}(\epsilon), G) \quad .$$

D'après 1.2.3. $H^0(\mathbb{P}(\epsilon), G) \sim G(k)$ et $H^0(\mathbb{P}(\epsilon), H) \sim H(k)$, de sorte que α est surjectif et δ nul. Si $Y(T) = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$, on a $T \sim \mathbb{G}_m \otimes Y(T)$ et $H^1(\mathbb{P}(\epsilon), T) \sim Y(T)$. L'injectivité de β exprime donc l'injectivité de la flèche canonique, définie par $\mathcal{O}(1)$, $\text{Hom}(\mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}(\epsilon), G)$, et ceci prouve l'assertion.

B. Prouver que le foncteur 1.2.1.1 est pleinement fidèle est une question locale sur S . On se ramène donc à supposer que $\mathbb{P}(\epsilon)/S$ admet une section s . Si $K(K_0, \varphi)$ est isomorphe à $K(K'_0, \varphi')$, on a $\varphi = \varphi'$ par A et $K_0 \sim s^* K(K_0, \varphi) \sim s^* K(K'_0, \varphi') \sim K'_0$. Grâce à la formule

$$(1.2.4.1) \quad \text{Hom}(K(K_0, \varphi), K(K'_0, \varphi')) \sim \text{Hom}(K(K_0 - K'_0, \varphi - \varphi'), \mathbb{G}_{\mathbb{P}(\epsilon)}) \quad ,$$

il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\text{Hom}_{\text{tors.}}(G, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{tors.}}(p^* G, p^* G) \quad .$$

Ceci résulte de 1.2.3.

1.2.5. Voici une autre démonstration, plus kunnutesque, de la pleine fidélité. La question est locale sur S ; d'après (1.2.4.1), il suffit donc de vérifier que

$$\text{Hom}_{\mathbb{P}(\epsilon)}(G, K(G, \varphi)) \begin{cases} = \emptyset & \text{si } \varphi \neq 0 \\ \xleftarrow{\sim} G & \text{si } \varphi = 0 \quad . \end{cases}$$

C'est exactement ce qu'exprime le lemme suivant :

Lemme 1.2.6. Soient ϵ un module localement libre partout de rang ≥ 2 sur S , G un schéma en groupes de présentation finie sur S , $\varphi : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ un homomorphisme de groupes, $V(\epsilon)$ le fibré vectoriel défini par ϵ ,

$\mathbf{V}(\epsilon)^{\times}$ le fibré vectoriel épointé correspondant et $\Psi : \mathbf{V}(\epsilon)^{\times} \rightarrow G$ un S-morphisme vérifiant l'identité suivante entre S-morphismes de $G_m^{\times} \mathbf{V}(\epsilon)^{\times}$ dans G :

$$\Psi(\lambda v) : \Psi(\lambda)\Psi(v) .$$

Alors, $\Psi = e$, et Ψ se factorise par la projection p de $\mathbb{P}(\epsilon)$ sur S .

Il suffit de prouver la seconde assertion. On se ramène aussitôt au cas S noethérien, puis, par (SGA 3 IX 5.1) et le lemme de rigidité (Mumford [1,6.1 pg 115]) appliqué à $\mathbb{P}(\epsilon)$ au cas où S est le spectre d'un corps. Soient n un entier, W_n et G_n les voisinages infinitésimaux du $n^{\text{ième}}$ ordre de la section nulle dans $\mathbf{V}(\epsilon)$ et G, \mathfrak{g}_n l'algèbre affine de G_n et $P_n(\Psi) : \mathbf{V}(\epsilon)^{\times} \rightarrow \underline{\text{Hom}}_S(W_n, G)$ la partie principale du $n^{\text{ième}}$ ordre de Ψ . Toute section de $\underline{\text{Hom}}_S(W_n, G)$ définit, en translatant à droite par l'inverse de l'image de la section nulle, un homomorphisme de W_n dans G_n qui transforme o en e , ceci définit

$$\Psi_1 = P_n(\Psi) \cdot \Psi^{-1} : \mathbf{V}(\epsilon)^{\times} \rightarrow \underline{\text{Hom}}_S(W_n, G_n) .$$

L'hypothèse implique que Ψ_1 commute aux homothéties, que l'on fait agir sur le second membre par transport de structure à partir de leur action sur $W_n \subset \mathbf{V}(\epsilon)^{\times}$. L'algèbre affine de W_n est $\sum_{i=0}^n \text{Sym}^i(\epsilon)$. Vu son homogénéité, Ψ_1 est donc défini par une section, sur $\mathbb{P}(\epsilon)$, du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\epsilon)}$ -module

$$\sum_{i=0}^n p^{\times} \underline{\text{Hom}}(\mathfrak{g}_n, \text{Sym}^i(\epsilon))(-i) .$$

Les composantes d'indice $i > 0$ de ce module n'ont d'autre section que la section nulle, et on en conclut que

$$\Psi_1 = 0$$

Ceci, valant pour tout n , implique que Ψ se factorise par une section de G .

Cette seconde démonstration s'étend pour prouver la variante analytique suivante de 1.2.4. Lorsque G est affine, la démonstration de 1.2.2 peut se faire indépendamment de cette variante.

1.2.7. Soient L le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet \mathcal{O} , U_m le groupe rigide analytique "fibre générique" du complété formel de \mathbb{G}_m et $\mathcal{O}(1)^\wedge$ le U_m -torseur sur \mathbb{P}_L^r complété formel de $\mathcal{O}(1)$. Si G est un groupe rigide analytique sur L , le foncteur $(K_0, \mathcal{Y}) \mapsto p^* K_0 + \mathcal{Y} \mathcal{O}(1)^\wedge$ (cf. 1.2.1) est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des couples (K_0, \mathcal{Y}) formés d'un G -torseur sur $\text{Spec}(L)$ et de $\mathcal{Y} \in \text{Hom}(U, G)$, dans la catégorie des $p^* G$ -torseurs sur \mathbb{P}_L^r .

Lemme 1.2.8. Soient k un corps d'exposant caractéristique p et $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ un schéma propre sur k vérifiant $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ et $\text{Pic}_X^\tau = 0$. Pour tout schéma en groupe affine commutatif de type fini G sur k , ne contenant pas de tores, on a $R^1 f_{*}(f^* G) = 0$.

Il suffit de montrer qu'après tout changement de base, $c : S \rightarrow \text{Spec}(k)$, le foncteur f^* de la catégorie des G -torseurs sur S dans celle des G -torseurs sur X_S est une équivalence. Ce problème est local sur $\text{Spec}(k)$, de sorte que pour le résoudre on peut se ramener au cas où X a un point rationnel, où G est extension successive de groupes \mathbb{G}_a , α_p , μ_p , \mathbb{Z}/p et \mathbb{Z}/ℓ_i pour ℓ_i premier à p et où $\mathbb{Z}/\ell_i \sim \mu_{\ell_i}$.

On sait que $\text{Lie}(\text{Pic}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. D'après 1.2.3 et l'existence d'une section, les foncteurs f^* considérés sont pleinement fidèles; il suffit donc de prouver que $R^1 f_{*}(f^* G) = 0$, ou, par dévissage, que

$$R^1 f_{*} \mathbb{G}_a = R^1 f_{*} \alpha_p = R^1 f_{*} \mu_p = R^1 f_{*} \mathbb{Z}/p = R^1 f_{*} \mathbb{Z}/\ell_i = 0 \quad .$$

Pour \mathbb{G}_a , cela résulte de ce que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Le cas de α_p (resp. \mathbb{Z}/p) s'en déduit via 1.2.3., par la suite exacte longue de cohomologie définie par la suite exacte

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \alpha_p \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{x^p} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0 \\ \text{(resp. } 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{x-x^p} \mathbb{G}_a \longrightarrow 0 \text{ (} p \neq 1 \text{))} \end{array} \quad .$$

Le cas de \mathbb{Z}/ℓ_i (resp. de μ_p) se déduit de l'isomorphisme $\mathbb{Z}/\ell_i \sim \mu_{\ell_i}$,

de 1.2.3. et de la suite exacte longue déduite de la suite exacte de Kummer

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 .$$

Lemme 1.2.9. Soient S un schéma local artinien, \bar{s} un point géométrique de S , $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre et plat, et G un schéma en groupe commutatif plat de type fini sur S . On suppose f lisse ou G affine. Si $H^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{O}) = k(\bar{s})$, si $\text{Pic}_{X_{\bar{s}}}^{\tau} = 0$ et que $G_{\bar{s}}$ ne contient pas de sous-groupe \mathbb{G}_m , alors le foncteur f^{\times_S} de la catégorie des G -torseurs sur S dans celle des $f^{\times}G$ -torseurs sur X est une équivalence.

a. Le problème posé est local sur S lorsqu'on prend pour morphismes de localisation les morphismes $u : S' \rightarrow S$ finis et plats. Ceci permet de supposer que f admet une section x . Le foncteur f^{\times} est alors pleinement fidèle, d'après 1.2.3 et l'existence de x , et il reste à montrer que tout torseur, trivialisé le long de x , est trivial.

b. Supposons que S soit le spectre d'un corps. Si G est affine, l'assertion résulte de 1.2.8. Si X est lisse, et si G est extension d'une variété abélienne A par un groupe affine G_0 , désignons par G^n l'image réciproque de ${}_n A$ dans G . Le groupe $H^1(X, A)$ est de torsion (Raynaud [1, XIII 2.6]), donc réunion des images des $H^1(X, {}_n A)$. Le groupe $H^1(X, G)$ est dès lors réunion des images des $H^1(X, G^n)$. Les groupes G^n étant affine, on conclut encore par 1.2.8.

c. Prouvons le cas général (en supposant l'existence d'une section x) par récurrence sur la longueur de S . Soit $i : S_0 \hookrightarrow S$ un sous-schéma défini par un idéal I de carré nul et de longueur 1.

Les G -torseurs P sur X , tels que $x^{\times}P$ soit trivial, sont d'après l'hypothèse de récurrence des déformations du G -torseur trivial P_0 sur $X \times S_0$. Si G est lisse, et si L est l'algèbre de Lie de G_S , ces déformations sont classifiées par

$$H^1(X_S, f^*(L \otimes I)) = 0 ,$$

ce qui prouve 1.2.9 dans ce cas.

Pour G plat sur S , cet argument se généralise en terme du complexe de Lie L de G_S . Si $L \Omega(G_S/k(s))$ est le complexe cotangent relatif de G_S , ce complexe $L \in D^b(k(s))$ est le dual de $Le^*(L \Omega(G_S/k(s)))$. On a $H^i(L) = 0$ pour $i \neq 0, 1$.

Les déformations sur S (resp. sur X) du G -torseur trivial sur S_0 (resp. sur X_0) sont classifiées par $H^1(L \otimes I)$ (resp. par $H^1(X_S, f^*(L \otimes I))$) (Illusie [1]). Par hypothèse, on a $H^1(X_S, \underline{H}^0(f^*(L \otimes I))) = 0$ (car $H^1(X_S, \mathcal{O}) = 0$) et $H^1(L \otimes I) \sim H^0(X_S, \underline{H}^1(f^*(L \otimes I)))$. On en conclut que

$$H^1(L \otimes I) \xrightarrow{\sim} H^1(X_S, f^*(L \otimes I)) ,$$

ce qui signifie que toute déformation sur X du G -torseur trivial sur X_0 est image réciproque d'une et d'une seule déformation à S du G -torseur trivial sur S_0 . Si cette déformation est triviale le long d'une section, elle est donc triviale, ce qui prouve 1.2.9 .

1.2.10. Prouvons 1.2.2 lorsque S est artinien. Soit T le plus grand sous-tore de G ; puisqu'on dispose déjà de la pleine fidélité (1.2.4), le problème est local sur S pour la topologie étale : on peut supposer T diagonalisable : $T \sim \mathbb{G}_m^n$. Par 1.2.3., et 1.2.9 la suite exacte de cohomologie fournit

$$R^1 f_{\mathbf{x}} T \xrightarrow{\sim} R^1 f_{\mathbf{x}} G ,$$

et l'assertion en résulte, puisqu'elle est triviale pour $G = T$ et que $\text{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$ (cf. 1.2.2.1).

1.2.11. Prouvons 1.2.2 lorsque S est noethérien local complet. Soit s une section de p .

Si K est un G -torseur sur $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, il existe par 1.2.0 un unique couple $(\Psi^\wedge, \Psi^\wedge)$ formé d'un homomorphisme formel $\Psi^\wedge : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ et d'un isomorphisme

me formel $\Psi^\wedge : p^*s^*K + \Psi^\wedge \mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} K^\wedge$. Si G est affine, alors Ψ^\wedge est algébrisable (SGA 3 IX 7.1). Admettons provisoirement que, ainsi qu'on le prouvera en (1.2.7.3), Ψ^\wedge est toujours algébrisable en $\Psi : \mathbb{G}_m \rightarrow G$.

Si $K_0 = s^*K$, et si $K_1 = p^*K_0 + \Psi \mathcal{O}(1)$, on dispose d'un isomorphisme formel $\Psi^\wedge : K_1^\wedge = K(K_0, \Psi)^\wedge \xrightarrow{\sim} K^\wedge$, i.e. d'une trivialisation formelle de $K-K_1$. En vertu de GAGA formel, cette section est algébrique, ce qui prouve 1.2.11. Plus précisément, si G est quasi-affine, alors $K-K_1$ est représentable et on utilise EGA III 5.1.4. Dans le cas général, on procède de même avec l'espace algébrique $K-K_1$.

1.2.2.12. Algébraïcité de Ψ^\wedge : vérification préliminaire pour un trait de base.

Supposons que S soit un trait complet, $S = \text{Spec}(V)$, et soit L le corps des fractions de V .

a) Sur L , il existe un unique triple (K_{0L}, Ψ_L, Ψ_L) :

$$\Psi_L : K(K_{0L}, \Psi_L) \xrightarrow{\sim} K|_{\text{Spec}(L)} .$$

b) D'après (1.2.10) (1.2.2.11), et avec les notations de 1.2.7, on dispose d'une application rigide analytique $\Psi_L^\wedge : U_m \rightarrow G^\wedge$, d'un G^\wedge -torseur K_0^\wedge et d'un isomorphisme rigide analytique

$$\Psi^\wedge : p^*K_0^\wedge + \Psi_L^\wedge \mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} K^\wedge .$$

D'après l'assertion d'unicité 1.2.7, Ψ_L^\wedge s'identifie à l'application déduite de Ψ_L . Le morphisme formel Ψ^\wedge de 1.2.11 induit donc sur μ_n une application qui coïncide avec l'application déduite de l'application algébrique $\Psi_L : \mathbb{G}_m \rightarrow G$.

1.2.2.13. Algébraïcité de Ψ^\wedge .

L'application formelle $\Psi^\wedge : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ de 1.2.11 induit, pour ℓ inversible sur S , des applications

$$\Psi_\ell : T_\ell(\mathbb{G}_m^\wedge) = T_\ell(\mathbb{G}_m) \rightarrow T_\ell(G) .$$

D'après (1.2.12) et (EGA II 7.1.9), pour tout point t de S , il existe

un morphisme algébrique $\varphi_t : \mathbb{G}_{m_t} \rightarrow G_t$ tel que $T_\ell(\varphi_t) = T_\ell(\varphi)_t$. D'après (SGA 3 XV 4.1 bis) φ est donc algébrisable.

1.2.14. Prouvons 1.2.2. Par passage à la limite, on se ramène au cas S noethérien, puis S noethérien local d'algèbre affine A . Soit s une section de p . Soit K un G -torseur sur $\mathbb{P}(\epsilon)$. Sur $S' = \text{Spec}(A^\wedge)$, il existe un et un seul homomorphisme $\varphi' : \mathbb{G}_{m_{S'}} \rightarrow G_{S'}$, tel que l'image réciproque K' de K sur $\mathbb{P}(\epsilon) \times_S S'$ soit de la forme $K(K'_O, \varphi')$. Cet homomorphisme φ' se descend en $\varphi : \mathbb{G}_m \rightarrow G$. Pour prouver la surjectivité essentielle du foncteur 1.2.1, il est loisible de remplacer K par $K - \varphi \mathcal{O}(1)$, i.e. de supposer que $\varphi = 0$. Sur S' , il existe alors un et un seul isomorphisme $\psi : p'^* s^* K' \xrightarrow{\sim} K'$, induisant l'identité sur la section s . Ce morphisme se descend à S (descente fpqc de morphismes de toiseurs fppf), et ceci prouve 1.2.2.

Variantes 1.2.15. La conclusion de 1.2.2 est encore vérifiée dans les cas suivants.

- (i) G est défini par un Module quasi-cohérent sur S .
- (ii) G est image réciproque d'un faisceau de torsion sur le petit site étale de S .

Dans le cas (i), les flèches (1.2.2.1) sont des isomorphismes d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et la simple connexité de \mathbb{P}_k^r pour k algébriquement clos.

Dans le cas (ii), que les flèches (1.2.2.1) soient des isomorphismes est standard, compte tenu de ce que la cohomologie fppf de G coïncide avec sa cohomologie pour la topologie de Zariski.

1.3. Intégration des toiseurs.

1.3.1 Soient S un schéma et G un faisceau abélien sur le grand site fppf de S , vérifiant les 3 conditions suivantes.

(1.3.1.1) (i) Pour tout espace projectif $p : \mathbb{P}_S \rightarrow S$, avec $r \geq 1$, on a, dans le grand site fppf de S (XVII 0.10)

$$G \xrightarrow{\sim} p_{\ast} p^{\ast} G \text{ et}$$

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} R^1 p_{\ast} p^{\ast} G$$

(ii) Pour tout n et tout S-morphisme affine lisse $f : X \rightarrow T$, si K_1 et K_2 sont deux G-torseurs sur $\text{Sym}_T^n(X)$, l'ensemble $\text{Hom}(K_1, K_2)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes symétriques de l'image réciproque de K_1 sur $(X/T)^n$ dans l'image réciproque de K_2 sur $(X/T)^n$.

Cette condition équivaut à la conjonction de :

(ii') $\text{Hom}_S(\text{Sym}_T^n(X), G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S((X/T)^n, G)^{\mathfrak{S}_n}$, et

(ii'') Si l'image réciproque sur $(X/T)^n$ d'un torseur K sur $\text{Sym}_T^n(X)$ admet une section symétrique, alors K est trivial.

(iii) G vérifie soit la condition (XVII 6.3.21.1), soit les conditions (XVII 6.3.24.1) et (XVII 6.3.24.2).

La conclusion de 1.2.2 est donc vérifiée (cf. 1.2.2.1), ainsi que le formulaire XVII 6.3.26 .

La condition (i) est discutée en 1.2.2 et 1.2.15 . La condition (ii) est vérifiée dès que G est représentable de présentation finie, où image réciproque d'un faisceau sur le petit site étale de S , ou plat quasi-cohérent. La condition 1.3.1.1 est donc vérifiée dans chacun des cas suivants.

(1.3.1.2) (a) G est lisse de présentation finie (1.2.2 et XVII 6.3.21.1).

(b) G est image réciproque d'un faisceau de torsion sur le petit site étale de S (1.2.15 (ii) et XVII 6.3.21.1).

(c) G est affine, et noyau d'un épimorphisme de groupes lisses (1.2.2 et XVII 6.3.3.1).

(d) G est défini par un faisceau quasi cohérent plat sur S (1.2.15 (i) et XVII 6.3.21.1).

1.3.2. Soit $f : X \rightarrow S$ une courbe projective et lisse sur un schéma S , à fibres géométriques connexes non vides. Soit \mathcal{L} faisceau inversible sur X "suffisamment" relativement ample au sens suivant.

(1.3.2.1) Pour tout point géométrique s de S , si X_s est de genre g , alors

$$\deg_{X_s}(\mathcal{L}) > 2g - 2 \quad ,$$

$$\deg_{X_s}(\mathcal{L}) \geq 1 \text{ si } g = 0, \text{ et } \deg_{X_s}(\mathcal{L}) \geq 2 \text{ si } g = 1$$

On a alors $R^1 f_{*} \mathcal{L} = 0$, et $f_{*} \mathcal{L}$ est localement libre de formation compatible à tout changement de base, et partout de rang ≥ 2 . Si une section s de $f_{*} \mathcal{L}$ ne s'annule en aucun point, le schéma D_s des zéros de s , regardé comme section de \mathcal{L} sur X , est un diviseur relatif (EGA IV 21.15.2), fini localement libre sur S puisque X/S est de dimension relative 1. On a canoniquement

$$s : \mathcal{O}(D_s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} \quad .$$

Le diviseur D_s ne dépend de s qu'à multiplication par une section de \mathcal{O}_S^* près. La construction précédente nous fournit donc un diviseur relatif $Z_{\mathcal{L}}$ sur le schéma déduit de X par le changement de base

$$p : \mathbb{P}(f_{*}(\mathcal{L})^{\vee}) \longrightarrow S \quad .$$

Soit K un torseur sous G_X , et soit $K|_{Z_{\mathcal{L}}}$ son image réciproque sur $Z_{\mathcal{L}}$. La trace de ce torseur (XVII 6.3.26), de $Z_{\mathcal{L}}$ à $\mathbb{P}(f_{*}(\mathcal{L})^{\vee})$ est un torseur $K_{\mathcal{L}}$ sur $\mathbb{P}(f_{*}(\mathcal{L})^{\vee})$:

$$K_{\mathcal{L}} = \text{Tr}_{Z_{\mathcal{L}}/\mathbb{P}}(K|_{Z_{\mathcal{L}}}) \quad .$$

En vertu de 1.2.2, il existe un triple, unique à isomorphisme unique près, formé d'un G -torseur $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ sur S , d'un morphisme $\varphi_{\mathcal{L}, K} : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ et d'un isomorphisme

$$K_{\mathcal{L}} \simeq p^* \langle \mathcal{L}, K \rangle + \varphi_{\mathcal{L}, K}^{\circ}(1) \quad .$$

1.3.3. Si on note additivement la composition des toseurs, on a canoniquement

$$(1.3.3.1) \quad \langle \mathcal{L}, K_1 + K_2 \rangle \approx \langle \mathcal{L}, K_1 \rangle + \langle \mathcal{L}, K_2 \rangle$$

$$(1.3.3.2) \quad \varphi_{\mathcal{L}, K_1 + K_2} = \varphi_{\mathcal{L}, K_1} + \varphi_{\mathcal{L}, K_2} \quad .$$

Soient \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 deux faisceaux inversibles sur X vérifiant (1.3.3.1), et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$. Le produit tensoriel des sections définit un morphisme

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}(f_x^*(\mathcal{L}_1)^\vee) \times_S \mathbb{P}(f_x^*(\mathcal{L}_2)^\vee) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}(f_x^*(\mathcal{L})^\vee) & & \\
 \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow p \\
 \mathbb{P}(f_x^*(\mathcal{L}_1)^\vee) & & \mathbb{P}(f_x^*(\mathcal{L}_2)^\vee) & & \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & \downarrow p \\
 & \downarrow p_{12} & & & \\
 S & \xrightarrow{\quad} & S & & S
 \end{array}$$

On a $\pi^*Z + Z_{\mathcal{L}_1} + Z_{\mathcal{L}_2}$, d'où un isomorphisme (XVII 6.3.27.1)

$$(1.3.3.3) \quad \pi^*K_{\mathcal{L}} \approx \text{pr}_1^*K_{\mathcal{L}_1} + \text{pr}_2^*K_{\mathcal{L}_2} \quad .$$

On dispose d'un isomorphisme canonique

$$\pi^*\mathcal{O}(1) \approx \text{pr}_1^*\mathcal{O}(1) \otimes \text{pr}_2^*\mathcal{O}(1) \quad ,$$

de sorte que (1.3.3.3) se réécrit

$$\begin{aligned}
 \pi^*(\langle \mathcal{L}, K \rangle + \varphi_{\mathcal{L}, K} \mathcal{O}(1)) & \approx p_{12}^* \langle \mathcal{L}, K \rangle + \text{pr}_1^* \varphi_{\mathcal{L}, K} \mathcal{O}(1) + \text{pr}_2^* \varphi_{\mathcal{L}, K} \mathcal{O}(1) \\
 p_{12}^* \langle \mathcal{L}_1, K \rangle + p_{12}^* \langle \mathcal{L}_2, K \rangle & + \text{pr}_1^* \varphi_{\mathcal{L}_1, K} \mathcal{O}(1) + \text{pr}_2^* \varphi_{\mathcal{L}_2, K} \mathcal{O}(1) \quad .
 \end{aligned}$$

On en déduit, par une double application de 1.2.2, un isomorphisme canonique

$$(1.3.3.4) \quad \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K \rangle \approx \langle \mathcal{L}_1, K \rangle + \langle \mathcal{L}_2, K \rangle$$

et une identité

$$\varphi_{\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K} = \varphi_{\mathcal{L}_1, K} = \varphi_{\mathcal{L}_2, K} .$$

On voit donc que $\varphi_{\mathcal{L}, K}$ ne dépend que de K , et on pose

$$(1.3.3.5) \quad \text{deg}(K) = \varphi_{\mathcal{L}, K} .$$

On a donc

$$(1.3.3.6) \quad K_{\mathcal{L}} \simeq p^* \langle \mathcal{L}, K \rangle + \text{deg}(K) \mathcal{O}(1) .$$

$$(1.3.3.7) \quad \text{deg}(K_1 + K_2) = \text{deg}(K_1) + \text{deg}(K_2) .$$

Soit \mathcal{U} un faisceau inversible localement facteur direct $f_x^* \mathcal{L}$, définissant une section u de $\mathbb{P}((f_x^* \mathcal{L})^\vee)$. Soit D_u le diviseur relatif défini par les sections locales inversibles de \mathcal{U} .

$$u_s^* \mathcal{O}(1) + \mathcal{U}_s^\vee$$

et on déduit donc de 1.3.3.6 que

$$(1.3.3.8) \quad u^* K_{\mathcal{L}} = \text{Tr}_{D/S}(K) \simeq \langle \mathcal{L}, K \rangle - \text{deg}(K) \mathcal{U} .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité:

Proposition 1.3.4 Le diagramme suivant d'isomorphismes 1.3.3.1 et 1.3.3.4 est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K_1 + K_2 \rangle & \simeq & \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, K_2 \rangle \\ & & \parallel \\ & & \langle \mathcal{L}_1, K_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_2, K_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_1, K_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2, K_2 \rangle \\ & & \parallel \\ \langle \mathcal{L}_1, K_1 + K_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2, K_1 + K_2 \rangle & \simeq & \langle \mathcal{L}_1, K_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_1, K_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2, K_1 \rangle + \langle \mathcal{L}_2, K_2 \rangle . \end{array}$$

Les isomorphismes (1.3.3.1) et (1.3.3.4) sont de plus compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité en un sens qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. La formule (1.3.3.4) permet alors de prolonger par "linéarité" la définition de $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ lorsque \mathcal{L}

ne vérifie plus nécessairement la condition (1.3.2.1).

