E X P O S E XVII

COHOMOLOGIE A SUPPORTS PROPRES

par P. Deligne

Appendice de B. Saint-Donat

SOMMAIRE

Introduction. 1

0. Préliminaires terminologiques. 2

1. Les catégories dérivées.

1.1. Foncteurs exacts (les règles de signe). 6

1.2. Foncteurs dérivés. 22

2. Catégories fibrées en catégories dérivées.

2.1. Introduction 31

2.2. Catégories fibrées en catégories triangulées. 35

2.3. Formule triviale de dualité. 42

2.4. Catégories fibrées en catégories dérivées. 47

3. Recollement de catégories fibrées ou cofibrées.

3.1. Introduction 52

3.2. Morphismes compactifiables. 53

3.3. Recollement. 59

4. Résolutions. Application à la flèche de changement de base.

4.1. Résolutions plates. 68

4.2. Résolutions flasques de Godement. 75

4.3. Le théorème de changement de base. 87

5. Les foncteurs image directe à support propre.

5.1. La construction fondamentale. 89

5.2. Le théorème de changement de base. 100

5.3. Théorème de comparaison et théorème de finitude. 110

5.4. Formule de Künneth. 114

5.5. Cohomologie des puissances symétriques. 120

6. Le foncteur $f_!$.

6.1. Nouvelle construction du foncteur $f_!$. 164

6.2. Le morphisme trace en dimension relative 0. 168

6.3. Variante de la trace pour des coefficients continus. 180

7. Appendice (par B. Saint-Donat)

7.0. Préliminaires 211

7.1. Définition de $R^+f_!$ 215

7.2. Quelques proprietés de $R^+f_!$ 224

7.3. Définition de $Rf_!$ 226

S G A 4

E X P O S E XVII

COHOMOLOGIE A SUPPORTS PROPRES

par P. Deligne (*)

Introduction

Dans cet exposé est développé le formalisme de la cohomologie à support propre. Les questions de variance ont été traitées avec assez de soin, alors qu'elles n'étaient que rendues plausibles dans le séminaire oral. Ceci explique la longueur de l'exposé, dont les paragraphes 1 à 4 sont consacrés aux catégories et à la topologie générale. Il est très vivement recommandé au lecteur de ne lire que les paragraphes 5 et 6, où se trouve concentrée la substance géométrique de l'exposé (§ 5 : construction et variance de la cohomologie à support propre, théorèmes de changement de base, de finitude, de Tor-dimension finie et de comparaison ; § 6 : théorie du morphisme tracé pour un morphisme quasi-fini et plat).

Dans les paragraphes 1 et 2, on "rappelle" quelques résultats sur les catégories dérivées. Le § 1 n°1 est consacré au formalisme des signes. Dans le § 3, on traite du problème de recoller deux formalismes de variance. Dans le § 4, on introduit les résolutions plates et on étudie les propriétés spéciales des résolutions flasques de GODEMENT.

(*) Le présent exposé et le suivant, rédigés en 1968 et 1969, reprennent et complètent les exposés oraux de A. GROTHENDIECK (de printemps 1964). Le rédacteur, qui n'assistait pas au séminaire oral, s'est partiellement inspiré des notes de A. GROTHENDIECK.

Dans cet exposé, les foncteurs $R^q f_!$ images directes supérieures à supports propres, et le foncteur $Rf_!$ qui leur donne naissance, ne sont définis que pour f un morphisme compactifiable (3.2.1). Dans l'appendice, rédigé par B. SAINT-DONAT, on montre comment étendre la définition aux morphismes séparés de type fini de but quasi-compact quasi-séparé.

Le § 5 n°5 (cohomologie d'un produit symétrique) ne servira plus dans ce séminaire. Il sera utilisé dans SGA 5 pour raffiner le théorème de rationalité des fonctions L .

Le § 6 n°3 (théorie de la trace pour coefficients continus) ne sera utilisé dans l'exposé XVIII que dans le cas relativement facile des groupes lisses ; le lecteur intéressé par le théorème de dualité de Poincaré (dualité globale), et prêt à admettre un argument transcendant, pourra même se dispenser complètement de lire ce § 6 n°3, ainsi que la plus grande partie du § 1 de XVIII.

0. Préliminaires terminologiques.

0.1. Le signe = placé entre deux groupes de symboles désignant des objets d'une catégorie signifiera parfois (par abus de notations) que ces objets sont canoniquement isomorphes. La catégorie et l'isomorphisme canonique devront en principe avoir été définis au préalable. Dans un diagramme, le signe = désignera alors l'isomorphisme lui-même.

0.2.0. Soit $f : S \longrightarrow S'$ un morphisme de sites (IV 4.9.3). Si U et U' sont des objets de S et S', un f-morphisme de U dans U' sera par définition un morphisme de U dans f^*U'. Pour les sites étales de schémas, on retrouve la notion usuelle.

0.2.1. Si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ sont des faisceaux sur S et S', un f-morphisme de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}'$ sera indifféremment

(i) un morphisme de $f^*\mathfrak{F}'$ dans $\mathfrak{F}$

(ii) un morphisme de $\mathfrak{F}'$ dans $f_*\mathfrak{F}$

(iii) une fonction qui, à chaque f-morphisme φ d'un objet U de S dans un objet U' de S' associe une fonction de $\mathfrak{F}'(U')$ dans $\mathfrak{F}(U)$, et ce de façon compatible avec la composition de φ avec une flèche de S ou S' (*).

On voit sur (i), (ii) et (iii) que les faisceaux d'ensemble forment une catégorie fibrée et cofibrée sur la catégorie des sites.

Itou pour les faisceaux de modules à gauche sur des sites annelés. Itou pour les faisceaux étales sur des schémas ; ce n'est pas immédiatement un cas particulier de ce qui précède, car les sites forment en fait une 2-catégorie et "site étale de X" n'est qu'un pseudo-foncteur en X (VII 1.4).

La définition précédente fait des faisceaux d'ensembles (resp. ...) sur des sites variables une catégorie fibrée sur celle des sites, ayant pour catégories fibres les catégories opposées aux catégories usuelles de faisceaux d'ensembles (resp. ...).

0.3. Soient I un ensemble fini, ε une fonction de I à valeurs dans $\{+1, -1\}$, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories additives graduées par des foncteurs de translation T_i (CD I 1.10) et F un multifoncteur **multiadditif** des catégories $\mathcal{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathcal{A}$ graduée par le foncteur de translation T . On suppose F covariant (resp. contravariant) en les i tels que $\varepsilon_i = 1$ (resp. $\varepsilon_i = -1$). Modifiant et

(*) Ces terminologies ne sont pas compatibles à l'identification des objets de S aux faisceaux associés.

complétant ([C D] I 1.1), on dira que F est un foncteur gradué si on s'est donné une famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ d'isomorphismes de foncteurs entre $T \circ F$ et $F \circ T_i^{\varepsilon_i}$, telle que les diagrammes suivants soient anticommutatifs, pour $i \neq j$ dans I,

$$\begin{array}{ccc} F \circ (T_i^{\varepsilon_i}, T_j^{\varepsilon_j}) & \xrightarrow{\varphi_j * T_i^{\varepsilon_i}} & T \circ F \circ T_i^{\varepsilon_i} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_i * T_j^{\varepsilon_j}} & - & \downarrow{\scriptstyle T * \varphi_i} \\ T \circ F \circ T_j^{\varepsilon_j} & \xrightarrow{T * \varphi_j} & T \circ T \circ F \end{array} .$$

On laisse au lecteur le soin de définir le composé de deux foncteurs gradués et de vérifier que c'est encore un foncteur gradué.

0.4. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et I un ensemble fini. Pour $i \in I$, on désigne par 1_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de $\mathbb{Z}^I$. Un complexe I^{uple} (resp. un complexe I^{uple} naïf) de $\mathcal{A}$ consiste en

(a) une famille $(K^k)_{k \in \mathbb{Z}^I}$ d'objets de $\mathcal{A}$;

(b) pour chaque $i \in I$ et chaque $k \in \mathbb{Z}^I$, une flèche $d_i^k : K^k \longrightarrow K^{k+1_i}$, ces flèches vérifiant $d_i^{k+1_i} d_i^k = 0$ et, pour $i \neq j$ $d_i^{k+1_j} d_j^k + d_j^{k+1_i} d_i^k = 0$ (resp. $d_i^{k+1_j} d_j^k = d_j^{k+1_i} d_i^k$).

0.5. On appellera pro-objet d'une catégorie C un foncteur de C dans (Ens) qui soit limite inductive filtrante (selon une petite catégorie filtrante) de foncteurs représentables (cf. I 8.10). Tout pro-objet est limite inductive selon un petit ensemble ordonné filtrant de foncteurs représentables. Si X_i est un système projectif d'objets de C, indexé par une petite catégorie filtrante, on désigne par "$\varprojlim$" X_i le pro-objet $\varinjlim h^{X_i}$.

0.6. Le lecteur dualisera 0.5 au cas des ind-objets (Cf. I 8.2).

0.7. Conformément à la nouvelle terminologie, on appelle schéma ce qui s'appelait autrefois préschéma, et on appelle schéma séparé ce qui s'appelait autrefois schéma.

0.8. La catégorie des schémas annelés est la catégorie dont les objets sont les schémas dont le site étale est muni d'un faisceau d'anneaux, une flèche de $(S,\mathcal{A})$ dans $(T,\mathcal{B})$ étant un couple formé d'un morphisme de schémas f de S dans T, et d'un homomorphisme φ de faisceaux d'anneaux de $f^*\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. Le morphisme de schémas f est dit induit par (f,φ).

0.9. Si X est un schéma sur Y, on désigne par $(X/Y)^n$ le produit fibré n-uple de X sur Y.

0.10. Soit S un schéma. On appellera grand site étale (resp. grand site fppf, resp. grand site fpqc) de S le site $Sch/_S$, muni de la topologie étale (resp. fppf, resp. fpqc) (SGA 3 IV 6.3). On fera attention que ce n'est pas un U-site (U étant l'univers fini, $Sch/_S$ consistant en les schémas $\in U$).

On appelle petit site fpqc (resp. petit site fppf) de S le site des schémas plats sur S (resp. plats de présentation finie) muni de la topologie fpqc (resp. fppf). Lorsqu'il faudra éviter une confusion, on appellera petit site étale de S le site S_{et} (VII 1.2).

0.11. Dans bien des cas, le rédacteur s'est permis de parler de diagrammes commutatifs de morphismes de sites là où il eût fallu parler de diagrammesessentiellement commutatifs, i.e. commutatifs à isomorphisme près (cf. IV 3.2.2). Le lecteur pourra vérifier que les arguments que nous donnons s'appliquent aussi à la situation générale.

0.12. La terminologie "schéma cohérent" pour "schéma quasi-compact quasi-séparé" a été subrepticement introduite par endroits par A. Grothendieck.

0.13. Un faisceau de torsion F sur un schéma S sera dit premier aux caractéristiques résiduelles de S s'il est limite inductive de ses sous-faisceaux annulés par des entiers n inversibles sur S .

1. Les catégories dérivées.

1.1. Foncteurs exacts (les règles de signe).

1.1.1. Pour les théorèmes fondamentaux relatifs aux catégories dérivées, je renvoie à VERDIER [CD] et [2]. Dans ce n°, une attention toute spéciale a été accordée aux problèmes de signes.

Rappelons que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de complexes (dans une catégorie additive, sous-entendue par la suite), son cône

C(f) est défini par

(1.1.1.1) $\quad C(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \qquad d^n = -d_X^{n+1} + f^{n+1} + d_Y^n \quad .$

Lorsque X = 0 (resp. Y = 0), on a C(f) = Y (resp. C(f) = X[1]), de sorte que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & = & 0 & = & X & = & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & = & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

définit un "triangle"

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow C(f) \xrightarrow{j} X[1] \quad .$$

Dans la catégorie des complexes à homotopie près, on appelle <u>distingué</u> un triangle isomorphe à un triangle de ce type, et <u>antidistingué</u> un triangle qui devient distingué quand on change le signe de ses flèches. On vérifie que le triangle défini par une suite exacte de complexes scindée en chaque degré ([CD] p. 10, cf. la démonstration de 1.1.5.4) est antidistingué et que, à isomorphisme près, tout triangle antidistingué est obtenu ainsi.

*1.1.2. Les calculs de signes s'effectuent le plus aisément à l'aide des "règles formelles" suivantes. On écrit un élément de $C(f)^n$ sous la forme $1 \otimes x + y$ ($x \in X^{n+1}$, $y \in Y^n$), 1 étant une "cellule" de dimension 1, et on pose $d(1) \otimes x = f(x)$. On a donc

$$d(1 \otimes x + y) = d\,1 \otimes x - 1 \otimes dx + dy = -1 \otimes dx + f(x) + dy. \quad *$$

Définition 1.1.3. (i) Un foncteur gradué (0.3) d'une catégorie triangulée $\mathcal{A}$ dans une catégorie triangulée $\mathcal{B}$ est dit exact s'il transforme triangles distingués en triangles distingués.

(ii) Un foncteur gradué contravariant d'une catégorie triangulée $\mathcal{A}$ dans une catégorie triangulée $\mathcal{B}$ est dit exact si pour tout triangle distingué (X,Y,Z,u,v,w) de $\mathcal{A}$, le triangle (F(Z), F(Y), F(X), F(v), F(u), TF(w)) est distingué (dans cette définition, on identifie F X à T F T X grâce à la graduation de F).

(iii) Soient $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille finie de catégories triangulées, ε une fonction de I dans $\{+1, -1\}$ et $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée. Un foncteur gradué F du produit des $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{A}$, covariant en les i tels que $\varepsilon(i) = 1$ et contravariant en les i tels que $\varepsilon(i) = -1$ est dit exact si quel que soit $i \in I$, les foncteurs de $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{A}$ déduits de F en fixant toutes les variables, sauf la $i^{\text{ème}}$, sont des foncteurs exacts.

Un composé de foncteurs exacts est encore un foncteur exact.

1.1.4. Si $(K^{n_1 \dots n_p}, d_1, \dots, d_p)$ est un complexe multiple (0.4), le complexe simple associé est défini par

$$K^n = \prod_{\Sigma n_i = n} K^{(n_i)} \quad , \quad d = \Sigma d_i \quad . \tag{1.1.4.0}$$

Quand, exceptionnellement, on le définira par une somme plutôt que par un produit, ce fait sera signalé explicitement.

Soit I un ensemble fini. On se propose, d'après CARTAN-EILENBERG et J.P. SERRE, d'expliquer comment à tout complexe naïf I^{uple} K est

canoniquement associé un complexe I^{uple} (0.4).

Pour tout ordre total $<$ sur I, soit $K(<)$ le complexe I^{uple} suivant :

$$(1.1.4.1) \qquad \begin{cases} K(<)^{\underline{k}} = K^{\underline{k}} \\ d(<)_i^{\underline{k}} = (-1)^{\sum_{j<i} k_j} d_i \end{cases} .$$

Si $<_1$ et $<_2$ sont deux ordres totals sur I l'isomorphisme canonique τ entre $K(<_1)$ et $K(<_2)$ est par définition celui donné par

$$(1.1.4.2) \qquad \tau^{\underline{k}} = (-1)^{\varepsilon(<_1,<_2)}, \text{ où } \varepsilon(<_1,<_2) = \sum_{\substack{i<_1 j \\ i<_2 i}} k_i k_j .$$

1.1.4.2.1. On vérifie que ces isomorphismes canoniques établissent un système transitif d'isomorphismes entre les $K(<)$ pour $<$ ordre total sur I ; ces $K(<)$ forment donc un complexe I^{uple} unique à isomorphisme unique près, qu'on désignera dans ce n° par la notation $K(*)$ et qu'on appelle le complexe I^{uple} associé ou complexe naïf I^{uple} K. On prendra garde que $K(*)^{\underline{k}}$ n'est pas canoniquement isomorphe à $K^{\underline{k}}$: seul le choix d'un ordre total sur I permet d'identifier ces deux objets.

Si K est un complexe naïf I^{uple}, et si $i \in I$, on désigne par $K[1_i]$ le complexe naïf suivant, de différentielles notées $d_j[1_i]$:

$$(1.1.4.3) \qquad \begin{cases} K[1_i]^{\underline{k}} = K^{\underline{k+1_i}} \\ d_j[1_i]^{\underline{k}} = d_j^{\underline{k+1_i}} \quad \text{si } i \neq j \\ d_i[1_i]^{\underline{k}} = -d_i^{\underline{k+1_i}} \end{cases} .$$

Si K est un complexe I^{uple}, on pose

$$(1.1.4.4)\qquad \begin{cases} K[1_i]^{\underline{k}} = K^{\underline{k}+1_i} \\ d_j[1_i]^{\underline{k}} = -d_j[1_i]^{\underline{k}+1_i} \end{cases}$$

Si K est un complexe naïf I^{uple} et $<$ un ordre total sur I, de sorte que K(*) est donné par (1.1.4.1), on définit un isomorphisme σ entre $K[1_i]$ (*) et $K(*)[1_i]$ par la formule

$$(1.1.4.5)\qquad \sigma^{\underline{k}} = (-1)^{\sum_{j<i} k_j}\, id_{K^{\underline{k}+1_i}} \quad .$$

1.1.4.6. On vérifie que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de l'ordre total $<$; il définit donc un isomorphisme, dit canonique, entre $K[1_i](*)$ et $K(*)[1_i]$.

1.1.4.7. Quels que soient i,j dans I, si K est un complexe ou un complexe naïf I^{uple}, on identifie de façon évidente $K[1_i][1_j]$ et $K[1_j][1_i]$.

Pour $i \neq j$ dans I , le diagramme suivant d'isomorphismes canoniques du type 1.1.4.6 ou 1.1.4.7 est alors anticommutatif :

$$(1.1.4.7.1)\qquad \begin{array}{ccccc} K[1_i][1_j](*) & = & K[1_j][1_i](*) & \longleftrightarrow & K[1_j](*)[1_i] \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ K[1_i](*)[1_j] & \longleftrightarrow & K(*)[1_i][1_j] & = & K(*)[1_j][1_i] \end{array} \quad .$$

1.1.5. Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur contravariant additif de catégories additives. On définit comme suit l'extension de F aux complexes : $F : C(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathcal{B})$. Si K est un complexe de $\mathcal{A}$, on pose

$$(1.1.5.1) \qquad \begin{cases} F(K)^k = F(K^{-k}) \\ d^k_{F(K)} = (-1)^{k+1} F(d^{-k-1}) \end{cases}$$

L'isomorphisme canonique σ entre $F(K)[1]$ et $F(K[-1])$ est défini par

$$(1.1.5.2) \qquad \sigma^k = (-1)^{k+1} \, id_{F(K^{-k-1})} \quad .$$

Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \longrightarrow C$ sont deux foncteurs contravariants additifs, on définit l'isomorphisme canonique ρ entre $G \circ F(K)$ et $G(F(K))$ par

$$(1.1.5.3) \qquad \rho^k = (-1)^k \quad .$$

Lemme 1.1.5.4. (i) Pour tout foncteur contravariant additif $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, les formules 1.1.5.1 , 1.1.5.2 définissent un foncteur contravariant exact de $K(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{B})$.

(ii) Pour tout couple (G,F) de foncteurs contravariants additifs composables, la formule (1.1.5.3) définit un isomorphisme de foncteurs gradués entre l'extension aux complexes de GF et le composé des extensions aux complexes de G et F.

Preuve. Un morphisme de degré i : f : K $\longrightarrow$ L est au choix

(a) un morphisme de K dans L[i]

(b) un morphisme de K[-i] dans L

(c) une famille $f^n : K^n \longrightarrow L^{n+i}$ qui commute ou anticommute aux différentielles selon la parité de i.

Si f : K $\longrightarrow$ L[i] est un morphisme de degré i, alors F(f) : F(L)[-i] $\longrightarrow$ K est encore un morphisme de degré i ; pour i=1, on a

$$F(f)^n = (-1)^{n+1} F(f^{-n-1}) \quad . \tag{1.1.5.5}$$

Si $0 \longrightarrow K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$ est une suite exacte de complexes scindée degré par degré, le choix d'un scindage permet d'écrire la différentielle de L sous la forme

$$d_L = d_K + d_M + f \quad ,$$

où f est un morphisme de degré un de M dans K . De même, la suite exacte duale

$$0 \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(L) \longrightarrow F(K) \longrightarrow 0$$

définit un morphisme de degré un f* de F(K) dans F(L). On a f* = F(f). Il en résulte que l'image par F d'un triangle (K,L,M,u,v,f) défini par une suite exacte courte de complexes est encore un triangle du même type et, d'après 1.1.1, ceci prouve (i).

Sous les hypothèses (ii), pour f de degré un, on a $G(F(f))^n = (-1)^{n+1}(-1)^{-n}\, G\circ F(f)^n = -G\circ F(f)^n$; en particulier, l'isomorphisme de graduation $G(F(K[1])) \xrightarrow{\sim} G(F(K))[1]$ est l'isomorphisme ayant pour composantes -1 .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G\circ F(K)[1] & \xleftrightarrow{\rho[1]} & G(F(K))[1] \\ \| & & \updownarrow \\ G\circ F(K[1]) & \xleftrightarrow{\rho} & G(F(K[1])) \end{array}$$

est donc commutatif , ce qui prouve (ii).

1.1.6. Soit s = +, ou s = - ; soient I un ensemble fini, $\varepsilon : I \longrightarrow \{+,-\}$ une fonction, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{A}$ des catégories additives, et F un multifoncteur multiadditif des catégories $\mathcal{A}_i$ dans $\mathcal{A}$, covariant en les arguments d'indice i tel que $\varepsilon(i) = +$ et contravariant en les autres. On se propose de définir l'extension $K^s(F)$ (ou simplement F) de F aux complexes comme multifoncteur exact des catégories $K^{s\varepsilon(i)}(\mathcal{A}_i)$ ($s\varepsilon(i) = \pm$, selon la règle des signes) dans $K^s(\mathcal{A})$, (*) présentant la même variance que F. On expliquera ensuite en quel sens cette construction est compatible à la composition des foncteurs. D'autres conventions de degrés sont possibles, et seront utilisées ; ce point est indépendant des questions de signe considérées ici.

1.1.6.1. Si F est contravariant à une variable, on définit $K^s(F)$ par les formules (1.1.5).

1.1.6.2. Si F est covariant, on définit le foncteur $K^s(F)$ par passage au quotient à partir du composé du foncteur évident du produit des catégories $C^s(\mathcal{A}_i)$ dans la catégorie des complexes I^{uples} naïfs, du foncteur (1.1.4) de la catégorie des complexes I^{uples} naïfs dans celle

(*) La construction fournit également une extension de F en un multifoncteur des catégories $C^{s\varepsilon(i)}(\mathcal{A}_i)$ dans $C^s(\mathcal{A})$.

des complexes I^{uples} (1.1.4.2.1), et du foncteur complexe simple associé (1.1.4.0) :

$$K^S(F) = C^S(F)(*)_{s.a.} \quad .$$

Soient des complexes $K_j \in K^S(\mathfrak{A}_j)$, et $i \in I$; on pose $K_j[1_i] = K_j$ pour $j \neq i$, et $K_i[1_i] = K_i[1]$. On a alors des isomorphismes évidents :

$$C^S(F)(K_j[1_i]) \simeq C^S(F)(K_j)[1_i] \quad ,$$

et

$$C^S(F)(K_j)(*)[1_i]_{s.a} \simeq C^S(F)(K_j)(*)_{s.a}[1] \quad ,$$

d'où, via (1.1.4.5), un isomorphisme canonique σ entre $K^S(F)(K_j[1_i])$ et $K^S(F)(K_j)[1]$. Il résulte de 1.1.4.7 que ces isomorphismes définissent une graduation de $K^S(F)$.

1.1.6.3. Dans le cas général, F est le produit de foncteur contravariants canoniques $\mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_i^o$ (pour $\varepsilon(i) = -$) et d'un foncteur covariant F^+ ; on définit le foncteur $K^S(F)$ par composition à partir de 1.1.6.1 et 1.1.6.2.

Proposition 1.1.7. Sous les hypothèses précédentes, le foncteur $K^S(F)$ est un foncteur multiadditif exact.

Il suffit de vérifier 1.1.7 sous les hypothèses de 1.1.6.1 (où la proposition est 1.1.5.4 (i)) ou de 1.1.6.2. Pour vérifier que les foncteurs déduits de $K^S(F)$ en fixant toutes les variables, sauf la $i^{ème}$, sont exacts, on peut expliciter $K^S(F)$ en terme d'un ordre sur I pour lequel i soit le plus petit élément ; un triangle distingué

type (1.1.1.1) est alors transformé en triangle distingué type.

1.1.8. Soient I et J deux ensembles finis, $\psi : I \longrightarrow J$ une application surjective, $\varepsilon_I : I \longrightarrow \{+,-\}$ et $\varepsilon_J : J \longrightarrow \{+,-\}$ des fonctions, et des multifoncteurs multiadditifs, covariants en les arguments pour lesquels $\varepsilon = +$ et contravariant en les autres :

$$G_j : \prod_{\psi(i)=j} \mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{B}_j \qquad (j \in J)$$

$$F : \prod_{j \in J} \mathcal{B}_j \longrightarrow C$$

Choisissons des ordres totaux sur I et J, de telle sorte que ψ soit une application croissante. On définit alors l'isomorphisme canonique ρ entre l'extension aux complexes de $F \circ (G_j)$ et le composé des extensions aux complexes de F et des G_j par la formule

$$(1.1.8.1) \qquad \rho^{\underline{k}} = \prod_i \eta_i^{k_i} : \text{automorphisme de } F \circ (G_j)\ (K_i^{k_i \varepsilon(i)\varepsilon(\psi(i))})$$

avec $\eta_i = -1$ si $\varepsilon_I(i) = \varepsilon_J(\psi(i)) = -$, $\eta_i = 1$ sinon.

Cette formule généralise (1.1.5.3), on vérifie que ρ ne dépend pas des ordres choisis sur I et J, et est un isomorphisme de foncteurs gradués (cf. 1.1.5.4 (ii)).

Ces isomorphismes ρ vérifient la condition évidente de cocycle pour un composé triple.

1.1.9. Soient I un ensemble fini, i et j deux éléments distincts de I, $I' = I \setminus \{i,j\}$, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{B}$ des catégories additives et $F : (\mathcal{A}_i)_{i \in I} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $G : (\mathcal{A}_i)_{i \in I'} \longrightarrow \mathcal{B}$ des multifoncteurs multi-additifs. On suppose que $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$ et que F est contravariant en la $i^{\text{ème}}$ variable et covariant en la $j^{\text{ième}}$. Pour $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_i$, on désignera par $F_{X,Y}$ le multifoncteur des $(\mathcal{A}_i)_{i \in I'}$ dans $\mathcal{B}$ obtenu en fixant les i^{e} et j^{e} arguments :

$$F_{X,Y}(\ldots) = F(\ldots X, \ldots, Y, \ldots) \quad .$$

On appelle <u>morphisme de contraction</u> $c : F \longrightarrow G$ la donnée pour tout $X \in \mathcal{A}$ d'un morphisme de foncteurs

$$c_X : F_{X,X} \longrightarrow G \quad ,$$

tel que pour toute flèche $f: X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{A}_i$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_{Y,X} & \longrightarrow & F_{X,X} \\ \downarrow & & \downarrow c_X \\ F_{Y,Y} & \xrightarrow[c_Y]{} & G \end{array}$$

soit commutatif.

Les conventions 1.1.6 sont motivées par le

<u>Lemme</u> 1.1.9.1. <u>Soient</u> $c : F \longrightarrow G$ <u>un morphisme de contraction et</u> $(K_\ell)_{\ell \in I}$ <u>des complexes dans les</u> $\mathcal{A}_\ell$, <u>avec</u> $K_i = K_j$. <u>Soit</u> $<$ <u>un ordre total sur</u> I <u>pour lequel</u> i <u>soit le prédécesseur de</u> j. <u>Soit, avec les notations de</u> 1.1.6, <u>pour</u> $k \in \mathbb{Z}$,

$$c^k : K^S(F)\ (K_\ell)^k \longrightarrow K^S(G)\ (K_\ell)^k$$

le morphisme dont la restriction à $F(\ldots K_i^{k_i} K_j^{k_j} \ldots)$ vaut 0 si $K_i \neq k_j$, et vaut $c_{K_i^{k_i}}$ si $k_i = k_j$. Alors, $(c^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de complexes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier ce lemme, et le fait que le morphisme de contraction (c^k) ne dépend pas de l'ordre choisi sur I.

L'exemple standart de morphisme de contraction est celui de la loi de composition

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \otimes \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$$

Exemples 1.1.10. (i) Si on applique les définitions de 1.1.6 au foncteur produit tensoriel, on retrouve la notion usuelle de produit tensoriel de deux complexes, la différentielle étant donnée par

$$d(x\otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\deg x}\, x \otimes dy \quad .$$

(ii) Si on applique les définitions de 1.1.6 au foncteur Hom(X,Y), en considérant Y comme première variable et X comme seconde variable, convention qu'on suivra toujours, cette convention permet d'identifier, pour deux complexes X,Y, le k-ème composant du complexe Hom(X,Y) défini dans 1.1.6 à $\prod_n \mathrm{Hom}(X^n, Y^{n+k})$, et on retrouve la différentielle habituelle ; pour $f \in \mathrm{Hom}(X^n, Y^{n+k})$, on a

$$df = d \circ f - (-1)^k f \circ d \quad .$$

(iii) Les conventions précédentes ont pour vertu que les systèmes de flèches suivante sont des morphismes de complexes, sans qu'on doive

les perturber par aucun signe (1.1.9) :

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M) \otimes \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,M) : f \otimes g \longmapsto f \circ g$$

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(L,M) \otimes L \longrightarrow M : f \otimes x \longmapsto f(x) .$$

1.1.10.1. La convention (1.1.4.5)-(1.1.6.2) se justifie comme suit, pour F = $\otimes$: un élément de $((K \otimes L)[1])^n$ s'écrit sous la forme (1.1.2) (en se rappelant que $(K \otimes L)[1] = C\ (K \otimes L \longrightarrow 0)$ (1.1.1.1)) $\Sigma\ 1 \otimes (x^p \otimes y^q)$, un élément de $(K[1] \otimes L)^n$ sous la forme $\Sigma\ (1 \otimes x^p) \otimes y^q$ et un élément de $(K \otimes L[1])^n$ sous la forme $\Sigma\ x^p \otimes (1 \otimes y^q)$; le signe apparaît quand on interchange x^p et 1. Pour F = dual, la convention (1.1.5.2) se justifie ainsi : un élément de $K^*[1]$ s'écrit $1 \otimes \omega$; sa valeur sur un élément $1' \otimes x$ de $K[-1]$ (1' cellule de dimension -1) est $< 1 \otimes \omega,\ 1' \otimes x > = (-1)^{\deg \omega} < 1,1' > < \omega,x > = (-1)^{\deg \omega} < \omega,x >$; c'est la convention adoptée.

Remarque 1.1.11. "Rappelons" qu'une catégorie sous-additive est une catégorie dont les ensembles de flèches Hom(X,Y) sont munies de lois de groupes abéliens, la composition des morphismes étant biadditive. Un foncteur additif F entre catégories sous-additives et un foncteur qui vérifie la formule

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

pour $f,g \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Les foncteurs additifs d'une catégorie sous-addtive $\mathcal{A}$ dans un autre $\mathcal{B}$ forment une catégorie, notée $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{add}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Soit (D) l'unique catégorie sous-additive, d'ensemble d'objets indexés par $\mathbb{Z}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec

(1.1.11.1)
$$\begin{cases} \mathrm{Hom}(X^n,X^n) = \mathbb{Z}, \text{ engendré par l'identité} \\ \mathrm{Hom}(X^n,X^{n+1}) = \mathbb{Z}, \text{ engendré par une flèche notée } d_n \\ \mathrm{Hom}(X^i,X^j) = 0 \text{ si } j-i \neq 0 \text{ ou } 1 . \end{cases}$$

Soit D le complexe de (D) défini par $D^n = X^n$ et $d^n = d^n$.

Pour toute catégorie sous-additive $\mathcal{A}$, le foncteur $G \longmapsto G(D)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{add}}((D),\mathcal{A})$ dans $C(\mathcal{A})$ est un isomorphisme.

La construction 1.1.6 s'étend au cas d'un foncteur multiadditif de catégories sous-additives $\mathcal{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathcal{A}$.

Soit

$$F = (F^n,d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

un complexe de foncteurs multiadditifs de catégories additives $\mathcal{A}_i$ dans une catégorie additive $\mathcal{A}$. On peut considérer $F^\cdot$ comme un foncteur de (D) dans une catégorie de multifoncteurs, ou encore comme un foncteur multiadditif

$$F_1 : \prod \mathcal{A}_i \times (D) \longrightarrow \mathcal{A} .$$

On définit l'<u>extension de</u> F <u>aux complexes</u> par la formule

(1.1.11.2) $$F^\cdot(K_1\ldots K_n) = F_1(K_1\ldots K_n, D) .$$

1.1.12. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories additives et

$$F^\cdot = (F^n,d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

un complexe de foncteurs additifs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Supposons que les

foncteurs F^i admettent des adjoints à droite F_i ; si ${}^t d^i : F_{i+1} \longrightarrow F_i$ est le transposé de d^i, soit $F_.$ le complexe de foncteurs additifs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$, de composantes les F_i, et d'opérateur différentiel

$$(d_.)^i = (-1)^{i+1}\ {}^t d^{-i-1} : F_{-i} \longrightarrow F_{-i-1}$$

Soit ^{t} le foncteur <u>contravariant</u> de (D) dans (D) donné par

$${}^t X^n = X^{-n} \quad \text{et} \quad {}^t d^n = d^{-n-1} \quad .$$

Le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme canonique près

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} \times (D) \times \mathcal{B} & \xrightarrow{(F^n(A),\ Id)} & \mathcal{B} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}} & (Ab) \\ \downarrow{\scriptstyle (1.1.12.1)} \quad (Id, {}^t, Id) & & & & \| \\ \mathcal{A} \times (D) \times \mathcal{B} & \xrightarrow{(\ Id, (F\ )^n(B))} & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}} & (Ab) \end{array} \quad .$$

Ceci exprime la formule d'adjonction

(1.1.12.2) $$\mathrm{Hom}(F^n(A), B) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A, F_n(B)) \quad .$$

Les conventions générales 1.1.3 fournissent donc un isomorphisme

(1.1.12.3) $$\mathrm{Hom}^{\cdot}(F^{\cdot}(K), L) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(K, F_{\cdot}(L)) \quad .$$

<u>Définition</u> 1.1.13. <u>Si</u> K <u>est un complexe d'une catégorie abélienne</u> $\mathcal{A}$, <u>on appelle</u> tronqué à droite (resp. à gauche) <u>de</u> K <u>en dimension</u> n, <u>et on désigne par</u> $\tau_{\leq n}(K)$ (resp. $\tau_{\geq n}(K)$) <u>les complexes suivants</u>

$$\tau_{\leq n}(K) \ : \ \ldots K^{n-2} \longrightarrow K^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^n) \longrightarrow 0$$

$$\tau_{\geq n}(K) \ : \ 0 \longrightarrow \mathrm{coker}(d^{n-1}) \longrightarrow K^{n+1} \longrightarrow K^{n+2} \ \ldots .$$

Proposition 1.1.14. (i) $H^i(\tau_{\leq n}(K)) = 0$ pour $i > n$ et $H^i(\tau_{\geq n}(K)) = 0$ pour $i < n$.

(ii) Le morphisme canonique $\tau_{\leq n}(K) \longrightarrow K$ (resp. $K \longrightarrow \tau_{\geq n} K$) induit des isomorphismes sur les H^i pour $i \leq n$ (resp. $i \geq n$).

Le foncteur $\tau_{\leq n}$ (resp. $\tau_{\geq n}$) transforme morphismes homotopes en morphismes homotopes. Dès lors, il résulte de 1.1.4 que le foncteur 1.1.13 garde un sens dans la catégorie dérivée.

1.1.15. Si K est un complexe double, de première (resp. deuxième) différentielle d' (resp. d"), on désigne par $\tau''_{\leq n}(K)$ le sous-complexe double de K tel que

$$\tau''_{\leq n}(K)^{pq} = \begin{cases} K^{pq} & \text{si} \quad q < n \\ \mathrm{Ker}(d'') & \text{si} \quad q = n \\ 0 & \text{si} \quad q > n \end{cases}$$

on définit de même $\tau''_{\geq n}(K)$, $\tau'_{\leq n}(K)$ et $\tau'_{\geq n}(K)$.

1.1.16. On aura aussi à considérer les "tronqués bêtes" d'un complexe K, définis par

$$\sigma_{\leq n}(K)^i = \begin{cases} K^i & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases} \qquad \sigma_{\geq n}(K)^i = \begin{cases} K^i & \text{si } i \geq n \\ 0 & \text{si } i < n \end{cases}$$

1.2. Foncteurs dérivés.

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée et S un système multiplicatif saturé (CD 2.1.2). Si $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, on désignera par A^+ et A^- les ind et pro-objets ((0.5) et (0.6))

$$A^+ = \text{"}\varinjlim\text{"}_{A \xrightarrow{s} A'} A' \qquad A^- = \text{"}\varprojlim\text{"}_{A' \xrightarrow{s} A} A' \ ,$$

où s parcourt la catégorie filtrante des flèches de S de source ou but A.

Les foncteurs $A \longmapsto A^+$ et $A \longrightarrow A^-$ rendent inversibles les éléments de S et définissent des foncteurs pleinement fidèle de $\mathcal{A}(S^{-1})$ dans les catégories des Ind et pro-objets de $\mathcal{A}$ respectivement.

Définition 1.2.1. Soit F un multifoncteur covariant exact des catégories triangulées $(\mathcal{A}_i)_{0<i\leq n}$ dans la catégorie triangulée $\mathcal{A}$ et soient S_i et S des systèmes multiplicatifs saturés des catégories $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}$.

(i) Le foncteur dérivé droit RF de F (relativement aux S_i et à S) est le foncteur des catégories $\mathcal{A}_i(S_i^{-1})$ dans la catégorie des Ind-objets de $\mathcal{A}(S^{-1})$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}_i) & \xrightarrow{(A_i) \longmapsto F(A_i^+)} & \mathrm{Ind}\,\mathcal{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}_i(S_i^{-1}) & \xrightarrow{\mathrm{RF}} & \mathrm{Ind}\,\mathcal{A}(S^{-1}) \ . \end{array}$$

(ii) On dit que RF est défini en (A_i) si le Ind-objet $RF(A_i)$ de $\mathscr{A}(S^{-1})$ est "essentiellement constant", i.e. provient d'un objet de $\mathscr{A}(S^{-1})$; cet objet est appelé la valeur de RF en (A_i).

(iii) On dit que F est dérivable à droite si RF est partout défini ; on désignera alors encore par RF le foncteur des $\mathscr{A}_i(S_i^{-1})$ dans $\mathscr{A}(S^{-1})$ qu'il définit.

(iv) Une famille (A_i) d'objets des $\mathscr{A}_i$ est dite déployée pour RF si le morphisme canonique de $F(A_i)$ dans $RF(A_i)$ est un isomorphisme.

On laisse au lecteur le soin de définir par dualité le dérivé gauche LF de F (à valeur dans Pro $\mathscr{A}(S^{-1})$) et d'étendre les définitions précédentes aux cas où F est covariant en certains arguments et contravariant en d'autres.

Lorsque RF est partout défini, la définition qu'on en a donné ici coïncide avec celle de Verdier (CD p.39), comme on le vérifie facilement.

Proposition 1.2.2. Soient (A_1', A_1, A_1'') un triangle distingué dans $\mathscr{A}_1$, et $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_i$ $(i \neq 1)$.

(i) Si $(A_1', (A_i))$ et $(A_1'', (A_i))$ sont déployées pour RF, alors la famille $(A_1, (A_i))$ l'est aussi.

(ii) Si RF est défini en $(A_1', (A_i))$ et en $(A_1'', (A_i))$, il l'est aussi en $(A_1, (A_i))$ et le triangle $(RF(A_1', (A_i)), RF(A_1, (A_i)), RF(A_1'', (A_i)))$ est distingué dans $\mathscr{A}(S^{-1})$.

Prouvons que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Puisque F est exact, la flèche $(F(A'_l,(A_i)),\ F(A_l,(A_i)),\ F(A''_l,(A_i))) \to (RF(A'_l,(A_i)),RF(A_l,(A_i)),RF(A''_l,(A_i)))$ est un morphisme de triangles distingués. Par hypothèse, cette flèche est un isomorphisme en deux sommets ; c'en est donc un au troisième, comme on voulait .

Lemme 1.2.2.1. Si A = (X,Y,Z) est un triangle distingué d'une catégorie triangulée $\mathfrak{A}$ et S un système multiplicatif saturé de $\mathfrak{A}$, alors le triangle $\Delta^+ = (X^+, Y^+, Z^+)$ de Ind $\mathfrak{A}$ est limite de triangles distingués de $\mathfrak{A}$.

Désignons par $\mathfrak{L}$ la catégorie des morphismes de triangle distingués de source Δ dont les flèches appartiennent à S.

(a) Si $\Delta = (X,Y,Z)$ et $\Delta' = (X',Y',Z')$ sont deux triangles distingués de $\mathfrak{A}$ et si $f : \Delta \longrightarrow \Delta'$ est un $\mathfrak{A}(S^{-1})$-morphisme de triangles, il existe dans $\mathfrak{A}$ des morphismes de triangles $s : \Delta' \longrightarrow \Delta''$ et $f_1 : \Delta \longrightarrow \Delta''$ tels que les composantes de s soient dans S et que le diagramme

(1)
$$\begin{array}{ccc} \Delta & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \searrow^{f_1} & \\ \Delta & \xrightarrow{s} & \Delta'' \end{array}$$

soit commutatif dans $\mathfrak{A}(S^{-1})$.

Il existe un diagramme commutatif

(2)
$$\begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \searrow^{f_1} & \\ X' & \xrightarrow{s} & X'' \end{array} \qquad (s \in S,\ f_1 \in \mathfrak{A})$$

et un morphisme $\Delta' \xrightarrow{s_1} \Delta''_1$ dans S, admettant s pour composante. Raisonnons de même en les autres sommets : on obtient un diagramme du type (1), dans lequel toutefois f_1 n'est pas encore un morphisme de triangle <u>dans</u> $\mathcal{K}$, les diagrammes

(3)
$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Z''_o \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w'} \\ X & \xrightarrow{f} & X''_o \end{array}$$

par exemple pouvant ne pas être commutatifs <u>dans</u> $\mathcal{K}$, seulement dans $\mathcal{K}(S^{-1})$. Il existe $t_o : X''_o \longrightarrow X''_1$ dans S tel que $tw''f = tfw$ et $t : \Delta''_o \longrightarrow \Delta''_1$ admettant t_o pour composante. Remplaçons Δ''_o par Δ''_1, s par ts et f_1 par tf_1 ; dans le diagramme de type (1) obtenu, (3) est cette fois commutatif ; procédant de même aux autres sommets, on obtient (1). On laisse au lecteur le soin de vérifier de même :

(b) Si $f,g : \Delta \rightrightarrows \Delta'$ sont deux morphismes de triangles distingués dans $\mathcal{K}$, égaux dans $\mathcal{K}(S^{-1})$, alors il existe un morphisme de triangles distingués à flèches dans S, $s : \Delta' \longrightarrow \Delta''$, tel que $Sf = Sg$.

(c) La catégorie $\mathcal{L}$ est filtrante à droite .

(d) On achève la démonstration du lemme en notant que

$$\Delta^+ = \text{"}\varinjlim_{s \in \mathcal{L}}\text{"} \text{ (but de s)} \quad .$$

Prouvons 1.2.2 (ii). Soient X' et X" des objets de $\mathcal{K}(S^{-1})$ représentant $RF(A'_1,(A_i))$ et $RF(A''_1,(A_i))$, et complétons le morphisme de degré 1 de X" dans X' en un triangle distingué (X',X,X"). Remplaçant les A_i, A'_1, A_1 et A''_1 par le but d'une flèche de S de source A_i, A'_1, A_1 ou A''_1, on se ramène au cas où il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(A''_1,(A_i)) & \xleftarrow{a''} & X'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A'_1,(A_i)) & \xleftarrow{a'} & X' \end{array} ,$$

où a" et a' sont des sections de flèches de $F(A''_1,(A_i))$ dans X" et de $F(A'_1,(A_i))$ dans X'. En vertu de l'aniome TR 3 de [C.D] on peut compléter ce diagramme en un morphisme de triangles

$$(X'XX'') \to (F(A'_1,(A_i)),F(A_1,(A_i)),F(A''_1,(A_i))) \to (RF(A'_1,(A_i)),RF(A_1,(A_i)),RF(A''_1,(A_i))).$$

La flèche composée est un morphisme de triangles, de source un triangle distingué et de but une limite (dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{K}(S^{-1})$) de triangles distingués (1.2.2.1). Quel que soit Y dans $\mathcal{K}(S^{-1})$, le diagramme suivant sera commutatif et ses lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{'Y,X"[1])} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Y,X'[1]) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{(Y,RF(A",A}_i\text{)[1])} & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A'_1,A_i)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A_1,A_i)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A''_1,A_i)) & \to & \mathrm{Hom}(Y,RF(A'_1,A_i)[1]) \end{array}$$

Par hypothèse, les flèches autres que la flèche centrale sont des isomorphismes. Le lemme des 5 montre que la flèche centrale aussi est un isomorphisme, quel que soit Y, donc que le triangle distingué (X',X,X") est isomorphe au triangle $(RF(A'_i), RF(A_i), RF(A''_i))$. Ceci achève la démonstration.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories abéliennes et F un foncteur covariant additif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, F définit des foncteurs exacts de $K(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{B})$, de $K^+(\mathcal{A})$ dans $K^+(\mathcal{B})$ et de $K^-(\mathcal{A})$ dans $K^-(\mathcal{B})$ (1.1.7).

Définition 1.2.3. (i) On appelle foncteurs dérivés droits de F les foncteurs de $D^+(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{Ind}\, D^+\mathcal{B}$ et de $D(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{Ind}\, D(\mathcal{B})$ dérivés droits des extensions de F aux complexes $K^+(\mathcal{A}) \longrightarrow K^+(\mathcal{B})$ et $K(\mathcal{A}) \longrightarrow K(\mathcal{B})$.

(ii) Un objet A de $\mathcal{A}$ est dit acyclique à droite pour F, ou, par abus de langage, acyclique pour RF, si le complexe réduit à A en degré 0 est déployé pour RF.

On s'intéressera surtout au cas où RF est partout défini ; on peut alors le considérer comme un foncteur de $D^+(\mathcal{A})$ dans $D^+(\mathcal{B})$, ou de $D(\mathcal{A})$ dans $D(\mathcal{B})$, selon le cas.

Proposition 1.2.4. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} D^+(\mathcal{A}) & \longrightarrow & D(\mathcal{A}) \\ \downarrow{\scriptstyle RF} & & \downarrow{\scriptstyle RF} \\ \mathrm{Ind}\, D^+(\mathcal{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Ind}\, D(\mathcal{B}) \end{array} .$$

Si K est un complexe nul en degré $< n$ et si $s : K \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme, le morphisme composé $K \xrightarrow{s} L \longrightarrow \sigma_{\geq n}(L)$ (1.1.6) est encore un quasi-isomorphisme. Les quasi-isomorphismes de K dans un complexe borné inférieurement forment donc une sous-catégorie (pleine) cofinale de la catégorie de tous les quasi-isomorphismes de source K. La proposition en résulte formellement.

En particulier, si le foncteur RF, est partout défini sur $D(\mathcal{A})$, il est partout défini sur $D^+(\mathcal{A})$, et le foncteur dérivé $RF : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ est restriction du foncteur dérivé $RF : D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$.

(1.2.5) On laisse au lecteur le soin de :

(i) Généraliser la définition 1.2.3 au cas d'un complexe de multifoncteurs, covariant en certaines variables et contravariant en d'autres ;

(ii) Dualiser la définition 1.2.5 (i) pour définir les dérivés gauches ;

(iii) Etendre la proposition 1.2.4 au cas d'un complexe borné de multifoncteurs;

(iv) Dualiser la proposition 1.2.5 (iii) en considérant des foncteurs dérivés gauches et l'inclusion de $D^-(\mathcal{B})$ dans $D(\mathcal{B})$.

Proposition 1.2.6. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, P une partie de $Ob(\mathcal{A})$ et F un foncteur additif de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. On suppose que

(a) tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient d'un élément de P

(b) pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad ,$$

où Q et R sont dans P, P appartient aussi à P et la 0-suite

$0 \longrightarrow FP \longrightarrow FQ \longrightarrow FR \longrightarrow 0$ est exacte. Alors, tout objet de P est acyclique pour LF .

Si $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, les résolutions gauches de A par des objets de P formeront un système cofinal dans la catégorie filtrante des résolutions gauches de A_o . Il suffit donc de prouver que si un complexe

$$\ldots \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_o \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

est acyclique et à objets dans P, son image est acyclique. Le coupant en suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(d_{i-1}) \longrightarrow A_i \longrightarrow \mathrm{Im}(d_i) \longrightarrow 0 \qquad (1.2.6.\ i)\ (i \geq 0)$$

on voit par récurrence sur i que $\mathrm{Im}(d_i) \in P$ et que l'image de (1.2.6 i) par F est une suite exacte courte. L'image du complexe est donc acyclique.

Proposition 1.2.7. Soit F un foncteur additif d'une catégorie abélienne dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$. Si tout objet de $\mathcal{A}$ est quotient (resp. sous-objet) d'un objet acyclique pour LF (resp. RF) (1.2.3), le foncteur dérivé LF : $D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$ (resp. RF : $D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$) est partout défini et tout complexe borné supérieurement (resp. inférieurement) d'objets acycliques pour LF (resp. RF) est déployé.

Il suffit de considérer le dérivé gauche LF . Si K est un complexe borné supérieurement, les quasi-isomorphismes $s : L \longrightarrow K$ avec L borné supérieurement et à objets acycliques forment un système cofinal dans la catégorie des quasi-isomorphismes de but K . Il suffit de montrer que pour K à objets acycliques, F(s) : F(L) $\longrightarrow$ F(K) est un

quasi-isomorphisme ; on aura alors dans le cas général F(L) = LF(K). Soit M le cône de s . Le complexe est à objets acyclique et H*(M) = 0 ; il faut prouver que H*(F(M)) = 0.

Soit i un entier. Les complexes déployés forment une sous-catégorie triangulée, de sorte que tout complexe borné d'objets acycliques, notamment $\tau_{\geq i}(M)$, est déployé. Puisque $H^j(\tau_{\geq i}(L)) = 0$ pour $j > i$, on a, pour $j > i$, $H^j(F(M)) = H^j(F(\tau_{\geq i}(M))) = H^j\, LF(\tau_{\geq i}(M)) = 0$.

Proposition 1.2.8. Soit $F^\cdot$ un complexe borné inférieurement de foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Si pour tout $K \in K^+(\mathcal{A})$ existe un quasi-isomorphisme $L \xrightarrow{s} K$, où $L \in K^+(\mathcal{A})$ est déployé pour tous les RF^i, alors le foncteur dérivé $RF^\cdot : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ existe et tout complexe borné inférieurement déployé pour tous les RF^i est déployé pour RF .

La preuve en est laissée au lecteur, ainsi que celle de l'énoncé dual, ou des variantes obtenues en prenant F contravariant, ou en prenant un complexe borné de foncteurs et en travaillant dans $D(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{B})$.

Définition 1.2.9. Soit F un foncteur de $D^b(\mathcal{A})$ dans $D(\mathcal{B})$ et d un intervalle de $\mathbb{Z}$. On dit que F est d'amplitude cohomologique $\subset$ d si pour tout $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $H^iF(A) = 0$ pour $i \notin d$.

Très souvent, d sera un intervalle de la forme [0,x] ou [-x,0] et on dira alors que F est de dimension cohomologique resp. homologique $\leq x$. On dira que F est de dimension finie s'il existe un intervalle fini d de $\mathbb{Z}$ tel que F soit d'amplitude $\subset$ d .

Proposition 1.2.10. Supposons remplies les hypothèses de 1.2.7, et que le foncteur RF : $D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ (resp. LF : $D^-(\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(\mathcal{B})$) est de dimension finie. Alors tout complexe d'objets acycliques pour RF (resp. LF) est déployé, et le foncteur RF : $D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$ (resp. LF : $D(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{B})$) est partout défini.

Pour la démonstration, on renvoie à Verdier [CD]. Il existe un énoncé analogue pour les complexes bornés de foncteurs. On peut encore remplacer l'exposant + (resp -) par b .

2. Catégories fibrées en catégories dérivées.

2.1. Introduction.

Le rédacteur insiste pour que le lecteur s'abstienne de lire ce § . On y donne le formalisme du théorème trivial de dualité et on y résoud la perplexité soulevée par Artin dans XII 4 .

Pour les notions de catégories sur une autre, de catégorie fibrée, de catégorie cofibrée et de clivage, on renvoie à SGA 1 VI . On établit entre autres dans cet exposé une équivalence entre les notions de catégories fibrées clivées normalisées sur une catégorie C , et de pseudo-foncteur de C^o dans (Cat).

Définition 2.1.1. Si X est un site annelé, on désigne par D(X) la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des faisceaux de modules à gauche sur X .

Quand il y a lieu d'éviter une confusion, on écrit plutôt $D(X,\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ désignant le faisceau d'anneaux.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de sites annelés, f définit des foncteurs dérivés

(1) $Rf_* : D^+(X) \longrightarrow D^+(Y)$

et

(2) $Lf^* : D^-(Y) \longrightarrow D^-(X)$,

et, par passage aux catégorie opposées, des foncteurs

(1°) $Rf_* : D^+(X)^\circ \longrightarrow D^+(Y)^\circ$

(2°) $Lf^* : D^-(Y)^\circ \longrightarrow D^-(X)^\circ$,

"fonctoriels" en f. Plus précisément, (1°) et (2°) définissent deux pseudo-foncteurs de la catégorie des sites dans celle des catégories triangulées, l'un covariant et l'autre contravariant. On trouve ainsi deux catégories sur celle des sites, l'une cofibrée, de fibres les $D^+(X)^\circ$, et de foncteurs image directe les Rf_* , l'autre fibrée, de fibres les $D^-(X)^\circ$, et de foncteurs image réciproque les Lf^* . Si le foncteur f* est de dimension homologique finie (i.e. de "Tor-dimension finie") on peut dans (2) remplacer l'exposant par un exposant + . On obtient donc deux catégories sur la catégorie $\mathcal{S}_{tdf}$ das sites annelés et des morphismes de site annelés de Tor-dimension finie, catégories dont les fibres sont les catégories $D^+(X)^\circ$. Le "théorème trivial de dualité" de VERDIER ([CD] p. 48) exprime que ces deux catégories sont canoniquement isomorphes ; elles sont donc fibrées et cofibrées ; les foncteurs "image directe" sont les foncteurs Rf_*(sic), et les foncteurs "image réciproque" sont les foncteurs Lf*(sic).