1.3.5. Pour tout diviseur relatif D sur X , on pose

$$(1.3.5.0) \quad \text{Tr}_{D/S}(K) = \text{Tr}_{D/S}(K|D) \quad .$$

Si $\mathcal{O}(D)$ vérifie (1.3.2.1), la section 1 de $\mathcal{O}(D)$ est une section de $f_{\mathbf{x}}\mathcal{O}(D)$, et engendre en tant que telle un faisceau inversible localement facteur direct de $f_{\mathbf{x}}\mathcal{O}(D)$, dont elle définit une trivialisatation. L'isomorphisme 1.3.3.8 nous fournit donc un isomorphisme

$$(1.3.5.1) \quad \langle \mathcal{O}(D), K \rangle \simeq \text{Tr}_{D/S}(K) \quad .$$

On vérifie aussitôt que les diagrammes

$$(1.3.5.2) \quad \begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(D), K_1 + K_2 \rangle & \simeq & \text{Tr}_{D/S}(K_1 + K_2) \\ \Big\} & & \Big\} \\ \langle \mathcal{O}(D), K_1 \rangle + \langle \mathcal{O}(D), K_2 \rangle & \simeq & \text{Tr}_{D/S}(K_1) + \text{Tr}_{D/S}(K_2) \end{array}$$

et

$$(1.3.5.3) \quad \begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(D_1 + D_2), K \rangle & \simeq & \text{Tr}_{D_1 + D_2/S}(K) \\ \Big\} & & \Big\} \text{ (XVII 6.3.27.1)} \\ \langle \mathcal{O}(D_1), K \rangle + \langle \mathcal{O}(D_2), K \rangle & \simeq & \text{Tr}_{D_1/S}(K) + \text{Tr}_{D_2/S}(K) \end{array}$$

sont commutatifs. Ceci permet, par linéarité, de définir l'isomorphisme (1.3.5.1) pour tout diviseur relatif.

1.3.6. Soient D et E deux diviseurs de Cartier relatif effectifs, et soit f une fonction rationnelle telle que

$$\text{div}(f) = D - E \quad ,$$

i.e. un isomorphisme entre $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$. L'isomorphisme f entre $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(E)$ définit, par (1.3.5.1), un isomorphisme

$$(1.3.6.1) \quad \langle f, K \rangle : \text{Tr}_{D/S}(K) \xrightarrow{\sim} \text{Tr}_{E/S}(K) \quad .$$

On a, par 1.3.5.2 pour la seconde formule :

$$\begin{aligned}\langle fg, K \rangle &= \langle f, K \rangle \cdot \langle g, K \rangle \\ \langle f, K_1 + K_2 \rangle &= \langle f, K_1 \rangle + \langle f, K_2 \rangle \quad .\end{aligned}$$

Si λ est une section de \mathcal{O}_S^* , alors, pour tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X , la multiplication par λ est un automorphisme de \mathcal{L} . Par transport de structure, cet automorphisme induit sur les deux membres de 1.3.3.8 des automorphismes qui se déduisent l'un de l'autre via l'isomorphisme 1.3.3.8. On en déduit que

$$\langle \lambda, K \rangle = \deg(K) (\lambda) \quad ,$$

si $\deg(K) \neq 0$, l'isomorphisme $\langle f, K \rangle$ entre $\text{Tr}_{D/S}(K)$ et $\text{Tr}_{E/S}(K)$ dépend donc du choix de f .

Soient $\lambda \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$, $g \in \Gamma(S, G)$, \mathcal{L} un faisceau inversible sur X et K un G -torseur sur X . Si $\langle \lambda, g \rangle$ est l'automorphisme de $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ déduit par transport de structure des automorphismes λ de \mathcal{L} et g de K , alors, $\langle \lambda, g \rangle$, identifié à une section de G , est donné par $\langle \lambda, g \rangle = \langle \lambda, K \rangle + \langle \mathcal{L}, g \rangle$; puisque $\langle \mathcal{O}(D), g \rangle = \text{Tr}_{D/S}(g)$, on tire de la formule précédente que

$$(1.3.6.2) \quad \langle \lambda, g \rangle = \deg(K) (\lambda) + \deg(\mathcal{L}) \cdot g \quad .$$

1.3.7. Soit $f : X \rightarrow S$ une courbe projective et lisse sur S et G un groupe sur S vérifiant 1.3.1.1. Si $X \xrightarrow{f_0} T \xrightarrow{\pi} S$ est la factorisation de Stein de f , alors π est un revêtement étale de S et le faisceau $f_* G_m$ est le tore $\prod_{T/S} G_m$. Localement sur S (pour la topologie étale), X est somme d'une famille de courbes $(X_i)_{i \in I}$ sur S à fibres géométriques connexes non vides. Si K est un toseur sous G et \mathcal{L} un faisceau inversible sur X , on pose alors

$$\langle \mathcal{L}, K \rangle = \sum_i \langle \mathcal{L}|_{X_i}, K|_{X_i} \rangle$$

et on définit le degré de $K : f_* G_m = G_m^I \rightarrow G$ comme ayant les coordonnées $\deg(K|_{X_i}) : G_m \rightarrow G$. Les constructions locales se globalisent et

fournissent des foncteurs et morphismes

$$(1.3.7.1) \quad \langle \mathcal{L}, K \rangle_{X/S} = \text{Tr}_{T/S}(\langle \mathcal{L}, K \rangle_{X/T})$$

$$(1.3.7.2) \quad \text{deg}(K) : f_{\mathbf{x}}^* \mathbb{G}_m = \prod_{T/S} \mathbb{G}_m \longrightarrow G : \text{deg}_{X/S}(K) = \prod_{T/S} \text{deg}_{X/T}(K) .$$

Pour λ un automorphisme de \mathcal{L} , défini par un élément λ_0 de $\Gamma(T, \mathcal{O}_T^{\mathbf{x}})$, on a

$$(1.3.7.3) \quad \langle \lambda, K \rangle = \text{deg}(K)(\lambda) .$$

On définit le degré total de K comme le composé

$$\text{deg tot}(K) : \mathbb{G}_m \longrightarrow f_{\mathbf{x}}^* \mathbb{G}_m \xrightarrow{\text{deg}(K)} G .$$

Les résultats qui précèdent fournissent :

Formulaire 1.3.8.: Pour toute courbe projective et lisse $f : X \rightarrow S$, on dispose d'un foncteur $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de formation compatible à tout changement de base, qui à un faisceau inversible \mathcal{L} sur X et à un torseur K sous f^*G associe un torseur $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ sous G sur S . Ce foncteur est muni des structures additionnelles suivantes et vérifie les conditions suivantes :

(1.3.8.1) $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ est biadditif en \mathcal{L} et K ; les isomorphismes de biadditivité sont compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité, aux changements de base, vérifient la compatibilité (1.3.4) et sont compatibles aux isomorphismes (1.3.8.2) ci-dessous (via XVII 6.3.25.3 et XVII 6.3.27.1).

(1.3.8.2) On a, pour tout diviseur relatif effectif E sur X/S , un isomorphisme canonique

$$\langle \mathcal{O}(E), K \rangle \simeq \text{Tr}_{E/S}(K|E) .$$

(1.3.8.3) Le degré 1.3.7.2 vérifie pour $\lambda \in f_{\mathbf{x}}^* \mathbb{G}_m$ automorphisme de \mathcal{L}

$$\langle \lambda, K \rangle = \text{deg}(K)(\lambda) .$$

Pour $\lambda \in \mathbb{G}_m(S)$, le degré total vérifie

$$\langle \lambda, K \rangle = \text{deg tot}(K)(\lambda) .$$

De même, pour $g \in G(S)$ on a $\langle \mathcal{L}, g \rangle = \text{deg}(\mathcal{L}) \cdot g$.

On en déduit un isomorphisme canonique :

$$(1.3.8.4) \quad \langle f^* \mathcal{L}, K \rangle \simeq \text{deg tot}(K)(\mathcal{L}) \quad .$$

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout homomorphisme $\varphi: G \rightarrow G'$, on dispose d'un isomorphisme canonique, compatible aux données qui précèdent :

$$(1.3.8.5) \quad \langle \mathcal{L}, \varphi(K) \rangle \simeq \varphi(\langle \mathcal{L}, K \rangle) \quad .$$

(1.3.8.6) Soit $u: X \rightarrow Y$ un morphisme plat entre courbes projectives et lisses sur S . On dispose alors d'isomorphismes compatibles à la biadditivité et aux changements de base :

- Pour \mathcal{L} faisceau inversible sur X et K un G_Y -torseur sur Y , on a

$$\langle \mathcal{L}, u^* K \rangle \xrightarrow{\sim} \langle N_{X/Y}(\mathcal{L}), K \rangle \quad .$$

- Pour \mathcal{L} faisceau inversible sur X et K un G_X -torseur sur X , on a

$$\langle u^* \mathcal{L}, K \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \text{Tr}_{X/Y} K \rangle \quad .$$

De plus, ces isomorphismes vérifient une compatibilité évidente pour un composé uv de morphismes de courbes; pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}(E)$, ils s'identifient aux isomorphismes (XVII 6.3.27.2)

$$\text{Tr}_{E/S}(u^* K) \xrightarrow{\sim} \text{Tr}_{p_x^* E/S}(K)$$

$$\text{Tr}_{p_x^* E/S}(K) \xrightarrow{\sim} \text{Tr}_{E/S} \text{Tr}_{X/Y} K \quad .$$

Reste à prouver 1.3.8.6. On se ramène au cas X et Y à fibres géométriques connexes non vides et on note que les formules explicites qui précèdent fournissent, pour chaque section s de \mathcal{L} , qui ne s'annule pas en tant que section de l'image directe de \mathcal{L} , un isomorphisme Ψ_s du type voulu, homogène en s , et donc indépendant de s pour \mathcal{L} vérifiant (1.3.2.1). Le cas général s'en déduit.

1.3.9. Sous les hypothèses 1.3.7, on a vu (1.3.8) que tout G -torseur K sur X définit un foncteur $\langle \ast, K \rangle$, désigné ci-dessous par $F(\ast)$,

muni des données additionnelles suivantes et vérifiant les conditions suivantes :

- (i) F est un morphisme de champ fppf sur S (XVII 0.10 et Giraud [1])
- de source le champ dont les T -objets, pour T un S -schéma, sont les faisceaux inversibles sur X_T
 - de but le champ des G -torseurs.
- (ii) Le foncteur F est muni d'isomorphismes d'additivité $F(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \xrightarrow{\sim} F(\mathcal{L}_1) + F(\mathcal{L}_2)$, fonctoriels, compatibles aux isomorphismes d'associativité et de commutativité, et compatibles aux changements de base.

Théorème 1.3.10. Sous les hypothèses de 1.3.7, le foncteur $\phi : K \rightarrow \langle *, K \rangle$ est une équivalence entre la catégorie des G -torseurs sur X et la catégorie des morphismes de champs considérés en (1.2.9).

On se ramène facilement au cas où X est à fibres connexes non vides.

Soit F vérifiant 1.3.9 (i) et (ii). Pour tout S -schéma T et toute section t de X_T/T , désignons encore par t le diviseur relatif $t(S)$. $F(\mathcal{O}(t))$ est alors un G_T -torseur sur T . On désignera par $\Psi(F)$ le torseur ainsi obtenu sur X , pour t le "point universel" de X , à valeur dans X , défini par l'application identique de X dans X . Pour toute section t comme plus haut, on a

$$(1.3.10.1) \quad F(\mathcal{O}(t)) \simeq t^* \Psi(F) \quad .$$

L'isomorphisme 1.3.8.2 fournit un isomorphisme de foncteurs $\Psi \circ \phi \simeq \text{Id}$. Construisons un isomorphisme $\phi \circ \Psi \simeq \text{Id}$.

Pour chaque section t de X_T sur T , l'isomorphisme (1.3.10.1) est un isomorphisme

$$F(\mathcal{O}(t)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(t), \Psi(F) \rangle \quad .$$

Par addition, chaque famille $t_1 \dots t_n$ de sections de X_T sur T définit un isomorphisme

$$F(\mathcal{O}(\sum t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(\sum t_i), \Psi(F) \rangle \quad ,$$

et d'après 1.3.9 (ii), cet isomorphisme ne dépend pas de l'ordre des t_i .

Prenons $T = (X/S)^n$ et pour $t_1 \dots t_n$ le $n^{\text{up}}\text{le}$ universel de sections. Si $T' = \text{Sym}_S^n(X)$, on dispose alors sur $X_{T'}$, d'un diviseur Σt_i , dont le diviseur Σt_i sur $X_{T'}$ soit image réciproque. Sur T , α est un isomorphisme symétrique

$$\alpha : F(\mathcal{O}(\Sigma t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(\Sigma t_i), \Psi(F) \rangle$$

entre torseurs image réciproque de torseurs sur T' . Par hypothèse (1.3.1.1)(ii), cet isomorphisme provient d'un et d'un seul isomorphisme sur T'

$$\alpha : F(\mathcal{O}(\Sigma t_i)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(\Sigma t_i), \Psi(F) \rangle \quad (\text{sur } T') .$$

D'après XVII 6.3., on dispose ainsi pour tout diviseur relatif D sur X d'un isomorphisme

$$(1.3.10.2) \quad \alpha_D : F(\mathcal{O}(D)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(D), \Psi(F) \rangle ,$$

additif en D , et de formation compatible à tout changement de base.

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible suffisamment ample sur X au sens 1.3.2.1 . Chaque section partout non nulle s de $f_x^* \mathcal{L}$ définit, avec les notations de 1.3.2 , un isomorphisme

$$s : \mathcal{O}(D_s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L} ,$$

d'où, par (1.3.10.2), un isomorphisme

$$(1.3.10.3) \quad \alpha_s : F(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \Psi(F) \rangle .$$

Prouvons que cet isomorphisme ne dépend pas de s . En effet :

(i) La formation de α_s est compatible à tout changement de base

(ii) Il existe un homomorphisme $\Psi : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ tel que

$$\alpha_{\lambda s} = \Psi(\lambda) \cdot \alpha_s$$

(d'après la functorialité des deux membres de (1.3.10.3)).

On a nécessairement $\Psi = 0$, sans quoi le torseur sur $\mathbb{P}((f_x^* \mathcal{L})^\vee)$ image réciproque de $F(\mathcal{L}) - \langle \mathcal{L}, \Psi(F) \rangle$ serait de degré $\neq 0$. Les α_s définissent donc un morphisme de $\mathbb{P}((f_x^* \mathcal{L})^\vee)$ dans G , et ce dernier est constant par

hypothèse ((1.3.1.1)(i)). On peut donc poser $\alpha_{\mathcal{L}} = \alpha_s$.

Les isomorphismes $\alpha_{\mathcal{L}}$ forment donc un isomorphisme de foncteur entre les restrictions des foncteurs F et $\langle *, \Psi(F) \rangle$ aux faisceaux suffisamment amples. Cet isomorphisme est compatible aux isomorphismes d'additivité, ce qui permet de le prolonger par linéarité à tous les faisceaux inversibles et achève la construction de

$$\alpha : \Phi \circ \Psi \simeq \text{Id} .$$

Exemple 1.3.11.: $G = \mathbb{G}_m$. Sous les hypothèses 1.3.7, et dans le cas particulier où $G = \mathbb{G}_m$, on écrira \langle , \rangle plutôt que $\langle , \square \rangle$; si \mathcal{L} et \mathcal{M} sont deux faisceaux inversibles sur X , alors $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ est un faisceau inversible sur S . On dispose de plus d'isomorphismes (1.3.8.2)

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{M} \rangle \simeq N_{D/S}(\mathcal{M}) .$$

Si D et E sont des diviseurs relatifs effectifs disjoints, alors $\mathcal{O}(E)|_D$ est canoniquement isomorphe à \mathcal{O} , d'où un isomorphisme

$$(1.3.11.1) \quad \sigma_{D,E} : \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \simeq N_{D/S}(\mathcal{O}(E)) \simeq N_{D/S}(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O} .$$

Proposition 1.3.12.: Soient $(D_i)_{i=1,2}$ et E des diviseurs relatifs effectifs, avec D_i disjoint de E ($i=1,2$). Soit f une fonction rationnelle vérifiant $\text{div}(f) = D_1 - D_2$, i.e. un isomorphisme $f : \mathcal{O}(D_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D_2)$. Les diagramme d'isomorphismes suivants sont commutatifs

$$(1.3.12.1) \quad \begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(D_1), \mathcal{O}(E) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{D_1,E}} & \mathcal{O} \\ \downarrow \langle f, \mathcal{O}(E) \rangle & & \downarrow N_{E/S}(f) \\ \langle \mathcal{O}(D_2), \mathcal{O}(E) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{D_2,E}} & \mathcal{O} \end{array}$$

$$(1.3.12.2) \quad \begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{O}(D_1) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{E,D_1}} & \mathcal{O} \\ \downarrow \langle \mathcal{O}(E), f \rangle & & \downarrow N_{E/S}(f) \\ \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{O}(D_2) \rangle & \xrightarrow{\sigma_{E,D_2}} & \mathcal{O} \end{array}$$

La formule (1.3.12.2) exprime simplement la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} N_{E/S}(\mathcal{O}(D_1)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O} \\ \downarrow N_{E/S}(f) & & \downarrow N_{E/S}(f) \\ N_{E/S}(\mathcal{O}(D_2)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O} \end{array}$$

Pour tout S -schéma T et tout faisceau inversible \mathcal{L} sur X_T , posons $F(\mathcal{L}) = N_{E_T/T}(\mathcal{L})$. Les hypothèses de 1.3.10 sont vérifiées par ce foncteur, de sorte qu'il existe un unique faisceau inversible \mathcal{M} muni d'un isomorphisme de foncteur compatible à la biadditivité :

$$N_{E_T/T}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle .$$

De plus, si $d : T \rightarrow X_T$ est une section de X sur T , on a canoniquement

$$d^* \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} N_{E_T/T}(\mathcal{O}(d)) .$$

Prenant pour d la section universelle, de X , $\Delta : X \rightarrow X_X$, on trouve

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) .$$

Localement sur S , E est une somme de sections $E = \sum t_i$ (XVII 6.3); pour un tel E , on a

$$N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) = \bigotimes t_i^* \mathcal{O}(\Delta) = \sum \mathcal{O}(t_i) = \mathcal{O}(E) ,$$

et cet isomorphisme, étant indépendant de l'ordre des t_i , définit un isomorphisme canonique

$$(1.3.12.3) \quad N_{E_X/X}(\mathcal{O}(\Delta)) \sim \mathcal{O}(E) ,$$

de sorte que

$$(1.3.12.4) \quad N_{E_T/T}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{O}(E) \rangle .$$

L'isomorphisme (1.3.12.3) est compatible à la biadditivité, aux changements de base et est caractérisé par le fait que, de plus, pour

toute section d de X_T sur T , l'isomorphisme

$$N_{E/T}(\mathcal{O}(d)) \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(E) \rangle \xrightarrow{\sim} d^* \mathcal{O}(E)$$

est image réciproque de l'isomorphisme universel (1.3.12.3). En particulier, pour d disjoint de E , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} N_{E/T}(\mathcal{O}(d)) & \xrightarrow{\sim} & \langle \mathcal{O}(d), \mathcal{O}(E) \rangle \xrightarrow{\sim} d^* \mathcal{O}(E) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} \end{array}$$

est commutatif. Par addition, on en déduit que pour D disjoint de E , le diagramme

$$(1.3.12.5) \quad \begin{array}{ccc} N_{E/T}(\mathcal{O}(D)) & \xrightarrow{\sim} & \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \xrightarrow{\sim} N_{D/T}(\mathcal{O}(E)) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{O} \end{array}$$

est commutatif. La flèche σ_{E, D_1} est donc composée de l'inverse de 1.3.12.4 et d'une flèche évidente

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \xleftarrow{\sim} N_{E/S}(\mathcal{O}(D)) \longrightarrow \mathcal{O}$$

et 1.3.12.2 en résulte aussitôt, puisque 1.3.12.4 est fonctoriel.

On déduit de 1.3.12 (cf. SERRE [1] Ch III prop 7 pg 46)

Corollaire 1.3.13.: Soient $(D_i)_{i=1,2}$ et $(E_i)_{i=1,2}$ des diviseurs relatifs effectifs, avec D_i disjoint de E_j , f une fonction rationnelle vérifiant $\text{div}(f) = D_1 - D_2$ et g une fonction rationnelle vérifiant $\text{div}(g) = E_1 - E_2$. On a alors

$$N_{E_1/S}(f) \cdot N_{E_2/S}(f)^{-1} = N_{D_1/S}(g) \cdot N_{D_2/S}(g)^{-1}$$

soit brièvement

$$(1.3.13.1) \quad f(\text{div}(g)) = g(\text{div}(f)) .$$

Cette formule, sous la forme

$$N_{D_2/S}(g) N_{E_1/S}(f) = N_{E_2/S}(f) N_{D_1/S}(g) ,$$

exprime, via (1.3.12.1) et (1.3.12.2) la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \langle \mathcal{O}(D_1), \mathcal{O}(E_1) \rangle & \xrightarrow{\langle \mathcal{O}(D_1), g \rangle} & \langle \mathcal{O}(D_1), \mathcal{O}(E_2) \rangle \\
 \downarrow \langle f, \mathcal{O}(E_1) \rangle & & \downarrow \langle f, \mathcal{O}(E_2) \rangle \\
 \langle \mathcal{O}(D_2), \mathcal{O}(E_1) \rangle & \xrightarrow{\langle \mathcal{O}(D_2), g \rangle} & \langle \mathcal{O}(D_2), \mathcal{O}(E_2) \rangle .
 \end{array}$$

Corollaire 1.3.14. Pour $G = \mathbb{G}_m$, le degré (1.3.2.7) coïncide avec le degré usuel des faisceaux inversibles.

Il suffit de comparer les formules (1.3.7.3) et (1.3.12.1) pour f image réciproque de $f_0 \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^{\times})$.

1.3.15. Quels que soient \mathcal{L} et \mathcal{M} , suffisamment amples, il existe localement sur S des diviseurs disjoints D et E et des isomorphismes

$$\alpha : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}(D) \quad \text{et} \quad \beta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O}(E) .$$

Désignons par τ l'isomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\langle \alpha, \beta \rangle} \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \xrightarrow{\sigma_{D,E}} \mathcal{O} \\
 \left. \vphantom{\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle} \right\} \tau \quad \quad \quad \parallel \\
 \langle \mathcal{M}, \mathcal{L} \rangle \xrightarrow{\langle \beta, \alpha \rangle} \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{O}(D) \rangle \xrightarrow{\sigma_{E,D}} \mathcal{O} .
 \end{array}$$

Il résulte de 1.3.12 que cet isomorphisme ne dépend pas du choix particulier de D, E , α et β ; il se globalise donc en un isomorphisme canonique

$$(1.3.15.1) \quad \tau : \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle .$$

Cet isomorphisme vérifie $\tau^2 = 1$; il est compatible à la biadditivité, puisque (1.3.11.1) l'est, et se prolonge par linéarité à des faisceaux inversibles quelconques.

Il résulte de (1.3.12.5) que le morphisme (1.3.12.4) s'identifie au composé

$$N_{E/T}(\mathcal{L}) \xleftarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{L} \rangle \xrightarrow{\sim \tau} \langle \mathcal{L}, \mathcal{O}(E) \rangle$$

(le vérifier pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$ avec D disjoint de E).

Formulaire 1.3.16. Pour toute courbe projective et lisse $f : X \rightarrow S$, on dispose d'un foncteur \langle , \rangle , de formation compatible à tout changement de base, qui à deux faisceaux inversibles \mathcal{L} et \mathcal{M} sur X associe un faisceau inversible $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ sur S . Ce foncteur est muni des structures additionnelles suivantes et vérifie les conditions suivantes :

1.3.16.1. Avec les notations de 1.3.8., pour $G = \mathbb{G}_m$, on a

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle = \langle \mathcal{L}, \mathcal{M}] ,$$

en particulier, $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ est biadditif en \mathcal{L}, \mathcal{M} au sens précisé en 1.3.8.1 et cette biadditivité est compatible à celle du second membre d'un isomorphisme canonique (fonctoriel en \mathcal{M})

$$\langle \mathcal{O}(E), \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\sim} N_{E/S}(\mathcal{M}) .$$

1.3.16.2. On dispose d'un isomorphisme de symétrie

$$\tau : \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{M}, \mathcal{L} \rangle ,$$

fonctoriel en \mathcal{L} et \mathcal{M} , compatible aux changements de base, aux isomorphismes de biadditivité et vérifiant $\tau^2 = 1$. Il rend commutatif le diagramme suivant, pour D et E diviseurs disjoints :

$$\begin{array}{ccccc} N_{D/S}(\mathcal{O}(E)) & \longleftarrow & \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle & \xrightarrow{\tau} & \langle \mathcal{O}(E), \mathcal{O}(D) \rangle & \longrightarrow & N_{E/S}(\mathcal{O}(D)) \\ \parallel & & & & & & \parallel \\ \mathcal{O} & \longleftarrow & \mathcal{O} & & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O} \end{array}$$

Ces formules impliquent les formules (1.3.12.1) (1.3.12.2)

(1.3.13.1) et

(1.3.16.3) Pour $a, b \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ on a, désignant par $\langle a, b \rangle$ l'automorphisme de $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$, identifié à une section de \mathbb{G}_m , déduit par functorialité des automorphismes a et b de \mathcal{L} et \mathcal{M} ,

$$\langle a, b \rangle = a^{\deg(\mathcal{M})} b^{\deg(\mathcal{L})} .$$

(1.3.16.4) On a, si \mathcal{L}_0 (resp. \mathcal{M}_0) est un Module inversible sur S , un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \langle f^* \mathcal{L}_0, \mathcal{M} \rangle &\xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes \deg(\mathcal{M})} \\ (\text{resp. } \langle \mathcal{L}, f^* \mathcal{M}_0 \rangle &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\otimes \deg(\mathcal{L})} \quad). \end{aligned}$$

1.3.16.5. Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini et plat de courbes projectives et lisses sur S , alors, pour \mathcal{L} faisceau inversible sur X et \mathcal{M} faisceau inversible sur Y , les isomorphismes 1.2.9.7

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}, u^* \mathcal{M} \rangle &\sim \langle N_{X/Y} \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \\ \langle u^* \mathcal{M}, \mathcal{L} \rangle &\sim \langle \mathcal{M}, N_{X/Y} \mathcal{L} \rangle \end{aligned}$$

se déduisent l'un de l'autre par la symétrie (1.2.16.2) (le voir pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{M} = \mathcal{O}(F)$ avec E et F disjoints).

1.3.16.6. Pour \mathcal{L} un faisceau inversible sur X , la flèche de symétrie

$$\tau : \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle$$

est la multiplication par $(-1)^{\deg(\mathcal{L})}$.

1.3.17. Il reste à prouver 1.3.16.6. On donnera deux démonstrations, la première faisant usage de la théorie du déterminant (SGA 6 XI).
lère démonstration : Soit $u : T \rightarrow S$ un morphisme fini localement libre. Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur T , on dispose d'un isomorphisme

$$(1.3.17.1) \quad N_{T/S}(\mathcal{L}) \simeq \det(u_{*} \mathcal{L}) \det(u_{*} \mathcal{O}_T)^{-1}$$

uniquement déterminé par les trois conditions suivantes :

- a) sa formation est compatible aux changements de base;
- b) pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_T$, c'est le morphisme identique de \mathcal{O}_S ;
- c) il est fonctoriel en \mathcal{L} .

Soient D et E deux diviseurs relatifs effectifs sur X , i l'inclusion de D dans X et u la projection de D sur S . La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-E) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

permet d'interpréter l'isomorphisme

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(-E) \rangle \simeq N_{D/S}(\mathcal{O}(-E)) \simeq \det(u_{*} i^{*} \mathcal{O}(-E)) \det(u_{*} i^{*} \mathcal{O})^{-1}$$

comme un isomorphisme

$$\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(-E) \rangle \simeq \det \text{Ru}_{\mathbf{x}}(\text{Li}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{O}_E)^{-1} \simeq \det \text{Rf}_{\mathbf{x}}(\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_E)^{-1} .$$

ou

$$(1.3.17.2) \quad \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle \simeq \det \text{Rf}_{\mathbf{x}}(\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_E) .$$

Pour D et E disjoints, on a $\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_E = \mathcal{O}$, et l'isomorphisme de $\langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(E) \rangle$ avec \mathcal{O}_S qui s'en déduit est celui déjà considéré. On en déduit que, pour D et E disjoints, la symétrie τ et l'isomorphisme de symétrie $\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_D$ sont compatibles via (1.3.17.2). Par spécialisation, ceci reste vrai quels que soient D et E .

Lorsque $D = E$ est défini par un idéal I , on a

$$\begin{aligned} \underline{H}^0(\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_D) &= \mathcal{O}_D & \text{symétrie} &= +1 \\ \underline{H}^{-1}(\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_D) &= I/I^2 & \text{symétrie} &= -1 \\ \underline{H}^i(\mathcal{O}_D \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_D) &= 0 & \text{pour } i &\neq 0, -1 . \end{aligned}$$

Dès lors, la flèche

$$\tau : \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(D) \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \mathcal{O}(D), \mathcal{O}(D) \rangle$$

$$\text{est } (-1)^{\dim I/I^2} = (-1)^{\deg(\mathcal{O}(D))} ,$$

et 1.3.16.6 en résulte.

2ème démonstration : Par réduction à un cas "universel", on peut supposer que S est réduit. Ce cas se ramène à celui où S est spectre d'un corps algébriquement clos k . Soient dans ce cas X_1, X_2, Y_1 et Y_2 quatre diviseurs sur X , f et g deux fonctions rationnelles, et supposons que

$$\begin{aligned} \text{div}(f) &= X_2 - X_1 \\ \text{div}(g) &= Y_2 - Y_1 \\ (X_1 \cup Y_2) \cap (X_2 \cup Y_1) &= \emptyset . \end{aligned}$$

Les applications f et g définissent alors

$$\langle f, g \rangle : \langle \mathcal{O}(X_1), \mathcal{O}(Y_1) \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{O}(X_2), \mathcal{O}(Y_2) \rangle .$$

Les deux membres sont canoniquement isomorphe à k (1.3.11.1), de sorte que $\langle f, g \rangle$ s'identifie à un élément de k^* .

Lemme 1.3.18. On a

$$\langle f, g \rangle = \prod_{x \in X_1 \cup Y_2} (-1)^{v_x(f)v_x(g)} \left(\frac{g^{v_x(f)}}{f^{v_x(g)}} \right) (x) .$$

Montrons que (1.3.18) entraîne (1.3.16.6). On peut supposer que $\mathcal{L} \sim \mathcal{O}(X) \sim \mathcal{O}(Y)$ avec X et Y effectif, et que $X \cap Y = \emptyset$. Soit f une fonction rationnelle telle que $\text{div}(f) = Y - X$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle & \xrightarrow{\tau} & \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \langle \mathcal{O}(X), \mathcal{O}(Y) \rangle & \xrightarrow{\langle f, f^{-1} \rangle} & \langle \mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X) \rangle \end{array}$$

montre que

$$\tau = \langle f, f^{-1} \rangle = \prod_{x \in X} (-1)^{v_x(f)^2} = (-1)^{\text{deg}(\mathcal{L})} .$$

Prouvons 1.3.18. On se ramène à supposer X_i et Y_i très ample. Il existe alors des factorisations $f = f_1 f_2$; $g = g_1 g_2$ avec

$$\begin{array}{ll} \text{div}(f_1) = X' - X_1 & \text{div}(g_1) = Y' - Y_1 \\ \text{div}(f_2) = X_2 - X' & \text{div}(g_2) = Y_2 - Y' , \end{array}$$

les diviseurs X' , Y' et $X_1 \cup X_2 \cup Y_1 \cup Y_2$ étant disjoints.

Désignons par \langle , \rangle^* le second membre de (1.3.18) et prouvons que

$$\langle f, g \rangle^* = \langle f_1, g_1 \rangle^* \cdot \langle f_2, g_2 \rangle^* .$$

D'après Serre [1], on a

$$(1.3.18.1) \quad \prod_x (-1)^{v_x(f_1)v_x(g_2)} \left(\frac{f_1^{v_x(g_2)}}{g_2^{v_x(f_1)}} \right) (x) = 1 .$$

On en tire que

$$\langle f_1, g_1 \rangle^* \cdot \langle f_2, g_2 \rangle^* = g_1(X_1) f_1(Y') g_2(X') f_2(Y_2) .$$

$$\prod_{X_1 \cup X' \cup Y' \cup Y_2} (-1)^{v_x(f_1)v_x(g_2)} \left(\frac{f_1^{v_x(g_2)}}{f_2^{-v_x(f_1)}} \right) (x)$$

$$= \prod_{x \in X'} g_2(x)^{v_x(f_1)} \cdot g_2(x)^{-v_x(f_1)} \cdot \prod_{x \in Y'} f_1(x)^{v_x(g_1)} \cdot f_1(x)^{v_x(g_2)} .$$

$$\prod_{X_1 \cup Y_2} (-1)^{v_x(f)v_x(g)} ((f_1 f_2)^{v_x(g_2)}) \cdot (g_1 g_2)^{-v_x(f_1)} = \langle f_1 f_2, g_1 g_2 \rangle^* .$$

On a par functorialité de \langle , \rangle que $\langle f, g \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \langle f_2, g_2 \rangle$, et on vérifie facilement que $\langle f_i, g_i \rangle = \langle f_i, g_i \rangle^*$. Le lemme en résulte.

1.4. Champs de Picard strictement commutatifs.

Quelques résultats de "topologie générale" vont être nécessaire pour exprimer les résultats de 1.3 par une "formule des coefficients universels".

Les résultats de ce n° sont suggérés dans une lettre de A. Grothendieck adressée à J.L. Verdier (1966).

Les notions d'associativité et de commutativité pour des bifoncteurs (voir ci-dessous) ont été introduites par MAC LANE.

1.4.1. Soient C une catégorie, $F : C \times C \rightarrow C$ un foncteur et

$$\sigma : F(F(X, Y), Z) \xrightarrow{\sim} F(X, F(Y, Z))$$

un isomorphisme de trifoncteurs. On dit que le couple (F, σ) est un foncteur associatif, ou que σ est une donnée d'associativité sur F si la condition suivante est vérifiée

(Ass) Quelle que soit la famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de C , et désignant par $e : I \rightarrow M(I)$ l'application canonique de I dans le monoïde libre (sans unité) engendré par I , il existe une application $\underline{F} : M(I) \rightarrow \text{Ob} C$, des isomorphismes $a_i : \underline{F}(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et des isomorphismes $a_{g, h} : \underline{F}(gh) \xrightarrow{\sim} \underline{F}(F(g), \underline{F}(h))$ tels que les diagrammes

$$(1.4.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} \underline{F}(f(gh)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{F}(F(f), \underline{F}(gh)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{F}(\underline{F}(f), \underline{F}(\underline{F}(g), \underline{F}(h))) \\ \parallel & & & & \uparrow \sigma \\ \underline{F}((fg)h) & \xrightarrow{\sim} & \underline{F}(\underline{F}(fg), \underline{F}(h)) & \xrightarrow{\sim} & \underline{F}(\underline{F}(\underline{F}(f), \underline{F}(g)), \underline{F}(h)) \end{array}$$

soient commutatifs.

Nous n'aurons pas à faire usage de ce que l'axiome (Ass) équivaut à "l'axiome du pentagone", comme quoi le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & F(F(X,Y),F(Z,T)) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F(X,F(Y,F(Z,T))) & & F(F(F(X,Y),Z),T) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 F(X,F(F(Y,Z),T)) & \longleftrightarrow & F(F(X,F(Y,Z)),T) \quad .
 \end{array}$$

Soient donnés maintenant des isomorphismes fonctoriels

$$\sigma_{X,Y,Z} : F(F(X,Y),Z) \xrightarrow{\sim} F(X,F(Y,Z))$$

$$\tau_{X,Y} : F(X,Y) \xrightarrow{\sim} F(Y,X) \quad .$$

On dira que σ et τ font de F un foncteur associatif et strictement commutatif si la condition suivante est vérifiée.

(Ass.s.Com) Quelle que soit la famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de C , et désignant par $e : I \rightarrow N(I)$ l'application canonique de I dans le monoïde abélien libre (sans unité) engendré par I , il existe une application $\underline{F} : N(I) \rightarrow \text{Ob}C$, des isomorphismes $a_i : \underline{F}(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et des isomorphismes $a_{g,h} : \underline{F}(gh) \xrightarrow{\sim} F(\underline{F}(g), \underline{F}(h))$ tels que le diagramme (1.4.1.1) soit commutatif, ainsi que le diagramme

$$(1.4.1.2) \quad \begin{array}{ccc}
 \underline{F}(gh) & \xrightarrow{a_{g,h}} & F(\underline{F}(g), \underline{F}(h)) \\
 \parallel & & \downarrow \tau \\
 \underline{F}(hg) & \xrightarrow{a_{h,g}} & F(\underline{F}(h), \underline{F}(g))
 \end{array}$$

Nous n'aurons pas à faire usage de ce que cet axiome équivaut à la conjonction de

- 1) l'axiome du pentagone
- 2) $\tau_{X,X} : X + X \rightarrow X + X$ est l'identité
- 3) $\tau_{Y,X} \circ \tau_{X,Y} : X + Y \rightarrow Y + X \rightarrow X + Y$ est l'identité
- 4) l'axiome de l'hexagone : le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & X + (Y + Z) & \\
 \swarrow \sigma & & \searrow \tau \\
 (X + Y) + Z & & X + (Z + Y) \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \sigma \\
 Z + (X + Y) & & (X + Z) + Y \\
 \swarrow \sigma & & \searrow \tau \\
 & (Z + X) + Y &
 \end{array}$$

est commutatif.

On prendra garde que la condition 2) n'est pas très souvent vérifiée en pratique (d'où la terminologie strictement commutative).

Définition 1.4.2. Une catégorie de Picard strictement commutative \mathcal{P} est une catégorie non vide dont tous les morphismes sont des isomorphismes, munie d'un foncteur $+$: $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$: $(X, Y) \mapsto X + Y$ et d'isomorphismes fonctoriels

$$\sigma : (X + Y) + Z \xrightarrow{\sim} X + (Y + Z)$$

$$\tau : X + Y \longrightarrow Y + X$$

faisant de $+$ un foncteur associatif et strictement commutatif, et telle en outre que pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{P}$, le foncteur $Y \mapsto X + Y$ soit une équivalence de catégorie.

Le lecteur vérifiera que

Lemme 1.4.3. Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets d'une catégorie de Picard strictement commutative \mathcal{P} , il existe une application

$\Sigma : \mathbb{Z}^{(I)} \rightarrow \text{Ob } \mathcal{P}$, des isomorphismes $a_i : \Sigma(e_i) \xrightarrow{\sim} X_i$ et $a_{\underline{n}, \underline{m}} : \Sigma(\underline{n} + \underline{m}) \xrightarrow{\sim} \Sigma(\underline{n}) + \Sigma(\underline{m})$ tels que les diagrammes du type (1.4.1.1) et (1.4.1.2) soient commutatifs. Le système $(\Sigma, (a_i), (a_{\underline{n}, \underline{m}}))$ est unique à isomorphisme unique près, et est fonctoriel en $(X_i)_{i \in I}$.

1.4.4 Une catégorie de Picard strictement commutative admet à isomorphisme unique près un et un seul objet neutre, qu'on peut ici définir comme un couple (e, φ) formé d'un objet e et d'un isomorphisme $\varphi : e + e \xrightarrow{\sim} e$. Si (e, φ) est un objet neutre, il existe un et un seul isomorphisme de foncteurs

$$\alpha_s : e + X \xrightarrow{\sim} X$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} e + (e + X) & \longleftarrow & (e + e) + X \\ \downarrow e + \alpha_s & & \downarrow \varphi \\ e + X & \xlongequal{\quad} & e + X \end{array} .$$

On définit de même $\alpha_d : X + e \xrightarrow{\sim} X$, et Ψ est cas particulier tant de α_S que de α_d ; τ échange α_S et α_d . Le groupe $\text{Aut}(e)$ est abélien, et pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{P}$, les foncteurs $X +$ et $+ X$ établissent le même isomorphisme entre $\text{Aut}(e)$ et $\text{Aut}(X)$.

Définition 1.4.5. Un champ de Picard strictement commutatif \mathcal{P} sur un site \mathcal{A} est un champ en groupoïdes \mathcal{P} sur \mathcal{A} (GIRAUD [1]), muni d'un foncteur $+ : \mathcal{P} \times_S \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ et d'isomorphismes de foncteurs

$$\begin{aligned} \tau_{x,y} &: x + y \longrightarrow y + x \\ \sigma_{x,y,z} &: (x + y) + z \longrightarrow x + (y + z) \end{aligned}$$

qui, pour tout $U \in \text{Ob } \mathcal{A}$, font de $\mathcal{P}(U)$ une catégorie de Picard strictement commutative.

Dans ce qui suit, on parlera simplement de champ de Picard, sans spécifier "strictement commutatif". D'après 1.4.4, tout champ de Picard \mathcal{P} admet un "objet neutre" global e , et $\text{Aut}(e)$ est un faisceau abélien.

1.4.6. Un foncteur additif $F : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ entre champs de Picard sur \mathcal{A} est un \mathcal{A} -foncteur (nécessairement cartésien) muni d'un isomorphisme de foncteurs

$$F(x + y) \xrightarrow{\sim} F(x) + F(y)$$

rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F(x + y) & \longrightarrow & F(x) + F(y) \\ \downarrow F(\tau) & & \downarrow \tau \\ F(y + x) & \longrightarrow & F(y) + F(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} F((x + y) + z) & \longrightarrow & F(x + y) + F(z) & \longrightarrow & (F(x) + F(y)) + F(z) \\ \downarrow F(\sigma) & & & & \downarrow \sigma \\ F(x + (y + z)) & \longrightarrow & F(x) + F(y + z) & \longrightarrow & F(x) + (F(y) + F(z)) \end{array}$$

Un morphisme de foncteurs additifs $u : F \rightarrow G$ est un morphisme de \mathcal{A} -foncteurs (automatiquement un isomorphisme) rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(x + y) & \xrightarrow{u_{x+y}} & G(x + y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(x) + F(y) & \xrightarrow{u_x + u_y} & G(x) + G(y) \end{array} .$$

1.4.7. Si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux champs de Picard sur \mathcal{A} , le champ de Picard $\text{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ est le champ de Picard suivant :

- a) si $U \in \text{Ob } \mathcal{A}$, ses objets sur U sont les foncteurs additifs de $\mathcal{P}_1|U$ dans $\mathcal{P}_2|U$; les morphismes sont les morphismes de foncteurs additifs;
- b) on définit la somme de deux foncteurs additifs F_1 et F_2 par la formule $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x)$; l'isomorphisme structural est celui qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (F_1 + F_2)(x + y) & \xrightarrow{\text{structural}} & (F_1 + F_2)(x) + (F_1 + F_2)(y) \\ \parallel & & \parallel \\ F_1(x + y) + F_2(x + y) & & F_1(x) + F_2(x) + F_1(y) + F_2(y) \\ & \searrow & \swarrow \tau \\ & F_1(x) + F_1(y) + F_2(x) + F_2(y) & \end{array}$$

- c) les isomorphismes d'associativité et de commutativité sont définis via les isomorphismes analogues dans \mathcal{P}_2 .

1.4.8. Si \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P} sont trois champs de Picard, un foncteur biadditif de $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ dans \mathcal{P} est un \mathcal{A} -foncteur F de $\mathcal{P}_1 \times_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_2$ dans \mathcal{P} , muni d'isomorphismes de foncteurs

$$\begin{aligned} F(x_1 + y_1, x_2) &\xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2) + F(y_1, x_2) \\ F(x_1, x_2 + y_2) &\xrightarrow{\sim} F(x_1, x_2) + F(x_1, y_2) \end{aligned} ,$$

tels que

- a) Pour x_1 (resp. x_2) fixe, $F(x_1, \ast)$ (resp. $F(\ast, x_2)$) vérifie les compatibilités de 1.4.3.

b) Pour $U \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $x_1, y_1 \in \text{Ob } \mathcal{P}_1(U)$ et $x_2, y_2 \in \text{Ob } \mathcal{P}_2(U)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F(x_1+y_1, x_2+y_2) & \longrightarrow & F(x_1+y_1, x_2) + F(x_1+y_1, y_2) \\
 \downarrow & & \searrow \\
 & & F(x_1, x_2) + F(y_1, x_2) + F(y_1, x_2) + F(y_1, y_2) \\
 F(x_1, x_2+y_2) + F(y_1, x_2+y_2) & & \nearrow \tau \\
 & \searrow & \\
 & & F(x_1, x_2) + F(x_1, y_2) + F(y_1, x_2) + F(y_1, y_2)
 \end{array}$$

est commutatif.

Par exemple, le foncteur canonique

$$\text{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \times \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 : (F, x) \longmapsto F(x)$$

est biadditif.

On montre comme en 1.4.7 que les foncteurs biadditifs de $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ dans \mathcal{P} forment un champ de Picard $\text{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 ; \mathcal{P})$.

On verra en (1.4.20) qu'il existe un foncteur biadditif "2-universel" : $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$; plus précisément, il existe un champ de Picard $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ et un foncteur biadditif $\otimes : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2$ tel que pour tout champ de Picard \mathcal{P} , le foncteur défini par \otimes :

$$(1.4.8.1) \quad \text{HOM}(\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2, \mathcal{P}) \longrightarrow \text{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 ; \mathcal{P})$$

soit une équivalence. Ce champ est unique à équivalence unique (à isomorphisme unique près) près.

1.4.9. Soit $u : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ un morphisme de sites. L'image directe $u_{\#} \mathcal{P}$ d'un champ de Picard \mathcal{P} sur \mathcal{A}_1 est le champ de Picard sur \mathcal{A}_2 défini par

$$u_{\#} \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(u^*V) \quad .$$

Ses objets sur $V \in \text{Ob } \mathcal{A}_2$ sont les objets de \mathcal{P} sur u^*V ; ses morphismes, sa loi d'addition et ses isomorphismes de compatibilité sont ceux de \mathcal{P} .
 l'image directe $u_{\#}$ est un 2-foncteur.

1.4.10. Un préchamp de Picard \mathcal{P} sur un site \mathcal{A} est un préchamp \mathcal{P} sur \mathcal{A} (Giraud [1]), muni d'un foncteur $+$: $\mathcal{P}_s \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ et d'isomorphismes d'associativité et de commutativité σ et τ , tels que pour chaque $U \in \text{Ob } \mathcal{A}$, $\mathcal{P}(U)$ soit une catégorie de Picard (strictement commutative). Si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux préchamps de Picard, on définit de façon évidente (cf. 1.4.6, 1.4.7) les foncteurs additifs de \mathcal{P}_1 dans \mathcal{P}_2 et le préchamp de Picard $\text{HOM}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ qu'ils forment. Si \mathcal{P} est un préchamp de Picard, et $j : \mathcal{P} \rightarrow a\mathcal{P}$ le champ qu'il engendre, il existe à équivalence essentiellement unique près un et un seul couple formé d'une structure de champ de Picard sur $a\mathcal{P}$ et d'une structure de foncteur additif sur j ; munis de ces données, le couple $(j, a\mathcal{P})$ s'appelle le champ de Picard engendré par \mathcal{P} . Pour tout champ de Picard \mathcal{P}_1 , on a une équivalence

$$(1.4.10.1) \quad \text{HOM}(a\mathcal{P}, \mathcal{P}_1) \xrightarrow{\sim} \text{HOM}(\mathcal{P}, \mathcal{P}_1) .$$

1.4.11. On désignera par $\mathcal{C}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de faisceaux abéliens K sur \mathcal{A} tels que $K^i = 0$ pour $i \notin [-1,0]$. A tout complexe $K \in \text{Ob } \mathcal{C}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$

$$K : d : K^{-1} \rightarrow K^0$$

est associé le préchamp de Picard $\text{pch}(K)$ suivant :

(I) Pour $U \in \text{Ob } \mathcal{A}$, on a $\text{Ob } \text{pch}(K)(U) = K^0(U)$.

(II) Si $x, y \in K^0(U)$, une flèche de x dans y est un élément f de $K^{-1}(U)$ tel que $df = y - x$.

(III) La loi de composition des flèches est la loi d'addition dans $K^{-1}(U)$.

(IV) Le foncteur $+$ est donné par la loi d'addition dans $K^0(U)$ et $K^{-1}(U)$.

(V) Les isomorphismes d'associativité et de commutativité sont fournis par l'élément nul de $K^{-1}(U)$.

On désignera par $\text{ch}(K)$ le champ de Picard engendré (1.4.10) par le préchamp de Picard $\text{pch}(K)$. Le faisceau $\underline{H}^0(K)$ s'interprète comme le faisceau associé suivant

(1.4.11.1) $\underline{H}^0(K) \simeq a(U \rightarrow \text{groupe des classes d'isomorphisme d'objets de } \text{ch}(K)(U))$.

D'autre part,

(1.4.11.2) $\underline{H}^{-1}(K) \simeq \underline{\text{Aut}}(e)$

1.4.12. Tout morphisme de complexe $f : K \rightarrow L$ induit un foncteur additif $\text{pch}(f) : \text{pch}(K) \rightarrow \text{pch}(L)$, d'où un foncteur additif

$$\text{ch}(f) : \text{ch}(K) \rightarrow \text{ch}(L)$$

Il résulte de (1.4.11.1) et (1.4.11.2) que $\text{ch}(f)$ est une équivalence si et seulement si f est un quasi-isomorphisme. On déduit de 1.4.10.1 que pour deux morphismes $f, g : K \rightarrow L$, on a

$$\text{Hom}(\text{ch}(f), \text{ch}(g)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{pch}(f), \text{pch}(g)) \quad .$$

Un morphisme de foncteur $h : \text{pch}(f) \rightarrow \text{pch}(g)$ est un morphisme de faisceaux $h : K^0 \rightarrow L^{-1}$ tel que

$$(1.4.12.1) \quad g(x) - f(x) = dh(x)$$

et tel que pour tout triple (x, y, u) avec $y - x = du$, on ait

$$(1.4.12.2) \quad h(y) + f(u) = g(u) + h(x) \quad .$$

Que h soit un morphisme de foncteurs additifs signifie que

$$(1.4.12.3) \quad h(x + y) = h(x) + h(y) \quad .$$

La condition 1.4.12.3 permet de réécrire (1.4.12.2) comme

$$(1.4.12.2') \quad g(u) - f(u) = hdu \quad ;$$

les conditions (1.4.12.1) à (1.4.12.3) signifient donc que h est une homotopie de f à g , et

$$(1.4.12.4) \quad \text{Hom}(\text{ch}(f), \text{ch}(g)) \simeq \{H : \text{homotopie } K \rightarrow L \mid g - f = dH + Hd\}$$

Lemme 1.4.13 (I) Pour tout champ de Picard \mathcal{P} , il existe un complexe K tel que $\mathcal{P} \simeq \text{ch}(K)$.

(II) Pour tout foncteur additif $F : \text{ch}(K) \rightarrow \text{ch}(L)$, il existe un quasi-isomorphisme $k : K' \rightarrow K$ et un morphisme $\ell : K' \rightarrow L$ tel que $F \simeq \text{ch}(\ell)\text{ch}(k)^{-1}$

Prouvons (I). Soit $(k_i, U_i)_{i \in I}$ une famille telle que

(a) $k_i \in \text{Ob } \mathcal{P}(U_i)$;

(b) tout objet de \mathcal{P} est localement isomorphe à une image inverse de l'un des k_i .