2.1.2. Le langage des catégories fibrées permet de résoudre aisément la perplexité soulevée par ARTIN en XII 4 : il suffit d'appliquer la proposition suivante à la catégorie fibrée et cofibrée sur celle des

sites de fibres **les opposées** des catégories de faisceaux sur les sites correspondants (cf. 0.2).

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie sur $\mathfrak{B}$, $f: y \longrightarrow x$ une flèche de $\mathfrak{B}$, et $F \in Ob(\mathcal{E}_x)$. Rappelons qu'un couple (G,φ) ($G \in Ob\ \mathcal{E}_y$, $\varphi \in Hom_f(G,F)$) est une <u>image réciproque au sens strict</u> de F par f si, quels que soient $g: Z \longrightarrow y$ et $H \in Ob\ \mathcal{E}_Z$, on a

$$Hom_g(H,G) \xrightarrow[\sim]{\varphi} Hom_{fg}(H,F) \quad .$$

De même pour les images directes. Si $\mathcal{E}$ est fibrée ou cofibrée sur $\mathfrak{B}$, cette notion se réduit à celle d'image réciproque.

<u>Proposition</u> 2.1.3. <u>Soient</u> $\mathcal{E}$ <u>une catégorie sur</u> $\mathfrak{B}$, $y \in Ob\ \mathfrak{B}$, $F \in Ob\ \mathcal{E}_y$ <u>et un diagramme commutatif dans</u> $\mathfrak{B}$:

(2.1.3.1)
$$\begin{array}{ccc} y' & \xrightarrow{g'} & y \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ x' & \longrightarrow & x \end{array} \quad .$$

<u>On suppose que les images directes et réciproques</u> f_*F, g^*f_*F, g'^*F <u>et</u> $f'_*\,g'^*F$ <u>existent au sens strict. Il existe alors une et une seule flèche</u> $\varphi \in F\ell\ \mathcal{E}_{x'}$, <u>dite</u> **flèche de changement de base**, <u>rendant commutatif le diagramme</u>

(2.1.3.2)
$$\begin{array}{ccc} g'^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'_*g'^*F & & f_*F \\ & \searrow^{\varphi} \quad \nearrow & \\ & g^*f_*F & \end{array} \quad .$$

Si de plus les images directes $g_*'g'^*F$ et $g_*'f_*'g'^*F$ existent au sens strict, alors la flèche φ coïncide avec celle définie en XII 4 . Si $f'^*f_*'g'^*F$ et $f'^*f_*'F$ existent au sens strict, elle coïncide encore avec la 2e flèche définie en XII 4 .

En particulier les deux flèches de changement de base XII 4 coïncident.

Par hypothèse, les flèches du diagramme (2.1.3.2) induisent des bijections

$\mathrm{Hom}_y(F,F) = \mathrm{Hom}_{g'}(g'^*F,F) = \mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F,f_*F)$ et

$\mathrm{Hom}_{x'}(f_*'g'^*F,g^*f_*F) = \mathrm{Hom}_{f'}(g'^*F,g^*f_*F) = \mathrm{Hom}_{gf'}(g'^*F,f_*F)$.

Puisque $fg' = gf'$, $\mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F,f_*F)$ est identique à $\mathrm{Hom}_{gf'}(g'^*F,f_*F)$ et les flèches du diagramme (2.1.2.2) induisent des bijections

$\mathrm{Hom}_y(F,F) = \mathrm{Hom}_{fg'}(g'^*F,f_*F) = \mathrm{Hom}_{x'}(f_*'g'^*F,g^*f_*F)$,

et l'image de 1_F est la seule flèche de $\mathcal{C}_{x'}$ rendant (2.1.3.2) commutatif.

Par définition, dans XII 4, la flèche de changement de base Ψ était celle rendant commutatif le diagramme suivant

(2.1.3.3)
$$\begin{array}{ccccccc}
f_*'g'^*F & \longleftarrow & g'^*F & = & g'^*F & \longrightarrow & F & = & F \\
\downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle u_4} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} \\
g^*f_*F & \longleftarrow & f'^*g^*f_*F & = & g'f^*f_*F & \longrightarrow & f^*f_*F & \longrightarrow & f_*F
\end{array} .$$

Les flèches horizontales et u_1 sont les flèches canoniques ; u_2 est donc la flèche d'adjonction, $u_3 = g^{1*}(u_2)$, u_4 se déduit de l'isomorphisme entre f'^*g^* et g'^*f^*, et la flèche Ψ se déduit de u_4 par adjonction.

L'application composée de source g'^*F et de but f_*F est celle qui apparaît dans (2.1.3.2) et il en est donc de même dans le diagramme commutatif suivant, dont le carré de gauche est extrait de (2.1.2.3)

$$\begin{array}{ccccc} g'^*F & \xrightarrow{u_4} & f'^*g^*f_*F & \longrightarrow & f_*F \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ f'_*g'^*F & \xrightarrow{\psi} & g^*f_*F & \longrightarrow & f_*F \end{array} .$$

Cela signifie que ψ vérifie la propriété caractéristique de φ .

La définition de φ est autoduale, ce qui dispense de démontrer la seconde partie de 2.1.3.

2.2. Catégories fibrées en catégories triangulées.

Définition 2.2.1. On appelle "catégorie additive sur une catégorie $\mathcal{B}$" une catégorie $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ dont les ensembles de flèches $\mathrm{Hom}_f(X,Y)$ (pour $f \in Fl(\mathcal{B})$, X (resp.Y) au-dessus de la source (resp. du but) de f) ont été munis de lois de groupes abéliens, de sorte que :

(i) Quels que soient $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ dans $\mathcal{B}$ et X, Y, Z dans $\mathcal{A}$ au-dessus de s, y et z respectivement, la loi de composition :

$\mathrm{Hom}_g(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_f(X,Y) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{gf}(X,Z)$ est biadditive.

(ii) Les catégories fibres sont additives.

On n'aura pas à utiliser ici que ces lois de groupe abélien, quand elles veulent bien exister, sont uniquement déterminées par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et ρ . Un $\mathcal{B}$ -foncteur $F : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ entre catégories additives sur $\mathcal{B}$ est dit additif s'il induit des homomorphismes

$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_1,f}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_2,f}(X,Y)$.

Définition 2.2.2. On appelle "catégorie abélienne sur une catégorie $\mathcal{B}$ " une catégorie $\mathcal{A}$ additive sur $\mathcal{B}$, dont les fibres sont abéliennes, et telle que pour toute flèche f: x $\longrightarrow$ y de $\mathcal{B}$ le bifoncteur

$$\mathrm{Hom}_f(X,Y) : \mathcal{A}_x^{\circ} \times \mathcal{A}_y \longrightarrow (\mathrm{Ab})$$

soit exact à gauche en X et Y .

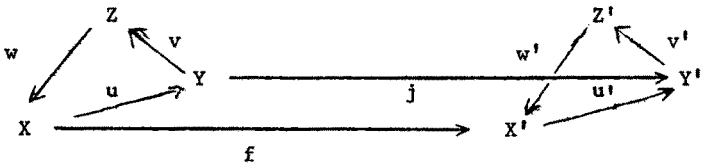
On n'aura pas à utiliser ici que si $\mathcal{A}$ est une catégorie fibrée et cofibrée sur $\mathcal{B}$ (SGA 1 VI 6) elle est abélienne sur $\mathcal{B}$ dès que ses fibres sont des catégories abéliennes.

Définition 2.2.3. On appelle "catégorie triangulée sur une catégorie $\mathcal{B}$ " une catégorie $\mathcal{A}$ additive sur $\mathcal{B}$, munie d'un foncteur T : $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ et dont les fibres $\mathcal{A}_x$ pour x $\in$ Ob $\mathcal{B}$ sont munies d'ensembles Δ_x de triangles, ce de sorte que ;

(i) T est un $\mathcal{B}$ -automorphisme additif de $\mathcal{A}$

(ii) chaque catégorie fibre $\mathcal{A}_x$, munie du foncteur T_x induit par T et de l'ensemble Δ_x, est une catégorie triangulée (CD 1.1) ,

(iii) si les triangles (X,Y,Z,u,v,w) et (X',Y',Z',u',v',w') appartiennent à Δ_x et $\Delta_{x'}$, respectivement, tout diagramme



où u'f = gu peut se prolonger en un morphisme de triangles (f,g,h) : (X,Y,Z) $\longrightarrow$ (X',Y',Z').

T sera appelé le foncteur de translation, on écrira souvent A[1] plutôt que T(A), A[n] désignant alors $T^n(A)$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Les triangles appartenant aux ensembles Δ_X seront dits distingués ou exacts.

Proposition 2.2.4. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée sur $\mathcal{B}$, x un objet de $\mathcal{B}$, (X,Y,Z,u,v,w) un triangle distingué de $\mathcal{A}_x$. Quels que soient f: y $\longrightarrow$ x et l'objet A $\in$ Ob $\mathcal{A}_y$, la suite infinie suivante est exacte

$$\ldots \to \mathrm{Hom}_f(A,X) \to \mathrm{Hom}_f(A,Y) \to \mathrm{Hom}_f(A,Z) \to \mathrm{Hom}_f(A,X[1]) \to \mathrm{Hom}_f(A,Y[1]) \to \ldots$$

Enoncé analogue pour f : x $\longrightarrow$ y et A $\in$ Ob $\mathcal{A}_y$.

On laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition en paraphrasant VERDIER [CD] p. 4. On lui laisse aussi le soin de donner un sens à la proposition suivante et de la vérifier :

Proposition 2.2.5. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathcal{B}$. Pour tout foncteur $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ de but $\mathcal{B}$, la catégorie $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ est additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathcal{B}$.

Exemple 2.2.6. La catégorie des faisceaux de modules sur des sites annelés variables est abélienne sur la catégorie des sites annelés.

Exemple 2.2.7. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive sur $\mathcal{B}$. La catégorie $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ des complexes de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ a pour objets les complexes des catégories fibres. Une flèche f de (X^n,d) dans (Y^n,d) est un système

de flèches $f^n : X^n \longrightarrow Y^n$ tel que $fd^n = f^{n+1} d$. On pose $p(f) = p(f^n)$ (cette flèche ne dépend pas de n car les p(d) sont des identités). $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ est une catégorie additive sur $\mathcal{B}$. On définit un foncteur "de translation" en posant

$$(K[1])^n = K^{n+1} \quad , \quad (d[1])_n = -d_{n+1} \quad .$$

Exemple 2.2.8. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive sur $\mathcal{B}$. La catégorie $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ des complexes de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$ à homotopie près a les mêmes objets que $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$. On l'obtient en décrétant nulles, dans $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, les flèches homotopes à zéro ; en d'autres termes, pour $f : x \longrightarrow y$ dans $\mathcal{B}$, $X^\cdot \in \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{A}/\mathcal{B})_x$ et $Y^\cdot \in \mathrm{Ob}\, C(\mathcal{A}/\mathcal{B})_y$, on pose

$$\mathrm{Hom}_f(X^\cdot, Y^\cdot) = H^0 \mathrm{Hom}^\cdot_f(X^\cdot, Y^\cdot)$$

Le foncteur de translation passe au quotient.

Si $F : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur de but $\mathcal{B}$, et si $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$, on laisse au lecteur le soin d'identifier $C(\mathcal{A}'/\mathcal{B}')$ à $C(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ et $K(\mathcal{A}'/\mathcal{B}')$ à $K(\mathcal{A}/\mathcal{B}) \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$. En particulier, les fibres de la catégorie $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ sont les catégories $K(\mathcal{A}_x)$ et, en tant que telles, sont triangulées.

Proposition 2.2.9. (i) Pour les structures additionnelles définies en 2.2.8, la catégorie $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ est triangulée sur $\mathcal{B}$.

(ii) La formation de la catégorie additive (resp. triangulée) $C(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ (resp. $K(\mathcal{A}/\mathcal{B})$) est compatible à tout changement de catégorie base $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$.

Les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2.3 se vérifient fibre par fibre. (iii) se vérifie en paraphrasant VERDIER [CD] p.4 .

Remarque 2.2.10. Ce qui précède s'applique aussi aux catégorie $K^+(\mathcal{A}/\mathcal{B})$, $K^-(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ et $K^b(\mathcal{A}/\mathcal{B})$ obtenues en se limitant respectivement aux complexes bornés inférieurement, supérieurement, ou bornés.

Remarque 2.2.11. Prenant pour $\mathcal{B}$ la catégorie finale, on retrouve les catégories usuelles de complexes .

2.2.12. Soit F un pseudo-foncteur d'une catégorie $\mathcal{B}^\circ$ dans (Cat). On sait (SGA 1 VI) que F définit une catégorie fibrée sur $\mathcal{B}$, de fibres les catégories F(x). Quels que soient f: x $\longrightarrow$ y dans $\mathcal{B}$ et X $\in$ Ob F(n), Y $\in$ Ob F(y), on a par définition

$$\text{(2.2.12.1)} \qquad \mathrm{Hom}_f(X,Y) = \mathrm{Hom}_{F(x)}(X,F(f)(Y)) \quad .$$

On sait (ibidem) que la construction précédente définit une équivalence entre la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathcal{B}^\circ$ dans (Cat) et la 2-catégorie des catégories fibrées sur $\mathcal{B}$.

Partons d'un pseudo-foncteur de $\mathcal{B}^\circ$ dans la 2-catégorie ayant pour objets les catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées) et pour 1-flèches les foncteurs additifs (resp. exacts à gauche, resp. triangulés). On vérifie aussitôt que la catégorie définie par (2.1.12.1) est additive (resp. abélienne, resp. triangulée). Réciproquement :

Proposition 2.2.13. La construction précédente établit une équivalence entre

(a) La 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathcal{B}^{\circ}$ dans la 2-catégorie ayant pour objets les catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées), et pour 1-flèches les foncteurs additifs (resp. exacts à gauche, resp. triangulés).

(b) La 2-catégorie des catégories additives (resp. abéliennes, resp. triangulées) sur $\mathcal{B}$, qui sont fibrées sur $\mathcal{B}$.

La théorie développée en SGA 1 VI permet de ne vérifier que le point suivant :

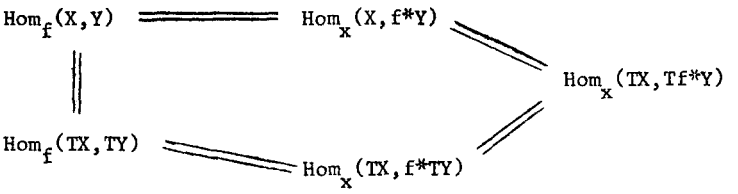
2.2.13.1. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive (resp. abélienne, resp. triangulée) sur $\mathcal{B}$, $f : x \longrightarrow y$ une flèche de $\mathcal{B}$ et supposons qu'un foncteur image réciproque $f^* : \mathcal{A}_y \longrightarrow \mathcal{A}_n$ existe ; f^* est alors additif (resp. exact à gauche, resp. triangulé).

Le foncteur f^* donne lieu à des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_f(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_x(X, f^*(Y)) \quad .$$

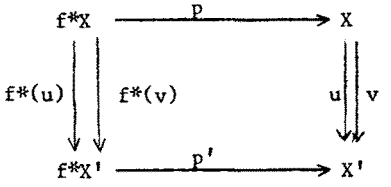
Il faut prouver dans le cas triangulée, que f^* est triangulé pour l'isomorphisme $Tf^* = f^* T$ (T foncteur de translation) qui rend commutatif les diagrammes suivants

(2.2.13.2)



Cas additif : Soit un diagramme

(2.2.13.3)

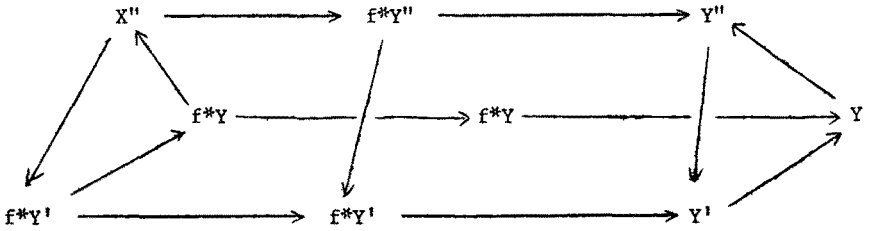


.

On a $p'f^*(u+v) = (u+v)\,p = up+vp = p'f^*(u)+p'f^*(v) = p'(f^*(u) + f^*(v))$ et donc $f^*(u+v) = f^*(u) + f^*(v)$.

Cas abélien : par définition (2.2), le foncteur $\mathrm{Hom}(X, f^*Y) = \mathrm{Hom}_f(X,Y)$ est exact à gauche en Y, quel que soit X, donc f^* est exact à gauche.

Cas triangulé : soit (Y',Y,Y") un triangle distingué dans $\mathcal{A}_Y$ et soit (f^*Y', f^*Y). En vertu de 2.2.3 , le morphisme canonique entre les bases de ces triangles peut se prolonger en un morphisme de triangles, donnant lieu au diagramme suivant



.

Prouvons que s est un isomorphisme, ce qui achèvera la démonstration. Quel que soit X dans Ob $\mathcal{A}_X$, on dispose du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Hom}_{X_\bullet}(X,f^*Y') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,X'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y'[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y[1]) \\
\| & & \| & & \downarrow & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}_X(X,f^*Y') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y'[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(X,f^*Y[1]) \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
\mathrm{Hom}_f(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y'') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y'[1]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_f(X,Y[1])
\end{array} .$$

Les premières et dernières lignes sont exactes en vertu de 2.2.4. En vertu du lemme des cinq, l'application induite par s de Hom(X,X") dans Hom(X,f*Y") est toujours bijective et s est donc un isomorphisme.

On a évidemment des résultats duaux pour les catégories cofibrées.

2.3. Formule triviale de dualité.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie sur une catégorie base $\mathcal{B}$, et soit S un ensemble de flèches de $\mathcal{A}$, chacune se projetant sur une identité de $\mathcal{B}$. La catégorie $\mathcal{A}(S^{-1})$ déduite de $\mathcal{A}$ par calcul de fractions est une catégorie sur $\mathcal{B}$ (vue la propriété universelle).

Soit $\mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur ; on désigne par $\mathcal{A}'$ le produit fibré $\mathcal{A} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$ et par S' l'image réciproque de S dans $\mathcal{A}'$. Le foncteur composé $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}(S^{-1})$ rend inversible les flèches de S', donc se factorise par $\mathcal{A}'(S'^{-1})$. On trouve ainsi un $\mathcal{B}'$-foncteur canonique

$$\mathcal{A}'(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} \mathcal{A}(S^{-1}) \quad . \tag{2.3.1}$$

Lemme 2.3.2. Si $\mathcal{B}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{B}$, et si chaque fois qu'une flèche composée h = f∘g de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}'$, f et g appartiennent à $\mathcal{B}'$, alors le foncteur (2.3.1) est un isomorphisme.

Notons que (2.3.1) induit toujours une bijection sur les objets, et que, dans le cas présent, $\mathcal{B}' \times_{\mathcal{B}} \mathcal{A}(S^{-1})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{A}(S^{-1})$.

Rappelons la construction "explicite" de $\mathcal{A}(S^{-1})$ [1, Chap. I]. Etant donné deux objets X et Y de $\mathcal{A}$, on considère les "composés formels" $f_1 \ldots f_n$ où chaque f_i est soit une flèche de $\mathcal{A}$, soit l'inverse d'une flèche de S. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}(S^{-1})}(X,Y)$ sera le quotient de l'ensemble de ces "composés formels" par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$f_1 \ldots uv \ldots f_n \equiv f_1 \ldots (u \circ v) \ldots f_n \qquad \text{pour } u,v \text{ dans } Fl(\mathcal{A})$$

$$f_1 \ldots ss^{-1} \ldots f_n \equiv f_1 \ldots f_n \qquad \text{pour } s \in S$$

$$f_1 \ldots s^{-1}s \ldots f_n \equiv f_1 \ldots f_n \qquad \text{pour } s \in S \quad .$$

Si on applique ces constructions à $\mathcal{A}$ et à la sous-catégorie $\mathcal{A}'$, on vérifie que $\mathcal{A}'(S^{-1})$ est identique à la sous-catégorie de $\mathcal{A}(S^{-1})$ image réciproque de $\mathcal{B}'$, du fait que si un "composé formel" $f_1 \ldots f_n$ a pour composé dans $\mathcal{B}$ une flèche de $\mathcal{B}'$, l'image de chaque f_i sera aussi une flèche de $\mathcal{B}'$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ soit une catégorie triangulée sur $\mathcal{B}$, et que les ensembles $S_x = S \cap Fl(\mathcal{A}_x)$ pour $x \in Ob(\mathcal{B})$ soient des systèmes multiplicatifs saturés (CD Ch.1 §2. 1).

Définition 2.3.3. Sous les hypothèses précédentes la catégorie $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ sera dite presque dérivable (resp. dérivable, resp. codérivable) relativement à S si, quel que soit le foncteur $F : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$, le foncteur (2.3.1) est un isomorphisme (resp. et si $\mathcal{A}(S^{-1})$ est fibrée, resp. cofibrée sur $\mathcal{B}$).

On désignera par I la catégorie du diagramme suivant

(2.3.4) $$I : \quad \underset{o}{\times} \xrightarrow{F} \underset{1}{\times} \quad .$$

D'après 2.2.13, il revient au même de se donner une catégorie triangulée $\mathcal{A}$ sur I, fibrée (resp. cofibrée) sur $\mathcal{A}$, ou de se donner ses fibres $\mathcal{A}_o$ et $\mathcal{A}_1$ et le foncteur triangulé image réciproque $F^* : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_o$ (resp. et le foncteur triangulé image directe $F_* : \mathcal{A}_o \to \mathcal{A}_1$). Si $A_o \in Ob\, \mathcal{A}_o$ et $A_1 \in Ob\, \mathcal{A}_1$, on a (2.2.12.1)

$$Hom_F(A_o, A_1) = Hom(A_o, F^*A_1)$$

(resp. $Hom_F(A_o, A_1) = Hom(F_*A_o, A_1)$).

Proposition 2.3.5. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée sur I et S comme en (2.3.3).

(i) $\mathcal{A}$ est presque dérivable relativement à S, et $\mathcal{A}(S^{-1})$ est triangulée sur I.

(ii) Si $\mathcal{A}$ est fibrée (resp. cofibrée), le foncteur F^* (resp. F_*) est dérivable à droite (resp. à gauche) relativement à S_o et S_1 (1.2.1) si et seulement si $\mathcal{A}$ est dérivable (resp. codérivable) sur I.

En vertu de 2.3.2, les catégories fibres de $\mathcal{A}(S^{-1})$ sont les catégories $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S_1^{-1})$, où $S_i = S \cap Fl(\mathcal{A}_i)$ $(i = 0,1)$. Avec les notations du § 1 n°2, les foncteurs $A_o \to A_o^-$ et $A_1 \to A_1^+$ identifient $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S_1^{-1})$ à des catégories de pro et ind-objets de $\mathcal{A}_o$ et $\mathcal{A}_1$. Cela permet de définir une catégorie sur I, de fibres $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S^{-1})$, en posant, pour $A_o \in \mathcal{A}_o$ et $A_1 \in \mathcal{A}_1$:

$$\mathrm{Hom}_F(A_o,A_1) = \mathrm{Hom}_F(A_o^-,A_1^+) = \varinjlim_{A_o' \xrightarrow{s} A_p} \varinjlim_{A_1 \xrightarrow{t} A_1'} \mathrm{Hom}(A_o',A_1') \quad ,$$

où s et t parcourent les éléments de S_o et S_1 de but (de source) $A_o(A_1)$. La catégorie $\mathcal{A}$ s'envoie dans cette catégorie, et on vérifie aussitôt qu'elle vérifie la propriété universelle de $\mathcal{A}(S^{-1})$, sur I et après tout changement de base.

Pour vérifier (i), il suffit de prouver que cette catégorie, soit $\mathcal{A}(S^{-1})$, est triangulée, et il suffit de vérifier la condition 2.2.3 (iii). Soient donc (X_o,Y_o,Z_o) et (X_1,Y_1,Z_1) des triangles distingués de $\mathcal{A}_o$ et $\mathcal{A}_1$, donnant lieu aux triangles distingués (X_o^-,Y_o^-,Z_o^-) et (X_1^+,Y_1^+,Z_1^+) de $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ et $\mathcal{A}_1(S_1^{-1})$.

(2.3.5.1)

$$\begin{array}{ccc} X_o^- & \xrightarrow{u} & X_1^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_o^- & \xrightarrow{v} & Y_1^+ \end{array} \quad .$$

En vertu du lemme 1.2.2.1, les triangles (X_o^-,Y_o^-,Z_o^-) et (X_1^+,Y_1^+,Z_1^+) sont limites de triangles distingués ; il existe donc des morphismes de triangles distingués

$$(X_o^-,\ Y_o^-,\ Z_o^-) \longrightarrow (X_o',\ Y_o',\ Z_o')$$

(2.3.5.2)

$$(X_1',\ Y_1',\ Z_1') \longrightarrow (X_1^+,\ Y_1^+,\ Z_1^+) \quad ,$$

et un diagramme

$$\begin{array}{ccc} X'_o & \xrightarrow{u'} & X'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y'_o & \xrightarrow{v'} & Y'_1 \end{array} \quad ,$$

compatibles avec (2.3.5.1). La catégorie $\mathcal{A}$ étant triangulée sur I, ce diagramme peut se prolonger en un morphisme de triangles

$$(X'_o, Y'_o, Z'_o) \longrightarrow (X'_1, Y'_1, Z'_1) \quad .$$

Composant ce dernier avec les morphismes (2.3.5.2), on voit que le diagramme (2.3.5.1) peut se prolonger en un morphisme de triangles, ce qui établit 2.2.3 (iii).

Vérifions (ii), supposant par exemple $\mathcal{A}$ fibrée sur I. Si $A_1 \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{A}_1(S_1^{-1}))$, une image réciproque de A_1 dans $\mathcal{A}(S^{-1})$ est un objet B de $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$ tel que, dans $\mathcal{A}_o(S_o^{-1})$, on ait

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_o(S_o^{-1})}(A_o, B) = \mathrm{Hom}_F(A_o^-, A_1^+) = \mathrm{Hom}(A_o^-, F^*(A_1^+)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_o(S_o^{-1})}(A_o, F^*(A_1^+)).$$

Il existe un tel objet B si et seulement si le Ind-objet $F^*(A_1^+)$ de $\mathcal{A}_o(S^{-1})$ est essentiellement constant (i.e. représentable), et B représente alors cet ind-objet, qui n'est autre que $RF(A_1)$ (1.2.1), d'où l'assertion.

Corollaire 2.3.6. Avec les notations de 2.3.3 , si $\mathcal{A}$ est presque dérivable sur $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{A}(S^{-1})$ est une catégorie triangulée sur $\mathcal{B}$.

Tout d'abord, la catégorie fibre $\mathcal{A}(S^{-1})_x$ peut être identifiée à $\mathcal{A}_x(S_x^{-1})$: on applique l'hypothèse au changement de base $\{x\} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Cette catégorie est triangulée, munie d'un ensemble Δ_x de triangles, ce qui donne un sens à l'énoncé précédent. Pour vérifier la condition 2.2.3 (iii), il suffit de le faire après tout changement de base $I \longrightarrow \mathcal{B}$, et l'assertion résulte de 2.3.5 (i).

Il résulte aussitôt de la démonstration de 2.3.5 (ii) que :

Théorème 2.3.7. (formule triviale de dualité).