Posons $K^0 = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{U_i}$. On déduit de 1.4.3 qu'il existe un foncteur additif F de $\text{ch}(0 \rightarrow K^0)$ dans \mathcal{P} envoyant la base e_i de \mathbb{Z}_{U_i} sur k_i . Soit K^{-1} le faisceau des couples formés d'une section locale x de K^0 et d'un isomorphisme $t : F(0) \xrightarrow{\sim} F(x)$. On définit l'addition sur K^{-1} par $(x_1, t_1) + (x_2, t_2) = (x_1 + x_2, t)$ où t rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(0) + F(0) & \xrightarrow{t_1 + t_2} & F(x_1) + F(x_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(0+0) & \xrightarrow{t} & F(x_1 + x_2) \end{array} .$$

On définit $d : K^{-1} \rightarrow K^0$ par $d(x, t) = x$; d est additif.

Si $y - x = dt$, il existe un et un seul morphisme $F(t)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{F(t)} & F(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(0) + F(x) & \xrightarrow{t + F(x)} & F(y - x) + F(x) \end{array}$$

et on vérifie que cette construction définit une équivalence

$$F : \text{ch}(K) \rightarrow \mathcal{P} .$$

Prouvons (II). Soit donc $F : \text{ch}(K) \rightarrow \text{ch}(L)$ un foncteur additif.

Il existe alors une famille $(k_i, \ell_i, \alpha_i, U_i)_{i \in I}$ telle que

(c) $k_i \in K^0(U_i)$, $\ell_i \in L^0(U_i)$ et α_i est un morphisme entre $F(k_i)$ et ℓ_i

(d) l'homomorphisme $k^0 : \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{U_i} \rightarrow K^0$ de coordonnées k_i est un épimorphisme.

Posons $K'^0 = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{U_i}$ et soit $\ell^0 : K'^0 \rightarrow L^0$ l'homomorphisme de coordonnées ℓ_i . Le foncteur F étant additif, il existe une et une seule famille d'isomorphismes $\alpha_x : Fk^0(x) \xrightarrow{\sim} \ell^0(x)$ (x section locale de K'^0) telle que

(e) pour e_i section 1 de \mathbb{Z}_{U_i} , on a $\alpha_{e_i} = \alpha_i$

(f) Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Fk}^{\circ}(x+y) & \xrightarrow{\alpha_{x+y}} & \mathcal{L}^{\circ}(x+y) \\ \updownarrow & & \parallel \\ \text{Fk}^{\circ}(x) + \text{Fk}^{\circ}(y) & \xrightarrow{\alpha_x + \alpha_y} & \mathcal{L}^{\circ}(x) + \mathcal{L}^{\circ}(y) \end{array}$$

sont commutatifs.

Soit $K'^{-1} = K'^{-1}x_{K^{\circ}}K'^{\circ}$; d'après (d), la flèche évidente est un quasi-isomorphisme de complexes $k : K' \rightarrow K$. Si $x, y \in K'^{\circ}(U)$, et si $t \in K'^{-1}(U)$ vérifie $y-x = dt$, alors il existe une et une seule section $\mathcal{L}^{-1}(t, x, y)$ de $L^{-1}(U)$ qui définisse le morphisme rendant commutatif le diagramme

$$(g) \quad \begin{array}{ccc} \text{F}(k^{\circ}(x)) & \xrightarrow{\text{F}(k^{-1}(t))} & \text{F}(k^{\circ}(y)) \\ \downarrow \alpha_x & & \downarrow \alpha_y \\ \mathcal{L}^{\circ}(x) & \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}(t; x, y)} & \mathcal{L}^{\circ}(y) \end{array} .$$

Que F soit un foncteur fournit

$$(h) \quad \mathcal{L}^{-1}(t; x, y) + \mathcal{L}^{-1}(t'; y, z) = \mathcal{L}^{-1}(t+t'; x, z) .$$

Que l'isomorphisme d'additivité de F soit fonctoriel fournit

$$(i) \quad \mathcal{L}^{-1}(t_1+t_2; x_1+x_2, y_1+y_2) = \mathcal{L}^{-1}(t_1; x_1, y_1) + \mathcal{L}^{-1}(t_2; x_2, y_2) .$$

De (h), on tire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(0; x, x) + \mathcal{L}^{-1}(0; x, x) &= \mathcal{L}^{-1}(0, x, x) \quad \text{ie} \\ \mathcal{L}^{-1}(0; x, x) &= 0 . \end{aligned}$$

On déduit alors de (i) que $\mathcal{L}^{-1}(t; x, y)$ ne dépend que de t :

$$\mathcal{L}^{-1}(t; x, y) = \mathcal{L}^{-1}(t)$$

et que $\mathcal{L}^{-1}(t)$ est additif en t . On en conclut que $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{L}^{\circ})$ est un morphisme de complexes, et, d'après (f) et (g), les flèches α forment un isomorphisme de foncteurs additifs $F \circ \text{ch}(k) = \text{ch}(\mathcal{L})$.

1.4.14. Soit $\text{ch}^{\flat}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les petits champs de Picard sur \mathcal{A} , et dont les flèches sont les classes d'isomorphie de

foncteurs additifs. La construction ch définit un foncteur de $\mathcal{C}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ (1.4.11) dans $\text{Ch}^b(\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{D}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie de la catégorie dérivée de \mathcal{A} formée des complexes K tels que $H^i(K) = 0$ pour $i \neq 0$ ou -1 . Il résulte de 1.4.12 et 1.4.13 que

Proposition 1.4.15. Le foncteur ch induit une équivalence de catégories

$$\text{ch} : \mathcal{D}^{[-1,0]}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \text{Ch}^b(\mathcal{A}) .$$

On désignera par \mathcal{b} l'équivalence inverse de ch . Pour tout champ de Picard \mathcal{P} sur \mathcal{A} , $\mathcal{P}' \in \text{Ob } \mathcal{D}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ détermine \mathcal{P} à classe d'isomorphie d'équivalence près.

Lemme 1.4.16. Soit $L \in \text{Ob } \mathcal{C}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ tel que L^{-1} soit injectif.

(I) $\text{pch}(L)$ est déjà un champ.

(II) Pour $K \in \text{Ob } \mathcal{C}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$, tout foncteur additif $F : \text{ch}(K) \rightarrow \text{ch}(L)$ est isomorphe à un foncteur $\text{ch}(f)$ pour f morphisme de K dans L .

(I) Quels que soient $U \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $x \in \text{Ob } \text{ch}(L)(U)$, le faisceau des couples formés d'une section locale ℓ de $L^0|_U$ et d'un isomorphisme entre x et ℓ est un espace principal homogène sous L^{-1} ; il admet donc une section et $j : \text{pch}(L) \rightarrow \text{ch}(L)$ est surjectif sur les classes d'isomorphismes d'objets, donc une équivalence.

(II) Soit L' un complexe d'injectifs, muni d'un quasi-isomorphisme $\Psi : L \xrightarrow{\sim} L'$, tel que Ψ^i soit un isomorphisme pour $i \leq -1$. D'après 1.4.13, et [C.D], il existe un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & L' \\ f_0 \uparrow & & \uparrow f_1 \\ K' & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & K \end{array}$$

tel que $F \simeq \text{ch}(f_0) \text{ch}(\Psi)^{-1}$. De plus, $K = \tau_{\leq 0} K$ et $L = \tau_{\leq 0} L'$, de sorte que f_1 se factorise par $f : K \rightarrow L$, et $F \simeq \text{ch}(f)$.

Le lemme permet de préciser 1.4.15 par la conséquence suivante de 1.4.12 .

Corollaire 1.4.17. La construction ch définit une équivalence de 2-catégories entre

a) la 2-catégorie des champs de Picard sur \mathcal{A} .

b) la 2-catégorie ayant pour objets et pour 1-flèches les objets et flèches de la sous-catégorie pleine de $C^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ formée des complexes L avec L^{-1} injectif, et ayant pour 2-flèches les homotopies entre flèches : $\text{Hom}(f,g) = \{H \mid g-f = dH + Hd\}$.

Construction 1.4.18. On a

$$\text{HOM}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)^b \simeq \tau_{\leq 0} \text{RHom}(\mathcal{F}_1^b, \mathcal{F}_2^b).$$

Soient $K, L \in \text{Ob } C^{[-1,0]}(\mathcal{S})$, avec L^{-1} injectif. D'après 1.4.16 (II) et 1.4.12, on a

$$(1.4.18.1) \quad \text{ch}(\tau_{\leq 0} \text{Hom}(K, L)) \xrightarrow{\sim} \text{HOM}(\text{ch}(K), \text{ch}(L))$$

et on en déduit une construction fonctorielle 1.4.18.

Construction 1.4.19. Pour $f : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ un morphisme de sites, on a

$$(f_{\mathbf{x}} \mathcal{F})^b \simeq \tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\mathbf{x}}(\mathcal{F}^b).$$

Soit $L \in \text{Ob } C^{[-1,0]}$ avec L^{-1} injectif. D'après 1.4.16 (I), on a

$$(1.4.19.1) \quad \text{ch}(f_{\mathbf{x}} L) \xrightarrow{\sim} f_{\mathbf{x}} \text{ch}(L)$$

et on en déduit une construction fonctorielle 1.4.19.

Nous n'aurons pas à faire usage de la

Construction 1.4.20. Le produit tensoriel promis en 1.4.8 existe, et

$$(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)^b \simeq \tau_{\geq -1} \mathcal{F}_1^b \otimes \mathcal{F}_2^b.$$

On vérifie comme en 1.4.12 et 1.4.13 (II) que, quels que soient K_1, K_2 et L dans $C^{[-1,0]}(\mathcal{A})$, on a

(a) Tout morphisme $f \in \text{Hom}(K_1 \otimes K_2, L) \simeq \text{Hom}(\tau_{\geq -1}(K_1 \otimes K_2), L)$ définit un foncteur biadditif $\text{ch}(f) \in \text{Hom}(\text{ch}(K_1), \text{ch}(K_2); \text{ch}(L))$; de plus les morphismes de foncteurs s'identifient aux homotopies;

(b) Pour tout foncteur biadditif $F : \text{ch}(K_1), \text{ch}(K_2) \rightarrow \text{ch}(L)$, il existe des quasi-isomorphismes $k_1 : \text{ch}(K_1^!) \rightarrow \text{ch}(K_1)$ et $f : K_1^! \otimes K_2^! \rightarrow L$ tel que $F \simeq \text{ch}(f) \circ (\text{ch}(k_1)^{-1}, \text{ch}(k_2)^{-1})$.

Si maintenant K_1^0 ou K_2^0 est plat, ainsi que K_1^1 ou K_2^1 , alors $k_1 \otimes k_2 : \tau_{>-1} K_1^1 \otimes K_2^1 \rightarrow \tau_{>-1} K_1^0 \otimes K_2^0$ est un quasi-isomorphisme, et on en déduit que $\text{ch}(\tau_{>-1}(K_1^1 \otimes K_2^1))$ vérifie la propriété universelle (1.4.8.1), d'où l'existence de \otimes et d'une construction fonctorielle 1.4.20.

1.4.21. Soient G un faisceau abélien, et $G[1]$ le complexe réduit à G placé en degré -1 . Le préchamp $\text{pch}(G[1])$ s'identifie au préchamp des toiseurs triviaux sous G , et donc $\text{ch}(G[1])$ "n'est autre" que le champ des toiseurs sous G , avec sa loi d'addition habituelle.

1.4.22. Soit $K \in \mathcal{C}^{[-1,0]}(\mathcal{A})$ et G un faisceau abélien. Les extensions E de K par G forment un champ de Picard, $\text{EXT}(K,G)$, pour l'addition de Brauer.

$$E : 0 \rightarrow G[0] \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0.$$

A chaque extension E on associe un foncteur additif de $\text{ch}(K)$ dans $\text{ch}(G[1])$, qui, appliqué à une section locale x de K^0 fournit le toiseur $\beta^{-1}(x)$. Le lecteur vérifiera que

Proposition 1.4.23. La construction esquissée plus haut est une équivalence de champs de Picard

$$\text{EXT}(K,G) \xrightarrow{\sim} \text{HOM}(\text{ch}(K), \text{ch}(G[1])) .$$

1.4.24. Soit F un objet du site \mathcal{A} . On désignera encore par F le faisceau défini par F , et on désignera par $\mathbb{Z}^{(F)}$ le faisceau abélien engendré. Soit C un champ de Picard sur \mathcal{A} . On vérifie facilement (cf. 1.4.3) qu'il "revient au même" de se donner soit

a) un foncteur additif $H : \text{ch}(\mathbb{Z}^{(F)}) \rightarrow C$

b) un morphisme de champ :

$$(\text{champ des sections locales de } F, \text{ morphismes} = \text{identités}) \rightarrow C$$

c) un objet de $C(F)$.

Supposons (pour pouvoir appliquer la définition 1.4.9) que les produits fibrés existent dans \mathcal{A} , et soit f le morphisme de sites canonique $f : \mathcal{A}/F \rightarrow \mathcal{A}$. La construction précédente fournit une équivalence

$$(1.4.24.1) \quad \text{HOM}(\text{ch}(\mathbb{Z}^{(F)}), C) \xrightarrow{\sim} f_{\mathbf{x}} f^{\mathbf{x}} C .$$

L'isomorphisme qui se déduit de (1.4.24.1) par la construction

$$\tau_{\leq} \text{RHom}(\mathbb{Z}^{(F)}, C^b) \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\mathbb{X}} f^{\mathbb{X}} C^b ,$$

peut aussi se déduire de l'isomorphisme plus général

$$(1.4.24.2) \quad \text{RHom}(\mathbb{Z}^{(F)}, K) \xrightarrow{\sim} \text{Rf}_{\mathbb{X}} f^{\mathbb{X}} K \quad (K \in \text{ObD}^+(\mathcal{S})) .$$

1.5. La formule des coefficients universels

1.5.1. Soit $f : X \rightarrow S$ une courbe projective et lisse sur S . On désignera par $\text{PIC}(X/S)$ le champ de Picard sur le grand site fppf de S (XVII 0.10) image directe (1.4.9) du champ des faisceaux inversibles sur X . On a

$$(1.5.1.1) \quad \text{PIC}(X/S) = f_{\mathbb{X}} \text{ch} \mathbb{G}_m[1]$$

$$(1.5.1.2) \quad \text{PIC}(X/S)^b = \tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\mathbb{X}} (\mathbb{G}_m[1]) .$$

Chaque section t de X définit un faisceau inversible $\mathcal{O}(t)$ sur X . Avec les notations de 1.4.24 (cf. 1.4.24. $a \leftrightarrow b$), cette construction, étant compatible à tout changement de base, définit un morphisme de champs de Picard sur S

$$(1.5.1.3) \quad \text{ch} \mathbb{Z}^{(X)} \longrightarrow \text{PIC}(X/S) .$$

Si C est un quelconque champ de Picard sur S , les morphismes (1.5.1.3) et (1.4.24.1) définissent un foncteur additif

$$(1.5.1.4) \quad \text{HOM}(\text{PIC}(X/S), C) \longrightarrow \text{HOM}(\text{ch}(\mathbb{Z}^{(X)}), C) \xrightarrow{\sim} f_{\mathbb{X}} f^{\mathbb{X}} C .$$

Par application de la construction b , le foncteur 1.5.1.3 définit un morphisme

$$(1.5.1.5) \quad \mathbb{Z}^{(X)} \longrightarrow \tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\mathbb{X}} \mathbb{G}_m[1] \longrightarrow \text{Rf}_{\mathbb{X}} \mathbb{G}_m[1] ,$$

et le foncteur 1.5.1.4 a pour analogue, par 1.4.24.2, un morphisme

$$(1.5.1.6) \quad \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\mathbb{X}} (\mathbb{G}_m[1]), K) \longrightarrow \text{Rf}_{\mathbb{X}} f^{\mathbb{X}} K .$$

Si C est le champ $\text{ch}(G[1])$ des toseurs sous un groupe G vérifiant (1.3.1.1), le théorème 1.3.10 affirme que le foncteur 1.5.1.4 est une

équivalence, l'équivalence inverse étant celle qui à un torseur K sous G_X associe le foncteur additif $\langle \ast, K \rangle$. Que (1.5.1.4) soit une équivalence revient à dire que le morphisme déduit de 1.5.1.4 ou 1.5.1.6

$$(1.5.1.7) \quad \tau_{\leq 1} \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\ast}(\mathbb{G}_m[1]), G) \longrightarrow \tau_{\leq 1} \text{Rf}_{\ast} f^{\ast} G$$

est un isomorphisme.

Théorème 1.5.2. (formule des coefficients universels).

Soient $f : X \rightarrow S$ une courbe projective et lisse sur S , C un champ de Picard sur S_{fppf} et $K = C^{\vee}$ (1.4.15). On suppose que K est localement isomorphe (dans $D^+(S_{\text{fppf}})$) à des complexes de la forme $G_{-1} \rightarrow G_0$, où les faisceaux G_i vérifient (1.3.1.1). Alors

(I) Le foncteur 1.5.1.4

$$(1.5.2.1) \quad \text{HOM}(\text{PIC}(X/S), C) \longrightarrow f_{\ast} f^{\ast} C$$

est une équivalence de champs de Picard.

(II) Le morphisme déduit de (1.5.1.6) ou (1.5.1.4)

$$(1.5.2.2) \quad \tau_{\leq 0} \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\ast}(\mathbb{G}_m[1]), K) \longrightarrow \tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\ast} f^{\ast} K$$

est un isomorphisme.

Ce théorème fait jouer à $\tau_{\leq 0} \text{Rf}_{\ast}(\mathbb{G}_m[1])$ le rôle que joue l'homologie dans la classique formule des coefficients universels.

Il est clair que, pour chaque champ C , on a (I) \leftrightarrow (II), et tant (I) que (II) sont de nature locale sur S . Si C est de la forme $\text{ch}(G[1])$, alors le théorème résulte de 1.3.10, comme noté plus haut. Il reste à montrer que si K est de la forme

$$K : d : G_{-1} \longrightarrow G_0, \quad ,$$

et si (1.5.2.2) est un isomorphisme pour $G_{-1}[1]$ et $G_0[1]$, alors

(1.5.2.2) est un isomorphisme pour K . Pour le vérifier, il suffit de comparer la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \longrightarrow R^{-1} f_{\ast} K \longrightarrow f_{\ast} G_{-1} \longrightarrow f_{\ast} G_0 \longrightarrow R^0 f_{\ast} K \longrightarrow R^1 f_{\ast} G_{-1} \longrightarrow R^1 f_{\ast} G_0$$

à la suite exacte longue analogue pour le premier membre de (1.5.2.2), et d'appliquer le lemme des cinq.

1.5.3. Soit u un morphisme plat de courbes projectives et lisses sur S

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & & S \end{array}$$

Le diagramme de foncteurs additifs

$$(1.5.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{(X)} & \longrightarrow & \text{PIC}(X/S) \\ \downarrow u & & \downarrow N_{X/Y} \\ \mathbb{Z}^{(Y)} & \longrightarrow & \text{PIC}(Y/S) \end{array}$$

est alors essentiellement commutatif.

Pour tout champ de Picard C sur S , le diagramme

$$(1.5.3.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{HOM}(\text{PIC}(Y/S), C) & \longrightarrow & f_{2*} f_2^* C \\ \downarrow \text{HOM}(N_{X/Y}, C) & & \downarrow u^* \\ \text{HOM}(\text{PIC}(X/S), C) & \longrightarrow & f_{1*} f_1^* C \end{array}$$

est donc essentiellement commutatif, et pour $K \in \text{ObD}^+(S)$, le diagramme

$$(1.5.3.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{R}f_{2*} \mathbb{G}_m[1], K) & \longrightarrow & \text{R}f_{2*} f_2^* K \\ \downarrow \text{RHom}(N_{X/Y}, K) & & \downarrow u^* \\ \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{R}f_{1*} \mathbb{G}_m[1], K) & \longrightarrow & \text{R}f_{1*} f_1^* K \end{array}$$

est commutatif.

Soit maintenant G un faisceau abélien sur S vérifiant (1.3.1.1).

La trace XVII 6.3 nous fournit un foncteur additif

$$(1.5.3.4) \quad \text{Tr}_u : f_{1x} f_1^* \text{ch}(G[1]) \longrightarrow f_{2x} f_2^* \text{ch}(G[1])$$

et 1.3.8.6 nous fournit un isomorphisme rendant essentiellement commutatif le diagramme

$$(1.5.3.5) \quad \begin{array}{ccc} \text{HOM}(\text{PIC}(X/S), \text{ch}(G[1])) & \longleftarrow & f_{1x} f_1^* \text{ch}(G[1]) \\ \downarrow \text{HOM}(u^*, \text{ch}(G[1])) & & \downarrow \text{Tr}_u \\ \text{HOM}(\text{PIC}(Y/S), \text{ch}(G[1])) & \longleftarrow & f_{2x} f_2^* \text{ch}(G[1]) \end{array}$$

Le diagramme

$$(1.5.3.6) \quad \begin{array}{ccc} \tau_{\leq 1} \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{R}f_{1x} \mathbb{G}_m[1], G) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq 1} \text{R}f_{1x} f_1^* G \\ \downarrow \text{RHom}(u^*, G) & & \downarrow \text{Tr}_u \\ \tau_{\leq 1} \text{RHom}(\tau_{\leq 0} \text{R}f_{2x} \mathbb{G}_m[1], G) & \xleftarrow{\sim} & \tau_{\leq 1} \text{R}f_{2x} f_2^* G \end{array}$$

est donc commutatif.

1.5.4. Avec les notations de 1.5.2, soit G un faisceau abélien sur S vérifiant 1.3.1.1. Localement sur S pour la topologie étale, on a (non canoniquement)

$$\tau_{\leq 0} \text{R}f_x \mathbb{G}_m[1] \simeq f_x \mathbb{G}_m[1] + \text{R}^1 f_x \mathbb{G}_m.$$

Au niveau des champs de Picard, on définit en effet une section $\text{ch}(\text{R}^1 f_x \mathbb{G}_m) \rightarrow f_x \text{ch}(\mathbb{G}_m[1])$ en associant à chaque classe d'isomorphie de faisceaux inversibles le faisceau inversible appartenant à cette classe rigidifié le long de sections convenables de X/S .

L'isomorphisme 1.5.2.2. fournit donc un isomorphisme

$$(1.5.4.1) \quad \underline{\text{Hom}}(\text{R}^1 f_x \mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}_S(X, G)$$

et une suite exacte

$$(1.5.4.2) \quad 0 \rightarrow \underline{\text{Ext}}^1(\text{R}^1 f_x \mathbb{G}_m, G) \rightarrow \text{R}^1 f_x G \rightarrow \underline{\text{Hom}}(f_x \mathbb{G}_m, G) \rightarrow 0$$

Les morphismes de 1.5.4.1 et 1.5.4.2 s'interprètent comme suit

a) Le morphisme 1.5.4.1 et le premier morphisme 1.5.4.2 sont définis par l'application canonique de X dans $\text{Pic}_{X/S}$.

b) Le deuxième morphisme 1.5.4.2 est le degré 1.3.7.2 .

Localement sur S pour la topologie étale, on a (non canoniquement) $\text{Pic}_{X/S} \sim \text{Pic}_{X/S}^{\circ} \times \mathbb{Z}^k$; on a donc

$$\underline{\text{Ext}}^1(R^1f_{\times} \mathbb{G}_m, G) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}^1(\underline{\text{Pic}}_{X/S}^{\circ}, G)$$

et (1.5.4.2) peut encore s'écrire

$$(1.5.4.3) \quad 0 \rightarrow \underline{\text{Ext}}^1(\underline{\text{Pic}}_{X/S}^{\circ}, G) \rightarrow R^1f_{\times} G \rightarrow \underline{\text{Hom}}(f_{\times} \mathbb{G}_m, G) \rightarrow 0 .$$

1.5.5. Lorsque, dans 1.5.2.2, on fait $K = \mathbb{G}_m[1]$, le théorème 1.5.2 apparaît comme un théorème d'autodualité pour $\tau_{\leq 0}(Rf_{\times} \mathbb{G}_m[1])$. Un quelconque complexe représentant $\tau_{\leq 0} Rf_{\times} \mathbb{G}_m[1]$ admet une filtration canonique en trois crans, les quotients successifs étant, à quasi-isomorphisme unique près

$$\underline{\text{Pic}}_{X/S} / \underline{\text{Pic}}_{X/S}^{\circ} \quad , \quad \text{Pic}_{X/S}^{\circ} \quad , \quad (f_{\times} \mathbb{G}_m)[1] .$$

A l'autodualité précédente correspond une dualité (à valeur dans \mathbb{G}_m) entre $\underline{\text{Pic}}_{X/S} / \underline{\text{Pic}}_{X/S}^{\circ}$ et $f_{\times} \mathbb{G}_m$, et une autodualité (à valeurs dans $\mathbb{G}_m[1]$) sur $\text{Pic}_{X/S}^{\circ}$ (autodualité de la jacobienne).

1.5.6. La situation est nettement moins bonne pour les courbes lisses sur $S : f : X \rightarrow S$ qu'on ne suppose pas propres sur S . Il semble que le groupe additif se comporte de façon incontrôlable. Les arguments qui précèdent s'étendent toutefois au cas des courbes lisses qui se déduisent d'une courbe propre sur S par soustraction d'une partie finie sur S , pour G un faisceau étale de torsion, de torsion première aux caractéristiques résiduelles de S . On peut espérer que les faisceaux étales de p -torsion se comportent eux aussi de façon raisonnable; voir SERRE [1] ch VI n°11 p.126.

Le rôle du théorème 1.2.2 sera joué ici par le théorème d'acycli-

cité XV 2.2, ayant pour corollaire le

Lemme 1.5.7. Soient $p : X \rightarrow S$ la projection d'un espace affine type sur S et G un faisceau abélien de torsion sur $S_{\text{ét}}$, premier aux caractéristiques résiduelles de S . On désigne encore par G l'image réciproque de G sur le site S_{fppf} . Alors, le foncteur p^* est une équivalence de catégorie entre la catégorie des torseurs sous G sur $S_{\text{ét}}$ (ou sur S_{fppf} , ce qui revient au même (Grothendieck[4]), et la catégorie des torseurs sous G_X sur X .

1.5.8. Soient $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow S$ un morphisme propre de présentation finie à fibres purement de dimension un, Y un sous-schéma de \bar{X} fini sur S , défini par un idéal \underline{m} et supposons que $X = \bar{X} - Y$ soit une courbe lisse sur S . Soit d'autre part G un faisceau de torsion sur $S_{\text{ét}}$, premier aux caractéristiques résiduelles de S . On désignera encore par G le faisceau sur le grand site fppf de S (XVII 0.10) image réciproque de G .