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée fibrée et cofibrée sur I, et désignons par F_* et F^* les foncteurs image directe et image réciproque. Soit $S = S_o \cup S_1$ un système multiplicatif comme en 2.3.3. On suppose que LF_* est défini en $A_o \in Ob\, \mathcal{A}\ (S_o^{-1})$ et que Rf^* est défini en $A_1 \in Ob\ \mathcal{A}_1(S_1^{-1})$. On a alors

$$Hom_{\mathcal{A}_o(S_o^{-1})}\ (A_o, RF^*A_1) = Hom_{\mathcal{A}_{(S^{-1})}}(A_o, A_1) = Hom_{\mathcal{A}_1(S_1^{-1})}(LF_*\ A_o, A_1)\ .$$

La position des symboles R, L, * et $_*$ dans 2.3.7 n'est aberrante qu'en apparence ; en effet, dans la catégorie fibrée et cofibrée 0.2 des faisceaux sur des sites variables, les catégories fibres sont les catégories opposées des catégories usuelles de faisceaux.

2.4. Catégories fibrées en catégories dérivées.

2.4.0. On désigne dans ce n° par $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée cofibrée sur $\mathcal{B}$ et par S un système multiplicatif de morphismes de $\mathcal{A}$, tous au-dessus d'une identité, et tels que $S_x = S \cap Fl(\mathcal{A}_x)$ soit un système multiplicatif saturé de $\mathcal{A}_x$ [CD 1.2.1] pour tout $x \in Ob(\mathcal{B})$.

On recherche un critère pour que $\mathcal{A}_0$ soit codérivable relativement à S (2.3.3), ce qui implique que $\mathcal{A}_0(S^{-1})$ soit triangulée sur $\mathcal{B}_0$ lorsqu'on la munit de l'ensemble des triangles isomorphes à l'image d'un triangle distingué de $\mathcal{A}$ (2.3.5).

Proposition 2.4.1. Soient $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ et S comme ci-dessus. Pour que $\mathcal{A}_0$ soit codérivable relativement à S, il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

(*) $\forall\, x \in Ob\mathcal{B}, \forall\, A \in Ob(\mathcal{A}_{0x}), \exists\, s : A' \to A$ dans S $\forall g, f : x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} Z$, f_*A' est déployé à gauche pour le foncteur g_* .

Désignons par $\mathcal{A}^1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_0$ formée des objets dont toutes les images directes sont déployés relativement à tous les foncteurs image directes . Alors 1.2.2 montre que $\mathcal{A}_0{}^1$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathcal{A}_0$, évidemment cofibrée. On pose $S^1 = S \cap Fl(\mathcal{A}^1)$.

Lemme 2.4.1.1. Supposons que S soit stable par images directes. Alors, $\mathcal{A}_0/\mathcal{B}_0$ est codérivable et $\mathcal{A}_0(S^{-1})$ peut se calculer par un calcul de fractions à droite.

Vérifions la condition c) de [1, I 2.2], si possible moins triviale que les autres. On se donne f et s ($s \in S$) et on doit trouver

(2.4.1.2)
$$\begin{array}{ccc} A' & \dashrightarrow & B' \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle t} \\ A & \longrightarrow & B \end{array} ,$$

un diagramme commutatif (2.4.1.2) avec t∈S . Soit F l'image de f dans $\mathcal{B}$. Par hypothèse $F_*(s)$ est encore dans S, de sorte que, d'après VERDIER, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_*(A') & \longrightarrow & B' \\ \uparrow{\scriptstyle s} & & \uparrow{\scriptstyle t} \\ F_*(A) & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

donc aussi un diagramme (2.4.1.2).

Du fait que $\mathcal{A}(S^{-1})$ se calcule par calcul de fractions à droite, il est trivial que sa formation commute au changement de base $c : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$.

Ce lemme s'applique en particulier à $\mathcal{A}^1$ et S^1 ; le lemme suivant implique donc 2.4.1 :

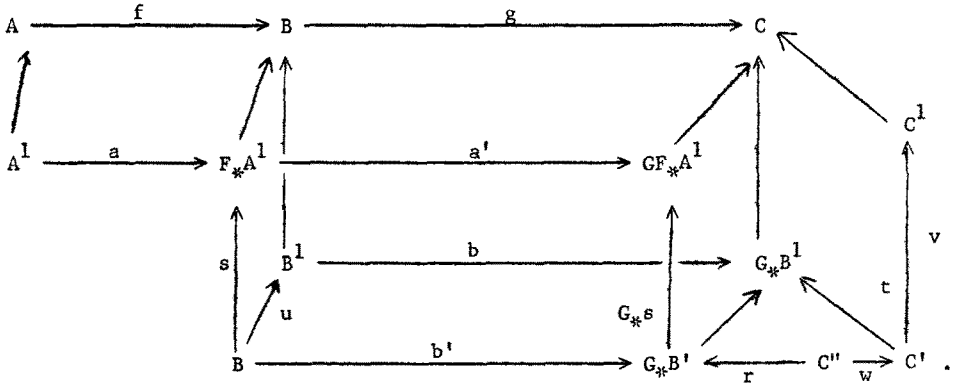
Lemme 2.4.1.3. Sur $\mathcal{B}$ et après tout changement de base $c : \mathcal{B}' \longrightarrow \mathcal{B}$, le foncteur canonique $\Phi : \mathcal{A}_1(S^{1-1}) \longrightarrow \mathcal{A}(S^{-1})$ est une équivalence de catégorie.

Construisons un foncteur quasi-inverse au foncteur Φ . Quel que soit $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$, choisissons $s_A \in S$ de but A et de source $A^1 \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}^1$ avec $s_A = \mathrm{Id}_A$ pour $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}^1$. Soit f une flèche de $\mathcal{A}$, de but A, de source B et d'image F dans $\mathcal{B}$. Puisque $s_B \in S$ et que $F_*A^1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^1$, on peut trouver B^1, v et $s \in S^1$ rendant commutatif le diagramme suivant

(2.4.1.4)
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow[s_B]{} & B_1 \\ \uparrow{\scriptstyle s_A} & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u} \\ A_1 & \xrightarrow{a} & F_*A_1 & \xleftarrow{s} & B' \end{array} \quad .$$

La flèche $f^1 = us^{-1}a$ de $\mathcal{A}^1(S^{1-1})$ ne dépend alors que de f .

Soient f et g deux flèches composables, d'images F et G dans $\mathcal{B}$. Pour prouver que $(g\circ f)^1 = g^1\circ f^1$, contemplons le diagramme suivant, où figurent des diagrammes (2.4.1.4) pour f et g :



Puisque $t \in S$, il existe C'', $r \in S^1$ et w qui le rende commutatif, Par définition, $g^1\circ f^1 = vt^{-1}\, b\, u\, s^{-1}a$ et $(g\circ f)^1 = vw\,(G_*(s)r)^{-1}a'a$, et on conclut par la commutativité du diagramme.

On a donc défini un foncteur de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}^1(S^{1-1})$; il se factorise en $\psi : \mathcal{A}(S^{-1}) \longrightarrow \mathcal{A}^1(S^{1-1})$, la propriété universelle de $\mathcal{A}(S^{-1})$. Le composé $\varphi\,\psi$ est isomorphe à l'identité car son composé avec le foncteur $J : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}(S^{-1})$ est isomorphe à J. On vérifie de même que $\psi\,\varphi$ est isomorphe à l'identité.

Corollaire 2.4.2. Avec les notations de 2.4.1, $\mathcal{A}$ est codérivable relativement à S dès que, pour tout ensemble fini B de flèches de $\mathcal{B}$, la condition (*) est vérifiée lorsqu'on se limite à ne considérer que les images directes par les flèches de B.

Quelle que soit la catégorie $\mathfrak{B}'$ d'ensemble de flèches fini, la prop. 2.4.1 sera applicable après tout changement de catégorie de base $\mathfrak{B}' \longrightarrow \mathfrak{B}$. On prendra pour $\mathfrak{B}'$ les catégories des diagrammes suivants :

$$* \qquad * \longrightarrow * \qquad * \longrightarrow * \longrightarrow * \qquad * \longrightarrow * \longrightarrow * \longrightarrow *$$

(0) (1) (2) (3) .

Considérons les catégories $\mathcal{A}_x(S_x^{-1})$ ($x \in Ob\,\mathfrak{B}$). Etant donné $f \in F\ell(\mathfrak{B})$ et A_1, A_2 dans ces catégories au-dessus de la source et du but de f, on définit $Hom_f(A_1, A_2)$ comme étant l'ensemble analogue défini après le changement de catégorie base de type (1) défini par f. On définit la composition des morphismes à l'aide de changements de catégorie base de type (3). On construit ainsi une catégorie $\mathcal{A}(S^{-1})^*$ sur $\mathfrak{B}$, dont la formation est compatible à tout changement de base ; on vérifie qu'elle est solution du problème universel qui définit $\mathcal{A}(S^{-1})$ en utilisant les changements de base de type (0), (1) et (2).

Le résultat suivant est le dual de 2.4.2.

Proposition 2.4.3. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie triangulée fibrée sur $\mathfrak{B}$ et S comme en 2.4.1. Pour que $\mathcal{A}$ soit dérivable relativement à S, il suffit que pour tout ensemble fini B de flèches de $\mathfrak{B}$, on ait

(*') $\forall\, x \in Ob(\mathfrak{B})$, $\forall\, A \in Ob(\mathcal{A}_x)$, $\exists\, s : A \longrightarrow A'$ dans S, $\forall g, f : Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ dans B, f^*A' est déployé à droite pour le foncteur g^*.

3. Recollement de catégories fibrées ou cofibrées.

3.1. Introduction.

Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme séparé de type fini d'un schéma Y dans un schéma X, ou une application continue d'un espace localement compact dans un espace localement compact. On sait alors définir un foncteur "image directe à support propre", noté $f_!$, de la catégorie des faisceaux abéliens sur Y dans la catégorie des faisceaux abéliens sur X (cf. 5.3 dans le cas des schémas, et VERDIER [3] pour le cas des espaces localement compacts séparés). Lorsque Y et X sont des schémas de type fini sur $\mathbf{C}$, ces deux définitions sont compatibles en un sens évident. Malheureusement dans le cas des schémas, contrairement à ce qui se passe dans le cas des espaces localement compacts, les foncteurs dérivés du foncteur $f_!$ sont pathologique ; on peut toutefois définir un foncteur "image directe à support propre" raisonnable, directement de la catégorie $D^+(Y)$ dans $D^+(X)$. Pour le définir, on factorise le morphisme f en une immersion ouverte et un morphisme propre : $f = \bar{f}\, j$. Le foncteur $Rf_!$ cherché se définit alors comme composé du "prolongement par 0" $j_!$ et du foncteur $R\bar{f}_*$, dérivé du foncteur image directe par $\bar{f}$.

Ces foncteurs $\mathbf{Rf_!}$, "image directe à support propre" ne sont utilisables que si on vérifie pour eux un "formalisme de variance" incluant, pour un composé f=gh, une formule

$$Rf_! = Rg_!\, Rh_!$$

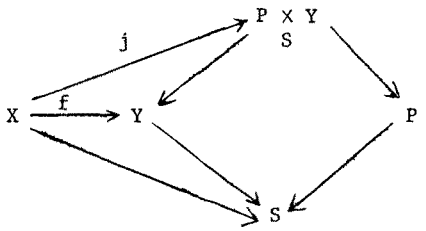
qui s'exprime le mieux en terme de catégories cofibrées. On dispose d'un tel formalisme séparément pour les "prolongements par zéro" et pour les

images directes par un morphisme propre, et le problème est de recoller ces formalismes. Pour éviter d'être embouteillés plus tard par des calculs idiots, on se propose dans ce § de dresser la liste des vérifications élémentaires requises pour mener à bien un tel recollement. On le fera dans un cadre légèrement plus abstrait qu'il n'est indispensable, espérant que le résultat pourra resservir.

La construction esquissée plus haut du foncteur $Rf_!$ exige que le morphisme f puisse se factoriser en une immersion ouverte et un morphisme propre. Sur le modèle de HARTSHORNE [RD III 8 p.189], on introduit au n° 2 la notion adéquate de morphisme compactifiable.

3.2. Morphismes compactifiables.

Définition 3.2.1. Un morphisme f d'un S-schéma X dans un S-schéma Y quasi-compact, quasi-séparé, est dit S-compactifiable s'il existe un S-schéma P propre sur S et une factorisation de f en un morphisme quasi-fini séparé j de X dans $P \times_S Y$ suivi de la projection de $P \times_S Y$ dans Y



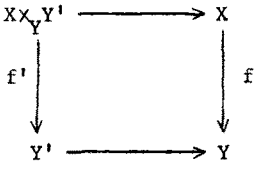
Lorsque S = Y, on parlera simplement de morphisme compactifiable.

Proposition 3.2.2. (i) Un morphisme S-compactifiable est séparé de type fini.

(ii) Si Y est quasi-compact, quasi-séparé, un morphisme quasi-fini séparé de but Y est compactifiable.

(iii) Le composé de deux morphismes S-compactifiables est encore S-compactifiable.

(iv) Soit un diagramme de S-schémas quasi-compacts quasi-séparés

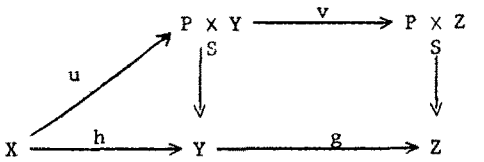


Si f est S-compactifiable, alors f' est S-compactifiable.

(v) Soit g un morphisme S-compactifiable ; pour qu'un morphisme composé g∘f soit S-compactifiable, il faut que h le soit.

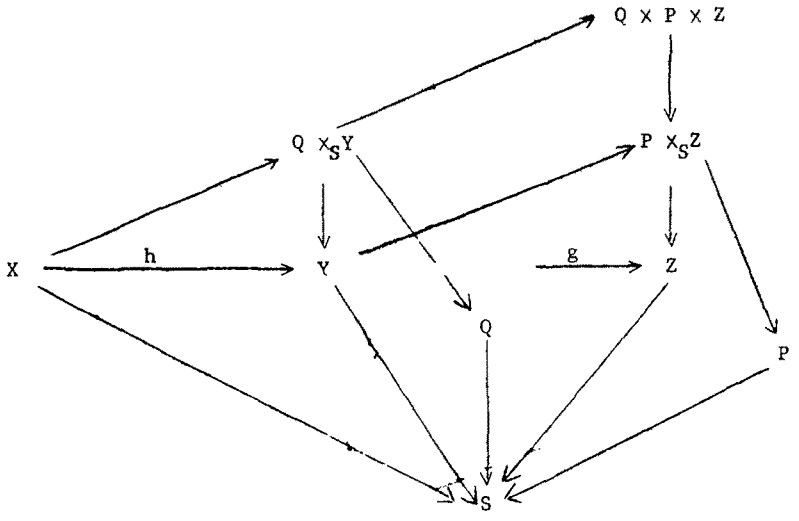
Les assertions (i) (ii) et (iv) sont triviales. Pour prouver (iii) et (v), considérons un composé f = gh, g étant compactifiable.

Supposons gh compactifiable, d'où un diagramme



Le composé vu est quasi-fini ; u est donc quasi-fini et (v) est prouvé.

Si h est compactifiable, on dispose d'un diagramme



et f = fh se factorise par un morphisme quasi-fini séparé dans $(Q \times_S P) \times_S Z$.

Nagata affirme dans [5] que tout morphisme de type fini entre schémas noethériens intègres séparés est compactifiable. Le rédacteur avoue ne pas avoir compris la démonstration.

Fixons maintenant un schéma S et désignons par (S) la sous-catégorie de la catégorie des S-schémas dont les objets sont les S-schémas quasi-compacts, quasi-séparés et dont les flèches sont les S-morphismes S-compactifiables.

Proposition 3.2.3. Dans la catégorie (S):

(i) Les immersions ouvertes (resp. les morphismes propres) définissent une sous-catégorie (S,i) (resp.(S,p)) de (S) ayant mêmes objets que (S).

(ii) Les produits fibrés existent dans (S,p) et sont des produits fibrés dans (S).

(iii) Tout morphisme f est le composé f = pj d'un morphisme propre p et d'une immersion ouverte.

En vertu de 3.2.2 (iii) (iv) et (v), les produits fibrés existent dans (S) et sont des produits fibrés dans la catégorie de tous les schémas. Puisque le produit fibré $X = X_1 \times_Y X_2$ de deux schémas propres sur Y est encore propre sur Y, et qu'un schéma est propre sur X si et seulement si il est propre sur X_1 et X_2, la condition (ii) est vérifiée.

Si f est un morphisme de (S), il admet par hypothèse, dans (S), une factorisation $f = pj'$, où p est propre et j quasi-fini séparé. En vertu de EGA IV 18.12.13, j' admet une factorisation $j' = qj$, où q est fini et j une immersion ouverte ; de plus, en vertu de 3.2.2 (ii), q et j sont dans (S). On a alors $f = (pq)j$, ce qui prouve (iii). L'assertion (i) résulte de 3.2.2 (iii).

3.2.4. Dans la suite de ce §, on suppose donnée une catégorie (S), munie de deux sous-catégories (S,i) et (S,p), telles que

(i) $Ob(S) = Ob(S,i) = Ob(S,p)$;

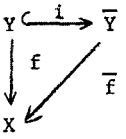
(ii) les produits fibrés existent dans (S,p) et sont des produits fibrés dans (S) ;

(iii) $\forall\ f \in Fl(S),\ \exists\ p \in Fl(S,p),\ \exists\ j \in Fl(S,i),\quad f = pj.$

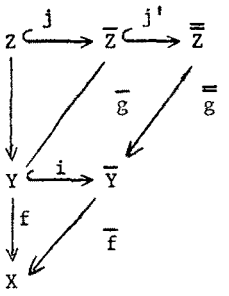
Les flèches de (S,i) (resp. de (S,p)) s'appelleront les immersions ouvertes (resp. les morphismes propres).

Définition 3.2.5. (i) Une compactification d'un morphisme f de (S) (resp. d'un couple (f,g), resp. d'un triple (f,g,h) de morphismes composables) est un diagramme commutatif (3.2.5.1) (resp. (3.2.5.2), resp. (3.2.5.3)) dont les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et dont les flèches obliques sont propres.

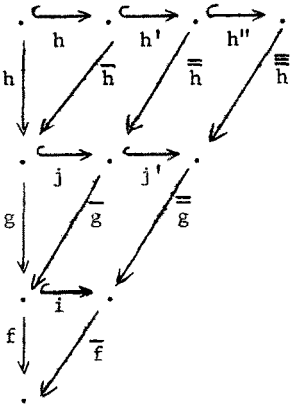
(ii) Un morphisme de compactifications est un morphisme de diagrammes (3.2.5.1) (resp. ...) qui soit l'identité sur la lère ligne verticale et propre en tous les sommets



(3.2.5.1)



(3.2.5.2)



(3.2.5.3)

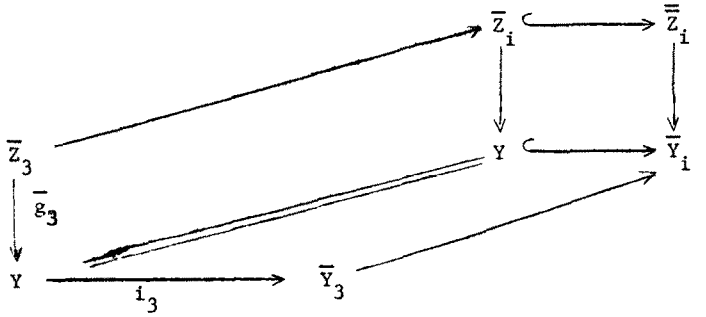
Proposition 3.2.6. (i) Tout morphisme (resp. tout couple (f,g), resp. tout triple (f,g,h), de morphismes composables) admet une compactification.
(ii) La catégorie des compactifications de f est filtrante à gauche.
(iii) Si des diagrammes $(3.2.4.2)_i$ (i=1,2) sont des compactifications de (f,g), il existe une compactification $(3.2.4.2)_3$ de (f,g) et des morphismes de compactifications de $(3.2.4.2)_3$ dans les compactifications $(3.2.4.2)_i$.

(i) Le cas d'un morphisme n'est autre que 3.2.4 (iii). Traitons le cas d'un triple ; avec les notations de (3.2.5.3), il suffit de construire successivement des compactifications de f, g et h, de $i\bar{g}$ et $j\bar{h}$, et enfin de $j'\bar{\bar{h}}$.

(ii) Soient $(3.2.5.1)_1$ et $(3.2.5.1)_2$ deux compactifications de f . La projection ρ de $\overline{Y}_1 \underset{S}{\times} \overline{Y}_2$ dans X est propre et Y s'y envoie par (i_1,i_2), qui (3.2.4 (iii)) peut se compactifier en $(i_1,i_2) = qj$. La compactification $f = (p.q)\ j$ domine $(3.2.4.1)_1$ et $(3.2.4.1)_2$.

Si r et s sont deux morphismes de $(3.2.4.1)_1$ dans $(3.2.4.1)_2$, le noyau K de la double flèche $\overline{Y}_1 \underset{s}{\overset{r}{\rightrightarrows}} \overline{Y}_2$ s'envoie par un morphisme propre dans $\overline{Y}_1$ et i_1 se factorise par K : soit $i_1 = k\ i$. Si $i = pi_3$ est une compactification de i, l'existence de la compactification $f = (\overline{f}_1\ k\ p)i_3$ montre que l'axiome L_2 est satisfait.

(iii) Appliquons l'axiome L_1 des catégories filtrantes aux compactifications de f et g déduites des $(3.2.4.2)_i$ (i = 1,2). On trouve ainsi $\overline{Y}_3$ et $\overline{Z}_3$ donnant lieu à des diagrammes commutatifs $(3.2.5.1)_i$ (i=1,2)



$(3.2.5.1)_i$,

et il reste à trouver une compactification de $i_3\ \overline{g}_3$ par $\overline{\overline{Z}}_3$, telle que $\overline{\overline{Z}}_3$ puisse s'envoyer par un morphisme propre dans $\overline{\overline{Z}}_i$, de façon à donner lieu à un cube commutatif (i =1,2). Si le but d'un morphisme entre compactifications de $i_3\overline{g}_3$ a cette propriété, la source l'a encore et en vertu de (ii), il suffira de s'occuper séparément des cas i = 1 et i = 2.

Soit T le produit fibré de $\overline{Y}_3$ et $\overline{\overline{Z}}_i$ sur $\overline{Y}_i$: alors T figure dans un cube commutatif analogue à celui qu'on cherche, sauf que la flèche k de $\overline{Z}_3$ dans T pourrait ne pas être une immersion ouverte. Posant k = pj (p propre, j immersion ouverte) et remplaçant T par la source $\overline{\overline{Z}}_3$ de p, on trouve le cube cherché.

Remarque 3.2.7. La proposition 3.2.3 aurait encore été valable si, dans la définition 3.2.1 des morphismes compactifiables, on avait omis d'exiger que Y soit quasi-compact quasi-séparé et demandé en compensation que j soit une immersion ouverte quasi-compacte et non seulement un morphisme quasi-fini.

3.3. Recollement.

Rappelons que les hypothèses 3.2.4 sont satisfaites.

3.3.1. Supposons donnés :

α) pour chaque $X \in Ob(S)$, une catégorie $F(X)$,

β) une (S,i)-catégorie cofibrée F_i et une (S,p) catégorie cofibrée F_p,

γ) pour chaque $X \in Ob(S)$, des isomorphismes entre $F(X)$, $(F_i)_X$ et $(F_p)_X$,

δ) un scindage normalisé de F_i et un scindage normalisé de F_p .

En vertu de (SGA 1VI), il "revient au même" de se donner plutôt α) et :

(i) pour tout morphisme propre $p : X \longrightarrow Y$, un foncteur $p_* : F(X) \longrightarrow F(Y)$,

(ii) pour tout couple composable (p,q) de morphismes propres,

un isomorphisme de foncteur $c_{p,q} : p_*q_* \longleftrightarrow (pq)_*$,

(i) et (ii)', données analogues pour (S,i),

ces données vérifiant les conditions suivantes :

(a) si p est une identité, alors p_* , $c_{p,q}$ et $c_{q,p}$ sont des identités,

(b) pour tout triple composable de morphismes propres, on a

$$c_{p,qr} \cdot (p_* * c_{q,r}) = c_{pq,r} \circ (c_{p,q} * r_*) \quad ,$$

(a)' et (b)', conditions analogues pour (S,p).

Supposons donné de plus,

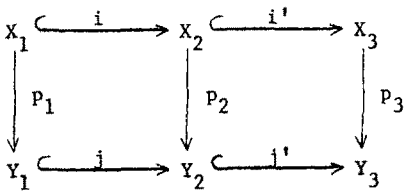
(iii) pour tout diagramme commutatif D

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow[j]{} & T \end{array} \qquad j,j' \in F\ell(S,i) \ ; \ p,p' \in F\ell(S,p),$$

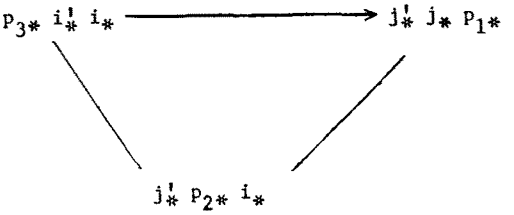
un isomorphisme de foncteur d(D) : $p_*j'_* \longleftrightarrow j_*p'_*$.

Proposition 3.3.2. Si des données (i) (ii) (i') (ii') (iii) vérifient les conditions (a) (b) (a') (b') ainsi que (c) et (c') énoncées ci-dessous, alors, il existe une et "essentiellement" une seule catégorie F cofibrée sur S, munie d'isomorphismes $F \times_S (S,i) = F_i$ et $F \times_S (S,p) = F_p$, compatibles à la donnée 3.3.1 γ) et tels que les isomorphismes d(D) de (iii) soient les isomorphismes composés $j_*p'_* = (jp')_* = (pj')_* = p_*j'_*$.

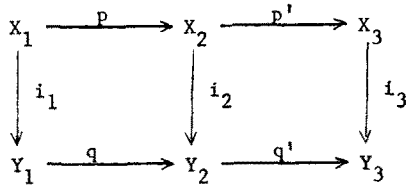
(c) Pour tout diagramme commutatif du type suivant



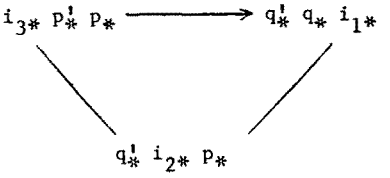
dont les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et dont les flèches verticales sont propres, le triangle suivant d'isomorphismes d de (iii) est commutatif :



(c') Pour tout diagramme commutatif du type suivant



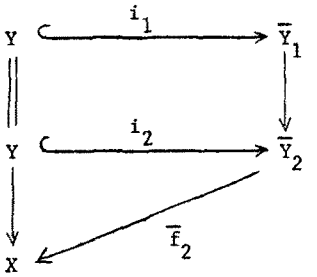
dont les flèches horizontales sont propres et dont les flèches verticales sont des immersions ouvertes, le triangle suivant d'isomorphismes d de (iii) est commutatif :



3.3.2.1. Définition de f_*.

Soit f un morphisme de Y dans X. Chaque compactification de f, de diagramme (3.2.5(i)), définit un foncteur composé $\overline{f}_* \, i_*$ de F(Y) dans F(X). Un morphisme de compactifications définit un diagramme commutatif

(3.3.2.2)



La donnée (iii) nous fournit donc un isomorphisme

$$\overline{f}_{2*} \, i_{2*} = \overline{f}_{2\,*} \circ (i_{2*} \circ 1_{Y*}) = \overline{f}_{2*} \circ (p_* \circ i_{1*}) = \overline{f}_{1*} \circ i_{1*} \quad .$$

L'axiome (c') garantit de plus que l'isomorphisme associé à un composé de morphismes de compactification est le composé des isomorphismes associés à chacun d'eux. La catégorie des morphismes de compactification étant filtrante (3.2.6 (ii)), on obtient ainsi un système transitif d'isomorphismes entre les foncteurs associés aux diverses compactification de f. Choisissant l'une d'elles, on définit le foncteur f_* .

3.3.2.3. Homomorphismes de transitivité.

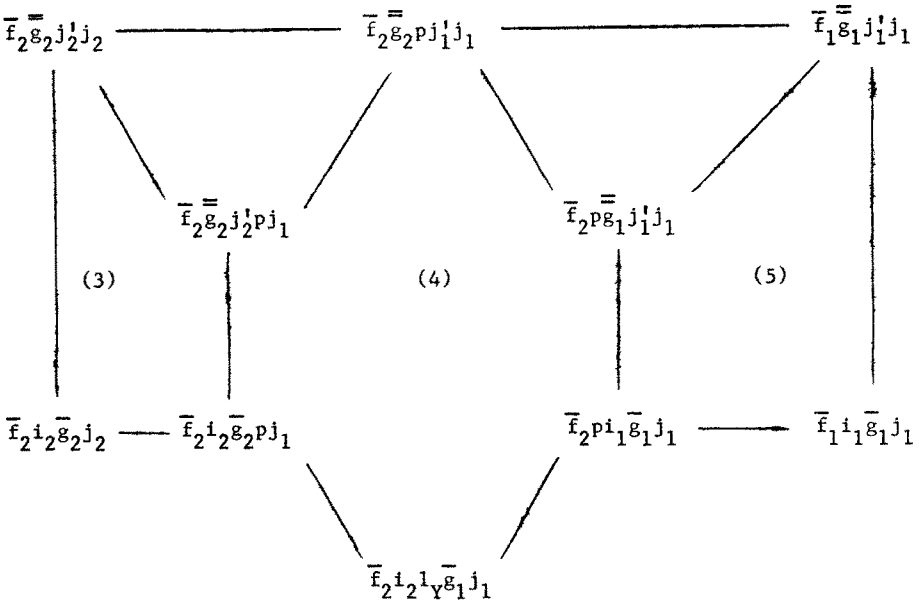
Toute compactification d'un couple (f,g) de morphismes composables (diagramme (3.2.5.2)) définit une compactification de f, une de g, une de $f \circ g = (\overline{f}\,\overline{\overline{g}})(j'j)$, et un isomorphisme $c_{f,g} : (fg)_* \xrightarrow{\sim} f_* \, g_*$, composé des isomorphismes

$$(fg)_* = (\overline{f}\,\overline{\overline{g}})_* \ (j'j)_* = \overline{f}_* \ (\overline{\overline{g}}_* \ j'_*)j_* = \overline{f}_* \ (i_* \ \overline{g}_*) \ j_* = (\overline{f}_* i_*)(\overline{g}_* j_*) = f_* g_*$$

(où l'isomorphisme médian provient de (iii)).

Prouvons que cet isomorphisme ne dépend pas de la compactification choisie de (f,g). En vertu de 3.2.6 (iii) , il suffira de comparer les isomorphismes $c_{f,g}$ obtenus à partir de deux compactifications $(3.2.4.2)_i$ (i=1,2) telles qu'existe un morphisme de compactification de la première dans la seconde. Les flèches de ces morphismes seront désignées par p.

Considérons le diagramme suivant d'isomorphismes de foncteurs. Pour faciliter sa lecture, on a omis d'écrire les * .



a) L'isomorphisme composé de la 1ère ligne est l'isomorphisme 3.3.2.1 entre deux définitions de $(fg)_*$.

b) L'isomorphisme composé de la dernière ligne est l'isomorphismes 3.3.2.1 entre deux définitions de $f_* g_*$.

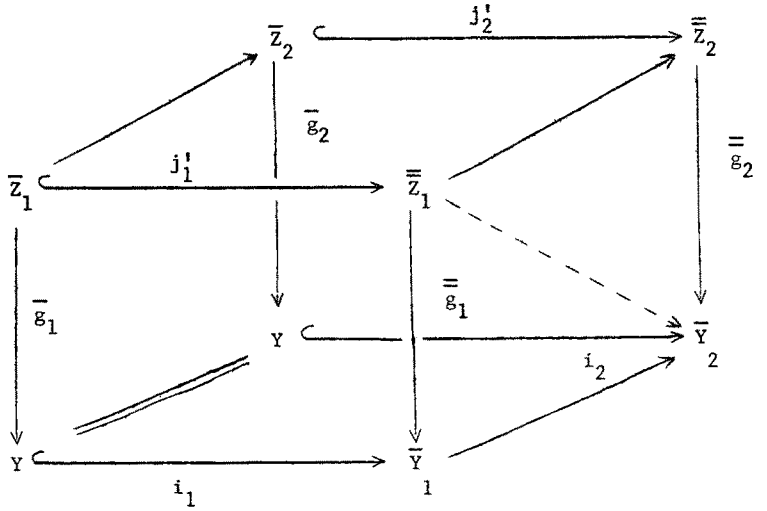
c) Les isomorphismes verticaux extrêmes sont les isomorphismes $c_{f,g}$ entre $(fg)_*$ et f_*g_* déduits de l'une ou l'autre compactification.

Le problème est donc de prouver que le bord extérieur du diagramme est commutatif. Un diagramme commutatif de foncteurs reste commutatif quand on compose chacun d'eux avec un même foncteur. Ceci rappellé, la commutativité de (i) résulte de (c) appliqué au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{j_1} & \overline{Z}_1 & \xrightarrow{j_1'} & \overline{\overline{Z}}_1 \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{j_2} & \overline{Z}_2 & \xrightarrow{j_2'} & \overline{\overline{Z}}_2 \end{array} .$$

La commutativité de (3) et (5) est triviale, celle de (2), qui concerne essentiellement des morphismes propres, l'est aussi. Reste à considérer l'hexagone (4).

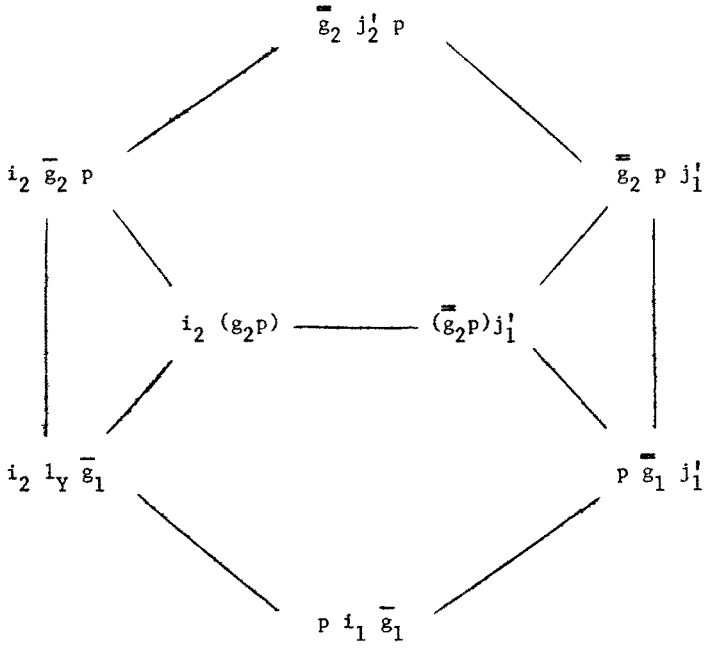
Considérons le cube commutatif suivant



Il y a six façons de parcourir les arêtes de ce cube $\overline{Z}_1$ à $\overline{Y}_2$, chacune "adjacente" à deux autres ; on dispose d'un isomorphisme entre les foncteurs composés associés à deux chemins adjacents (i.e. séparés par une seule face) et la commutativité de (4) résultera de la commutativité de l'hexagone ainsi obtenu.

La morale de ce genre de diagramme est qu'une arête représente un foncteur, une face un isomorphisme entre foncteurs composés et un volume une condition de compatibilité (entre les faces qui en sont le bord). On décomposera le cube en deux prismes à base triangulaire (par le "plan" $\overline{Z}_1 \; \overline{\overline{Z}}_1 \; Y \; \overline{Y}_2$) pour se ramener aux hypothèses (c').

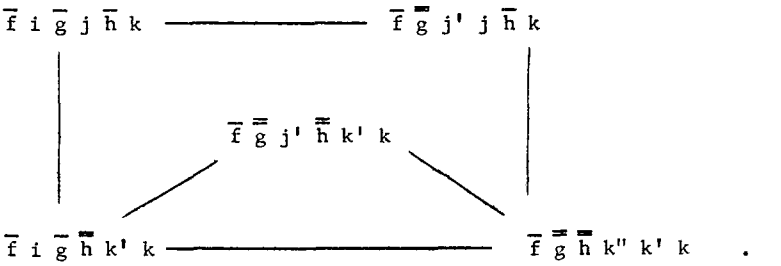
De façon précise, on complète l'hexagone en le diagramme d'isomorphismes suivant (pour faciliter sa lecture, les * ont été omis) :



Les triangles sont trivialement commutatifs et les pentagones le sont en vertu de (c').

3.3.2.4. Condition de cocycles.

Vérifions que les isomorphismes $c_{f,g}$ construits en 3.3.2.3 vérifient une condition de cocycle pour un triple (f, g, h) de morphismes composables. Introduisons une compactification de (f, g, h), de diagramme (3.2.4.3) et considérons le diagramme d'isomorphismes de foncteurs suivant :



La commutativité du carré est triviale, celle des triangles résulte de (c) et (c'). La commutativité du bord extérieur étant ce qu'il fallait démontrer, ceci achève la démonstration de 3.3.2 .

3.3.3. Supposons données sur (S,i) et (S,p) respectivement des catégories fibrées munies d'un scindage normalisé F_i et F_p , et supposons que F_i et F_p ont même fibre F(X) en tout $X \in Ob\ S$.

D'après SGA 1 VI , il "revient au même" de se donner plutôt :

(i bis) pour tout morphisme propre $p : X \longrightarrow Y$, un foncteur $p^* : F(Y) \longrightarrow F(X)$,

(ii bis) pour tout couple composable (p,q) de morphismes propres, un isomorphisme de foncteur $c_{p,q} : q^*p^* \longleftrightarrow (pq)^*$,

(i' bis) et (ii' bis) données analogues pour (S,i),

ces données vérifiant les conditions (a bis) (b bis)(a' bis) (b' bis) **duales** de 3.3.1 (a)(b)(a')(b').

Supposons donné de plus,

(iii bis) pour tout diagramme commutatif D

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Z & \xrightarrow{j} & T \end{array} \qquad j,j' \in F\mathcal{L}(S,i) \ ; \ p\,p' \in F\mathcal{L}(S,p)$$

un isomorphisme de foncteurs d(D) : $j'^*p^* \longleftrightarrow p'^*j^*$.

On laisse au lecteur d'énoncer les conditions (c bis) et (c' bis) duales de 3.3.2 (c) et (c').

Des raisonnements parallèles à ceux qui précèdent prouvent alors la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. Si des données (i bis)(ii bis)(i' bis)(ii' bis)(iii bis) vérifient les conditions (a bis)(b bis)(a' bis)(b' bis)(c bis)(c' bis), il existe une et essentiellement une catégorie F cofibrée sur S et munie d'isomorphismes $F \times_S (S,i) = F_i$, $F \times_S (S,p) = F_p$, ces isomorphismes étant compatibles avec les identifications $F_{iX} = F_{pX}$ ($X \in Ob\ S$) et tels que les isomorphismes d(D) de (iii bis) deviennent les isomorphismes composés $p'^*j^* = (jp')^* = (pj')^* = j'^*p^*$.

On notera cependant que 3.3.4 n'est pas dual de 3.3.2 , car les hypothèses faites sur (S,i) et (S,p) ne sont pas autoduales.

4. Résolutions. Application à la flèche de changement de base.

4.1. Résolutions plates.

Rappelons que si $f : (X,\mathcal{A}) \longrightarrow (Y,\mathcal{B})$ est un morphisme de sites (ou de topos) annelés, l'image réciproque par f d'un faisceau de $\mathcal{B}$-modules à gauche $\mathcal{M}$ est le faisceau de $\mathcal{A}$-modules à gauche $\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} f^*\mathcal{M}$.

Proposition 4.1.1. Soient $f: (X,\mathcal{A}) \longrightarrow (Y,\mathcal{B})$ un morphisme de sites annelés, K un faisceau de $\mathcal{A}$-modules à droite, et $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de $\mathcal{B}$-modules à gauche. Si M et N sont plats, alors

(i) L est plat,

(ii) la suite suivante est exacte :

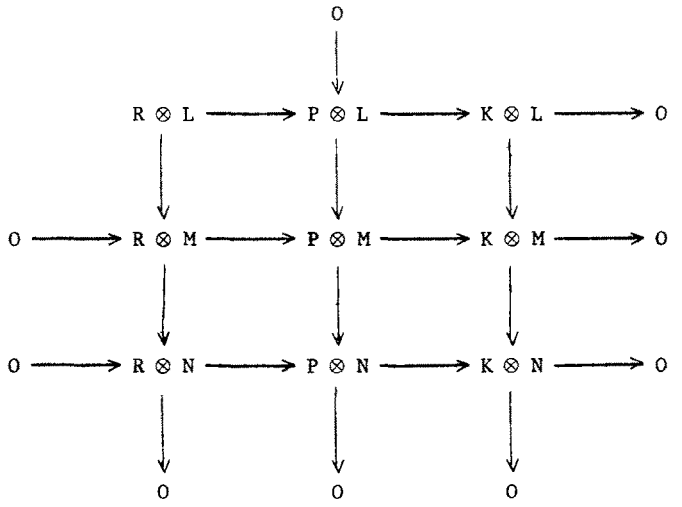
$$0 \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} f^*L \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} f^*M \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{A}} f^*N \longrightarrow 0 \quad .$$

Factorisons f en les flèches $(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{u} (X,f^*\mathcal{B}) \xrightarrow{v} (Y,\mathcal{B})$. Le foncteur v^* est exact, et transforme Modules plats en Modules plats (IV 15) de sorte qu'il suffit de prouver 4.1.1 pour u . L'isomorphisme

$$(4.1.1.1) \qquad K \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{f^*\mathcal{B}} P) = K \otimes_{f^*\mathcal{B}} P$$

nous ramène alors au cas où f est l'identité.

Soit une suite exacte $0 \longrightarrow R \longrightarrow P \longrightarrow K \longrightarrow 0$ avec P plat (4.1.2). Les lignes et colonnes du diagramme suivant sont exactes:



Appliquons le diagramme du serpent au deux premières colonnes : on trouve

$$0 \xrightarrow{i} K \otimes L \longrightarrow K \otimes M \quad ,$$

ce qui prouve (ii). Sans plus supposer P plat, on sait que dans le diagramme précédent les trois colonnes et deux lignes sont des suites exactes courtes ; la première ligne est donc exacte, i.e. L est plat.

4.1.2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie de la catégorie des sites annelés. Les faisceaux de modules sur les sites annelés de $\mathcal{A}$ forment une catégorie $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, abélienne sur $\mathcal{A}$ (2.2.2), fibrée et cofibrée, dont les fibres sont les opposées des catégories usuelles de faisceaux de modules sur un site. On désignera par $K(\mathcal{A})$ la catégorie $K(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ (2.2.8) et par $K^+(\mathcal{A})$ (resp. $K^-(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $K(\mathcal{A})$, dont les catégories fibres sont les opposées des catégories $K^+(S)$ (resp. $K^-(S)$) pour $S \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$. Les catégories $K(\mathcal{A})$, $K^+(\mathcal{A})$ et $K^-(\mathcal{A})$ sont triangulées sur $\mathcal{A}$, fibrées et cofibrées.

Soit $f : S \longrightarrow S'$ une flèche de $\mathcal{A}$. Tout injectif est acyclique (1.2.3) pour le foncteur Rf_*, et tout faisceau de modules plats est acyclique pour le foncteur Lf^* (4.1.1 et 1.2.6), d'où des foncteurs dérivés (1.2.7)

(4.1.2.1) $\qquad Rf_* : D^+(S) \longrightarrow D^+(S')$

(4.1.2.2) $\qquad Lf^* : D^-(S) \longrightarrow D^-(S')$.

Si Rf_* (resp. Lf^*) est de dimension finie, on peut dans 4.1.2.1 (resp. 4.1.2.2)) remplacer l'exposant + (resp. -) par b, par - (resp. +) ou le supprimer (1.2.10).

On désigne par $D(\mathcal{A})$ (resp. $D^+(\mathcal{A})$, resp. $D^-(\mathcal{A})$) la catégorie déduite de $K(\mathcal{A})$ (resp. $K^+(\mathcal{A})$, resp. $K^-(\mathcal{A})$) en inversant les quasi-isomorphismes.

Scholie 4.1.3. ("Théorème trivial de dualité").

(a) On suppose que tous les foncteurs Rf_* (resp. Lf^*) sont de dimension finie. Alors :

(i) La formation de $D(\mathcal{A})$ commute à tout changement de catégorie base $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$. La catégorie $D(\mathcal{A})$ est triangulée sur $\mathcal{A}$ (2.2.3), et ses fibres s'identifient aux opposées des catégories $D(S)$ pour $S \in Ob\,\mathcal{A}$.

(ii) La catégorie $D(\mathcal{A})$ est cofibrée (resp. fibrée) sur $\mathcal{A}$. Soit $f : S \longrightarrow S'$; si Lf^* (resp. Rf_*) est de dimension finie, alors tout objet de $D(S')$ (resp. $D(S)$) a une image réciproque (resp. directe) par f au sens de la catégorie $D(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$. Les foncteurs image réciproque et image directe s'identifient à Lf^* et Rf_* .

(iii) Tout objet de $D^-(S')$ (resp. $D^+(S)$) a une image réciproque (resp. directe) au sens de $D(\mathcal{S})$ et le foncteur image réciproque (resp. directe) s'identifie à Lf^* (resp. Rf_*).

(b) (i) La formation de $D^-(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$) commute à tout changement de catégorie base $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$. La catégorie $D^-(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$ est triangulée sur $\mathcal{S}$, et ses fibres s'identifient aux opposées des catégories $D^-(S)$ (resp. $D^+(S)$).

(ii) La catégorie $D^-(\mathcal{S})$ (resp. $D^+(\mathcal{S})$) est fibrée (resp. cofibrée) sur $\mathcal{S}$; les foncteurs "image réciproque" (resp. "image directe") s'identifient aux foncteurs dérivés Lf^* (resp. Rf_*).

(iii) Si $f : S \longrightarrow S'$ est tel que Rf_* (resp. Lf^*) soit de dimension finie, tout objet de $D^-(S)$ (resp. $D^+(S')$) a une image directe au sens de $D^-(\mathcal{S})$ (resp. une image réciproque au sens de $D^+(\mathcal{S})$), et le foncteur "image directe" (resp. "image réciproque") s'identifie à Rf_* (resp. Lf^*).

Il suffira de vérifier que dans chaque cas les hypohtèses de 2.4.1 ou 2.4.3 sont remplies, les autres assertions se déduisant après un changement de base $\{S\} \longrightarrow \mathcal{S}$, ou $I \longrightarrow \mathcal{S}$, de 2.3.5 et 1.2.10. Dans le cas (b), les complexes de faisceaux plats (resp. flasques) satisfont aux hypothèses de 2.4.1. Dans le cas (a), on utilisera 2.4.3 de façon à n'avoir à considérer que des f tels que la dimension de Rf_* (resp. Lf^*) soit majorée par N fixe. Prouvons qu'il existe "assez" de complexes K dont les composantes ont leurs images directes (resp. réciproques) toutes acycliques pour les foncteurs image directe (réciproque) considérés. Soit K un

complexe et K* (resp. K_*) une résolution de Cartan-Eilenberg de K par des complexes à composantes flasques (resp. plates). Si $n > N$, on voit que $f_*\tau''_{<n}(K^*) = \tau''_{<} f_*(K^*)$ (resp. $f^*\tau''_{>-n}(K_*) = \tau''_{>-n} f^*(K_*)$ où τ^* désigne un tronqué relativement à la seconde différentielle. Pour $n > 2N$, on en déduit que $\tau''_{<n}(K^*)$ (resp. $\tau''_{>-n}(K_*)$) vérifie l'hypothèse de 2.4.3, et tout complexe K est la source (resp. le but) d'un quasi-isomorphisme de but (resp. de source) un tel complexe.

4.1.4. Considérons un carré commutatif de sites annelés (4.1.4.1) (cf. 0.11)

(4.1.4.1)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} \quad .$$

On peut considérer la sous-catégorie de la catégorie des sites réduite à ce diagramme ; on utilise alors 2.1.2 pour définir un "morphisme de changement de base" de $Lg^* Rf_*$ dans $Rf'_* Lg'^*$ lorsque 4.1.3 est applicable :

Proposition 4.1.5. La flèche 2.1.2 de changement de base, de $Lg^* Rf_*$ dans $Rf'_* Lg'^*$, est définie dans chacun des cas suivants :

(i) On travaille dans les catégories D^+, et Lg^*, Lg'^* sont de dimension finie.

(ii) On travaille dans les catégories D^-, et Rf_*, Rf'_* sont de dimension finie.

(iii) On travaille dans les catégories dérivées entières, et Rf_*, Rf'_*, Lg^*, Lg'^* sont de dimension finie, ainsi que Lf^* et Lf'^* (ou : ainsi que Rg_* et Rg'_*).

On notera que la dernière hypothèse de (iii) semble canularesque. Le rédacteur ne sait pas s'en débarasser sauf lorsque les sites considérés ont assez de points (4.2.12). Les propriétés fonctorielles de cette flèche de changement de base s'obtiennent aussitôt à partir de la description 2.1.2.

4.1.6. Soit $(S,\mathcal{A})$ un site annelé, et considérons le foncteur "produit tensoriel"

$$\otimes : \mathrm{Mod}_d(S,\mathcal{A}^o) \times \mathrm{Mod}_g(S,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S, C)$$

où C est le centre de $\mathcal{A}$.

La recette de 1.1.6, pour l'application de laquelle on définira le complexe simple associé à un double complexe par une somme, permet d'étendre ce foncteur en un foncteur encore noté $\otimes$:

$$\otimes : K(S,\mathcal{A}^o) \times K(S,\mathcal{A}) \longrightarrow K(S, C) \quad .$$

Proposition 4.1.7. Avec les notations précédentes :

(i) Le foncteur produit tensoriel est dérivable à gauche (1.2.1) en un foncteur "produit tensoriel total"

$$\overset{L}{\otimes} : D^-(S,\mathcal{A}^o) \times D^-(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D^-(S, C) \quad ;$$

(ii) un couple (K,L) de complexes bornés supérieurement est déployé pour $\overset{L}{\otimes}$ dès que K ou L est à composantes plates.

La démonstration est standard.

Notation 4.1.8. Si $K \in D^-(S,\mathcal{A}^\circ)$ et $L \in D^-(S,\mathcal{A})$, on désigne par $K \overset{L}{\otimes} L$ le produit tensoriel total de K et L. Le faisceau $H_k(K \overset{L}{\otimes} L) = H^{-k}(K \overset{L}{\otimes} L)$ se désigne par $\mathrm{Tor}_k(K,L)$ et s'appelle le $k^{\text{ième}}$ hypertor local de K et L .

Soient $K \in D^-(S,\mathcal{A}^\circ)$ et $L \in D^-(S,\mathcal{A})$. Si $H^i(K) = 0$ pour $i > k$ et $H^i(L) = 0$ pour $i > \ell$, on vérifie que $H^i(K \overset{L}{\otimes} L) = 0$ pour $i > k + \ell$ et que $H^{k+\ell}(K \overset{L}{\otimes} L) = H^k(K) \otimes H^\ell(L)$. Fixons K et regardons $K \overset{L}{\otimes} L$ comme un foncteur en L. Si on applique la définition 1.2.9 de l'amplitude cohomologique comme intervalle de $\mathbb{Z}$, la borne supérieure de cet intervalle est de nature triviale. C'est le plus grand entier i tel que $H^i(K) \neq 0$. La borne inférieure est plus intéressante :

Définition 4.1.9. On dit qu'un complexe $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ est de Tor-dimension $\leq n$ si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\mathcal{A}$-module L, $\mathrm{Tor}_k(K,L) = 0$ pour $k > n$.

(ii) Pour tout complexe de $\mathcal{A}$-modules L tel que $H^i(L) = 0$ pour $i < \ell$, $H^i(K \overset{L}{\otimes} L) = 0$ pour $i < \ell - n$.

(iii) Il existe un quasi-isomorphisme de but K et de source un complexe K', à composantes plates et nulles pour $i < -n$.

4.1.10. Voici quelques variations possibles:

(i) Si $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ est de tor-dimension finie et si $L \in \mathrm{Ob}\, D(S,\mathcal{A})$, alors le foncteur $\overset{L}{\otimes}$ est défini (1.2.1) en (K,L).

(ii) Si $K \in \mathrm{Ob}\, K^b(S,\mathcal{A}^\circ)$ a des composantes de Tor-dimension finie, le foncteur $L \longmapsto K \otimes L$ $(L \in K(S,\mathcal{A}))$ est dérivable à gauche.

(iii) Si tout Module est de Tor-dimension finie, le foncteur $\otimes$ se dérive en un foncteur

$$\overset{L}{\otimes} : D(S,\mathcal{A}^\circ) \times D(S,\mathcal{A}) \longrightarrow D(S,\mathcal{C}) \quad .$$

4.2. Résolutions flasques de Godement.

4.2.1. Soient S un topos et X un ensemble. Il revient au même de se donner une famille de point de S indexée par X ou de se donner un morphisme $k : Top(X) \longrightarrow S$ du topos défini par l'espace topologique discret X dans S. Pour que la dite famille soit conservative (IV 6.4.1), il faut et il suffit que pour tout faisceau F de S, la flèche d'adjonction de F dans k_*k^*F soit un monomorphisme (cf. IV 6.4.0).

Définition 4.2.2. Soit $k : Top(X) \longrightarrow S$ une famille conservative de points d'un topos S . On appelle résolution de Godement ou résolution flasque canonique (relative à X) d'un faisceau abélien F de S, et on désigne par $\mathcal{G}_X^*(F)$ (ou simplement $\mathcal{G}^*(F)$), la résolution à droite suivante de F :

1) $\mathcal{G}^0(F) = k_*k^*F$ et $\varepsilon : F \longrightarrow \mathcal{G}^0(F)$ est la flèche d'adjonction.

2) Posons $d^{-1} = \varepsilon$; on définit par récurrence, pour $n \geq 0$

$$\mathcal{G}^{n+1}(F) = \mathcal{G}^0(\operatorname{coker} d^{n-1}), \text{ et } d^n \text{ comme flèche composée}$$

$$d^n : \mathcal{G}^n(F) \longrightarrow \operatorname{coker}(d^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{G}^0(\operatorname{coker}(d^{n-1})).$$

Proposition 4.2.3. Sous les hypothèses de 4.2.2,

(i) $\mathcal{G}^n(F)$ est un faisceau flasque (V 3.7),

(ii) $\mathcal{G}^n(F)$ est un foncteur exact en F,

(iii) la fibre en un point $x \in X$ du complexe $\mathcal{G}^*(F)$ est une résolution canoniquement scindée de F_x .

Les faisceaux $\mathscr{C}^n(F)$ sont flasques en tant qu'image directe de faisceaux (automatiquement flasques) sur l'espace topologique discret X.