Soit $\mathbb{G}_m(\underline{m})$ le sous-faisceau de \mathbb{G}_{mX} formé des sections valant 1 sur Y . Un torseur sous $\mathbb{G}_m(\underline{m})$ s'identifie à un faisceau inversible sur \bar{X} , trivialisé sur Y . Tout diviseur relatif sur X , fini sur S , définit un tel faisceau inversible. Localement sur S pour la topologie étale, il existe de tels diviseurs donnant lieu à des faisceaux inversibles relativement amples.

Lemme 1.5.9. Sous les hypothèses 1.5.8, avec S affine, soit $\mathcal{O}_{\bar{X}}(1)$ un faisceau inversible relativement ample sur \bar{X} , trivialisé le long de Y , et soit \mathcal{M} un faisceau inversible sur \bar{X} , trivialisé le long de Y . Pour tout point $s \in S$, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et toute section m_s de $\mathcal{M}(n) \otimes k(s)$ sur la fibre \bar{X}_s , valant 1 sur Y_s , il existe une section m de $\mathcal{M}(n)$ valant 1 sur Y , qui relève m_s .

On se ramène au cas S noethérien (car une famille de morphismes surjectifs reste une famille de morphismes surjectifs par changements de base). Soit \mathcal{N} le faisceau cohérent des sections locales de \mathcal{M} nulles

sur \bar{X}_S et Y . Pour chaque n , les solutions locales au problème posé forment un espace principal homogène sous $\mathcal{H}(n)$, de sorte que l'obstruction à relever m_s se trouve dans $H^1(X, \mathcal{H}(n)) = H^0(S, R^1 f_{X*} \mathcal{H}(n))$. Or, pour n assez grand, $R^1 f_{X*} \mathcal{H}(n) = 0$ (EGA III 2.2.1).

1.5.10. Soient \mathcal{L} un faisceau inversible sur \bar{X} trivialisé le long de Y , et $s \in S$. Considérons les conditions

(1.5.10.1) Toute section de $\mathcal{L} \otimes k(s)$ sur X_s , valant 1 sur Y_s , se relève en une section de \mathcal{L} sur l'image réciproque U d'un voisinage de s , valant 1 sur $Y_1 U$.

(1.5.10.2) Il existe 4 sections m_i de $\mathcal{L} \otimes k(s)$ sur X_s , valant 1 sur Y , et linéairement indépendantes au point générique de toute composante irréductible de X_s .

Considérons les conditions suivantes, portant respectivement sur une section m de \mathcal{L} , un couple (m_1, m_2) et un triple (m_1, m_2, m_3) de sections de \mathcal{L} .

(1.5.10.3) m vaut 1 sur Y et le sous-schéma $Z(m)$ de X d'équation $m = 0$ est un diviseur relatif sur S (ce qui signifie qu'il est quasi-fini sur S , donc fini sur S , puisque $X = \bar{X} - Y$ est lisse sur S).

(1.5.10.4) Soit λ la coordonnée canonique sur la droite affine $g : E_S^1 \rightarrow S$. La section $\lambda m_1 + (1 - \lambda) m_2$ de $g^* \mathcal{L}$ vérifie (1.5.10.3).

(1.5.10.5) De même, $\lambda m_1 + \mu m_2 + (1 - \lambda - \mu) m_3$ vérifie (1.5.10.3).

On laisse au lecteur le soin de vérifier, par un argument de position générale, le

Lemme 1.5.11. Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X , trivialisé le long de Y , et \bar{s} un point géométrique de S d'image s dans S . Si \mathcal{L} vérifie (1.5.10.1) et (1.5.10.2) en s , alors :

(I) Si n sections m_i de \mathcal{L} vérifient (1.5.10.3), il existe un voisinage étale U de \bar{s} et une section k de $\mathcal{L}|_{f^{-1}(U)}$ telle que les couples (m_i, k) vérifient (1.5.10.4).

(II) Soient m_1, m_2, k_1, k_2 quatre sections de \mathcal{L} telles que les couples (m_i, k_j) vérifient (1.5.10.4). Il existe alors un voisinage étale U de \bar{s} et une section k de $\mathcal{L}|_{f^{-1}(U)}$ telle que les triples (m_i, k_j, k) vérifient (1.5.10.5).

Pour $k(s)$ infini, on pouvait se contenter de prendre pour U un voisinage de Zariski.

1.5.12. Soit maintenant \mathcal{L} un faisceau inversible sur \bar{X} rigidifié le long de Y , et K un G -torseur sur X , où G est comme dans 1.5.7. On se propose de définir un G -torseur $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ sur S , généralisant celui étudié dans 1.3, et additif en \mathcal{L} .

Soit (m_1, m_2) un couple de sections de \mathcal{L} qui vérifie (1.5.10.4). Avec les notations de 1.5.10.3 et de 1.5.10.4, la trace, de $\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2 = 0$ à \mathbb{E}_S^1 , du tosseur g^*K est un tosseur $K_{1,2}$ sur \mathbb{E}_S^1 . Son image réciproque par la section $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = 1$) est le tosseur $K_2 = \text{Tr}_{Z(m_2)/S}(K)$ (resp. $K_1 = \text{Tr}_{Z(m_1)/S}(K)$). D'après 1.5.7, le tosseur $K_{1,2}$ est canoniquement l'image réciproque d'un tosseur sous G sur S ; d'où un isomorphisme canonique entre K_1 et K_2 .

Si m_1, m_2 et k sont trois sections de \mathcal{L} telles que les couples (m_i, k) vérifient (1.5.10.4), on obtient encore par composition un isomorphisme

$$(1.5.12.1) \quad \Psi_k : K_1 = \text{Tr}_{Z(m_1)/S}(K) \xrightarrow{\sim} K_2 = \text{Tr}_{Z(m_2)/S}(K)$$

Si E est un diviseur relatif sur X , fini sur S , les sections $m'_i = m_i \otimes 1$ de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ vérifient encore (1.5.10.3), on a (pour $i = 0, 1$)

$$(1.5.12.2) \quad K'_i = \text{Tr}_{Z(m'_i)/S}(K) \simeq K_i + \text{Tr}_{E/S}(K)$$

et l'isomorphisme $\Psi_{k \otimes 1} : K'_1 \longrightarrow K'_2$ se déduit de Ψ_k :

$$(1.3.12.3) \quad \Psi_{k \otimes 1} = \Psi_k + \text{id}_{\text{Tr}_{E/S}(K)} \quad .$$

Pour vérifier que Ψ_k ne dépend pas de k , il suffit de le faire au voisinage étale de chaque point s de S , et, par 1.5.12.3 et 1.5.9,

on se ramène au cas où sont vérifiées les conditions (1.5.10.1)

(1.5.10.2). Avec les notations de 1.5.11. (II), $\Psi_{\lambda k_i} + (1 - \lambda)k_i - \Psi_{k_i}$ est un morphisme de \mathbf{E}_S^1 dans G , nul en $\lambda = 1$, donc nul, et $\Psi_{k_i} = \Psi_k$, donc $\Psi_{k_1} = \Psi_{k_2}$.

Soient m_1 et m_2 deux sections de \mathcal{L} vérifiant 1.5.10.3 et $K_i = \text{Tr}_{Z(m_i)/S}(K)$. Pour définir un isomorphisme $\Psi_{m_2, m_1} : K_1 \rightarrow K_2$, il suffit de le faire au voisinage étale de chaque point s de S , de façon compatible au changement de base. Si E est un diviseur relatif sur X , fini sur S , tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ vérifie (1.5.10.1) (1.5.10.2) (voir 1.5.9), et si les couples $(m_i \otimes 1, k)$ vérifient (1.5.10.4), on pose (cf. 1.5.12.3)

$$\Psi_{m_2, m_1} + \text{Tr}_{E/S}(K) = \Psi_k.$$

Ceci définit Ψ_{m_2, m_1} et on vérifie par (1.5.11. (I)) que

$\Psi_{m_3, m_2} \Psi_{m_2, m_1} = \Psi_{m_3, m_1}$. Ces constructions sont compatibles aux changements de base. S'il existe une section m de \mathcal{L} vérifiant (1.5.10.3), on posera

$$\langle \mathcal{L}, K \rangle = \text{Tr}_{Z(m)/S}(K)$$

et, d'après ce qui précède, ce torseur ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de m .

Notons, dans le cas général, qu'il suffit pour définir $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ de le définir au voisinage étale de chaque point s de S , de façon compatible au changement de base. Si, comme plus haut, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ vérifie (1.5.10.1) (1.5.10.2), alors $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E)$ admet des sections vérifiant (1.5.10.3), et on pose

$$\langle \mathcal{L}, K \rangle = \langle \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(E), K \rangle - \text{Tr}_{E/S}(K).$$

1.5.13. Sous les hypothèses 1.5.8, si x et y sont deux sections de $f_x \mathcal{G}_m(\underline{m})$, alors $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est encore une section pour λ dans un ouvert à fibres non vides de la droite affine sur S .

On peut traduire ceci en disant que

(1.5.13.1) " $f_x \mathcal{G}_m(m)$ est connexe par arc".

Tout morphisme d'un ouvert à fibres non vides de la droite affine dans G est constant. Il n'existe donc pas d'homomorphisme non trivial de $f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$ dans G , et les automorphismes de \mathcal{L} agissent trivialement sur $\langle \mathcal{L}, K \rangle$. Le toreur $\langle \mathcal{L}, K \rangle$ ne dépend donc que de K et de la section de $R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$ définie par \mathfrak{A} . Par globalisation, ceci permet de définir un symbole $\langle \lambda, K \rangle$ pour λ section de $R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$. Le toreur $\langle \lambda, K \rangle$ est additif en λ , et correspond donc à une extension $e(K)$ de $R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$ par G (voir 1.4.23 ou SGA 7 VII 1.1.6 et 1.2).

La formation de $e(K)$ est compatible à tout changement de base et à l'addition des toreurs, d'où un foncteur additif

$$e : f_{\mathbf{x}} \text{ch}(G[1]) \longrightarrow \text{EXT}(R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m}), G) .$$

Soit j l'application canonique de X dans $R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$,
 $j : t \rightarrow (\text{classe de } \mathcal{O}(t))$. L'image réciproque par j est un foncteur additif

$$j^* : \text{EXT}(R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m}), G) \longrightarrow f_{\mathbf{x}} \text{ch}(G[1])$$

et on a trivialement $j^* e \sim \text{Id}$. On vérifie comme en 1.3.10 et 1.5.2 que, en topologie fppf

Proposition 1.5.14. Sous les hypothèses 1.5.8, les foncteurs e et j de 1.5.13 sont des équivalences inverses l'une de l'autre. On en déduit par 1.4.19, 1.4.23 un isomorphisme

$$\text{Ext}^1(R^1 f_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m}), G) \xrightarrow{\sim} H^1(X, G) .$$

1.5.15. Soient $f_i : X_i \rightarrow S$ ($i = 1, 2$) deux courbes compactifiées comme en 1.5.8.

Soit $\bar{u} : \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}_2$ un morphisme tel que Y_1 soit un sous-schéma de l'image réciproque de Y_2 et qui induise un morphisme fini et plat de X_1 dans X_2 . On a alors, pour \mathcal{L} faisceau inversible sur X_2 et K toreur sur X_1 ,

$$\langle \mathcal{L}, \text{tr}_{X_1/X_2}^{(K)} \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \bar{u}^* \mathcal{L}, K \rangle ,$$

et on en déduit la commutativité du diagramme

$$(1.5.15.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ext}^1(\mathbb{R}^1 f_{1*} \mathbb{G}_m(m), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_1, G) \\ \downarrow \text{Ext}^1(u^*, \text{Id}) & & \downarrow \text{Tr}_{X_1/X_2} \\ \text{Ext}^1(\mathbb{R}^1 f_{2*} \mathbb{G}_m(m), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_2, G) \end{array} .$$

Si $\bar{u} : \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}_2$ est fini et plat, et vérifie $Y_1 \supset \bar{u}^{-1}Y_2$ (comme schémas), on a pour \mathcal{L} faisceau inversible sur X_1 et K torseur sur X_2 ,

$$\langle \mathcal{L}, u^*K \rangle \xrightarrow{\sim} \langle N_{\bar{X}_1/\bar{X}_2} \mathcal{L}, K \rangle$$

et on en déduit la commutativité du diagramme

$$(1.5.15.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ext}^1(\mathbb{R}^1 f_{2*} \mathbb{G}_m(m), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_2, G) \\ \downarrow \text{Ext}^1(N_{X_1/X_2}, \text{Id}) & & \downarrow u^* \\ \text{Ext}^1(\mathbb{R}^1 f_{1*} \mathbb{G}_m(m), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X_1, G) \end{array} .$$

On pourrait bien sûr préciser ce résultat en termes de champs de Picard.

1.6. Un théorème d'effacement.

Le présent n°, de 1.6.6 (2ème démonstration) à la fin, peut se lire indépendamment des n° 2 à 5.

Lemme 1.6.1. Soient X un schéma et Y un sous-schéma fermé de X de complément U , défini par un idéal m .

$$U \xleftarrow{j} X \xleftarrow{i} Y$$

Soit $\mathbb{G}_m(m)$ le faisceau fpqc dont les sections sur un X -schéma X_1 sont les sections de $\mathcal{O}_{X_1}^*$ valant 1 sur l'image réciproque de Y . Pour $n > 1$ inversible sur X , la suite

$$0 \longrightarrow j_! \mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbb{G}_m(m) \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m(m) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux sur le grand site étale (XVII 0.10) de X .

Soit i le morphisme de grands sites étale $i : Y \rightarrow X$ induit par i :

$$i^{\times}(X_1/X) = X_1 \times_X Y.$$

Le foncteur i_{\times} est exact. Dans le diagramme

$$(1.6.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & j_! \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(\underline{m}) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & i_{\times} \mu_n & \longrightarrow & i_{\times} \mathbb{G}_m & \longrightarrow & i_{\times} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

les colonnes sont exactes, ainsi que les deux dernières lignes (IX 3.2). La première ligne est donc exacte.

1.6.2. Soient k un corps et

$$G'_1 \longrightarrow G'_2 \longrightarrow G \longrightarrow G''_2 \longrightarrow G''_1$$

une suite exacte de faisceaux abéliens sur le grand site fppf de $\text{Spec}(k)$. On rappelle que si G'_1 et G'_2 sont représentables de type fini, et G''_2 et G''_1 représentables localement de type fini, alors G est représentable et localement de type fini.

Si P est un groupe algébrique de type fini commutatif connexe sur k , et n un entier inversible dans k , la suite

$$(1.6.2.1) \quad 0 \longrightarrow {}_n P \longrightarrow P \xrightarrow{n} P \longrightarrow 0$$

est exacte. Si G est un groupe commutatif fini étale sur k , annulé par n , le premier groupe et la dernière flèche de la suite exacte

$$\text{Hom}(P, G) \longrightarrow \text{Hom}({}_n P, G) \xrightarrow{j} \text{Ext}^1(P, G) \xrightarrow{n} \text{Ext}^1(P, G)$$

sont nuls, d'où un isomorphisme

$$(1.6.2.2) \quad j : \text{Hom}({}_n P, G) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(P, G) \quad .$$

1.6.3. Sous les hypothèses de 1.6.1, supposons X propre sur le spectre d'un corps k

$$p : X \longrightarrow k \quad .$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow i_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

définit une suite exacte de cohomologie de faisceaux fppf sur $\text{Spec}(k)$, qu'il est facile d'interpréter directement

$$(1.6.3.1) \quad 0 \longrightarrow p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_{m_X} \longrightarrow (\text{pi})_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_{m_Y} \xrightarrow{j} \\ R^1 p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m}) \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{X/k} \longrightarrow \underline{\text{Pic}}_{Y/k} \quad .$$

Les faisceaux $p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_{m_X}$ et $p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_{m_Y}$ sont représentables par des schémas en groupes de type fini. Les faisceaux $\underline{\text{Pic}}_{X/k}$ et $\underline{\text{Pic}}_{Y/k}$ sont représentables par des schémas en groupes localement de type fini. D'après 1.6.2, les faisceaux $p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$ et $R^1 p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$ sont représentables. D'après (1.3.13.1), le premier est représentable par un schéma en groupe connexe (et de type fini); le second est localement de type fini.

Définition 1.6.4. Sous les hypothèses précédentes, on désigne par $\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, X/k}$ le schéma en groupes qui représente $R^1 p_{\mathbf{x}} \mathbb{G}_m(\underline{m})$. On désigne par $\underline{\text{Pic}}^0_{\underline{m}, X/k}$ sa composante neutre et par $\underline{\text{Pic}}^{\tau}_{\underline{m}, X/k}$ l'image réciproque dans $\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, X/k}$ du sous-groupe de torsion de $\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, X/k} / \underline{\text{Pic}}^0_{\underline{m}, X/k}$.

Le schéma $\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, X/k}$ représente le faisceau fppf engendré par le préfaisceaux qui à chaque section S sur k associe l'ensemble des classes d'isomorphie de modules inversibles sur $S \times_k X$, trivialisés le long de $S \times_k Y$ (1.5.8).

La suite exacte de Kummer 1.4.1 fournit, pour k algébriquement clos et n inversible dans k , un isomorphisme

$$(1.6.4.1) \quad H_c^1(U, \mu_n) \xrightarrow{\sim} {}_n \underline{\text{Pic}}^{\tau}_{\underline{m}, X/k}(k) \quad .$$

1.6.5. Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k , \bar{X} la courbe projective et lisse contenant X comme ouvert dense, Y un sous-schéma de \bar{X} tel que $X = \bar{X} - Y$, \underline{m} l'idéal qui définit Y , n un entier inversible dans k et G un groupe abélien fini tué par n .

Le groupe $\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, X/k}$ est non canoniquement le produit du sous-groupe $\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, \bar{X}/k}^{\circ}$ et d'un groupe abélien libre. D'après 1.6.4.1, 1.6.2.2, et 1.5.14, on dispose dès lors d'un isomorphisme canonique composé

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H_c^1(X, \mu_n), G) &\xleftarrow{\sim} \text{Hom}(\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, \bar{X}/k}^{\tau}(k), G) = \text{Hom}(\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, \bar{X}/k}^{\circ}, G) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Ext}^1(\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, \bar{X}/k}^{\circ}, G) \xleftarrow{\sim} \text{Ext}^1(\underline{\text{Pic}}_{\underline{m}, \bar{X}/k}, G) \xrightarrow{\sim} H^1(X, G) \end{aligned}$$

Si $u : X \rightarrow Y$ est un morphisme fini entre courbes lisses sur k , on déduit de XVII 6.3. et (1.5.15.2) la commutativité du diagramme

$$(1.6.5.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}(H_c^1(Y, \mu_n), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(Y, G) \\ \downarrow \text{Hom}(\text{Tr}_u, G) & & \downarrow u^* \\ \text{Hom}(H_c^1(X, \mu_n), G) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X, G) \end{array} .$$

Lemme 1.6.6. Soient X une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k , n un entier inversible dans k et $u : X' \rightarrow X$ un revêtement étale modéré. Le morphisme

$$\text{Tr}_u : H_c^1(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X, \mathbb{Z}/n)$$

est alors (non canoniquement) isomorphe au transposé du morphisme

$$u^* : H^1(X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X', \mathbb{Z}/n) .$$

1ère démonstration. Puisque μ_n est isomorphe à \mathbb{Z}/n , 1.6.6 est un cas particulier de 1.6.5.1 pour $G = \mathbb{Z}/n$.

2ème démonstration. Si k est le corps \mathbb{C} des nombres complexes, alors, par les théorèmes de comparaison, les morphismes Tr_u et u^* s'identifient aux morphismes analogues, définis par l'application continue entre espaces topologiques $u : X'(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Tr}_u : H_c^1(X'(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) \quad \text{et}$$

$$u^* : H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X'(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) .$$

Ces deux homomorphismes sont transposés l'un de l'autre par dualité de Poincaré.

Par le principe de Lefschetz, l'assertion 1.6.6 est encore vraie pour k de caractéristique 0 (les groupes de cohomologie considérés sont en effet invariants par changement de corps de base algébriquement clos).

Si k est caractéristique $p > 0$, soit $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k . Soit \bar{X} la courbe projective et lisse complétée de X . D'après (SGA 1 III 7.4), la courbe \bar{X} se relève en une courbe projective et lisse \bar{X}_1 sur $W(k)$. Puisque \bar{X} est lisse, chaque point $s_1 \in S = \bar{X} - X$ se relève en une section s'_1 de \bar{X} sur $W(k)$; on pose $S_1 = \bigcup_i s'_1(\mathrm{Spec}(W(k)))$ et $X_1 = \bar{X}_1 - S_1$.

Rappelons (SGA 1 XII) que le revêtement X' de X se relève en un revêtement étale X'_1 de X_1 , et que X'_1 se déduit d'une courbe projective et lisse \bar{X}'_1 sur $W(k)$ par soustraction de la réunion S'_1 d'un nombre fini de sections disjointes.

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \longleftarrow & X \\
 \nearrow u_1 & & \nearrow u \\
 X'_1 & \longleftarrow & X' \\
 \searrow f'_1 & & \searrow f \\
 \mathrm{Spec}(W(k)) & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(k)
 \end{array}$$

Les faisceaux étales $R^1 f_{1*}(\mathbb{Z}/n)$, $R^1 f'_{1*}(\mathbb{Z}/n)$, $R^1 f_{1!}(\mathbb{Z}/n)$ et $R^1 f'_{1!}(\mathbb{Z}/n)$ sont localement constants de formation compatible aux changements de

base, comme le montrent les suites exactes reliant les cohomologies de \bar{X}_1 , X_1 et S_1 , ou \bar{X}'_1 , X'_1 et S'_1 .

Les fibres géométriques spéciales ou génériques des morphismes

$$\mathrm{Tr}_{u_1} : R^1 f_{1!} \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f_{1!} \mathbb{Z}/n$$

ou

$$u_1^* : R^1 f_{1*} \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f_{1*} \mathbb{Z}/n$$

sont donc isomorphes, et ceci nous ramène au cas déjà traité où k est de caractéristique zéro.

Lemme 1.6.7. Soient X une courbe lisse connexe sur un corps algébriquement clos k d'exposant caractéristique p , et n un entier premier à p . Il existe un revêtement principal (= fini étale galoisien (surjectif)) $u : X' \rightarrow X$, de degré divisant une puissance de n , tel que le morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_u : H_c^1(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X, \mathbb{Z}/n)$$

soit nul.

Rappelons que le groupe $H^1(X, \mathbb{Z}/n)$ est fini (IX 4.6 ou XVI 5.2). Soit $u : X' \rightarrow X$ le plus grand revêtement principal abélien connexe de X de groupe de Galois tué par n (son groupe de Galois est noté $H_1(X, \mathbb{Z}/n)$). Par construction, l'homomorphisme

$$u^* : H^1(X, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H^1(X', \mathbb{Z}/n)$$

est nul. D'après 1.6.6, l'homomorphisme

$$\mathrm{Tr}_u : H_c^1(X', \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X, \mathbb{Z}/n)$$

est donc nul.

Rappelons le lemme suivant (EGA IV 15.6.5) :

Lemme 1.6.8. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse et x une section de f . Il existe alors un ouvert de Zariski U de X , contenant x , et tel que les fibres géométriques de $f|_U$ soient connexes.

Lemme fondamental 1.6.9. Soient $f : X \rightarrow S$ une courbe lisse (1.1.2) compactifiable (XVII 3.2.), x un point géométrique de X , s son image dans S et $n \geq 1$ un entier inversible sur S . Il existe un voisinage étale V de s dans S et un voisinage étale U de x dans $f^{-1}(V) = V \times_S X$

$$(1.6.9.1) \quad \begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & U & \xrightarrow{u} & f^{-1}(V) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \searrow f' & & \downarrow f_V & & \downarrow f \\ s & \longrightarrow & & & V & \longrightarrow & S \end{array},$$

tels que l'on ait $R^0 f'_! \mathbb{Z}/n = 0$, que la flèche XVII 6.2

$$\text{Tr}_u : R^1 f'_! \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f_{V!} \mathbb{Z}/n$$

soit nulle, et que le morphisme trace

$$\text{Tr}_{f'} : R^2 f'_! \mathbb{Z}/n(1) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

soit un isomorphisme.

Pour que $R^0 f'_! \mathbb{Z}/n = 0$, il suffit que f' soit quasi-affine; pour que $\text{Tr}_{f'}$ soit un isomorphisme, il suffit que les fibres géométriques de f' soient connexes (1.1.9); grâce à 1.6.8, ces propriétés de f' sont faciles à obtenir, localement sur S pour la topologie étale. Il reste à démontrer pour X à fibres géométriques connexes, l'existence d'un diagramme (1.6.9.1) pour lequel la flèche Tr_u considérée soit nulle : il suffira de rétrécir U et V pour que les deux autres propriétés requises de f' soient vérifiées.

Le problème est local sur S au voisinage de s ; par XVII 5.2.6 (changement de base), on se ramène aussitôt au cas S noethérien. Par passage à la limite, et grâce à XVII 5.3.6 (constructibilité) on se ramène au cas S strictement local noethérien, de point fermé image de s .

Soit t un point géométrique de S . D'après 1.6.7, il existe un revêtement principal de degré premier à l'exposant caractéristique p de $k(s)$ $u : X_t^1 \rightarrow X_t$, tel que la flèche

$$\mathrm{Tr}_u : H_c^1(X_t^1, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X_t, \mathbb{Z}/n)$$

soit nulle. D'après le théorème d'acyclicité XV 2.1 (ou XV 2.6), il existe un voisinage étale $v : U \rightarrow X$ de x dans X tel que X_t^1 splitte au-dessus de U_t , de sorte que $v_t : U_t \rightarrow X_t$ se factorise par X_t^1 . On a donc encore

$$\mathrm{Tr}_{v_t} = 0 : H_c^1(U_t, \mathbb{Z}/n) \longrightarrow H_c^1(X_t, \mathbb{Z}/n) .$$

Pour tout point géométrique t de S , il existe donc un voisinage étale de x dans X

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{v} & X \\ & \searrow f' & \downarrow f \\ & & S \end{array}$$

tel que la fibre en t de

$$(1.6.9.2) \quad \mathrm{Tr}_v : R^1 f'_! \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^1 f_! \mathbb{Z}/n$$

soit nulle (XVII 5.2.6).

Pour U variable, les images des flèches (1.6.9.2) forment un système décroissant filtrant de sous-faisceaux du faisceau constructible $R^1 f_! \mathbb{Z}/n$, qui devient nul en un quelconque point géométrique de S . Par récurrence noethérienne, on vérifie qu'un tel système est toujours stationnaire, de valeur stationnaire nulle. Il existe donc U tel que (1.6.9.2) soit nul, et ceci achève la démonstration de 1.6.9.

2. Le morphisme trace

Le présent § est consacré à la démonstration des théorèmes 2.9 et 2.12. La démonstration de 2.9 n'utilise que le n°1 du § 1.

Lemme 2.1. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable (XVII 3.2.1) de dimension relative $\leq d$ et $j : U \hookrightarrow X$ un sous-schéma ouvert de type fini de X , dont le complément est fibre par fibre de dimension $< d$ (par exemple : U dense fibre par fibre dans X). Si F est un faisceau de torsion sur X , la flèche canonique

$$R^{2d}(fj)_! j^* F \xrightarrow{\sim} R^{2d} f_! F$$

est un isomorphisme.

Soit i l'inclusion de $Y = X - U$ dans X . La suite exacte (XVII 5.1.16.2) nous fournit une suite exacte

$$R^{2d-1}(fi)_! i^* F \longrightarrow R^{2d}(fj)_! j^* F \longrightarrow R^{2d} f_! F \longrightarrow R^{2d}(fi)_! i^* F$$

dont les termes extrêmes sont nuls en vertu de (XVII 5.2.8.1).

Lemme 2.2. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable de dimension relative $\leq d$, et $u_i : X_i \rightarrow X$ une famille de morphismes étales, séparés, de type fini; soit $u_{ij} : X_{ij} = X_i \times_X X_j \rightarrow X$. Pour tout faisceau de torsion F sur X , la suite

$$\bigoplus_{i,j} R^{2d}(fu_{ij})_! u_{ij}^* F \implies \bigoplus_i R^{2d}(fu_i)_! u_i^* F \longrightarrow R^{2d} f_! F \longrightarrow 0$$

de flèches (XVII 6.2.7.2) est exacte.

Résulte aussitôt de l'exactitude à droite du foncteur $R^{2d} f_!$ et de XVII 6.2.9.

Lemme 2.3. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie. L'ouvert de X sur lequel f est de Cohen-Macaulay (EGA IV 6.8.1 et 12.2.1(vii)) est relativement de présentation finie et dense fibre par fibre.

La question est locale sur S , qu'on se ramène à supposer noethérien, d'où la première assertion. La seconde se vérifie fibre par fibre, donc pour S spectre d'un corps. Les anneaux locaux de X aux points maximaux de X sont artiniens, donc de Cohen-Macaulay, d'où l'assertion puisque "Cohen-Macaulay" est une propriété "ouverte".

Lemme 2.4. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie et de Cohen-Macaulay, avec S quasi-séparé. Tout point de X a un voisinage ouvert (de Zariski) U tel qu'il existe un S -morphisme quasi-fini et plat de présentation finie de U dans le fibré vectoriel type \mathbb{E}_S^d .

C'est un cas particulier de EGA IV 15.4.3.

Lemme 2.5. Soient $\underline{u} = (u_1, \dots, u_d)$ et $\underline{v} = (v_1, \dots, v_d)$ deux systèmes de paramètres d'un anneau local de Cohen-Macaulay A , de dimension d et d'idéal maximal \underline{m} . Il existe une suite $\underline{w}_0 \dots \underline{w}_n$ de systèmes de paramètres de A , telle que $\underline{w}_0 = \underline{u}$, $\underline{w}_n = \underline{v}$ et que chaque \underline{w}_{i+1} se déduise de \underline{w}_i , en modifiant un seul des paramètres.

On raisonne par récurrence sur d , l'assertion étant vide pour $d < 2$; on suppose donc $d \geq 2$. Pour qu'un élément $x \in \underline{m}$ soit A/u_1 - régulier (resp. A/v_1 - régulier) il faut et il suffit que x n'appartienne à aucun élément de $\text{Ass}(A/u_1)$ (resp. $\text{Ass}(A/v_1)$); aucune réunion finie d'idéaux premiers $\neq \underline{m}$ n'étant égale à \underline{m} , il existe $x \in \underline{m}$ qui soit A/u_1 - et A/v_1 - régulier, donc aussi des systèmes de paramètres $\underline{a} = (u_1, x, \dots)$ et $\underline{b} = (v_1, x, \dots)$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\underline{u} - \{u_1\}$ et $\underline{a} - \{u_1\}$ dans A/u_1 , à $\underline{a} - \{x\}$ et $\underline{b} - \{x\}$ dans A/x et à $\underline{b} - \{v_1\}$ et $\underline{v} - \{v_1\}$ dans A/v_1 .

Lemme 2.6. Soient X un schéma de Cohen-Macaulay de type fini sur un corps algébriquement clos k et $u, v : X \rightarrow \mathbb{E}_k^d$ deux morphismes quasi-finis et plats de X dans un fibré vectoriel type. Tout point fermé x de X a un voisinage ouvert (de Zariski) U , tel qu'il existe une

suite de morphismes $w_0 \dots w_n : U \rightarrow \mathbb{E}_k^d$, telle que $w_0 = u|_U, w_n = v|_U$ et
que w_{i+1} ne diffère de w_i que par une seule coordonnée.

Supposons tout d'abord que $u(x) = v(x) = 0$. Les germes en x de morphismes quasi-finis plats de X dans \mathbb{A}_k^d , envoyant x en 0 , s'identifient alors aux systèmes de paramètres de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ et 2.6 résulte de 2.5. Dans le cas général, on commence à joindre u et $u-u(x)$ (resp. v et $v-v(x)$) par la chaîne des morphismes $u - (u_1(x), \dots, u_i(x), 0, \dots, 0)$ (resp. $v - (v_1(x), \dots, v_i(x), 0, \dots, 0)$).

2.7. Soit un couple de morphismes S -compactifiables composables $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} S$. Supposons que f soit de dimension relative $\leq d$ et g de dimension relative $\leq e$. Pour tout faisceau de torsion F sur X , la suite spectrale de composition

$$(2.7.1) \quad R^p f_! R^q g_! F \implies R^{p+q}(fg)_! F$$

nous fournit alors (argument du cycle maximum) un isomorphisme

$$(2.7.2) \quad R^{2d} f_! R^{2e} g_! F \simeq R^{2(d+e)}(fg)_! F .$$

2.8. Soit

$$a^d : \mathbb{E}_S^d \longrightarrow S$$

le fibré vectoriel type sur un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé) S . Si F est un faisceau de torsion sur S , premier aux caractéristiques résiduelles de S , on définit comme suit, par récurrence sur d , un morphisme trace

$$(2.8.1) \quad \text{Tr}_{a^d} : R^{2d} a^d_! F(d) \xrightarrow{\sim} F .$$

Pour $d = 0$, Tr_{a^0} est l'identité. Pour $d = 1$, Tr_{a^1} est l'isomorphisme (1.1.6) (cf. 1.1.9). Enfin, on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{E}_S^{d+1} \simeq \mathbb{E}_S^1 \times_S \mathbb{E}_S^d = \mathbb{E}_S^1 \mathbb{E}_S^d$$

et on définit $\text{Tr}_{a, d+1}$ comme le composé des isomorphismes $\text{Tr}_{a, d}$ et Ra_S^d ($\text{Tr}_{a, 1}$). (cf. le diagramme Var 3 de 2.9).

La source (et le but) de 2.8.1 sont de formation compatible à tout changement de base. Tout groupe algébrique sur S agissant sur \mathbb{E}_S^d agit donc sur ces faisceaux; un groupe algébrique connexe agit nécessairement de façon triviale. Le groupe des permutations des coordonnées, contenu dans le groupe affine, agit donc trivialement sur la source (et le but) de 2.8.1.

(2.8.2) L'isomorphisme 2.8.1 est invariant par permutation des coordonnées.

Ce point pourrait aussi se vérifier en interprétant (2.8.1) en termes de cup-produits (XVII 5.4.2.2 et 5.4.3.5.).

Théorème 2.9 Considérons les triples (f, d, F) formés d'un morphisme compactifiable (XVII 6.3.) $f : X \rightarrow Y$, d'un entier d et d'un faisceau de torsion F sur Y premier aux caractéristiques résiduelles de Y , le morphisme f vérifiant la condition : $(*)_d$ Il existe un ouvert U de X tel que la restriction de f à U soit un morphisme plat de présentation finie à fibres de dimension $\leq d$, et tel que les fibres $X - U$ soient de dimension $< d$.

Il est d'une et d'une seule façon possible d'associer à chaque triple (f, d, F) comme plus haut un morphisme trace

$$\text{Tr}_f : R^{2d}_{f_!} f^* F(d) \longrightarrow F$$

de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Var 1) (Fonctorialité). Le morphisme trace est fonctoriel en F .

(Var 2) (Compatibilité aux changements de base). Quel que soit le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{g'} & X \\
 \downarrow f' & & \downarrow f \\
 Y' & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

avec Y' quasi-compact quasi-séparé, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 R^{2d} f'_! f'^* g^* F(d) & \xlongequal{\quad} & R^{2d} f'_! g'^* f^* F(d) \xleftarrow{\sim} g^* R^{2d} f'_! f^* F(d) \\
 \downarrow \text{Tr}_{f'} & & \downarrow g^*(\text{Tr}_f) \\
 g^* F & \xlongequal{\quad} & g^* F
 \end{array}$$

dans lequel l'isomorphisme horizontal est la flèche de changement de base (XVII 5.5.2.1), est commutatif.

(Var 3) (Compatibilité à la composition). Quels que soient le couple de morphismes Z -compactifiables composables

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z,$$

les entiers d et e tels que f vérifie $(^*)_d$ et que g vérifie $(^*)_e$, et le faisceau de torsion F sur Z , le morphisme composé fg vérifie $(^*)_{d+e}$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 R^{2d} f'_! R^{2e} g'_! g^* f^* F(d)(e) & \xrightarrow{R^{2d} f'_!(\text{Tr}_g)} & R^{2d} f'_! f^* F(d) \\
 \updownarrow & & \downarrow \text{Tr}_f \\
 R^{2(d+e)} (fg)_! (fg)^* F(d+e) & \xrightarrow{\text{Tr}_{fg}} & F
 \end{array}$$

dans lequel l'isomorphisme vertical est la flèche (2.7.2), est commutatif.

(Var 4) (Normalisations).

(I) Si f est fini localement libre de rang n et si $d = 0$, le morphisme composé

$$F \longrightarrow f_* f^* F = f'_! f^* F \xrightarrow{\text{tr}_f} F$$

est la multiplication par n .

(II) Si f est la droite affine type $f : \mathbb{E}_Y^1 \rightarrow Y$, et si $d = 1$, le morphisme trace

$$\text{Tr}_f \quad R^2 f_! f^* F(1) \longrightarrow F$$

est l'isomorphisme (2.8.1)

a) Pour $d = 0$, la condition $(\tilde{x})_d$ est que f soit quasi-fini plat de présentation finie. En vertu de (XVII 6.2.3), pour $d = 0$, le morphisme trace doit coïncider avec le morphisme construit en loc. cit.

Lorsque f est la projection de l'espace affine type \mathbb{A}_S^d sur S, il résulte de (Var 4 (II) et (Var 3) que Tr_f doit être l'isomorphisme (2.8.1).

b) Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme compactifiable vérifiant la condition:

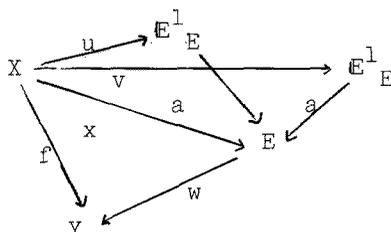
$(\tilde{x})_d$ Il existe un Y-morphisme quasi-fini et plat de présentation finie u de X dans le fibré vectoriel type $a^d : \mathbb{E}_Y^d \rightarrow Y$.

Soit $t(f,u)$ le morphisme "composé des morphismes trace

(2.8.1) et (SGA XVII 6.2.3) (cf. (Var 3))

$$t(f,u) = \text{Tr}_a^d \circ R^{2d} a_!^d (\text{Tr}_u) .$$

Ce morphisme $t(f,u)$ vérifie (Var 1) et (Var 2). Par changement de base, pour vérifier que $t(f,u)$ ne dépend que de f et de d, et non de u, il suffit de le vérifier pour Y spectre d'un corps algébriquement clos k. D'après 2.2, la question est locale sur X, de sorte que d'après 2.6, il suffit de montrer que $t(f,u) = t(f,v)$ lorsque u et v ne diffèrent que par une seule coordonnée que, par 2.8.2, on peut supposer être la première. Posant $E = \mathbb{E}_Y^{d-1}$, on dispose donc d'un diagramme commutatif



$j : U \hookrightarrow X$ l'ouvert promis par $(\star)_d$. D'après 2.3, quitte à remplacer U par un ouvert plus petit, on peut supposer que fj est de Cohen-Macaulay, et purement de dimension d .

D'après 2.1, le morphisme canonique

$$R^{2d}(fj)_! (fj)^{\star} F(d) \xrightarrow{\sim} R^{2d}_{f,!} f^{\star} F(d)$$

est un isomorphisme, et on définit Tr_f comme étant le composé

$$Tr_f : R^{2d}_{f,!} f^{\star} F(d) \xleftarrow{\sim} R^{2d}(fj)_! (fj)^{\star} F(d) \xrightarrow{Tr_{fj}} F .$$

Il est immédiatement, grâce à (Var 3) pour $e = 0$ établi en c), que Tr_f ne dépend pas du choix de U . Le morphisme trace vérifie (Var 1), (Var 2), (Var 3) pour $e = 0$, (Var 4), et est le seul à pouvoir vérifier les conditions imposées. Reste à prouver qu'il vérifie (Var 3), et pour ce faire on se ramène, par les arguments qui précèdent, à ne considérer que des couples (f,d) , (g,e) vérifiant $(\star)_d$ et $(\star)_e$.

Le lecteur qui voudrait polir les raisonnements qui suivent vérifiera au préalable le

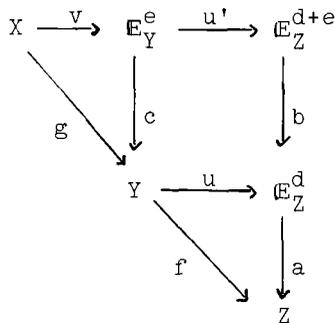
Lemme 2.9.1. Soient (f,g,h) trois morphismes T -compactifiables composables, vérifiant $(\star)_k$, $(\star)_\ell$ et $(\star)_m$.

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} T .$$

Si les couples (f,g) et (g,h) vérifient (Var 3), alors pour que (f,gh) vérifie (Var 3), il faut et il suffit que (fg,h) vérifie (Var 3).

La condition envisagée dans la conclusion signifie encore que Tr_{fgh} est "composé" de Tr_f , Tr_g et Tr_h .

e) Soit un diagramme commutatif :



Le morphisme trace relatif à fg est le "composé" des morphismes traces relatifs à ab et $u'v$; c'est encore, par construction pour ab , et d'après XVII 6.2.3 pour $u'v$, le "composé" des morphismes trace relatifs à a, b, u' et v . D'autre part, le "composé" des morphismes trace relatifs à f et g est le "composé" de ceux relatifs à a, u, e et v . Il s'agit donc de vérifier que pour tout diagramme cartésien

$$(2.9.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{E}_S^e & \xrightarrow{u'} & \mathbb{E}_T^e \\ \downarrow b' & & \downarrow b \\ S & \xrightarrow{u} & T \end{array}$$

avec u quasi-fini et plat de présentation finie, le diagramme de morphismes trace (2.8.1) et XVII 6.2.)

$$(2.9.3) \quad \begin{array}{ccccc} R^{2e}_{b'} u' u'^* b^* F(e) & \xrightarrow{R^{2e}_{b'} (Tr_{u'})} & R^{2e}_{b'} b^* F(e) & \xrightarrow{Tr_b} & F \\ \parallel & & & & \parallel \\ u' R^{2e}_{b'} b^* u^* F(e) & \xrightarrow{u' (Tr_{b'})} & u' u^* F & \xrightarrow{Tr_u} & F \end{array}$$

est commutatif.

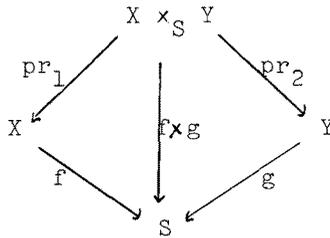
Par changement de base, il suffit de le vérifier pour T spectre d'un corps algébriquement clos k . Si S est somme de schémas S_i , on se ramène à ne vérifier la commutativité de (2.9.3) que pour les diagrammes (2.9.2) de base $u_i : S_i \rightarrow T$. Ceci permet de supposer que S est le spectre d'une k -algèbre artinienne locale A , de degré fini $n = [A : k]$. Si on identifie alors les faisceaux sur T (resp. sur \mathbb{E}_T^e) avec les faisceaux sur S (resp. sur \mathbb{E}_S^e) par le foncteur u^* (resp. u'^*) (VIII 1.1), le morphisme Tr_b s'identifie au morphisme $Tr_{b'}$, (compatibilité de (2.8.1) aux changements de base), tandis que Tr_u et $Tr_{u'}$ s'identifient à la multiplication par n , d'où l'assertion. Ceci achève la démonstration de 2.9.

On a vu au courant de la démonstration que l'on a :

Proposition 2.10. Les morphismes trace XVII 6.2.3, 1.1.6 et (2.8.1) sont des cas particuliers du morphisme trace 2.9.

Remarque 2.10.1. On peut montrer sans difficulté que le morphisme trace de 2.9 est un isomorphisme si et seulement si les fibres géométriques de f ont exactement une composante irréductible de dimension d , et la "multiplicité" de celle-ci est première à n . Nous ne donnerons pas ici la démonstration directe de ce fait qui résultera de façon immédiate du "théorème de dualité globale" du § 3.

2.11. Soient $f : X \rightarrow S$ et $g : Y \rightarrow S$ deux morphismes S -compactifiables vérifiant respectivement $(x)_d$ et $(x)_e$.



L'isomorphisme de Kunneth (XVII 5.4.3)

$$Rf_!(\mathbb{Z}/n) \otimes_{\mathbb{Z}/n} Rg_!(\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} R(f \times g)_!(\mathbb{Z}/n)$$

induit un isomorphisme

$$(2.11.1) \quad R^{2d}f_!(\mathbb{Z}/n) \otimes R^{2e}g_!(\mathbb{Z}/n) \xrightarrow{\sim} R^{2(d+e)}(f \times g)_!(\mathbb{Z}/n)$$

Il est clair que $f \times g$ vérifie $(x)_{d+e}$; on a la compatibilité :

Proposition 2.12. Le diagramme suivant

$$(2.12.1) \quad \begin{array}{ccc}
 R^{2d}f_!(\mathbb{Z}/n(d)) \otimes R^{2e}g_!(\mathbb{Z}/n(e)) & \xrightarrow{\sim} & R^{2(d+e)}(f \times g)_!(\mathbb{Z}/n(d+e)) \\
 \downarrow \text{Tr}_f \otimes \text{Tr}_g & & \downarrow \text{Tr}_{f \times g} \\
 \mathbb{Z}/n & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathbb{Z}/n \quad ,
 \end{array}$$

dans lequel la première flèche horizontale est une forme tordue de

(2.11.1), est commutatif.

Pour le vérifier, il suffit d'utiliser (Var 3), et l'interprétation asymétrique de la flèche de Kunnetth utilisée dans la démonstration de XVII 5.4.3. (XVII 5.4.3.5).

2.13. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme S -compactifiable vérifiant $(x)_d$, \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur S et n un entier inversible sur S tel que $n\mathcal{A} = 0$.

Pour tout $K \in D(S, \mathcal{A})$, on a (XVII 5.2.6)

$$(2.13.1) \quad K \otimes_{\mathbb{Z}/n}^{\mathbb{L}} Rf_! \mathbb{Z}/n(d) \xrightarrow{\sim} Rf_!(f^*K(d)) \quad .$$

Le morphisme trace

$$\text{Tr}_f : R^{2d}f_! \mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

peut encore s'interpréter comme un morphisme

$$\text{Tr}_f : Rf_! \mathbb{Z}/n(d)[2d] \longrightarrow \mathbb{Z}/n \quad .$$

Par tensorisation avec K , ce morphisme définit, via (2.13.1), un morphisme trace

$$(2.13.2) \quad \text{Tr}_f : Rf_!(f^*K(d)[2d]) \longrightarrow K \quad .$$

Comme nous le verrons en 3.2.5. le théorème suivant est essentiellement équivalent au théorème de dualité globale en cohomologie étale.

Théorème 2.14. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse et compactifiable purement de dimension relative d , et n un entier ≥ 1 inversible sur S . Quel que soit le point géométrique x de X d'image s dans S , il existe un voisinage étale V de s dans S et un voisinage étale U de x dans $f^{-1}(V)$

$$(2.14.1) \quad \begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{j} & f^{-1}(V) & \longrightarrow & X \\ & \searrow f'_V & \downarrow f_V & & \downarrow f \\ & & V & \longrightarrow & S \end{array}$$

tel que le morphisme (XVII 6.2.7.2)

$$R^i f_{V!} \mathbb{Z}/n \longrightarrow R^i f_V \mathbb{Z}/n$$

soit nul pour $i < 2d$, et que le morphisme

$$\text{Tr}_{f_V} : R^{2d} f_{V!} \mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

soit un isomorphisme.

Prouvons tout d'abord le

Lemme 2.14.2. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne, k un entier ≥ 0 ,

$(K_i)_{0 \leq i \leq 2k}$ des objets de $D^b(\mathcal{A})$ tels que $H^p(K_i) = 0$ pour

$p \notin [0, k]$, $f_i : K_i \rightarrow K_{i+1}$ ($0 \leq i \leq 2k-1$) des morphismes et f leur composé.

Si $H^p(f_i) = 0$ pour $p < k$, alors il existe dans $D^b(\mathcal{A})$ un morphisme ψ

du complexe $H^k(K_0)[-k]$, réduit à $H^k(K_0)$ placé en degré k , dans K_{2k} , qui

rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \xrightarrow{f} & K_{2k} \\ \downarrow & & \uparrow \psi \\ \sigma_{\geq k}(K_0) & \xlongequal{\quad} & H^k(K_0)[-k] \end{array} .$$

Le lemme est trivial pour $k = 0$. Prouvons-le par récurrence sur k .

L'hypothèse de récurrence appliquée aux complexes $\sigma_{\geq 1}(K_i)[1]$ fournit

l'existence d'un morphisme $\psi' : H^k(K_0)[-k] \rightarrow \sigma_{\geq 1} K_{2k-2}$ qui rende com-

mutatif le diagramme suivant, où $f' = f_{2k-3} \dots f_0$:

$$\begin{array}{ccc} K_0 & \xrightarrow{f'} & \sigma_{\geq 1} K_{2k-2} \\ \downarrow & & \uparrow \psi' \\ \sigma_{\geq k}(K_0) & \xlongequal{\quad} & H^k(K_0)[-k] \end{array} .$$

Pour tout complexe L , le triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & \sigma_{\geq 1}(L) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \sigma_{\leq 0}(L) & \longrightarrow & L \end{array}$$

fournit, pour tout complexe M, une suite exacte

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(M, \sigma_{\leq 0}(L)) \rightarrow \text{Hom}(M, L) \rightarrow \text{Hom}(M, \sigma_{\geq 1}L) \xrightarrow{j} \text{Ext}^1(M, \sigma_{\leq 0}L) .$$

En particulier, on dispose d'un diagramme

(2.14.3)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}(\sigma_{\geq k}K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) & \xrightarrow{\textcircled{5}} & \text{Hom}(\sigma_{\geq k}K_0, K_{2k-2}) & \xrightarrow{\textcircled{3}} & \text{Hom}(\sigma_{\geq k}K_0, \sigma_{\geq 1}K_{2k-2}) & \xrightarrow{\textcircled{4}} & \text{Ext}^1(\sigma_{\geq k}K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \textcircled{7} \text{Hom}(K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) & \xrightarrow{\textcircled{1}} & \text{Hom}(K_0, K_{2k-2}) & \xrightarrow{\textcircled{2}} & \text{Hom}(K_0, \sigma_{\geq 1}K_{2k-2}) & \xrightarrow{\textcircled{6}} & \text{Ext}^1(K_0, \sigma_{\leq 0}K_{2k-2}) \end{array}$$

qui s'envoie dans les diagrammes analogues relatifs à K_{2k-1} et K_{2k} .

Par hypothèse, le morphisme f' en $\textcircled{1}$ a une image en $\textcircled{2}$ qui se relève en $\textcircled{3}$. L'obstruction $\textcircled{4}$ à ce que l'élément $\textcircled{3}$ se relève en $\textcircled{5}$ a une image nulle dans le diagramme (2.14.3) relatif à K_{2k-1} . Dans ce nouveau diagramme, $\textcircled{3}$ se relève donc en $\textcircled{5}$, et la différence entre $\textcircled{1}$ et l'image de $\textcircled{5}$ a une image nulle en $\textcircled{6}$, donc est l'image d'un élément $\textcircled{7}$. Cet élément $\textcircled{7}$ a une image nulle dans le diagramme (2.12.3) relatif à K_{2k} ; dans ce nouveau diagramme, f est donc image de $\textcircled{5}$, et ceci résoud le problème posé.