Les foncteurs k^* et k_* sont exacts. Le foncteur $\mathscr{C}^0$ est donc exact. Prouvons par récurrence sur $n \geq 0$ que le foncteur $\mathscr{Z}^n(F) = \operatorname{coker}(d^{n-1})$ est exact, donc aussi $\mathscr{C}^{n+1} = \mathscr{C}^0 \mathscr{Z}^n$. Posons $\mathscr{Z}^{-1}(F) = F$. Une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

définit pour $n \geq 0$ un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{n-1}(F') & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{n-1}(F) & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{n-1}(F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{C}^n(F') & \longrightarrow & \mathscr{C}^n(F) & \longrightarrow & \mathscr{C}^n(F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{Z}^n(F') & \longrightarrow & \mathscr{Z}^n(F) & \longrightarrow & \mathscr{Z}^n(F'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} ,$$

dont les colonnes sont exactes, ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, que les 2 premières lignes. La 3è ligne est donc exacte, et (ii) est prouvé.

Les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathscr{Z}^{n+1}(F) \longrightarrow \mathscr{C}^n(F) \longrightarrow \mathscr{Z}^n(F) \longrightarrow 0$$

sont des cas particuliers de la suite exacte courte

(4.2.3.1) $$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(F) \longrightarrow \mathscr{Z}^0(F) \longrightarrow 0$$

(faire la substitution $F \longmapsto \mathcal{Z}^{n-1}(F)$). Pour prouver (iii), il reste à prouver que la suite image réciproque de (4.2.3.1) par k est canoniquement scindée. La flèche composée

$$k^*F \xrightarrow{k^*(\varepsilon)} k^*\mathcal{C}^0F = k^*(k_*k^*)F = (k^*k_*)k^*F \longrightarrow k^*F$$

est en effet l'identité.

Remarque 4.2.4. Si $(x_i)_{i\in X}$ est une famille conservative de points d'un site, à cette famille correspond une famille conservative de points du topos engendré, qui permet encore de définir les résolutions flasques canoniques.

Remarque 4.2.5. Si S est un topos annelé, les foncteurs $\mathcal{C}^n$ transforment Modules en Modules.

Remarque 4.2.6. Soit $\mathcal{S}$ une catégorie formée de sites. Supposons donné, pour chaque $S \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{S}$, un ensemble S^d et une famille conservative $k_S\colon \mathrm{Top}(S^d) \longrightarrow S$ de points de S indexés par S^d. Supposons que S^d soit fonctoriel en S et que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Top}(S^d) & \xrightarrow{f^d} & \mathrm{Top}(T^d) \\ \downarrow{\scriptstyle k_S} & & \downarrow{\scriptstyle k_T} \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

soient commutatifs. Les résolutions flasques canoniques correspondantes sont alors "fonctorielles en S ".

Si $\mathcal{S}$ est la catégorie des espaces topologiques, on peut prendre S^d = ensemble sous-jacent.

Si $\mathcal{S}$ est la catégorie des sites étales de schémas S localement de type fini sur un schéma S_o, et si pour chaque $s \in S_o$, $\overline{k(s)}$ est une clôture algébrique de k(s), on peut prendre pour S^d l'ensemble des points de S à valeurs dans l'un des $\overline{k(s)}$.

On peut remplacer la condition "de type fini" par une condition de cardinal si les clôtures algébriques $\overline{k(s)}$ sont remplacées par des extensions algébriquement closes assez grandes.

4.2.7. Un des intérêts des résolutions flasques canoniques est qu'elles permettent de construire des complexes déployés à la fois pour des foncteurs du type "produit tensoriel" et pour des foncteurs du type "image directe". Il permettent par là une construction peut-être plus compréhenseible des morphismes de changement de base (4.1.5).

Lemme 4.2.8. Soient $f : (S,\mathcal{A}) \longrightarrow (S',\mathcal{B})$ un morphisme de sites annelés, $K \in \mathrm{Ob}\, K(S,\mathcal{A}^o)$ et $L \in \mathrm{Ob}\, K(S',\mathcal{B})$ des complexes et $k : \mathrm{Top}(X) \longrightarrow S$ un ensemble conservatif de points de S . On suppose remplie l'une des conditions suivantes :

(a) Les cohomologies de K et L sont bornés supériaurement ;

(b) $\mathcal{A}$ est de Tor-dimension finie sur $f^*\mathcal{B}$ et $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(S,\mathcal{A}^o)$ est de Tor-dimension finie ;

(c) $L \in \mathrm{Ob}\, D^b(S',\mathcal{B})$ est de Tor-dimension finie.

Alors le foncteur $(K,L) \longmapsto K \otimes f^*L$ est dérivable (1.2.1) en (K,L) ; soit $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{L}f^*$ son dérivé.

(i) Si x est un point de S, alors $(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}f^*L)_x \underset{\mathbb{L}}{\simeq} K_x \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{f(x)}} L_{f(x)}$.

(ii) Le couple (K,L) est déployé à gauche pour $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{L}f^*$(1.2.1) si et seulement si, pour tout $x \in X$, le couple $(K_x, L_{f(x)})$ est déployé à gauche pour le foncteur $\otimes_{\mathcal{O}_{f(x)}}$.

(iii) Sous les hypothèses (a) ou (b), le foncteur $K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}\mathbb{L}f^*L$ en L est d'amplitude cohomologique $\subset d$ (1.2.9) si et seulement si, $\forall\, x \in V$, le complexe K_x de $\mathcal{O}_{f(x)}$-modules est de Tor-amplitude $\subset d$.

Ce lemme, dont la démonstration est standard, exprime la "nature ponctuelle" du foncteur considéré.

4.2.9. Soit L un complexe. On appelle résolution de Godement (relative à X) de L le complexe simple (défini en terme de sommes) associé au complexe double C^*L (1.1.4). On appelle résolution de Godement tronquée à l'ordre n $\tau''_{\leq n} C^*L$ le complexe simple associé au complexe double déduit de C^*L par troncature (1.1.15) dans le sens de la différentielle de Godement. En vertu de 4.2.3 (iii), L est point de X par point de X homotope aux complexes $\tau''_{\leq n} C^*L$ et C^*L ; ces complexes sont donc "aussi bons que L " vis-à-vis des foncteurs du type "produit tensoriel" (4.2.8).

Proposition 4.2.10. Soient $(S,\mathcal{A})$ un site annelé, X un ensemble conservatif de points de S et $N,M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec N ou $M < \infty$. Soit A la sous-catégorie de $K(S)$ formée des complexes L tels que

(a) Si $N = \infty$, alors $H^i(L) = 0$ pour i assez grand ; si $M = \infty$, alors $H^i(L) = 0$ pour i assez petit.

(b) Quels que soient $x \in X$ et le $\mathcal{A}_x$-module Q de Tor-dimension $\leq N$, le complexe L_x est déployé à gauche pour le foncteur $M_x \otimes_{\mathcal{A}_x} *$.

(c) Quel que soit le morphisme de topos $f : X^{\sim} \longrightarrow E$, de dimension cohomologique $\leq M$, le complexe L est déployé à droite pour le foncteur f_*.

Alors, l'inclusion de A dans $K(S)$ induit une équivalence entre la catégorie déduite de A en inversant les quasi-isomorphismes et la catégorie $D^*(S)$, $* = +$ si $N < M = \infty$, $* = -$ si $M < N = \infty$ et $* =$ blanc si $N, M < \infty$.

Soit K un complexe vérifiant (a). Si $N = \infty$, alors la flèche canonique $a : K_1 = \sigma_{\leq i} K \longrightarrow K$ est quasi-isomorphisme pour i assez grand. Si $N < \infty$, on pose $K_1 = K$. Soit K_1^* une résolution plate de Cartan-Eilenberg et posons $K_2 = \tau''_{\geq N} K_1$ (troncature dans le sens de la nouvelle différentielle). La flèche composée de K_2 dans K est un quasi-isomorphisme, et K_2 vérifie (b).

Soit K un complexe vérifiant (a) et (b). Si $M = \infty$, alors $N < \infty$; pour i assez grand, $b : K \longrightarrow \sigma_{\geq i} K_1 = K_3$ est un quasi-isomorphisme de K_3 vérifie encore (a) et (b). Si $M < \infty$, on pose $K = K_3$. Soit $K_4 = \sigma''_{\leq M} C^* K_3$. Alors K_4 vérifie (a) (c), et (b) par 4.2.3 (iii).

La proposition résulte donc de deux applications successives de [CD I 2.4.2].

Variantes 4.2.11. Si $N < \infty$ (resp. si $M < \infty$, resp. si $N, M < \infty$) alors on aurait pu travailler de même avec des complexes bornés inférieurement (resp. supérieurement, resp. bornés).

4.2.12. Voici comment utiliser ces constructions pour définir le morphisme de changement de base 4.1.4. sous des hypothèses plus générales que celles de loc. cit., lorsque les sites considérés ont assez de points.

Soient un diagramme commutatif (cf. (0.11)) de sites

(4.2.12.1)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} ,$$

$\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur S, $\mathcal{A}'$ un faisceau d'anneaux sur S' et L un complexe de $(\mathcal{A}', g^*\mathcal{A})$ -bimodules sur S'. On suppose que :

(i) les sites X et X' admettent des familles conservatives de points, $k : Q \longrightarrow X$ et $k' : Q' \longrightarrow X'$, s'insérant dans un diagramme commutatif

(4.2.12.2)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle k'} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ Q' & \xrightarrow{g'_o} & Q \end{array} .$$

(ii) L'une des hypothèses suivantes est remplie :

(a) Les foncteurs Rf_* et Rf'_* sont de dimension cohomologique finie, et L est borné supérieurement. On pose $s = -$.

(b) L est borné inférieurement, à composantes de Tor-dimension uniformément bornée (comme $g^*\mathcal{A}$-modules). On pose $s = +$.

(c) L est borné, et les hypothèses de (a) et (b) sont remplies. On pose s = blanc.

On désigne par $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^* : D^S(S, \mathcal{A}) \longrightarrow D^S(S', \mathcal{A}')$ le foncteur dérivé gauche (1.2.1) du foncteur $K \longmapsto L \otimes_{g^*\mathcal{A}} g^*K$ de $K^S(S, \mathcal{A})$ dans $K^S(S', \mathcal{A}')$.

On se propose de définir une flèche de changement de base

(4.2.12.3) $$\varphi : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^* \, Rf_* \, K \longrightarrow Rf'_*(f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g'^*K)$$

pour K dans $D^S(X, \mathcal{A})$.

En vertu de 4.2.10, il suffit de la définir, fonctoriellement en K, pour les complexes appartenant à la catégorie A de 4.2.10, pour

$$N \geq \sup_i \, (\text{tor dim de } L^i \text{ sur } g^* \quad)$$

$$M \geq \text{dimension cohomologique de } Rf_* \, .$$

Un tel complexe est déployé tant pour le foncteur Rf_* que pour le foncteur $f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}'} g'^*$ (4.2.8). Les flèches canoniques

$$\alpha : f_*K \longrightarrow Rf_*K$$

$$\beta : f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^*K \longrightarrow L \otimes g^*K$$

sont donc des quasi-isomorphismes. Pour calculer le membre de gauche I de (4.2.12.3), il suffit donc de prendre une résolution gauche (i.e. un quasi-isomorphisme)

$$\gamma : K_1 \longrightarrow f_*K \quad ,$$

avec K_1 déployé pour $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g^*$; on a

$$I \simeq L \otimes \mathbb{L}g^* \, K_1 \quad .$$

De même, pour calculer le membre de droite II de (4.2.12.3), il suffit de prendre une résolution droite

$$\delta : f'^*L \otimes g'^*K \longrightarrow K_2 \quad ,$$

avec K_2 déployé pour Rf'_* ; on a

$$II \xrightarrow{\sim} f'_* K_2 \quad .$$

On définit alors la flèche de changement de base comme le composé

$$I \xrightarrow{\sim} L \otimes g^*K_1 \xrightarrow{\gamma} L \otimes g^*f_*K \xrightarrow{c} f'_*(f'^*L \otimes g'^*K) \xrightarrow{\alpha} f'_* K_2 \xrightarrow{\sim} II \quad ,$$

où la flèche c est la flèche de changement de base usuelle, au niveau des vrais complexes.

Cette flèche de changement de base a la propriété caractéristique suivante, qui rend en principe aisée la vérification de ses propriétés de compatibilité.

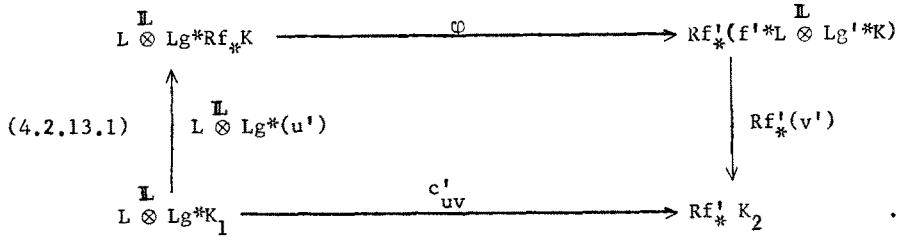
Proposition 4.2.13. Sous les hypothèses précédentes, soient $K \in Ob\ C^s(X',\mathcal{A})$, $K_1 \in Ob\ C^s(X,\mathcal{A})$ et $K_2 \in Ob\ C^s(S,\mathcal{A})$. Soient de plus u un f-morphisme de K dans K_1, i.e. $u \in Hom(K_1, f_*K) \xrightarrow{\sim} Hom(f^*K_1, K)$, et v un morphisme de $f'^*L \otimes g'^*K$ dans K_2 . On déduit de u,v et de la flèche de changement de base usuelle un morphisme de complexes $c_{u,v} : L \otimes g^*K_1 \longrightarrow f'_*k_2$. Soient u', v' et c'_{uv} les flèches composées

$$u' : K_1 \xrightarrow{u} f_*K \longrightarrow Rf_*K$$

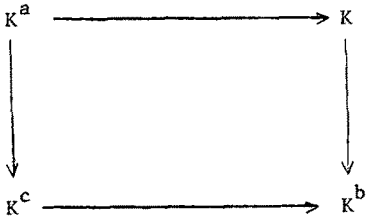
$$v' : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g'^*K \longrightarrow L \otimes g'^*K \xrightarrow{v} K_2$$

$$c'_{u,v} : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{L}g'^*K_1 \longrightarrow L \otimes g'^*K_1 \xrightarrow{c_{uv}} f'_* K_2 \longrightarrow Rf'_*K_2 \quad .$$

Le diagramme suivant est commutatif

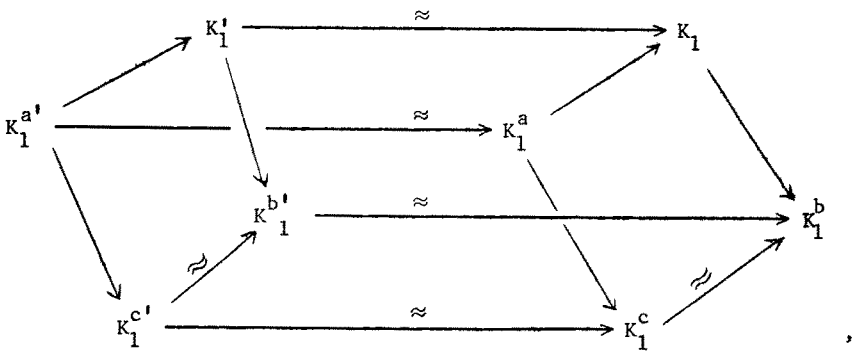


Supposons tout d'abord que $K_1 = f_*K$ et que $K_2 = f'^*L \otimes g'^*K$, et soit un diagramme commutatif de complexes

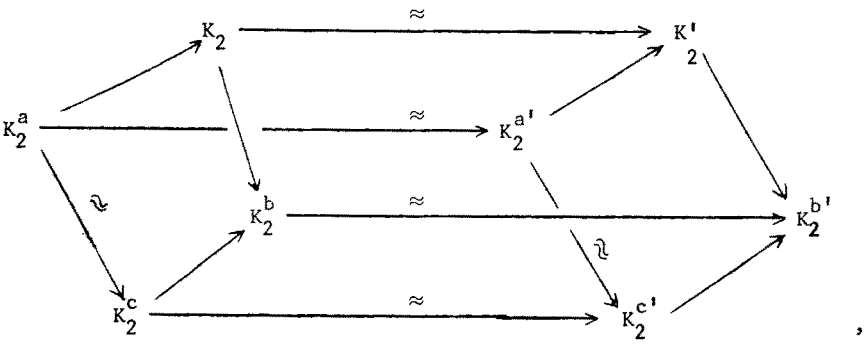


tel que K^a soit déployé pour $Lf'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg'^*$, que K^b soit déployé pour Rf_* et que K^c soit déployé pour ces deux foncteurs : pour construire ce diagramme, on commence par construire K^a , puis on applique une résolution flasque canonique (éventuellement tronquée) à K^a et K .

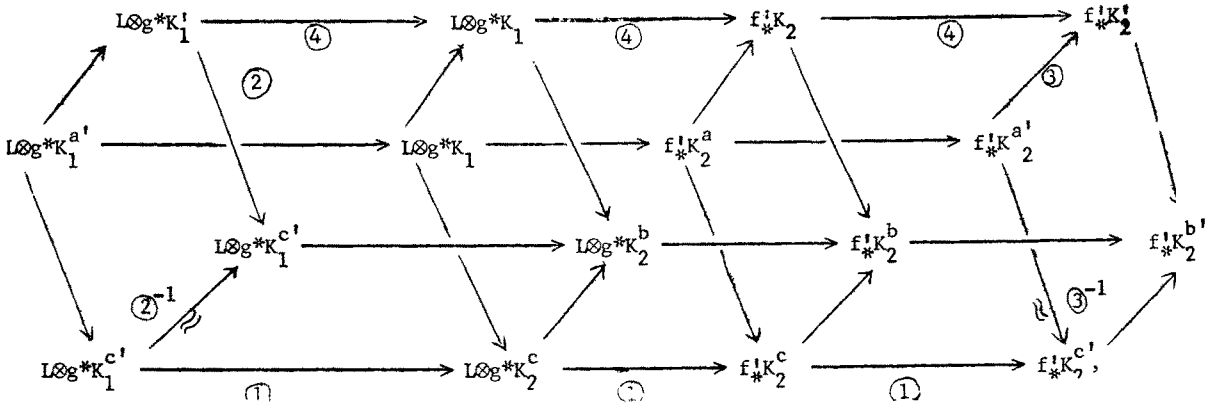
Appliquons le foncteur f_* (resp. $L \otimes g'^*$) à ce diagramme, et résolvons les complexes du diagramme $(K_1, K_1^a, K_1^b, K_1^c)$ (resp. $(K_2, K_2^a, K_2^b, K_2^c)$) de façon à obtenir un cube commutatif, où $\approx$ désigne un quasi-isomorphisme :



avec K_1', $K_1^{a'}$, $K_1^{b'}$, $K_1^{c'}$ déployés pour le foncteur $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*$ (resp.



avec K_2', $K_2^{a'}$, $K_2^{b'}$, $K_2^{c'}$ déployés pour le foncteur $Rf_*^!$). Utilisant les morphismes usuels de changement de base, on obtient un prisme commutatif de complexes sur S:



et on conclut en notant que les flèches du diagramme (4.2.13.1) s'identifient aux flèches composées suivantes :

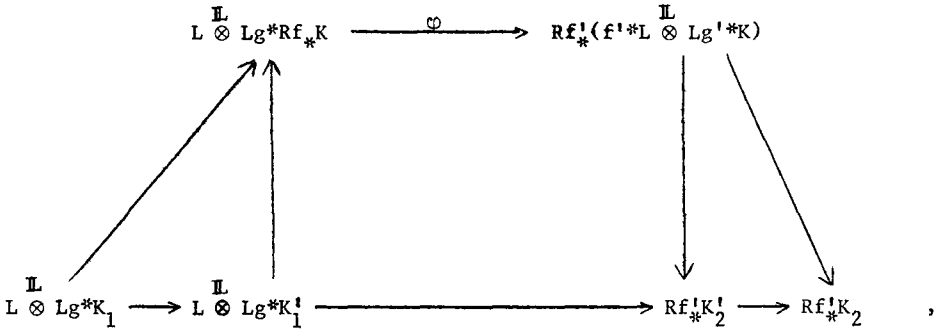
pour φ : la composée des flèches (1);

pour $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*(u')$: la composée des flèches (2) , dont une flèche inverse d'un quasi-isomorphisme ;

pour $Rf'_*(v')$: la composée des flèches (3) , dont une flèche inverse d'un quasi-isomorphisme ;

pour C'_{uv} : la composé des flèches (4) .

Dans le cas général, posons $K'_1 = f_*K$ et $K'_2 = f'^*L \otimes g^*K$. On dispose alors d'un diagramme



dont les triangles sont commutatifs, ainsi que le rectangle intérieur d'après ce qui précède. Le contour est donc commutatif, et ceci prouve 4.2.13.

4.3. Le théorème de changement de base.

On se propose de reformuler en termes de catégories dérivées le théorème de changement de base pour les morphismes propres XII 5.1 (iii).

Théorème 4.3.1. Soit un diagramme cartésien de schémas

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

avec f propre. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ des faisceaux d'anneaux de torsion sur S et S' et L un complexe borné supérieurement de $(\mathcal{A}', g^*\mathcal{A})$-bimodules. On suppose que la dimension des fibres de f est bornée. L'hypothèse 4.2.12 (a) est alors remplie, et la flèche de changement de base (4.2.12.3), entre foncteurs de $D^-(X, f^*\mathcal{A})$ dans $D^-(S', \mathcal{A}')$:

$$\varphi_K : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg^*K \longrightarrow Rf'_*(f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Lg'^* K) \quad ,$$

est un isomorphisme.

Les foncteurs considérés sont triangulés et "way-out" [RD I 7], de sorte que, pour vérifier que φ_K est un isomorphisme, il suffit de vérifier que les $\varphi_{\underline{H}^i(K)}$ sont des isomorphismes. On peut donc supposer que K est réduit à un faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules (de torsion) placé en degré 0 .

Pour vérifier que φ_K est un isomorphisme, il suffit de le vérifier après application du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{A}'$-Modules dans celle des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modules, où $n\mathcal{A} = n\mathcal{A}' = 0$.

Ceci permet de se ramener au cas où $\mathcal{A}' = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n\mathcal{A} = 0$. On peut alors remplacer L par un complexe isomorphe dans la catégorie dérivée, à composantes plates sur $g^*\mathcal{A}$, et borné supérieurement. Les foncteurs considérés étant triangulés et "way out" en L, il suffit de vérifier que φ_K est un isomorphisme après avoir remplacé L par une de ses composantes. On peut donc supposer que L est réduit à un faisceau de $g^*\mathcal{A}$-modules plats placé en degré 0 . Il faut prouver que les flèches

$$\varphi^q : L \otimes g^*R^qf_*K \longrightarrow R^qf'_*(f'^*L \otimes g^*K)$$

sont des isomorphismes. Soit s un point géométrique de S', X_s la fibre de X' en s et K_s les images réciproques de K sur X_s . En vertu de XII 5.1 (iii), la fibre en s de φ^q est la flèche

$$\varphi^q_s : L_s \otimes H^q(X_s,K) \longrightarrow H^q(X_s, L_s \otimes K) \quad .$$

En vertu du théorème de D. Lazard [1], le $\mathcal{A}_s$-module plat L_s est limite inductive filtrante de $\mathcal{A}_s$-modules libres $L_{s,i}$; le foncteur $H^q(X_s,*)$ commute aux limites inductives filtrantes. La flèche φ^q est donc limite inductive des flèches

$$\varphi^q_i : L_{s,i} \otimes H^q(X_s,K) \longrightarrow H^q(X_s, L_{s,i} \otimes K) \quad .$$

Ces dernières sont évidemment des isomorphismes, donc aussi φ^q_s , et φ est un isomorphisme.

Variantes 4.3.2. (i) Lorsque L est un complexe borné de composantes de Tor-dimension finie sur $g^*\mathcal{A}_0$, les hypothèses (c) de 4.2.12 sont remplies, et on peut travailler dans la catégorie dérivée entière. (ii) Si L borné inférieurement, à composantes de Tor-dimension finie sur $g^*\mathcal{A}_0$, les hypothèses (b) de 4.2.12 sont remplies, même si $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_0'$ ne sont pas de torsion ; la flèche de changement de base φ_K ($K \in D^+(X, f^*\mathcal{A}_0)$) sera un isomorphisme si les faisceaux $\underline{H}^i(K)$ sont de torsion.

5. Les foncteurs image directe à support propre.

5.1. La construction fondamentale.

On se propose de suivre le programme indiqué en 3.1 et de définir le foncteur $Rf_!$ pour f un morphisme compactifiable (3.2). On montrera en appendice comment traiter le cas d'un morphisme séparé de type fini quelconque.

5.1.1. Soient X un topos, U un ouvert de X (IV 8.3) et j le morphisme d'inclusion de U dans X . On a défini en IV 5.2 un foncteur "prolongement par le vide" de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur U dans celle des faisceaux d'ensembles sur X . Ce foncteur $j_!$ est adjoint à gauche au foncteur de restriction j^* .

On désigne encore par $j_!$ le foncteur de la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur U (resp. des faisceaux en groupes, resp. des faisceaux de $j^*\mathcal{A}$-modules pour $\mathcal{A}$ faisceau d'anneaux sur X)

dans la catégorie analogue sur X, adjoint à gauche au foncteur de restriction j^* (IV). Ces trois foncteurs $j_!$ sont compatibles aux foncteurs d'oubli, de la catégorie des Modules dans celle des Groupes, et de la catégorie des Groupes dans celle des Ensembles pointés (*). Si $i : F \longrightarrow X$ est l'inclusion du fermé complémentaire de U, alors $j^*j_!$ est (canoniquement isomorphe à) l'identité et $i^*j_!$ est le foncteur constant de valeur l'objet initial (ou final, cela revient ici au même). Ceci caractérise d'ailleurs $j_!$. On en déduit que les trois foncteurs $j_!$ envisagés sont exacts et s'injectent dans les foncteurs j_* correspondants. On les appelle foncteurs de prolongement par zéro. La formule $(j_1\ j_2)^* = j_2^*\ j_1^*$ se transpose en un isomorphisme de transitivité

$$(j_1\ j_2)_! = j_{1!}\ j_{2!} \quad .$$

Les foncteur $j_!$ sont compatibles aux changements de base :

Lemme 5.1.2. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos, V un ouvert de Y et U son image réciproque dans X :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f'} & V \\ \downarrow{\scriptstyle j'} & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad .$$

Il existe alors un et un seul isomorphisme de changement de base $f^*j_! \xrightarrow{\sim} j_!\, f'^*$ rendant commutatif le diagramme

(5.1.2.1)
$$\begin{array}{ccc} f^*j_! & \xrightarrow{\sim} & j_!f'^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*j_* & \xrightarrow{\alpha} & j_*f'^* \end{array} \quad ,$$

où α est la flèche de changement de base.

(*) Mais pas dans celle des Ensembles !

Preuve. La flèche de changement de base $\varphi : j^*f_* \longrightarrow f'_*j'^*$ est trivialement un isomorphisme. Elle se transpose en un isomorphisme de changement de base $\varphi' : j_! f'^* \xrightarrow{\sim} f^*j_!$. Pour vérifier que le diagramme (5.1.2.1)est commutatif, il suffit de voir que sa restriction à U l'est, ce qui est trivial.

5.1.3. Sous les hypothèses de 5.1.1, avec X annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$, le foncteur $j_!$ sur les Modules est exact, donc passe trivialement aux catégories dérivées et définit un foncteur, encore noté $j_!$, de $D(U, j^*\mathcal{A})$ dans $D(X, \mathcal{A})$. On dispose encore d'isomorphismes de transitivité

$$(5.1.3.1) \qquad (j_1 j_2)_! = j_{1!}\, j_{2!} \quad .$$

On a encore, au niveau des catégories dérivées, une formule d'adjonction

$$(5.1.3.2) \qquad \mathrm{Hom}_{D(X)}(j_!K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D(U)}(K, j^*L) \quad .$$

5.1.4. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y, et annelons X par le faisceau d'anneaux image réciproque de $\mathcal{A}$. Supposons que la dimension des fibres de f soit majorée par un entier n (ce qui est le cas si Y est quasi-compact) . On sait alors que pour chaque faisceau de $f^*\mathcal{A}$-modules F sur X, les faisceaux $R^q f_* F$ sont nuls pour $q > 2n$ (XII 5.3 bis). Le foncteur f_* admet donc un foncteur dérivé (1.2.10)

$$Rf_* : D(X, f^*\mathcal{A}) \longrightarrow D(Y, \mathcal{A}) \quad .$$

Si f est le composé g h de deux morphismes propres, on dispose d'une formule de transitivité $Rf_* = Rg_* Rh_*$, qu'on peut comme d'habitude exprimer en terme de catégories cofibrées (Scholie 5.1.3).

5.1.5. Soit un diagramme commutatif de schémas

(5.1.5.1)
$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j_1} & X \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & \xrightarrow[j_2]{} & Y \end{array} \quad ,$$

dans lequel j_1 et j_2 sont des immersions ouvertes et f, g des morphismes propres dont la dimension des fibres est majorée par un entier n . Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y, et annelons U, V et X par les images réciproques de $\mathcal{A}$. En vertu de 5.1.3.2, si $K \in D(U)$, définir une flèche

(5.1.5.2) $$d : j_{2!} Rg_* K \longrightarrow Rf_* j_{1!} K$$

revient à définir une flèche

$$d' : Rg_* K \longrightarrow j_2^* Rf_* j_{1!} K \quad .$$

Le produit fibré $X' = V \times_Y X$ s'insère dans un diagramme commutatif

(5.1.5.3)
$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{k} & X' & \xrightarrow{j_2'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V & = & V & \xrightarrow[j_2]{} & Y \end{array} \quad ,$$

et, trivialement, on a $j_2^* Rf_* j_{1!} K \simeq Rf'_*(j_2'^* j_{1!} K) \simeq Rf'_* k_! K$.

La flèche k est une immersion ouverte propre ; on a donc $k_! = k_*$, d'où un isomorphisme $Rf'_* k_! K \simeq Rf'_* k_* K \simeq Rg_* K$, qui nous fournit l'isomorphisme d' cherché et le morphisme d . On voit de plus que la restriction de d à V est un isomorphisme.

Lemme 5.1.6. Le morphisme 5.1.5.2 est un isomorphisme.

Il reste à vérifier que la restriction de d à Y - V = F est un isomorphisme. Soit $X'' = X \times_Y F$ et appliquons le théorème de changement de base pour un morphisme propre (4.3.1) au carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{i'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f''} & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ F & \xrightarrow{i} & Y \end{array} ,$$

pour $\mathcal{A}' = i^* \mathcal{A}$ et $L = \mathcal{A}'[0]$. On trouve :

$i^* Rf_* j_{1!} K \simeq Rf''_* i'^* j_{1!} K \simeq Rf''_* 0 \simeq 0$, de sorte que les deux membres de (5.1.5.2) sont nuls en dehors de U et que d est un isomorphisme.

5.1.7. Soit S un schéma annelé par un faisceau d'anneaux de torsion $\mathcal{A}$. Pour tout S-schéma $\varphi : X \longrightarrow S$, on pose $\mathcal{A}_X = \varphi^* \mathcal{A}$. Plaçons-nous dans la catégorie (S) des S-schémas quasi-compacts quasi-séparés et des morphismes S-compactifiables (3.2). En vertu de 3.2.3, cette catégorie, la sous-catégorie (S,i) des immersions ouvertes, et la sous-catégorie (S,p) des morphismes propres vérifient les hypothèses 3.2.4 .

On se propose d'appliquer la théorie 3.3.2 aux données suivantes (notations de 3.3.1)

α) $F(X) = D(X, \mathcal{A}_X)$ pour $\varphi : X \longrightarrow S$ dans S :

(i) Pour $p : X \longrightarrow Y$ propre, on prend pour foncteur p_* le foncteur Rp_* .

(ii) On utilise les isomorphismes de transitivité usuels $R(pq)_* = Rp_* Rq_*$.

(i') Pour une immersion ouverte $i : X \longrightarrow Y$, on prend pour foncteur i_* le foncteur $i_!$.

(ii') On utilise les isomorphismes de transitivité (5.1.3.1).

(iii) Pour tout diagramme commutatif (5.1.5.1) on prend pour isomorphisme d l'isomorphisme (5.1.5.2).

On vérifie les conditions (a) (b) (c) (a') (b') (c') de 3.3.2, ce qui prouve le point (a) du :

Théorème 5.1.8. (a) Dans la catégorie (S) définie dans 5.1.7, on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ un foncteur

$$Rf_! : D(X, \mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y, \mathcal{A}_Y) \quad ,$$

et pour tout morphisme composé $f = g\,h : X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$ des isomorphismes de transitivité $c_{f,g}$ entre $Rf_!$ et $Rg_!\,Rh_!$ de sorte que

(i) Les $c_{f,g}$ vérifient la "condition de cocycles"

$$(c_{f,g} * Rh_!) \circ c_{fg,h} = (Rf_! * c_{g,h}) \circ c_{f,gh} \quad .$$

(ii) Lorsqu'on se restreint aux morphismes propres (resp. aux immersions ouvertes) on retrouve la théorie de variance 5.1.4 (resp. 5.1.3).

(iii) Pour tout diagramme (5.1.5.1), l'isomorphisme d (5.1.5.2) est l'isomorphisme composé $c_{f,j'} \circ c^{-1}_{j,f'}$.

(b) Les foncteurs $Rf_!$ sont "way out" [RD I 7] et triangulés.

Tout foncteur $Rf_!$ est composé d'un foncteur Rg_* , pour g propre de but quasi-compact, donc à fibres de dimension bornée, et d'un foncteur $j_!$ pour j immersion ouverte. Ces foncteurs sont way out et triangulés, donc aussi $Rf_!$.

5.1.8.1. Les isomorphismes de transitivité 5.1.8 (a) sont souvent utilisés via la suite spectrale "des foncteurs composés" qui s'en déduit, valable pour $K \in \mathrm{Ob}\ D(X,\mathcal{A}_X)$:

$$(5.1.8.2) \qquad E_2^{pq} = R^p g_! R^q h_!(K) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(K) \quad .$$

Pour l'obtenir, on note que d'après 5.1.8 b) et [VERDIER 2], pour tout $L \in \mathrm{Ob}\ D(Y,\mathcal{A}_Y)$, on dispose d'une suite spectrale

$$(5.1.8.3) \qquad E_2^{pq} = R^p g_! (\underline{H}^q(L)) \Longrightarrow R^{p+q} g_! (L) \quad ,$$

et (5.1.8.2) est le cas particulier de (5.1.8.3) pour $L = Rh_! K$.

Définition 5.1.9. (i) On appelle "foncteurs image directe à support propre totals" les foncteurs construits en 5.1.8. On omettra l'adjectif "total" lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion.

(ii) On appelle $q^{\text{ième}}$ foncteur image directe à support propre, et on désigne par $R^q f_!$, le foncteur composé $\mathcal{H}^q \circ Rf_!$.

(iii) Si X est un schéma sur un corps k séparablement clos, immergeable dans un schéma propre sur k, on identifie faisceaux de modules

sur Spec(k) et modules usuels, et on désigne le foncteur $R^q f_!$ par l'une des notations $H^q_c(X,)$, $H^q_!(X,)$, ou simplement $H^q_c( )$ s'il n'y a pas danger de confusion. On l'appelle alors "$q^{\text{ième}}$ groupe d'hypercohomologie à support propre", ou "$q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie à support propre" si on l'applique à un complexe réduit au degré 0 .

5.1.9.1. La notation $Rf_!$ est abusive en ce que le foncteur $Rf_!$ n'est pas le dérivé droit du foncteur $f_!$ qui sera défini en 6.1.2. Certains préfèrent la notation $R_!f$.

5.1.10. Les ingrédients dans la démonstration de 5.1.8 sont le théorème de changement de base propre et l'identité entre j_* et $j_!$ lorsque j est une immersion ouverte propre. Cela permet d'énoncer diverses variantes à 5.1.8 ; on laisse au lecteur le soin de leur donner un sens précis et de les vérifier.

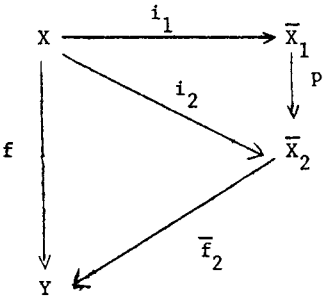
Variante 5.1.11. Dans la catégorie (S), on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ un foncteur $f_!$ de la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Y et pour tout morphisme composé $f = g\,h$ des isomorphismes de transitivité vérifiant des conditions (i), (ii) (iii) analogues à celles de 5.1.4.

Voir 6.1.2 pour une description directe de ce foncteur.

Variante 5.1.12. On peut, pour tout morphisme compactifiable $f : X \to Y$, définir un foncteur $R^1 f_!$ de la catégorie des faisceaux de groupes Ind-finis sur X dans la catégorie des faisceaux d'ensembles pointés sur Y, avec pour toute compactification $f = \bar{f} j$ de f, un isomorphisme $R^1 f_! \xrightarrow{\sim} R^1 \bar{f}_* \circ f_!$.

On ne postule ici aucune formule de transitivité ; le seul problème est de montrer que le foncteur $R^1 f_!$ ne dépend pas de la compactification choisie de f . Soit $p : (\bar{f}_1, i_1) \longrightarrow (\bar{f}_2, i_2)$ un morphisme de compactification, i.e. un diagramme

(5.1.12.1)



,

où $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 \circ p$, p étant propre. Si G est un faisceau au groupes sur X, on dispose d'une suite exacte d'ensembles pointés (avec α injectif)

$$0 \longrightarrow R^1 f_{2*}(p_* \, i_{1!} G) \xrightarrow{\alpha} R^1 f_{1*}(i_{1!} G) \longrightarrow \bar{f}_{2*} \, R^1 p_*(i_{1!} G) \quad ,$$

et d'une flèche de $i_{2!} G$ dans $p_* \, i_{1!} G$, d'où par composition une flèche β de $R^1 f_{2*} \, i_{2!} G$ dans $R^1 f_{1*} \, i_{1!} \, G$. Raisonnant comme en 3.3.2.1, on voit que le problème est de prouver que cette flèche est toujours un isomorphisme lorsque G est Ind-fini.

Si on applique le théorème de changement de base propre à p et au faisceau d'ensembles $i_{1!}G$, on vérifie que $p_*i_{1!}G = i_{2!}G$, d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow R^1f_{2*}(i_{2!}G) \xrightarrow{\beta} R^1f_{1*}(i_{1!}G) \longrightarrow \bar{f}_{2*}\, R^1p_*\, i_{1!}\, G \quad .$$

La flèche β est injective (car α l'est). Si on applique le théorème de changement de base propre à p et au faisceau en groupes G , supposé Ind-fini, on trouve que $R^1p_*\, i_{1!}\, G = 0$. Donc β est un épimorphisme, ce qui achève de démontrer 5.1.12.

Définition 5.1.13. Pour tout site X, on désigne par $D_{tors}(X)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux abéliens sur X, formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont de torsion.

Variante 5.1.14. Dans la catégorie (S), on peut d'une, et essentiellement d'une seule façon, définir pour toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ un foncteur triangulé et "way out" [RD, I 7]

$$Rf_! \; : \; D^+_{tors}(X) \longrightarrow D^+_{tors}(Y)$$

et pour tout morphisme composé $f = g\ h$ des isomorphismes de transitivité vérifiant des conditions (i) (ii) (iii) analogues à celles de 5.1.4.

Variante 5.1.5. Plaçons-nous dans la catégorie des S-schémas annelés par des faisceaux de torsion, les flèches étant les morphismes de schémas annelés induisant (0.8) un morphisme S-compactifiable de schémas. Pour toute flèche

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B}) ,$$

soit $Rf_!$ le composé du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules dans celle des $f^*\mathcal{B}$-modules, et de $Rf_!$. Ces foncteurs jouissent des propriétés de variance des foncteurs $Rf_!$ usuels.

On notera toutefois que la notation $Rf_!$ n'est raisonnable ici que si $\mathcal{A}$ est fini sur $f^*\mathcal{B}$, ainsi qu'on s'en rend compte en prenant X = Y = Spec(k), k algébriquement clos.

5.1.16. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $j : U \longrightarrow X$ un ouvert de X, $i : F \longrightarrow X$ le fermé complémentaire, $\mathcal{A}_S$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathcal{A}_X$ son image réciproque sur X et $K \in \mathrm{Ob}\, D(X, \mathcal{A}_X)$.

La suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow j_!j^*K \longrightarrow K \longrightarrow i_!i^*K \longrightarrow 0$$

donne naissance à un triangle distingué dans $D(X, \mathcal{A}_X)$ [VERDIER C.D. I 2.4]. Son image par $Rf_!$ est un triangle distingué (5.1.8 (b))

(5.1.16.1) $R(fj)_!j^*K \longrightarrow Rf_!K \longrightarrow R(f\,i)_!\, i^*K \longrightarrow R(f\,j)_!j^*K[1] \ldots$

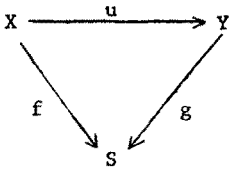
qui définit une suite exacte longue de cohomologie

(5.1.16.2) $\ldots R^q(fj)_!j^*K \longrightarrow R^qf_!K \longrightarrow R^q(fi)_!i^*K \xrightarrow{j} R^{q+1}(fj)_!j^*K \to \ldots$.

Dans le cas particulier où S est spectre d'un corps séparablement clos et où K est réduit à un faisceau $\underline{G}$ placé en degré 0, la suite (5.1.16.2) s'écrit

(5.1.16.3) $\ldots H^q_c(U, \underline{G}) \longrightarrow H^q_c(X, \underline{G}) \longrightarrow H^q_c(F, \underline{G}) \xrightarrow{j} H^{q+1}_c(U, \underline{G}) \ldots$

5.1.17. Soit un diagramme de schémas S-compactifiables



,

avec u propre. On annèle X et Y par l'image réciproque d'un faisceau d'anneaux de torsion Λ_S sur S. Pour $K \in D(Y,\mathcal{A}_Y)$, la flèche évidente (d'adjonction) $K \longrightarrow Ru_*u^*K$ définit par application du foncteur $Rg_!$ une flèche

(5.1.17.1) $\qquad u^* : Rg_! K \longrightarrow Rg_!Ru_*u^*K = Rg_! Ru_!u^*K \simeq Rf_!u^*K$

(contravariance de la cohomologie à support propre vis-à-vis des morphismes propres).

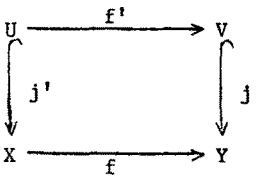
Pour S spectre d'un corps algébriquement clos et K réduit à un faisceau $\underline{G}$ placé en degré 0, cette flèche s'écrit

(5.1.17.2) $\qquad u^* : H^q_c(Y,\underline{G}) \longrightarrow H^q_c(X,\underline{G})$

5.2. Le théorème de changement de base.

5.2.1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos, V un ouvert de Y, $U = f^{-1}(V)$ son image réciproque dans X, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur Y, $\mathcal{A}'$ un faisceau d'anneaux sur X et L un complexe borné supérieurement de $(\mathcal{A}', f^*\mathcal{A})$-bimodules :

(5.2.1.1)



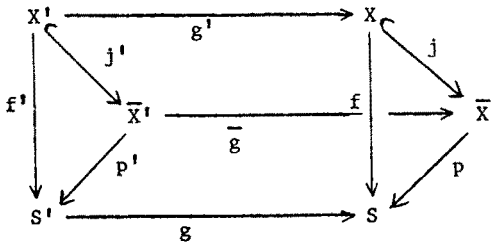
.

On dispose alors d'un isomorphisme de changement de base (5.1.2.1) entre foncteurs de $D(V,\mathcal{A})$ dans $D(X,f^*\mathcal{A})$: $f^*j_! \xrightarrow{\sim} j'_!f'^*$. De plus, on dispose d'un isomorphisme évident entre foncteurs de $D^-(U,f'^*\mathcal{A})$ dans $D^-(X,\mathcal{A}')$: $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}} j'_! K \xrightarrow{\sim} j'_!(j'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}} K)$. Pour le construire, il suffit de noter que si un complexe K est déployé pour le foncteur $j'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}}$, alors le complexe $j'_!K$ est déployé pour le foncteur $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}}$, et qu'on dispose d'un isomorphisme du type précédent au niveau des complexes. Composant ces deux isomorphismes, on obtient un isomorphisme de changement de base entre foncteurs de $D^-(V,\mathcal{A})$ dans $D^-(X,\mathcal{A}')$:

$$(5.2.1.2) \qquad L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f^*\mathcal{A}} f^* j_!K \xrightarrow{\sim} j'_!(j'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{f'^*\mathcal{A}} f'^*K) \quad .$$

Si L est borné à composante de tor-dimension finie sur $f^*\mathcal{A}$, cet isomorphisme est encore défini pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(V,\mathcal{A})$.

5.2.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ et $g : S' \longrightarrow S$ des morphismes de schémas, et supposons que f soit le composé d'une immersion ouverte j et d'un morphisme propre p, dont la dimension des fibres soit bornée par un entier n (automatique pour S quasi-compact). Ces morphismes s'insèrent dans un diagramme à carrés cartésiens



Soient $\mathcal{B}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $\mathcal{A}'$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S' et L un complexe borné supérieurement de $(\mathcal{A}', g^*\mathcal{B})$-bimodules. On annèle X et $\overline{X}$ (resp. X' et $\overline{X}'$) par les images réciproques $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_{\overline{X}}$ (resp. $\mathcal{A}'_{X'}$ et $\mathcal{A}'_{\overline{X}'}$) de $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}'$) sur X et $\overline{X}$ (resp. X' et $\overline{X}'$). On dispose alors d'isomorphismes de changement de base (5.2.1.2) entre les foncteurs $p'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \bar{g}^* j_!K$ et $j'_!(f'^*L \otimes g'^*K)$ de $D^-(X, \mathcal{B}_X)$ dans $D^-(\overline{X}', \mathcal{A}'_{\overline{X}'})$, et d'isomorphismes de changement de base (4.3.1) entre les foncteurs $L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Rp_* K$ et $Rp'_* (p'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \bar{g}^*K)$ de $D^-(\overline{X}, \mathcal{B}_{\overline{X}})$ dans $D^-(S', \mathcal{A}')$. Par compsition, on en déduit un isomorphisme de changement de base entre foncteurs de $D^-(X, \mathcal{B}_X)$ dans $D^-(S', \mathcal{A}')$

$$(5.2.2.1) \qquad L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Rp_* j_! K \xrightarrow{\sim} Rp'_* j'_! (f'^*L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g'^*K) \quad .$$

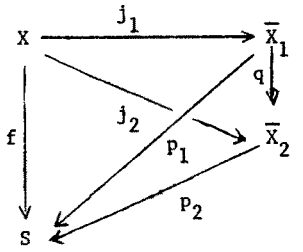
Lorsque L est borné à composantes de tor-dimension finie, les arguments précédents et 4.3.2 (i) permettent de définir l'isomorphisme de changement de base pour $K \in \mathrm{Ob}\, D(X, \mathcal{B}_X)$.

Pour pouvoir référer à 5.1.8, supposons que S soit quasi-compact quasi-séparé. Les foncteurs $Rp_* j_! = Rf_!$ et $Rp'_* j'_! = Rf'_!$ ne dépendent alors que de f et f', ce qui donne un sens au

Lemme 5.2.3. L'isomorphisme de changement de base (5.2.2.1) ne dépend pas de la compactification choisie $f = p\, j$ de X .

Soit un morphisme de compactification $q : \overline{X}_1 \longrightarrow \overline{X}_2$

(5.2.3.1)



L'isomorphisme de changement de base c_1 relatif à $\bar{X}_1$ s'obtient en "composant" ceux relatifs à j_1 et p_1 , ou encore en composant ceux relatifs à j_1, q et p_2 . L'isomorphisme c_2 relatif à $\bar{X}_2$ s'obtient en composant ceux relatifs à j_2 et p_2 . Pour vérifier que $c_1 = c_2$, il suffit de vérifier que l'isomorphisme c_1' relatif à j_2 s'obtient comme le composé c_2' de ceux relatifs à j_1 et q . Désignons par un ' les flèches déduites par le changement de base g des flèches (5.2.3.1) ; c_1' et c_2' sont des isomorphismes

$$c_1', c_2' : L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \bar{g}_2^* j_{2!} K \xrightarrow{\sim} j_{2!}' (j_2'^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g'^* K) \quad .$$

D'après (5.1.3.2), pour vérifier que $c_1' = c_2'$, il suffit de le vérifier après s'être restreint à X_2' , ce qui est trivial.

Les isomorphismes de changement de base relatifs à deux compactifications entre lesquelles il existe un morphisme sont donc égaux, et on conclut par 3.2.6 (ii).

Lemme 5.2.4. Soit $f = u\,v : X \longrightarrow Y \longrightarrow S$ un composé de morphismes S-compactifiables. Les isomorphismes de changement de base (5.2.2.1) relatifs à u, v et f donnent lieu à un diagramme commutatif (notations de (5.2.4.1) ci-dessous) :

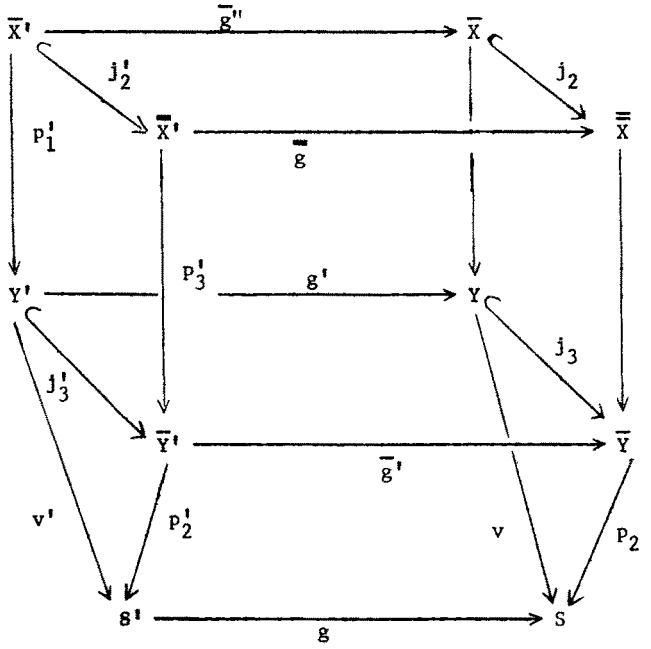
$$\begin{array}{ccc} L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Ruv_! K & \xrightarrow{\sim} & Ru'v'_!((u'v')^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g''^* K) \\ \| & & \| \\ L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g^* Ru_! Rv_! K & \xrightarrow{\sim} Ru_!(u'^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g'^* Rv_!) \xrightarrow{\sim} & Ru_! Rv_!(v'^* u'^* L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} g''^* K) \end{array} .$$

Choisissons une compactification de (u,v) (3.2.5) :

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{g''} & X & \overset{j_1}{\subset} & \overline{X} & \overset{j_2}{\subset} & \overline{\overline{X}} \\ \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \swarrow{\scriptstyle p_3} \\ Y' & \xrightarrow{g'} & Y & \overset{j_3}{\subset} & \overline{Y} & & \\ \downarrow{\scriptstyle v'} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \swarrow{\scriptstyle p_2} & & \\ S' & \xrightarrow{g} & S & & & & \end{array} \qquad (5.2.4.1)$$

Le lemme 5.2.4 exprime que l'isomorphisme de changement de base c_1 relatif à f est le composé c_2 de ceux relatifs à u et v . L'isomorphisme c_1 s'obtient en composant les isomorphismes de changement de base relatifs à j_1, j_2, p_3 et p_2 . Pour c_2, on compose ceux relatifs à j_1, p_1, j_3, p_2 . Il suffit donc de comparer les isomorphismes c_1' , composé de ceux relatifs à p_3 et j_2, et c_2' , composé de ceux relatifs à j_3 et p_1 .

Soit le diagramme cartésien



,

$L' = p_2'^* L$ et

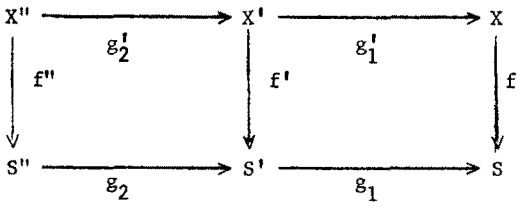
$$c_1', c_2' : L' \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \overline{g}'^* R(j_3 p_1)_! K \xrightarrow{\sim} R(j_3' p_1')_! ((j_3' p_1')^* L' \otimes \overline{g}''^* K) \quad .$$

En vertu de (5.1.3.2), pour vérifier que $c_1' = c_2'$, il suffit de vérifier que $j_3'^*(c_1') = j_3'^*(c_2')$, ce qui est trivial.

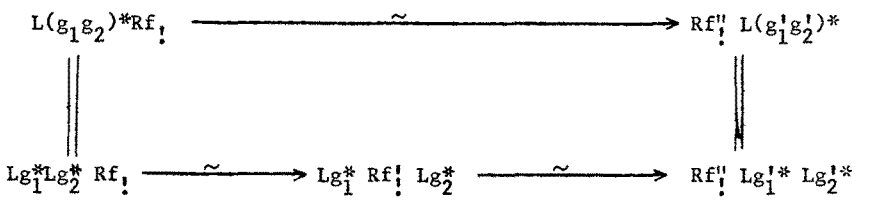
Lemme 5.2.5. Soient des morphismes de schémas annelés par des faisceaux d'anneaux de torsion

$$(S'', \mathcal{A}'') \xrightarrow{g_2} (S', \mathcal{A}') \xrightarrow{g_1} (S, \mathcal{A}) ,$$

et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, d'où un diagramme :



On annèle X, X', X" par $f^*\mathcal{A}$, $f'^*\mathcal{A}'$ et $f''^*\mathcal{A}''$. Alors, le diagramme



est commutatif.

Ce lemme se déduit aussitôt des résultats analogues pour les foncteurs $j_!$ et Rp_* pour p propre. On laisse au lecteur le soin de le moduler.

On résume les énoncés qui précédent en le

Théorème 5.2.6. Le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base.

Variantes 5.2.7. (i) Les foncteurs $f_!$ (pour les faisceaux d'ensembles pointés : 5.1.11) et les foncteurs $R^1f_!$ (pour les faisceaux en groupes : 5.1.12) commutent aux changement de base.

(ii) Les foncteurs $Rf_!$ (5.1.14) commutent aux changements de base.

(iii) Sous les hypothèses (5.2.2), si L est borné et à composantes de tor-dimension finie, les foncteurs $Rf_! : D(X) \longrightarrow D(S)$, commutent aux changements de base.

Le théorème 5.2.6 est essentiellement équivalent à la conjonction des deux corollaires 5.2.8 et 5.2.9 suivants.

Proposition 5.2.8. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, et $\mathfrak{F}$ un faisceau de torsion sur X . Pour tout point géométrique s de S, soient X_s la fibre géométrique de X en s et $\mathfrak{F}_s$ le faisceau induit. On a canoniquement

$$(R^q f_! (\mathfrak{F}))_s = H_c^q(X_s, \mathfrak{F}_s) \quad .$$

Corollaire 5.2.8.1. Si les fibres de f sont de dimension $\leq d$, le foncteur $Rf_!$ est de dimension cohomologique $\leq 2d$ (1.2.9) : pour tout faisceau de torsion F, on a $R^i f_! F = 0$ pour $i > 2d$. Le foncteur $R^{2d} f_!$ est donc exact à droite sur la catégorie des faisceaux de torsion.