Prouvons que, pour une valeur donnée de d , l'énoncé 2.14 implique le

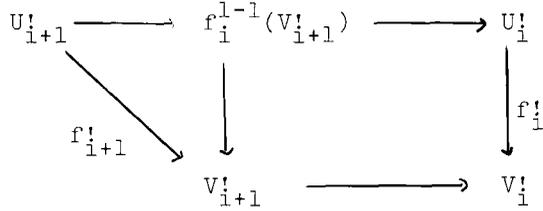
Corollaire 2.14.4. Sous les hypothèses de 2.14, il existe un diagramme (2.14.1) tel que le morphisme XVII 6.2.4, dans $D^b(V, \mathbb{Z}/n)$ admette une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \text{Rf}_{V!} \mathbb{Z}/n(d) & \xrightarrow{\quad} & \text{Rf}_{V!} \mathbb{Z}/n(d) \\ & \searrow t & \nearrow \psi \\ & \mathbb{Z}/n[-2d] & \end{array} ,$$

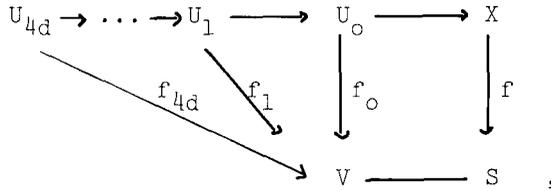
où t est la flèche

$$t : \text{Rf}_{V!} \mathbb{Z}/n(d) \rightarrow \sigma_{\geq 2d} \text{Rf}_{V!} \mathbb{Z}/n(d) = H^{2d}(\text{Rf}_{V!} \mathbb{Z}/n(d))[-2d] \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{Z}/n[-2d] .$$

Posons $f'_0 = f$ et construisons, par récurrence, $4d$ diagrammes (2.14.1)



vérifiant 2.14. Posons $V = V'_{4d}$ et $U_i = U'_i \times_{V'_i} V$. On obtient un diagramme



avec $U_0 = f^{-1}(V)$, tel que les flèches

$$R^i f_{k+1!} \mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow R^i f_{k!} \mathbb{Z}/n(d)$$

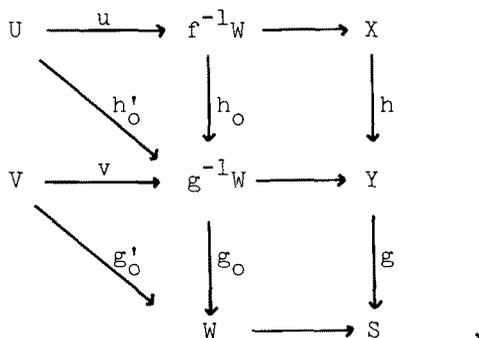
soient nulles et que la flèche

$$\text{Tr} : R^{2d} f_{4d!} \mathbb{Z}/n(d) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$$

soit un isomorphisme. D'après 2.14.2, le corollaire est vérifié pour $U = U_{4d}$.

Nous sommes prêt, maintenant, à prouver 2.14 par récurrence sur d . Le cas $d = 0$ est trivial et le cas $d = 1$ n'est autre que 1.4.7. Supposons donc $d \geq 2$.

Le problème étant de nature locale sur X et S , on peut supposer que f admet une factorisation $f = gh$, avec g et h lisses compactifiables, purement de dimension d' et d'' et que $d', d'' < d = d' + d''$. Appliquons 2.14.4 à g et aux morphismes déduits de h par changement de base, de façon à obtenir un diagramme



tel que les morphismes (XVII 6.2.7.3) admettent des factorisations

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Rh}'_0! \mathbb{Z}/n(d'') & \xrightarrow{\text{Tr}} & \mathbb{Z}/n[-2d''] & \xrightarrow{\Psi} & \text{Rh}_0! \mathbb{Z}/n(d'') \\
 \text{Rg}'_0! \mathbb{Z}/n(d') & \xrightarrow{\text{Tr}} & \mathbb{Z}/n[-2d'] & \xrightarrow{\Psi} & \text{Rg}_0! \mathbb{Z}/n(d')
 \end{array}$$

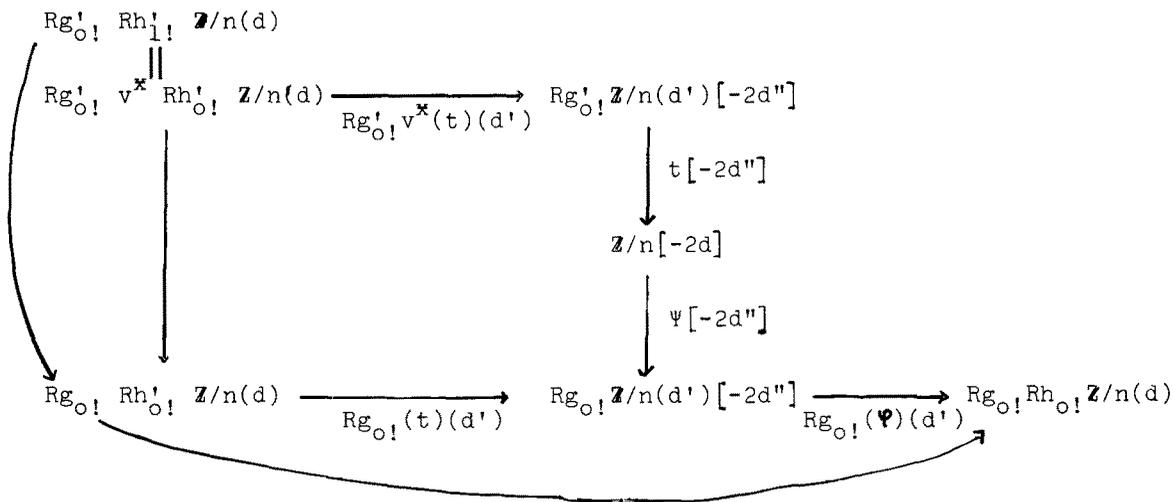
et que $\text{Tr}_{h'}$, et Tr_g , soient des isomorphismes.

Soient h_1 et h'_1 les morphismes déduits de h_0 et h' par le changement de base V , et soit $f' = g'_1 h'_1$, $f_w = g_0 h_0$.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Rf}'! \mathbb{Z}/n(d) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & \text{Rf}'_{W!} \mathbb{Z}/n(d) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \text{Rg}'_0! \text{Rh}'_1! \mathbb{Z}/n(d) & \longrightarrow & \text{Rg}_0! \text{Rh}'_0! \mathbb{Z}/n(d) & \longrightarrow & \text{Rg}_0! \text{Rh}_0! \mathbb{Z}/n(d)
 \end{array}$$

ainsi que le diagramme



Pour le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 U_1 & \longrightarrow & f^{-1}W & \longrightarrow & X \\
 & \searrow f' & \downarrow f_W & & \downarrow f \\
 & & W & \longrightarrow & S
 \end{array} ,$$

la flèche canonique de $Rf'_! \mathbb{Z}/n(d)$ dans $Rf_{W'} \mathbb{Z}/n(d)$ se factorise donc par $\mathbb{Z}/n[-2d]$; les flèches de $R^i f'_! \mathbb{Z}/n(d)$ dans $R^i f_{W'} \mathbb{Z}/n(d)$ sont donc nulles pour $i < 2d$. Enfin, $\text{Tr}_{f'}$ est un isomorphisme en tant que composé des isomorphismes $\text{Tr}_{g'_0}$ et $\text{Rg}'_0 \text{Tr}_{h'_1}$.

Ceci achève la démonstration de 2.14.

3. Le théorème de dualité globale

3.1. Le foncteur $Rf^!$

Nous aurons besoin d'une variante des résolutions flasques canoniques.

Lemme 3.1.1. Soit X un schéma cohérent (i.e. quasi-compact quasi-séparé). Le foncteur \lim induit une équivalence entre la catégorie des Ind-objets de la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes abéliens) constructibles et la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes Ind-finis, resp. abéliens de torsion).

Résulte de IX 2.7.2 et IX 2.7.3 .

3.1.2. Soit \mathcal{F} un faisceau abélien de torsion sur un schéma X , limite inductive filtrante de faisceaux constructibles $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$, et X_0 un ensemble conservatif de points de X . On définit la résolution flasque canonique modifiée de \mathcal{F} par la formule

$$C_\ell^*(\mathcal{F}) = \varinjlim_i C_\ell^*(\mathcal{F}_i) \quad ,$$

où les $C_\ell^*(\mathcal{F}_i)$ sont les résolutions flasques canoniques de XVII 4.2.2 . D'après 3.1.1., pour X cohérent, cette définition ne dépend pas du choix des \mathcal{F}_i . Elle commute de plus à la localisation; ce fait permet de définir $C_\ell^*(\mathcal{F})$ par globalisation pour \mathcal{F} faisceau de torsion sur un schéma X quelconque, non nécessairement cohérent.

Le complexe $C_\ell^*(\mathcal{F})$ est une résolution de \mathcal{F} , fonctorielle en \mathcal{F} , dont la formation commute à la localisation et aux limites inductives filtrantes; les foncteurs C_ℓ^n sont exacts.

Il en résulte que pour un faisceau d'anneaux \mathcal{A} sur X , les foncteurs C_ℓ^n transforment \mathcal{A} -Modules en \mathcal{A} -Modules; ils transforment de même faisceaux de torsion en faisceaux de torsion. Il est bien connu que

Lemme 3.1.3. Soit \mathcal{A} une \mathcal{U} -catégorie abélienne ayant un petit ensemble générateur et telle que les limites inductives indexées par un petit ensemble ordonné filtrant soient représentables dans \mathcal{A} , et soient exactes. Pour qu'un foncteur F de \mathcal{A}^0 dans (Ens) soit représentable, il faut et il suffit qu'il transforme petites limites inductives (quelconques) en limites projectives.

Cf. p.ex. SGA 4 I 8.12.5, où on ne suppose pas \mathcal{A} abélienne ni les \varinjlim filtrantes exactes.

On appliquera ce lemme à la catégorie $\text{Mod}(X, \mathcal{A})$ des faisceaux de modules sur un site annelé (X, \mathcal{A}) . Dans ce cas particulier, si le foncteur F est représenté par le faisceau \underline{F} , on a

$$(3.1.3.1) \quad \underline{F}(U) = F(\mathcal{A}_U) \quad .$$

Cette description de \underline{F} permet une vérification directe de 3.1.3 dans le cas considéré.

Rappelons que si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme compactifiable (XVII 3.2.), alors S est quasi-compact quasi-séparé (sic), et la dimension des fibres de f est bornée.

Théorème 3.1.4. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable et \mathcal{A} un faisceau d'anneaux de torsion sur S . Alors, le foncteur

$$(3.1.4.1) \quad Rf_! : D(X, f^* \mathcal{A}) \longrightarrow D(S, \mathcal{A})$$

admet un adjoint à droite partiel

$$(3.1.4.2) \quad Rf^! : D^+(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X, f^* \mathcal{A}) :$$

pour $K \in \text{Ob } D(X, f^* \mathcal{A})$ et $L \in \text{Ob } D^+(S, \mathcal{A})$, on a un isomorphisme fonctoriel

$$(3.1.4.3) \quad \text{Hom}(Rf_! K, L) \simeq \text{Hom}(K, Rf^! L) \quad .$$

Muni du morphisme de translation rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}(\text{Rf}_! (K[1]), L) & \xleftarrow[\text{adj.}]{\sim} & \text{Hom}(K[1], \text{Rf}^! L) \simeq \text{Hom}(K, (\text{Rf}^! L)[-1]) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{Hom}(\text{Rf}_! K)[1], L) & \simeq \text{Hom}(\text{Rf}_! K, L[-1]) & \xleftarrow[\text{adj.}]{\sim} \text{Hom}(K, \text{Rf}^! (L[-1])),
\end{array}$$

3.1.4.4)

ce foncteur $\text{Rf}^!$ est un foncteur triangulé.

N.B. La notation $\text{Rf}^!$ est abusive en ce que $\text{Rf}^!$ n'est en général pas le dérivé d'un foncteur $f^!$.

Démonstration Soit d un entier tel que toute fibre de f soit de dimension $< d$, et choisissons une compactification

$$\begin{array}{ccc}
X & \xleftarrow{j} & \bar{X} \\
f \downarrow & & \searrow \bar{f} \\
S & &
\end{array}$$

Si K est un complexe de $f^* \mathcal{A}$ -Modules sur X , on a

$$\text{Rf}_! K \simeq \text{R}\bar{f}_{\bar{x}}(j_! K).$$

Pour tout faisceau F sur X , les composants F^i du complexe $\tau_{\leq 2d} C_{\ell}^{*j_!} F$ vérifient

$$(3.1.4.5) \quad R^k \bar{f}_{\bar{x}} F^i = 0 \text{ pour } k > 0.$$

En effet, pour $i \neq 2d$, F^i est limite inductive de faisceaux flasques, et pour $i = 2d$ et $k > 0$, on a (XVII 5.2.8.1)

$$R^k \bar{f}_{\bar{x}} F^{2d} = R^{k+2d} f_! F = 0.$$

Le complexe simple associé au double complexe résolution flasque canonique modifiée tronquée de K est une résolution de K . En vertu de (3.1.4.5), on a donc (notation de XVII 1.1.15)

$$(3.1.4.6) \quad \text{R}\bar{f}_{\bar{x}}(j_! K) \xleftarrow{\sim} \bar{f}_{\bar{x}} \tau_{\leq 2d} C_{\ell}^{*j_!} K.$$

Désignons par $f_!$ le foncteur des faisceaux de modules sur X dans

les complexes de faisceaux sur S défini par

$$(3.1.4.7) \quad f_!^i(F) = \bar{f}_* \tau_{<2d} C_{\ell}^{\times} j_! F .$$

Lemme 3.1.4.8. (i) Les foncteurs $f_!^i$ sont exacts et commutent aux limites inductives filtrantes; on a $f_!^i = 0$ pour $i \notin [0, 2d]$.

(ii) Le foncteur $f_!^i$, étant borné à composantes exactes, se dérive

(XVII 1.2.10) trivialement en $Rf_!^i$ ou simplement $f_!^i : D(X, f^* \mathcal{A}) \rightarrow D(S, \mathcal{A})$.

La flèche 3.1.4.6 est un isomorphisme de foncteurs

$$Rf_!^i \xrightarrow{\sim} Rf_!^i .$$

Les foncteurs C_{ℓ}^i sont exacts et commutent aux limites inductives filtrantes (3.1.2). Ils transforment tout faisceau en un faisceau acyclique. Les foncteurs \bar{f}_* et $j_!$ commutent aux limites inductives filtrantes. On en déduit que

a) les foncteurs $\bar{f}_* C_{\ell}^i j_!$, donc aussi les foncteurs $f_!^i$, commutent aux limites inductives filtrantes;

b) pour $i < 2d$, les foncteurs $f_!^i = \bar{f}_* C_{\ell}^i j_!$ sont exacts. Pour $i = 2d$, on vérifie que $f_!^i$ est exact par (3.1.4.5).

Les assertions restantes de 3.1.4.8 sont triviales.

Remarque 3.1.4.9. La définition de $f_!^i$ est indépendante du faisceau d'anneau \mathcal{A} , et garde un sens pour tout faisceau abélien. L'assertion 3.1.4.8 (i) reste valable dans les catégories de faisceaux abéliens de torsion sur X et S .

D'après 3.1.4.8 et 3.1.3, le foncteur

$$f_!^i : \text{Mod}(X, f^* \mathcal{A}) \longrightarrow \text{Mod}(S, \mathcal{A})$$

a un adjoint à droite $f_!^i$; puisque $f_!^i$ est exact, $f_!^i$ transforme injectifs en injectifs.

Avec la convention de signe (XVII 1.1.12), les foncteurs $f_!^i$ forment un complexe de foncteurs exacts à gauche, nul en degré cohomologique $n \notin [-2d, 0]$:

$$(3.1.4.10) \quad f_!^! : \text{Mod}(S, \mathcal{A}) \longrightarrow C^b(X, f^* \mathcal{A}) \quad .$$

Le foncteur $f_!^!$ se dérive (XVII 1.2.10) en un foncteur triangulé

$$(3.1.4.11) \quad Rf_!^! : D^+(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X, f^* \mathcal{A}) \quad ,$$

adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ ($=Rf_!^! = Lf_!^!$) ("formule triviale de dualité"). Plus précisément, si $I \in \text{Ob } C^+(S, \mathcal{A})$ est un complexe de faisceaux injectifs de \mathcal{A} -modules, les \mathcal{A} -modules $f_{1!}^! I^n$ sont injectifs, et on dispose d'un isomorphisme de triples complexes (XVII 1.1.12)

$$(3.1.4.12) \quad \text{Hom}^*(f_!^! K, I) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}^*(K, f_!^! I) \quad .$$

Passant au H^0 du complexe simple associé (calculé par produits), on obtient l'énoncé d'adjonction. On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité (3.1.4.4).

Remarque 3.1.5. Supposons que le foncteur $Rf_!^!$ soit d'amplitude cohomologique finie. D'après XVII 1.2.10 le foncteur $f_!^!$ admet alors un dérivé

$$(3.1.5.1) \quad Rf_!^! : D(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D(X, \mathcal{A}) \quad .$$

Ce dérivé est encore adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ (3.1.4.1). En effet, on a

$$\text{Hom}_{D(S)}(Rf_!^! K, L) \simeq \varinjlim_{L \xrightarrow{\sim} L'} \text{Hom}_{K(S)}(f_!^! K, L') \simeq \varinjlim_{\substack{K' \xrightarrow{\sim} K \\ L \xrightarrow{\sim} L'}} \text{Hom}_{K(S)}(f_!^! K', L')$$

$$\text{Hom}_{D(X)}(K, Rf_!^! L) \simeq \varinjlim_{K' \xrightarrow{\sim} K} \text{Hom}_{K(X)}(K', Rf_!^! L) \simeq \varinjlim_{\substack{K' \xrightarrow{\sim} K \\ L \xrightarrow{\sim} L'}} \text{Hom}_{K(X)}(K', f_!^! L')$$

et, par adjonction,

$$\text{Hom}_{K(S)}(f_!^! K', L') = H^0 \text{Hom}(f_!^! K', L') \simeq H^0 \text{Hom}(K', f_!^! L') = \text{Hom}_{K(X)}(K', L') \quad .$$

Définition 3.1.6. Le foncteur triangulé

$$Rf_!^! : D^+(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X, f^* \mathcal{A})$$

(ou, sous les hypothèses de 3.1.5 ,

$$Rf^! : D(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D(X, f^* \mathcal{A}) \quad),$$

adjoint à droite au foncteur $Rf_!$ (3.1.4.1) s'appelle le foncteur image inverse extraordinaire.

Proposition 3.1.7. Supposons le morphisme compactifiable $f : X \rightarrow S$ de dimension relative $\leq d$.

(i) Si $L \in \text{Ob} D^+(S, \mathcal{A})$ vérifie $H^i(L) = 0$ pour $i \leq k$, alors $H^i Rf^! L = 0$ pour $i \leq k - 2d$.

(ii) Pour $L \in \text{Ob} D^b(S, \mathcal{A})$, on a

$$\dim \text{inj} (Rf^! L) \leq \dim \text{inj} (L) .$$

Le foncteur $Rf^!$ est le dérivé droit de $f^! : \text{Mod}(S, \mathcal{A}) \rightarrow C^b \text{Mod}(X, f^* \mathcal{A})$.

L'assertion (i) résulte de ce que $(f^!)^i = 0$ pour $i < -2d$, et l'assertion (ii) résulte de ce que $(f^!)^i = 0$ pour $i > 0$, et que les foncteurs $f_i^!$ transforment injectif en injectif.

Proposition 3.1.8. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable quasi-fini.

(i) Le foncteur $f_! : \text{Mod}(X, f^* \mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(S, \mathcal{A})$ admet un adjoint à droite $f^! : \text{Mod}(S, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Mod}(X, f^* \mathcal{A})$, et $Rf^!$ est le foncteur dérivé du foncteur $f^!$.

(ii) Si f est une immersion fermée, alors $f^!$ est le foncteur "sections à support dans X".

(iii) Si f est étale, alors $f^!$ s'identifie au foncteur f^* , avec

$$\text{Tr}_f : f_! f^* F \rightarrow F$$

comme morphisme d'adjonction.

L'assertion (i) résulte aussitôt du cas particulier $d = 0$ de la démonstration de 3.1.4 : on $f_i^! = f_i$ et $f^! = f^!$. De façon équivalente, l'existence d'un foncteur adjoint $f^!$ résulte de 3.1.3 et de ce que $f_!$

est exact et commute aux limites inductives filtrantes; l'adjonction $(f_!, Rf^!)$ est une "formule triviale de dualité".

L'assertion (ii) est claire, et (iii) est XVII 6.2.

3.1.9. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable, \mathcal{A} un faisceau d'anneaux de torsion sur S , et annelons X par l'image réciproque de \mathcal{A} .

Soient $K \in \text{Ob } D^-(X, f^*\mathcal{A})$, $L \in \text{Ob } D^+(X, f^*\mathcal{A})$ et représentons L par un complexe borné inférieurement de faisceaux injectifs, de sorte que

$$R\text{Hom}(K, L) \simeq \text{Hom}(K, L) .$$

Le complexe $\text{Hom}(K, L)$ est à composantes flasques, et donc

$$(3.1.9.1) \quad Rf_* R\text{Hom}(K, L) \simeq f_* \text{Hom}(K, L) .$$

Choisissons une compactification de f et un entier d comme dans la démonstration de 3.1.4, d'où un foncteur $f_!$ (3.1.4.7) .

$$(3.1.9.2) \quad \begin{array}{ccccc} X_V & \xrightarrow{k_X} & X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ & \searrow j_V & & \nearrow & \\ & & \bar{X}_V & \xrightarrow{k_{\bar{X}}} & \\ f_V \downarrow & & & & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{k} & S & & \\ & \nearrow \tilde{f}_V & & \nearrow \tilde{f} & \end{array} .$$

Pour tout $V \in \text{Ob } S_{\text{ét}}$, on a un isomorphisme

$$(3.1.9.3) \quad k^* f_! \xrightarrow{\sim} f_{V!} k_X^* ,$$

de sorte que

$$\text{Hom}^*(f_! K, f_! L)(V) \simeq \text{Hom}^*(f_{V!}(k_X^* K), f_{V!}(k_X^* L)) .$$

La functorialité de $f_{V!}$ nous fournit

$$\text{Hom}^*(K, L)(X_V) = \text{Hom}^*(k_X^* K, k_X^* L) \longrightarrow \text{Hom}^*(f_{V!}(k_X^* K), f_{V!}(k_X^* L)) ,$$

d'où une flèche, au niveau des complexes,

$$(3.1.9.4) \quad f_* \text{Hom}^*(K, L) \longrightarrow \text{Hom}^*(f_! K, f_! L) .$$

D'après (3.1.9.1), cette flèche se dérive en

$$(3.1.9.5) \quad \text{Rf}_x \underline{\text{RHom}}(K, L) \longrightarrow \underline{\text{RHom}}(\text{Rf}_! K, \text{Rf}_! L) \quad .$$

Soient maintenant $K \in \text{Ob } D^-(X, \mathcal{A})$ et $L \in \text{Ob } D^+(S, \mathcal{A})$. La flèche d'adjonction de $\text{Rf}_! \text{Rf}^! L$ dans L et (3.1.9.4) fournissent une flèche composée

$$\text{Rf}_x \underline{\text{RHom}}(K, \text{Rf}^! L) \longrightarrow \underline{\text{RHom}}(\text{Rf}_! K, \text{Rf}_! \text{Rf}^! L) \longrightarrow \underline{\text{RHom}}(\text{Rf}_! K, L) \quad ,$$

forme locale sur S de l'isomorphisme d'adjonction :

$$(3.1.9.6) \quad \text{Rf}_x \underline{\text{RHom}}(K, \text{Rf}^! L) \longrightarrow \underline{\text{RHom}}(\text{Rf}_! K, L) \quad .$$

Proposition 3.1.10. La flèche 3.1.9.6 est un isomorphisme.

Soit $V \in \text{Ob } S_{\text{et}}$ et reprenons les notations de (3.1.9.2). L'isomorphisme ("de transitivité")

$$k_! \text{Rf}_V! \simeq \text{Rf}_! k_X! \quad ,$$

dont l'existence est la racine de la théorie du foncteur $\text{Rf}_!$, se transpose en un isomorphisme de localisation (3.1.8.(iii))

$$(3.1.10.1) \quad k_X^* \text{Rf}^! \simeq \text{Rf}_V^! k^* \quad ,$$

représenté au niveau des complexes par un morphisme

$$k_X^* f^! \longrightarrow f^! k^* \quad .$$

Pour vérifier que 3.1.9.6 est un isomorphisme, il suffit de vérifier que pour tout $V \in \text{Obs}_{\text{et}}$, (3.1.9.6) induit un isomorphisme

$$(3.1.10.2) \quad ; \text{Hom}(k_X^* K, k_X^* \text{Rf}^! L) \simeq H^0(V, \text{Rf}_x \underline{\text{RHom}}(K, \text{Rf}^! L)) \\ \longrightarrow H^0(V, \underline{\text{RHom}}(\text{Rf}_! K, L)) \simeq \underline{\text{Hom}}(k^* \text{Rf}_! K, k^* L)$$

Pour $V = X$, ceci n'est autre que 3.1.4.3. Le cas général en résulte via la compatibilité suivante, que le rédacteur n'a pas vérifiée :

Lemme 3.1.10.3. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}(k_X^{\times}K, k_X^{\times}Rf^!L) & \xrightarrow{(3.1.10.2)} & \text{Hom}(k^{\times}Rf_!K, k^{\times}L) \\
 \left. \downarrow \right\} (3.1.10.1) & & \left. \downarrow \right\} (\text{localisation}) \\
 \text{Hom}(k_X^{\times}K, Rf_V^!k_X^{\times}L) & \xleftarrow{\sim (3.1.4.3 \text{ sur } V)} & \text{Hom}(Rf_!k^{\times}K, k^{\times}L)
 \end{array}$$

est commutatif.

3.1.11. Soient un carré cartésien

$$(3.1.11.1) \quad \begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{g'} & X \\
 \downarrow f' & & \downarrow f \\
 S' & \xrightarrow{g} & S
 \end{array} ,$$

avec f compactifiable, \mathcal{A} un faisceau d'anneaux de torsion sur S , \mathcal{B} un faisceau d'anneaux de torsion sur S' et M un complexe de $(f^*\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -bimodules, borné supérieurement. On dispose alors, au niveau des complexes, d'un morphisme de foncteurs en K ($K \in \text{Ob}C(X, f^*\mathcal{A})$)

$$(3.1.11.2) \quad M \otimes_{\mathcal{A}} g^*f^!K \longrightarrow f_!^*(f'^*M \otimes_{\mathcal{A}} g'^*K) ,$$

qui se transpose en un morphisme de foncteurs en L ($L \in \text{Ob}C(S', \mathcal{B})$)

$$(3.1.11.3) \quad g_x^! \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, f'^!L) \longrightarrow f_x^! g_x \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{B}}(M, L) .$$

Ce morphisme se dérive en morphisme de foncteurs en L , de $D^+(S', \mathcal{B})$ dans $D^+(X, f^*\mathcal{A})$:

$$(3.1.11.4) \quad Rg_x^! \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, Rf'^!L) \longrightarrow Rf^! Rg_x \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(M, L) ,$$

qui rend commutatif le diagramme suivant, où $K \in \text{Ob} D^-(X, f^*\mathcal{A})$ et $L \in \text{Ob} D^+(S', \mathcal{B})$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Hom}(K, Rg_x^! \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, Rf'^!L)) & \xrightarrow{\textcircled{1}} & \text{Hom}(K, Rf^! Rg_x \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(M, L)) & \xleftrightarrow{\text{adj}} & \text{Hom}(Rf_!K, Rg_x \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(M, L)) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \text{Hom}(g'^*K, \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(f'^*M, Rf'^!L)) & & & & \text{Hom}(g^{\times}Rf_!K, \underline{\text{RHom}}_{\mathcal{B}}(M, L)) \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \text{Hom}(f'^*M \otimes_{\mathcal{A}} g'^*K, Rf'^!L) & \xleftrightarrow{\text{adj}} & \text{Hom}(Rf_!^*(f'^*M \otimes_{\mathcal{A}}^L g'^*K), L) & \xrightarrow{\textcircled{2}} & \text{Hom}(M \otimes_{\mathcal{A}}^L g^{\times}Rf_!K, L) .
 \end{array}$$

Dans ce diagramme, ② (dédduit de la flèche XVII 5.2.2.1) est un isomorphisme (XVII 5.2.6). La flèche ① est donc un isomorphisme quel que soit K , et ceci implique que (3.1.11.4) soit un isomorphisme.

Le théorème de changement de base pour un morphisme propre se transpose donc en la

Proposition 3.1.12. La flèche 3.1.11.4 est un isomorphisme.

On appelle cet isomorphisme l'isomorphisme d'induction.

En voici 3 cas particuliers.

Corollaire 3.1.12.1. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable, \mathcal{A} et \mathcal{B} deux faisceaux d'anneaux de torsion sur S , et $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un homomorphisme. Désignons par ρ la restriction des scalaires de \mathcal{B} à \mathcal{A} . On a alors, pour $K \in \text{Ob } D^+(S, \mathcal{B})$

$$\rho Rf^! K \xrightarrow{\sim} Rf^!(\rho K) \quad .$$

Il suffit dans 3.1.11.3 de prendre $S = S'$, $X = X'$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}$, $M = \mathcal{A}$.

On voit donc que le faisceau d'anneaux joue un rôle bidon dans la construction de $Rf^!$.

Corollaire 3.1.12.2. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable, \mathcal{A} un faisceau d'anneaux de torsion sur S et $K \in \text{Ob } D^-(S, \mathcal{A})$, $L \in \text{Ob } D^+(S, \mathcal{A})$. On a la formule d'induction

$$\text{RHom}(f^* K, Rf^! L) \xrightarrow{\sim} Rf^! \text{RHom}(K, L)$$

(faire $S = S'$, $X = X'$) .

Corollaire 3.1.12.3. Pour tout carré 3.1.11, et tout $L \in \text{Ob } D^+(S', \mathcal{A})$, on a

$$\text{Rg}_x^! Rf^! L \xrightarrow{\sim} Rf^! \text{Rg}_x L$$

(faire $\mathcal{B} = f^* \mathcal{A} = M$) .

3.1.13. Pour un composé gh de morphismes S -compactifiables

$$X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$$

l'isomorphisme de composition

$$c_{g,h} : Rg_! Rh_! \xrightarrow{\sim} R(gh)_!$$

se transpose en un morphisme de composition

$$(3.1.13.1) \quad c_{g,h}^! : Rh^! Rg^! \xrightarrow{\sim} R(gh)^!$$

vérifiant la condition de cocycle habituelle pour un composé triple.

En d'autres termes, les catégories $D^+(X, f^* \mathcal{A})$ forment les fibres d'une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie d'objets les S -schémas $f : X \rightarrow S$, ayant pour flèches les morphismes S -compactifiables, les foncteurs image directe (resp. image réciproque) étant les foncteurs $Rf_!$ (resp. $Rf^!$). Pour tout carré commutatif de morphismes compactifiables,

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g'} & S \end{array},$$

on dispose donc d'un morphisme de cochage de base (XVII 2.1.3)

$$(3.1.13.2) \quad ch^! : Rf_! Rg^! \longrightarrow Rg^! Rf_! .$$

3.1.14. Soit un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

avec f compactifiable, et soit \mathcal{A} un faisceau d'anneaux de torsion sur S . On annèle S' , X et X' par les images réciproques de \mathcal{A} , encore

désignées par \mathcal{A} par abus de notation. L'isomorphisme de changement de base

$$(3.1.14.1) \quad g^* Rf_! \xrightarrow{\sim} Rf'_! g'^*$$

permet de considérer les catégories $D(S, \mathcal{A})$, $D(X, \mathcal{A})$, $D(S', \mathcal{A})$ et $D(X', \mathcal{A})$ comme les fibres d'une catégorie cofibrée sur la catégorie du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & X \end{array} ,$$

les foncteurs images directes étant les foncteurs $Rf_!$, $Rf'_!$, g^* et g'^* (sic). Lorsqu'on se restreint aux catégories D^+ , on obtient même une catégorie fibrée et cofibrée sur ce diagramme, les foncteurs images directes étant les foncteurs $Rf^!$, $Rf'^!$, $Rg_{\mathbf{x}}$ et $Rg'_{\mathbf{x}}$ (sic). On en déduit

a) un "isomorphisme de transitivité" (sic) pour les foncteurs "images inverses"

$$Rg_{\mathbf{x}} Rf^! \xrightarrow{\sim} Rf'^! Rg'_{\mathbf{x}}$$

déjà obtenu en 3.1.12.3 (avec la même définition par transposition de (3.1.14.1)).

b) un "morphisme de changement de base" (XVII 2.1.3)

$$(3.1.14.2) \quad g'^* Rf^! \longrightarrow Rf'^! g^*$$

qui, d'après loc. cit., peut se décrire des deux façons suivantes :

a) par adjonction, se donner un morphisme (3.1.14.2) revient à se donner un morphisme

$$Rf'_! g'^* Rf^! \longrightarrow g^* .$$

Le théorème de changement de base fournit un tel morphisme comme composé

$$Rf'_! g'^* Rf^! \xleftarrow{\sim} g^* Rf_! Rf^! \xrightarrow{g^* \times \text{adj.}} g^* .$$

b) par adjonction, se donner un morphisme (3.1.14.2) revient à se donner un morphisme

$$Rf' \longrightarrow Rg'_x \quad Rf' \quad g^x \quad .$$

L'isomorphisme (3.1.12.3) fournit un tel morphisme comme composé

$$Rf' \xrightarrow{Rf' \text{ adj.}} Rf' \quad Rg'_x \quad g^x \xleftarrow{\sim} Rg'_x \quad Rf' \quad g^x \quad .$$

D'après leurs interprétations en terme de catégorie fibrée et co-fibrée, il est clair que les morphismes (3.1.12.3), (3.1.13.2) et (3.1.14.2) vérifient chacun deux compatibilité du type XII 4.4 pour f ou g composé de deux morphismes.

Les résultats de topologie générale qui suivent seront utilisés au n° suivant.

3.1.15. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de sites. Désignons par $\Gamma(f)$ le site suivant

a) La catégorie $\Gamma(f)$ est la catégorie des triples (U, V, Ψ) avec

$$U \in \text{Ob}(X), \quad V \in \text{Ob } S, \quad \Psi \in \text{Hom}(X, \Psi^* V) \quad .$$

b) Une famille de morphismes $(u_i, v_i) : (U_i, V_i, \Psi_i) \rightarrow (U, V, \Psi)$ est couvrante si, dans X , les morphismes $u_i : U_i \rightarrow U$ couvrant U .

On a alors

(3.1.15.1) Le foncteur de $\Gamma(f)$ dans X donné par

$$(U, V, \Psi) \longmapsto U$$

est une équivalence de sites $\gamma : X \rightarrow \Gamma(f)$.

(3.1.15.2) Le foncteur f_Γ^x de S dans $\Gamma(f)$

$$V \longmapsto (f^x V, V, \text{Id}_{f^x V})$$

est un morphisme de site, noté $f_\Gamma : \Gamma(f) \rightarrow S$, ou simplement f par abus de notation. Il vérifie $f_\Gamma \gamma = f$. Le foncteur f_Γ^x admet un adjoint à droite $f_{\Gamma.}$:

$$f_{\Gamma.} : (U, V, \Psi) \longmapsto V \quad .$$

Le foncteur f_{Γ} est donc un comorphisme de site de $\Gamma(f)$ dans S , et définit le même morphisme de topos que le morphisme de site f_{Γ} .

(3.1.15.3)

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow[\simeq]{*} & \Gamma(f) \\
 \swarrow f^* & & \nearrow f_{\Gamma}^* \\
 & S & \nwarrow f_{\Gamma}
 \end{array}$$

On en déduit la règle suivante pour calculer l'image inverse d'un faisceau

(3.1.15.4) Soient \mathcal{F} un faisceau sur S , $f_{\Gamma}^* \mathcal{F}$ le préfaisceau sur $\Gamma(f)$ donné par

$$f_{\Gamma}^* \mathcal{F}(U, V, \varphi) = \mathcal{F}(V) \quad ,$$

et $af_{\Gamma}^* \mathcal{F}$ le faisceau engendré. Alors

$$f^* \mathcal{F}(U) \simeq af_{\Gamma}^* \mathcal{F}(U, V, \varphi) \quad .$$

3.1.16. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme de sites, \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur S , \mathcal{B} un faisceau d'anneaux sur X et d un entier. Soit un objet K du type suivant

(3.1.16.1) K associe à chaque objet U de X un complexe $K(U)$ de $(\mathcal{A}, f_{\times}(\mathcal{B}|U))$ -modules sur S , nul en degré $> d$, et $K(U)$ est un foncteur covariant de U .

Pour tout faisceau de \mathcal{A} -modules \underline{F} sur S , on désignera par $K^! \underline{F}$ le complexe de faisceaux sur X engendré par le complexe de préfaisceaux de \mathcal{B} -modules :

$$U \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(K(U), \underline{F}) \quad .$$

On désignera par $RK^!$ le dérivé de $K^!$

$$RK^! : D^+(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X, \mathcal{B}) \quad .$$

Si $U : K_1 \rightarrow K_2$ est un morphisme d'objets (3.1.11.1), alors U in-

duit des morphismes de foncteurs

$$t_u : K_2' \longrightarrow K_1' \quad \text{et} \quad RK_2' \longrightarrow RK_1' \quad .$$

Sous les hypothèses précédentes, on a

Proposition 3.1.17. (i) Pour tout point x de X et pour tout
 $L \in \text{Ob } D^+(S, \mathcal{A})$, on a, désignant par $V(x)$ la catégorie des voisinages de x

$$(3.1.17.1) \quad \underline{H}^n(RK^!L)_x \simeq \lim_{U \in \text{Ob } V(x)} \text{Ext}^n(K(U), L) \quad .$$

(ii) On a donc une suite spectrale

$$(3.1.17.2) \quad E_2^{pq} = \lim_{U \in \text{Ob } V(x)} \text{Ext}^p(\underline{H}^{-q}(K(W)), L) \implies \underline{H}^n(K^!L)_x \quad .$$

(iii) Si X^0 est un ensemble conservatif de points de X, et $u : K_1 \rightarrow K_2$
un morphisme d'objets (3.1.11.1), alors, pour que

$$t_u : RK_2^! \longrightarrow RK_1^!$$

soit un isomorphisme, il faut et il suffit que pour tout n et tout
 $x \in X^0$, le morphisme de pro-objets de $\text{Mod}(S, \mathcal{A})$

$$(3.1.17.3) \quad u_x : \underline{\lim}_{U \in \text{Ob } V(x)} \underline{H}^n K_1(U) \longrightarrow \underline{\lim}_{U \in \text{Ob } V(x)} \underline{H}^n K_2(U)$$

soit un isomorphisme.

Pour prouver (i), on prend pour L un complexe d'injectifs, de sorte que (3.1.17.1) est trivial; il est clair que (i) \implies (ii).

Que la condition (3.1.17.3) de (iii) soit suffisante résulte aussitôt de (3.1.17.2). Nous n'aurons pas à faire usage de ce qu'elle est nécessaire. Si t_u est un isomorphisme, alors, d'après (3.1.16.1), pour tout faisceau injectif I sur (S, \mathcal{A}) , on a

$$\text{Hom}(\underline{\lim}_{V(x)} \underline{H}^n K_2(U), I) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\underline{\lim}_{V(x)} \underline{H}^n K_1(U), I) \quad ,$$

et on conclut en notant que dans toute catégorie abélienne ayant assez d'injectifs (ici, $\text{Mod}(S, \mathcal{A})$), les foncteurs $\text{Hom}(x, I)$ pour I injectif de \mathcal{A} forment un système conservatif de foncteurs sur $\text{Pro}(\mathcal{A})$.

Exemple 3.1.18. Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme compactifiable de schémas, et \mathcal{A} un faisceau d'anneaux de torsion sur S . On annote X par $f^*\mathcal{A}$. Choisissons un entier d qui majore la dimension des fibres de f , ainsi qu'une compactification de f , et posons (3.1.4.7))

$$(3.1.18.1) \quad K(U) = f_!((f^*\mathcal{A})_U) \quad .$$

D'après la formule (3.1.3.1) pour l'adjoint de $f_!$, on a un isomorphisme

$$(3.1.18.2) \quad f_! \simeq K^! : \text{Mod}(S, \mathcal{A}) \longrightarrow C^b \text{Mod}(X, f^*\mathcal{A}) \quad .$$

et donc

$$(3.1.18.3) \quad Rf^! = RK^! : D^+(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^+(X, f^*\mathcal{A}) \quad .$$

Exemple 3.1.19. Soient $f : X \rightarrow S$, \mathcal{A} , \mathcal{B} et d comme en 3.1.16. Soit K un objet de type suivant

(3.1.19.1) Pour tout $W = (U, V, \varphi) \in \text{Ob} \Gamma(f)$ (3.1.15), $K(W)$ est un complexe de $(\mathcal{A}_V, \varphi_x^* \mathcal{B}|_U)$ -Modules sur V , fonctoriel en W : pour tout morphisme $(u, v) : W_1 = (U_1, V_1, \varphi_1) \rightarrow W_2 = (U_2, V_2, \varphi_2)$ il est donné

$$K(u, v) : K(W_1) \longrightarrow v^* K(W_2) \quad , \quad \text{i.e.}$$

$$K(u, v) : v_! K(W_1) \longrightarrow K(W_2) \quad .$$

A tout objet K (3.1.19.1) est associé un objet K' (3.1.16.1) relatif à $f_\Gamma : \Gamma(f) \rightarrow S$, donné par

$$(3.1.19.2) \quad K'(U, V, \varphi) = j_! K(U, V, \varphi)$$

pour j "morphisme d'inclusion" de V dans S . On pose

$$K^! = \underset{\text{defn}}{K'^!} \quad \text{et} \quad RK^! = \underset{\text{defn}}{Rk'^!} \quad .$$

Exemple 3.1.20. Avec les notations de 3.1.19, faisons $\mathcal{B} = f^*\mathcal{A}$ et posons

$$(3.1.20.1) \quad K(U, V, \varphi) = \mathcal{A}_V \quad (\text{en degré } 0)$$

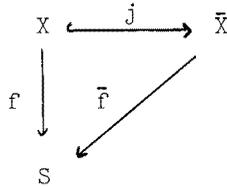
D'après 3.1.15.4, on a alors des isomorphismes de foncteurs

$$(3.1.20.2) \quad K^! \simeq f^{\times}$$

$$(3.1.20.3) \quad RK^! \simeq f^{\times} .$$

3.2. Dualité de Poincaré.

3.2.1. Soit f un morphisme plat compactifiable purement de dimension relative d (ou, plus généralement, vérifiant la condition $(\times)_d$ de 2.9) :



Soit n un entier ≥ 1 inversible sur S et supposons S annelé par un faisceau d'anneaux \mathcal{A} tel que $n\mathcal{A} = 0$. D'après 3.1.18, le foncteur $Rf^! : D^+(S, \mathcal{A}) \rightarrow D^+(X, \mathcal{A})$ peut se calculer par le procédé de 3.1.16, pour K donné par (3.1.18.1).

Soit K' le foncteur du type (3.1.19.1) qui à $(U, V, \varphi) \in \text{Ob} \Gamma(f)$ associe le complexe de faisceaux $\mathbb{Z}/n(-d)[-2d]$ sur V , réduit $\mathbb{Z}/n(-d)$ placé en degré $2d$, et soit K'' l'objet du type (3.1.16.1) correspondant (3.1.19.2), relatif à $f : \Gamma(f) \rightarrow S$.

On peut regarder K et K'' comme des objets 3.1.16.1 relatif à $\Gamma(f) \rightarrow S$. De plus, pour tout $(U, V, \varphi) \in \text{Ob} \Gamma(f)$, le morphisme trace 2.9 définit un morphisme de faisceaux sur V

$$\text{Tr} : R^{2d}\varphi_! \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n(-d) ,$$

d'où, désignant par j le morphisme de V dans S , un morphisme de foncteurs

$$\begin{aligned}
 (3.2.1.1) \quad K(U) &= \bar{f}_{\times}^{\tau_{\leq 2d}} C_{\ell}^{\times} \mathbb{Z}/n_U \longrightarrow \underline{H}^{2d}(K(U))[-2d] \simeq \\
 R^{2d}f_! (\mathbb{Z}/n)_U &\simeq j_! R^{2d}\varphi_! \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\text{Tr}_{\varphi}} j_! \mathbb{Z}/N(-d) = K''(U, V, \varphi) .
 \end{aligned}$$

Une forme tordue de 3.1.20 montre que

$$RK''^! = Rf^{\times}(d)[2d] .$$

D'après 3.1.16, on dispose donc d'un morphisme composé

$$(3.2.1.2) \quad t_f : Rf^{\times}(d)[2d] \simeq RK''^! \longrightarrow Rk^! \simeq Rf^! .$$

Remarque 3.2.2. Si le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie, alors t est encore défini en tant que morphisme entre foncteurs de $D(S, \mathcal{A})$ dans $D(X, f^{\times}\mathcal{A})$, (définition en 3.1.5).

On dispose d'une autre méthode pour construire une flèche (3.2.1.2), par adjonction à partir de (2.13.2)

$$Tr : Rf_!(f^{\times}L(d)[2d]) \longrightarrow L .$$

Ces deux flèches coïncident :

Lemme 3.2.3. Pour $L \in \text{Ob}D^+(S, \mathcal{A})$ (resp. $D(S, \mathcal{A})$ si le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Rf_!(f^{\times}L(d)[2d]) & \xrightarrow{Rf^!(t_f)} & Rf_! Rf^!L \\ \downarrow Tr_f & & \downarrow \text{adjonction} \\ L & \xlongequal{\quad\quad\quad} & L \end{array}$$

est commutatif.

Donnons tout d'abord une variante de la définition de t , en termes du foncteur $f_!$ (3.1.9.10). Soient $U \in \text{Ob}X_{\text{et}}$, $V \in \text{Ob}S_{\text{et}}$ et $\varphi \in \text{Hom}_f(U, V)$.

Par définition,

$$f_!(L)(U) = \text{Hom}(f_!\mathcal{A}_U, L) ;$$

le morphisme trace définit un morphisme

$$Tr_f : f_!\mathcal{A}_U \longrightarrow \mathcal{A}_V(-d)[-2d]$$

qui se transpose en

$$t_\varphi : f_!(L)(U) \longleftarrow L(d)[2d](V) .$$

Les morphismes t_f définissent un morphisme

$$t_f : f^*L(d)[2d] \longrightarrow f^!L$$

dont on laisse au lecteur le soin de vérifier que, dans la catégorie dérivée, il coïncide avec (3.2.1.2). Cette description montre que les diagrammes suivants sont commutatifs au niveau des complexes, pour L complexe de Modules :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathcal{A}_V, L) & \longrightarrow & \text{Hom}^*(f^*\mathcal{A}_V(d)[2d], f^*L(d)[2d]) \\ \downarrow \text{Tr}_f & & \downarrow t_f \\ \text{Hom}(f_! f^*\mathcal{A}_V(d)[2d], L) & \simeq & \text{Hom}^*(f^*\mathcal{A}_V(d)[2d], f^!L) \end{array} .$$

Par functorialité des flèches de ce diagramme en \mathcal{A}_V , on déduit que pour tout faisceau, ou tout complexe de faisceaux K , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^*(K, L) & \longrightarrow & \text{Hom}^*(f^*K(d)[2d], f^*L(d)[2d]) \\ \downarrow \text{Tr}_f & & \downarrow \\ \text{Hom}^*(f_! f^*K(d)[2d], L) & \xleftarrow{\sim} & \text{Hom}^*(f^*K(d)[2d], f^!L) \end{array} .$$

Prenant $K = L$ et $\text{Id} : L \rightarrow L$, on trouve 3.2.3 au niveau des complexes.

Je serais reconnaissant à toute personne ayant compris cette démonstration de me l'expliquer.

3.2.4. On déduit aussitôt de ce lemme et de la définition (3.1.13) des isomorphismes de composition par adjonction que si f est le composé de deux morphismes plats de présentation finie compactifiables et purement de dimension relative d_1 et d_2 : $f = gh$, et si $d = d_1 + d_2$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 h^*(g^*L(d_2)[2d_2])(d_1)[2d_1] & \xrightarrow{\sim} & (gh)^*L(d)[2d] \\
 \downarrow t_h^*t_g & & \downarrow t_{gh} \\
 R h^! R g^! L & \xrightarrow{\sim} & R(gh)^! L
 \end{array}$$

est commutatif.

Théorème 3.2.5. (dualité de Poincaré). Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse compactifiable (S est donc quasi-compact quasi-séparé(sic)), d la fonction localement constante sur X "dimension relative de f ", $n \gg 1$ un entier inversible sur S , et \mathcal{A} un faisceau d'anneaux sur S vérifiant $n\mathcal{A} = 0$. Alors le foncteur

$$Rf_! : D(X, f^*\mathcal{A}) \longrightarrow D(S, \mathcal{A})$$

admet pour adjoint à droite le foncteur de $D(S, \mathcal{A})$ dans $D(X, f^*\mathcal{A})$:

$$K \longmapsto f^*K(d)[2d]$$

avec le morphisme (2.13.2)

$$\text{Tr}_f : Rf_! f^*K(d)[2d] \longrightarrow K$$

pour flèche d'adjonction :

$$\text{Hom}(K, f^*L(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(Rf_! K, L) \quad .$$

Démonstration. On se ramène au cas d constant. D'après la description 3.2.1 de la flèche t_f (3.2.1.2), le théorème 2.14, joint au critère 3.1.17. (iii), implique que la flèche t_f est un isomorphisme (pour $L \in D^+(S, \mathcal{A})$)

$$t_f : f^*L(d)[2d] \xrightarrow{\sim} Rf^! L \quad .$$

En particulier, le foncteur $Rf^!$ est de dimension cohomologique finie, donc est défini sur la catégorie dérivée entière. Le morphisme t_f reste un isomorphisme pour $L \in D(S, \mathcal{A})$.

Par définition, $Rf^!$ est l'adjoint à droite du foncteur $Rf_!$; d'après 3.2.3, la flèche d'adjonction de $Rf_!$ $Rf^!$ K dans K s'identifie, via t_f , à Tr_f , et ceci achève la démonstration de 3.2.5.

On identifiera dorénavant à l'aide de t_f les foncteurs $f^*L(d)[2d]$ et $Rf^!L$.

3.2.6. Soient S le spectre d'un corps algébriquement clos k , X un schéma compactifiable et lisse sur k purement de dimension relative d , n un entier inversible dans k et F un faisceau de \mathbb{Z}/n -modules localement constant constructible, i.e. un "système de coefficients" tué par n . Désignant par $^\vee$ un \mathbb{Z}/n -dual, on a

$$R\text{Hom}(F, \mathbb{Z}/n) = F^\vee \quad (\text{en degré } 0) \quad .$$

Cette formule résulte de ce que \mathbb{Z}/n est un \mathbb{Z}/n -module injectif. L'isomorphisme 3.2.5.1, ou, plutôt l'isomorphisme qui s'en déduit

$$R\Gamma(R\text{Hom}(F, \mathbb{Z}/n(d)[2d])) \xrightarrow{\sim} R\text{Hom}(R\Gamma_c(F), \mathbb{Z}/n) \quad ,$$

s'écrit donc ici

$$(3.2.6.1) \quad R\Gamma(F^\vee(d)[2d]) \xrightarrow{\sim} R\text{Hom}(R\Gamma_c(F), \mathbb{Z}/n) \quad .$$

Passant aux groupes de cohomologie, et utilisant à nouveau que \mathbb{Z}/n est un \mathbb{Z}/n -module injectif, ceci donne

$$(3.2.6.2) \quad H^{2d-i}(X, F^\vee(d)) \xrightarrow{\sim} H_c^i(X, F)^\vee \quad ,$$

qui est la forme habituelle de la dualité de Poincaré.

Bibliographie

- J. GIRAUD [1] Cohomologie non abélienne. Columbia university.
- A. GROTHENDIECK [1] Le groupe de Brauer III. dans : dix exposés sur
la cohomologie des schémas. North Holl. Publ. Co.
- L. ILLUSIE [1] Thèse
- D. MUMFORD [1] Geometric invariant theory. Springer-Verlag 1965.
- M. RAYNAUD [1] Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les
espaces homogènes. Lecture notes in math. 119. Springer-
Verlag.
- J.P. SERRE [1] Groupes algébriques et corps de classe. Publ. Inst.
Math. Nancago. Hermann 1959.
- J.L. VERDIER [1] Dualité dans la cohomologie des espaces localement
compacts. Sémin. Bourbaki 300. Nov. 1965.
- J.L. VERDIER [1] A duality theorem in the etale cohomology of schemes.
Woods-hole seminar on alg.geometry. July 1964.
- [C.D.] Catégories dérivées, par J.L. VERDIER. Notes miméographiées
par l'IHES.