On se ramène par changement de base (5.2.8) au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Si alors $\overline{X}$ est un schéma propre sur S contenant X comme ouvert de Zariski dense, $j : X \longrightarrow \overline{X}$, on a $\dim(\overline{X}) = \dim(X) \leq D$. Pour $\underline{F}$ faisceau de torsion sur X et $i > 2d$, on a donc, par X 4.3, 5.2

$$H_c^i(X, \underline{F}) = H^i(\overline{X}, j_! F) = 0 \quad .$$

Proposition 5.2.9. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, K un complexe borné supérieurement de $f^*\mathcal{A}$ -modules à gauche et L un complexe borné supérieurement de $\mathcal{A}$ -modules à droite . On a canoniquement

$$L \overset{\mathbf{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} Rf_!(K) = Rf_!(f^*L \overset{\mathbf{L}}{\underset{f^*\mathcal{A}}{\otimes}} K) \quad .$$

Cette proposition implique formellement le résultat suivant :

Théorème 5.2.10. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable, $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur S, $K \in D^-(X, f^*\mathcal{A})$ et $d \in \mathbb{Z}$. Si K est de Tor-dimension finie $\leq d$ (4.1.9), alors $Rf_! K$ est de Tor-dimension finie $\leq d$.

Il suffit de vérifier que pour tout faisceau de $\mathcal{A}$-modules à droite L sur S, on a

$$H^{-i}(L \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rf_! K) = 0 \quad \text{pour } i > d \quad .$$

D'après 5.2.9 , on sait que

$$H^{-i}(L \overset{L}{\otimes} Rf_! K) = R^{-i}f_!(f^*L \overset{L}{\otimes} K) \ ,$$

de plus, par hypothèse,

$$H^{-i}(f^* L \overset{L}{\otimes} K) = 0 \text{ pour } i > d \ ,$$

et on conclut en remarquant que si un complexe M de faisceaux de modules sur X satisfait à $H^{-i}(M) = 0$ pour $i > d$, alors on a encore $H^{-i}(Rf_! M) = 0$ pour $i > d$.

Dans le cas particulier des faisceaux d'anneaux constants et noethériens, on a le résultat plus général :

Théorème 5.2.11. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de sites , A un anneau , C son centre et $d \in \mathbb{Z}$. On suppose que

(i) le foncteur $Rf_* : D^+(X,C) \longrightarrow D^+(S,C)$ est de dimension cohomologique finie.

(ii) A est noethérien à droite.

(iii) S a assez de points.

Pour tout complexe $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X,A)$ de faisceaux de A-modules à gauche, si K est de Tor-dimension finie $\leq d$, alors le complexe $Rf_* K \in \mathrm{Ob}\, D^-(S,A)$ est de Tor-dimension $\leq d$.

Preuve. En vertu de (i), le foncteur f_* est dérivable en des foncteurs

$$Rf_* : D(X,A) \longrightarrow D(S,A)$$

et

$$Rf_* : D(X,C) \longrightarrow D(S,C)$$

D'après 4.2.8 , il suffit de vérifier que pour tout point s de S, le complexe $(Rf_*K)_s$ de A-modules est de Tor-dimension $\leq d$; il suffit pour cela que pour tout A-module à droite L de type fini on ait

$$H^{-i}(L \overset{L}{\otimes} Rf_* K) = 0 \text{ pour } i > d \quad .$$

Raisonnant comme en 5.2.10, on voit qu'il suffit pour cela que la "flèche de changement de base"

$$L \overset{L}{\otimes} Rf_* K \longrightarrow Rf_*(L \overset{L}{\otimes} K) \tag{5.2.11.1}$$

soit un isomorphisme.

Soit L* une résolution de L par des A-modules libres de type fini. Les foncteurs considérés étant way-out à droite, il suffit de prouver que (5.2.11.1) est un isomorphisme après avoir remplacé L par une quelconque composante de L_* , et on est ramené au cas trivial où L est libre de type fini.

Remarques 5.2.12. (i) L'hypothèse (iii) de 5.2.11 est sans doute inutile. (ii) Si on omet l'hypothèse noethérienne sur A, 5.2.11 reste valable lorsque les foncteurs $R^i f_*$ commutent aux limites inductives filtrantes. (iii) L'hypothèse que S soit annelé par un faisceau d'anneaux constant est essentielle. On obtiendrait un contre-exemple en prenant pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète strictement local, pour f l'inclusion du point générique η, pour faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ le faisceau valant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ au point générique et $\mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$ au point fermé s ($n > 1$ premier aux caractéristiques résiduelles) et pour faisceau le module $f^*\mathcal{A}$.

5.3. Théorème de comparaison et théorème de finitude.

5.3.1. A un schéma X de type fini sur $\mathbb{C}$ sont associés son site étale X_{et}, son site transcendant X_{cl} et un morphisme de sites (XI 4)

$$\varepsilon : X_{cl} \longrightarrow X_{et} \quad .$$

Si $j : U \longrightarrow X$ est une immersion ouverte, le diagramme commutatif

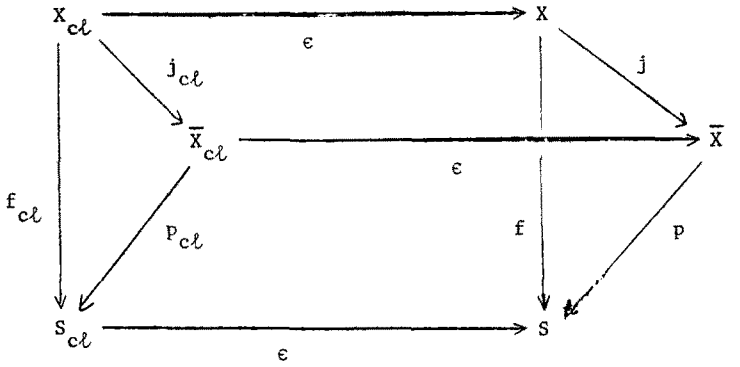
$$\begin{array}{ccc} U_{cl} & \longrightarrow & U_{et} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{cl} & \longrightarrow & X_{et} \end{array}$$

identifie $\widetilde{U_{cl}}$ à l'ouvert de $\widetilde{X_{cl}}$ image réciproque de l'ouvert $\widetilde{U_{et}}$ de $\widetilde{X_{et}}$

Si $p : Y \longrightarrow X$ est un morphisme propre, l'application continue $p^{an} : Y^{an} \longrightarrow X^{an}$ est propre et séparée. Pour le voir, on se ramène par le lemme de Chow au cas p projectif.

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$ et soit $f = p\,j$ une compactification de f .

(5.3.1.1)



Le foncteur $p_{c\ell *}\, j_{c\ell !}$ n'est autre que le foncteur image directe à support propre $f_{c\ell !}$ (voir VERDIER [3]). Si $S_{c\ell}$, donc $X_{c\ell}$ est séparé, le foncteur $j_{c\ell !}$ transforme faisceaux mous sur $X_{c\ell}$ en faisceau mous sur $\overline{X}_{c\ell}$ [TF II 3.5.5]. La question étant locale sur S, il transforme en tout cas faisceaux flasques sur $X_{c\ell}$ en faisceaux sur $X_{c\ell}$ acycliques pour le foncteur $p_{c\ell *}$. On a donc (cf. VERDIER [3])

$$Rf_{c\ell} = Rp_{c\ell *}\; j_{c\ell !} \quad .$$

5.3.2. D'après 5.1.2, on dispose d'un isomorphisme de changement de base, entre foncteurs de $D(X)$ dans $D(\overline{X}_{c\ell})$

$$\epsilon^* j_! \xrightarrow{\sim} j_{c\ell !}\, \epsilon^* \quad .$$

D'après 4.2.12 ou 4.1.5, on dispose d'un morphisme de changement de base entre foncteurs de $D^+(\overline{X})$ dans $D^+(S_{cl})$:

$$\epsilon^* Rp_* \longrightarrow Rp_{cl*}\, \epsilon^* \quad .$$

Par composition, on en déduit un morphisme de changement de base, entre foncteurs de $D^+_{tors}(X)$ dans $D^+_{tors}(S_{cl})$ (5.1.13)

$$\epsilon^* Rf_! \longrightarrow Rf_{cl!}\, \epsilon^* \quad . \tag{5.3.2.1}$$

On vérifie comme en 5.2.3 qu'il ne dépend pas de la compactification choisie de f ; il vérifie une formule de transitivité du type 5.2.4.

Théorème 5.3.3. (Théorème de comparaison). Le morphisme (5.3.2.1) est un isomorphisme.

Par construction, il suffit de traiter le cas où f est propre. Les foncteurs considérés sont triangulés et "way-out" [RD I 7]. Il suffit donc de traiter le cas où K est réduit à un faisceau de torsion placé en degré 0, et on conclut par XVI 4.1 (i).

Variantes 5.3.4. (i) Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux de torsion sur S_{et}, on obtient de même un isomorphisme (5.3.2.1) entre foncteurs de $D(X, f^*\mathcal{A})$ dans $D(S, \epsilon^*\mathcal{A})$.

(ii) En bas degré, on trouve les variantes habituelles pour les faisceaux d'ensembles pointés et les faisceaux en groupes Ind-finis.

Corollaire 5.3.5. Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, qui puisse se compactifier en un schéma propre sur $\mathbb{C}$, et F un faisceau de torsion sur X . On a alors

$$H^q_!(X,F) \xrightarrow{\sim} H^q_c(X_{c\ell}, \epsilon^*F) \quad .$$

Théorème 5.3.6. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme compactifiable de présentation finie et A un anneau de torsion noethérien à gauche. Le foncteur $Rf_! : D(X,A) \longrightarrow D(S,A)$ transforme complexes à cohomologie constructible en complexes à cohomologie constructible.

L'assertion est locale sur S, qu'on peut supposer affine. Par passage à la limite, on se ramène au cas S noethérien. Les complexes à cohomologie constructible forment une sous-catégorie triangulée de D(S,A). Le foncteur $Rf_!$ étant "way-out", on se ramène à vérifier que si $\mathfrak{F}$ est un faisceau constructible de A-modules, les faisceaux $R^qf_!\mathfrak{F}$ sont constructibles. Soit f = pj, avec p propre et j une immersion ouverte. On a $R^qf_!\mathfrak{F} = R^qp_*(j_!\mathfrak{F})$. Le faisceau $j_!\mathfrak{F}$ est constructible et on conclut par XIV 1.1.

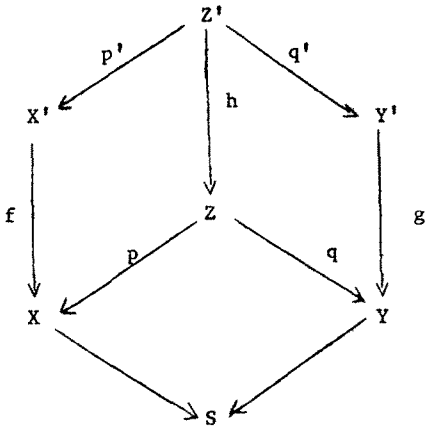
5.3.7. En bas degrés, on dispose d'énoncés analogues pour les images directes à support propre d'un faisceau constructible d'ensembles ou de groupes Ind-finis.

Corollaire 5.3.8. Soient X un schéma séparé de type fini sur un corps séparablement clos k et $\mathfrak{F}$ un faisceau constructible de torsion sur X . On suppose que X puisse se compactifier en un schéma propre sur k . Alors, les groupes $H^q_c(X,\mathfrak{F})$ sont finis.

5.4. Formule de Künneth.

5.4.1. Soit un diagramme commutatif (0.11) de sites

(5.4.1.1)



On suppose S annelé par un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$, de centre $\mathcal{C}$; on désignera encore par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ les images réciproques de ces faisceaux sur les sites de (5.4.1.1).

Si K est un faisceau de $\mathcal{A}$-modules à droite sur X et L un faisceau de $\mathcal{A}$-modules à gauche sur Y, on pose

$$K \underset{\mathcal{A}}{\boxtimes} L = p^* \underset{\mathcal{A}}{\otimes} q^* L$$

(produit tensoriel externe). De même pour K (resp. L) sur X' (resp. Y'). Soit alors K un faisceau de $\mathcal{A}$-modules à droite sur X' et L un faisceau de $\mathcal{A}$-modules à gauche sur Y'. Les flèches de changement de base (XII 4.1) définissent

(5.4.1.2)
$$\begin{cases} p^* f_* K \longrightarrow h_* p'^* K \\ q^* g_* L \longrightarrow h_* q'^* L \end{cases},$$

d'où, par produit tensoriel, une flèche

(5.4.1.3) $\quad f_*K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_0} g_*L \longrightarrow h_*p'^*K \otimes_{\mathcal{A}_0} h_*q'^*L \longrightarrow h_*(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_0} L)$.

Supposons que les foncteurs

$$Rf_* : D^+(X', \mathcal{A}'^0) \longrightarrow D^+(X, \mathcal{A}^0)$$

$$Rg_* : D^+(Y', \mathcal{A}_0) \longrightarrow D^+(Y, \mathcal{A}_0)$$

$$Rh_* : D^+(Z', \mathcal{C}) \longrightarrow D^+(Z, \mathcal{C})$$

soient de dimension cohomologique finie, et se prolongent donc aux catégories dérivées entières. Il s'impose alors, pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X', \mathcal{A}'^0)$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^-(Y', \mathcal{A}_0)$, de définir une flèche de Künneth

(5.4.1.4) $\quad Rf_* K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_0} Rg_*L \longrightarrow Rh_*(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_0} L)$.

On ne la définira que si les sites considérés ont assez de points, de façon à pouvoir utiliser 4.2.1C et 4.2.8 . En vertu de 4.2.10, il suffit de la définir pour un couple (K,L) déployé à gauche pour le foncteur $(K,L) \longmapsto K \boxtimes_{\mathcal{A}_0} L$, K et L étant déployés à droite pour les foncteurs f_* et g_* et bornés supérieurement.

Soient K_1 une résolution plate de f_*K, L_1 une résolution plate de g_*L et $u : K \overset{L}{\boxtimes} L \longrightarrow M$ une résolution de $K \overset{L}{\boxtimes} L$, déployée pour le foncteur Rh_* . On dispose de morphismes

$$Rf_*K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_0} Rg_*L \xleftarrow{\sim} K_1 \boxtimes_{\mathcal{A}_0} L_1 \longrightarrow f_*K \boxtimes_{\mathcal{A}_0} g_*L \longrightarrow$$

$$\longrightarrow h_*(K \boxtimes_{\mathcal{A}_0} L) \longrightarrow h_*M \xleftarrow{\sim} Rh_*(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}_0} L)$$

et on définit (5.4.1.4) comme leur composé.

Cette flèche a la propriété caractéristique suivante, de démonstration toute analogue à celle de 4.2.13 :

5.4.1.5. Soient $K \in \mathrm{Ob}\ C^-(X', \mathcal{A}^0)$ et $L \in \mathrm{Ob}\ C^-(Y', \mathcal{A})$. Posons $K_1 = f_*K$, $L_1 = g_*K$, et $M_2 = K \boxtimes L$. Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
Rf_*K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} Rg_* L & & & & & & Rh_*(K \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} L) \\
\uparrow & & & & & & \downarrow \\
K_1 \overset{\mathbf{L}}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} L_k & \longrightarrow & K_1 \boxtimes L_1 & \longrightarrow & h_* M_2 & \longrightarrow & Rh_* M_2
\end{array} .$$

On a une commutativité analogue (cf. 4.2.13) en partant plûtôt de morphismes $K_1 \longrightarrow f_*K$, $L_1 \longrightarrow g_*K$ et $K \boxtimes L \longrightarrow M_2$.

La commutativité 5.4.1.5 rend en principe aisée la vérification des propriétés de compatibilité du morphisme de Künneth.

5.4.2. Soient un diagramme commutatif (5.4.1.1) de schémas et $\mathcal{A}$ un faisceau de torsion sur S. Supposons que f et g sont compactifiables (3.2.1), que $Z = X \times_S Y$ et que $Z' = X' \times_S Y'$. Factorisons f et g en un morphisme propre et une immersion ouverte ; on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X' & \xrightarrow{p'} & Z' & \xleftarrow{q'} & Y' & \\
 & \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_3} & & \downarrow{\scriptstyle j_2} & \\
f & \overline{X'} & \xrightarrow{\overline{p}} & \overline{Z'} & \xleftarrow{\overline{q}} & \overline{Y'} & g \\
 & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{h}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{g}} & \\
 & X & \xleftarrow{p} & Z & \xrightarrow{q} & Y &
\end{array}$$

dans lequel on a posé $\overline{Z}' = \overline{X}' \times_S \overline{Y}'$. On dispose d'un isomorphisme de nature triviale, pour K et L complexes sur X' et Y'

$$(5.4.2.1) \qquad j_{3!}(K \boxtimes_{\mathcal{A}} L) \xrightarrow{\sim} j_{1!} K \boxtimes_{\mathcal{A}} j_{2!} L \quad .$$

En "composant" l'inverse de cet isomorphisme et la flèche de Künneth (5.4.1.4) relative à $(\overline{f},\overline{g},\overline{h},j_{1!}K,j_{2!}L)$, on obtient, pour $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(X',\mathcal{A})$ et $L \in \mathrm{Ob}\, D^-(Y',\mathcal{A})$, une flèche de Künneth

$$(5.4.2.2) \qquad Rf_! K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} Rg_! L \longrightarrow Rh_!(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L) \quad ,$$

dont on vérifie qu'elle ne dépend pas des compactifications choisies.

Théorème 5.4.3. Sous les hypothèses de 5.4.2, la flèche de Künneth en cohomologie à supports propres (5.4.2.2) est un isomorphisme.

Preuve. (a) Par construction, il suffit de vérifier ce résultat lorsque f et g (donc aussi h) sont propres.

(b) Soit un diagramme commutatif

$$(5.4.3.1) \qquad \begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{p_1} & S_1 & \xrightarrow{q_1} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{p} & S & \xrightarrow{q} & Y \end{array} \quad ,$$

et soient $Z_1 = X_1 \underset{S_1}{\times} Y_1$, $X_1' = X' \underset{X}{\times} X_1$, $Y_1' = Y' \underset{Y}{\times} Y_1$ et $Z_1' = X_1' \underset{S_1}{\times} Y_1' = Z' \underset{Z_1}{\times} Z_1$, de sorte que l'on dispose d'un morphisme de diagrammes (5.4.1),

$$(S_1,X_1,Y_1,Z_1,X_1',Y_1',Z_1') \longrightarrow (S,X,Y,Z,X',Y',Z')$$

dont les flèches seront uniformément désignées par C .

On admettra que :

Lemme 5.4.3.2. Le diagramme suivant est commutatif :

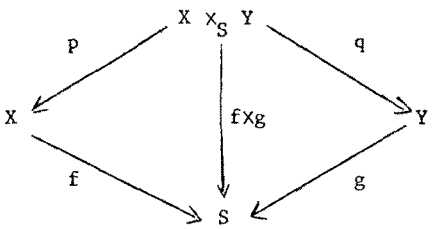
$$\begin{array}{ccccc} C^*(Rf_!\, K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} Rg_!\, L) & = & C^*Rf_!K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} C^*\, Rg_!\, L & \xrightarrow{\sim} & Rf_{1!}C^*K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} Rg_{1!}\, C^*\, L \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C^*(Rh_!(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} L)) & \xrightarrow{\sim} & Rh_!(C^*(K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} L)) & = & Rh_!(C^*K \overset{L}{\boxtimes}_{\mathcal{A}} C^*\, L) \end{array} .$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont des flèches de changement de base et les flèches verticales les flèches de Künneth pour les deux diagrammes (5.4.1.1) considérés.

Pour prouver 5.4.3 , il suffit de prouver que la flèche de Künneth est un isomorphisme en tout point géométrique de Z . D'après 5.4.3.2, il suffit de le vérifier après un quelconque changement de base (5.4.3.1) tel que S_1 soit le spectre d'un corps algébriquement clos et p_1, q_1 des isomorphismes.

Après un tel changement de base, le diagramme (5.4.1.1) se réduit à un diagramme

(5.4.3.3)



et la flèche de Künneth à une flèche (5.4.4.1)

(5.4.3.4) $\quad k : Rf_! K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} Rg_! L \longrightarrow R(f\times g)_!(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L)$.

(c) Soit un diagramme (5.4.3.3) dans lesquel f et g sont propres. On admettra que :

Lemme 5.4.3.5. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} Rf_!K \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} Rg_!L & \longrightarrow & R(f\times g)_!(K \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\boxtimes}} L) \\ \downarrow & & \| \\ Rf_!(K \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} f^*Rg_!L) & \longrightarrow & Rf_! Rp_!(p^*K \otimes q^*L) \end{array} .$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales sont les flèches de Künneth et la flèche de changement de base. Les flèches verticales sont une flèche de changement de base par f et un isomorphisme de transitivité. Le théorème 5.5.9 est conséquence de ce lemme et de 4.3.1.

Le lecteur courageux pourra vérifier que ce lemme reste valable si f et g ne sont pas nécessairement propres.

5.4.4. Soient S un schéma, $f_i : X_i' \longrightarrow X_i$ $(i\in I)$ une famille finie de morphismes compactifiables de S-schémas, X le produit sur S des X_i, X' le produit sur S des X_i' et $f : X' \longrightarrow X$ le produit des f_i. Si S est annelé par $\mathcal{A}$, comme en 5.4.1, et si on annèle les X_i et X_i' par l'image réciproque de $\mathcal{A}$, on a plus généralement un isomorphisme

(5.4.4.1) $\quad \overset{\mathbb{L}}{\underset{i\in I}{\boxtimes}} Rf_{i!}(K_i) \xrightarrow{\sim} Rf_!(\overset{\mathbb{L}}{\underset{i\in I}{\boxtimes}} K_i)$,

pour $K_i \in \mathrm{Ob}\, D^-(X_i', \mathcal{A})$. La définition de cet isomorphisme, ainsi que celle des deux membres de (5.4.4.1), ne nécessite pas le choix d'un ordre total sur I .

5.5. Cohomologie des puissances symétriques.

Le résultat principal de ce n° est le théorème 5.5.21, donnant en particulier la cohomologie à supports propres d'une puissance symétrique d'un schéma X sur un corps k algébriquement clos, pour des coefficients convenables (par exemple $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) en terme de la cohomologie à supports propres de X . L'analogue de ce théorème en topologie semi-simpliciale est bien connu, tout au moins pour la cohomologie à coefficients dans un anneau commutatif A ; il se vérifie au niveau des cochaines semi-simpliciales. En effet, si X_* est un ensemble semi-simplicial, il existe une bijection continue canonique de la réalisation géométrique de la puissance symétrique n.ème $(X_*)^n/G_n$ de X_* dans la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de la réalisation géométrique de X_* , et cette bijection induit un isomorphisme sur la cohomologie.

5.5.1. Rappelons quelques propriétés (dues à D. LAZARD) des modules plats, quelques propriétés (dues à ROBY) des foncteurs TS^n et T^n , et quelques propriétés (dues à DOLD et PUPPE) des foncteurs dérivés de foncteurs non additifs.

5.5.1.1. Tout module plat sur un anneau A est limite inductive filtrante de modules libres de type fini (LAZARD [1, I 1.2]). Ce résultat implique les suivants :

5.5.1.2. Le foncteur $\varinjlim$ est une équivalence de la catégorie des Ind-objets (I 8.1) de la catégorie des A-modules libres de type fini (resp. projectifs de type fini) avec la catégorie des A-modules plats.

5.5.1.3. Si A et B sont deux anneaux, tout foncteur T : Mod(A) $\longrightarrow$ Mod(B) qui transforme module libre de type fini en module plat et commute aux limites inductives filtrantes, transforme module plat en module plat (LAZARD [1, I 1.5]).

5.5.1.4. Toute suite exacte de A-modules, avec L" plat,

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

est limite inductive de suites exactes scindées (LAZARD [1, I 2.3]).

5.5.2. Soient A un anneau commutatif et M un A-module.

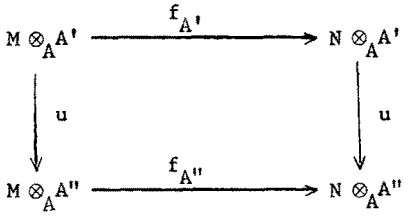
5.5.2.1. Pour tout entier n, on désigne par $TS^n(M)$ (ou $TS^n_A(M)$) le module des tenseurs symétriques de degré n de M . Désignant par $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique de degré n, on a par définition

$$TS^n(M) = (\overset{n}{\otimes} M)^{\mathfrak{S}_n} \quad .$$

Si B est une A-algèbre, alors $TS^n(B)$ est une sous-algébre de $\overset{n}{\otimes} B$. Si de plus B est commutatif, alors $Spec(TS^n(B))$ est par définition la puissance symétrique $n^{ième}$ de Spec(B) sur Spec(A) :

$$Spec(TS^n_A(B)) = Sym^n_{Spec(A)}(Spec(B) \underset{dfn}{=} (Spec(B)/Spec(A))^n/\ \mathfrak{S}_n$$

5.5.2.2. Rappelons (ROBY [1, I 1 pg.226]) qu'une <u>loi polynôme</u> f d'un A-module M dans un A-module N est la donnée, pour toute A-algèbre commutative A', d'une application $f_{A'} : M \otimes_A A' \longrightarrow N \otimes_A A'$, ces applications étant telles que pout tout homomorphisme de A-algèbres $u : A' \longrightarrow A''$, le diagramme



soit commutatif.

Une loi polynôme f est dite homogène de degré n (ROBY [1, I 1 pg.226]) si, pour tout $a' \in A'$, on a identiquement

$$f_{A'}(a' x) = a'^{n} f_{A'}(x) \quad .$$

Une telle loi polynôme s'appellera aussi application n^{ique} (quadratique, cubique, ...) ; on notera leur ensemble

$$\mathrm{Hom}\ n^{ique}\ (M,N) \quad .$$

Plus généralement, si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille finie de A-modules et $\underline{n} = (n_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers, une loi polynôme multihomogène de multidegré $\underline{n}$ des modules M_i dans N est une loi polynôme de ΣM_i dans N vérifiant identiquement, pour $a_i \in A'$,

$$f_{A'}((a_i x_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} a_i^{n_i} \cdot f_{A'}((x_i)_{i\in I}) \quad .$$

On notera $\mathrm{Hom}\ \underline{n}^{ique}((M_i),N)$ l'ensemble de ces lois polynômes.

5.5.2.3. Pour tout module M, le foncteur covariant des A-modules dans les ensembles

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}\ n^{ique}(M,N)$$

est représentable par un A-module $\Gamma^n(M)$ (ou $\Gamma^n_A(M)$), muni d'une

application n^{ique} universelle $\gamma^n : M \longrightarrow \Gamma^n(M)$ (ROBY [1, IV 1 pg.226]).

Etant donné $(M_i)_{i\in I}$ et $\underline{n}$ comme en 5.5.2.2, le foncteur covariant

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}\ \underline{n}^{ique}((M_i),N)$$

est représenté par le module $\bigotimes_{i\in I} \Gamma^{n_i}(M_i)$, muni de la loi polynôme multihomogène (de multidegré $\underline{n}$) universelle $(m_i) \longmapsto \bigotimes_{i\in I} \gamma^{n_i}(m_i)$.

5.5.2.4. Les foncteurs TS^n et Γ^n commutent aux limites indcutives filtrantes (pour le second, (ROBY [1, IV 6 pg.275]). Ils transforment modules libres en modules libres, donc modules plats en modules plats (5.5.1.2).

5.5.2.5. L'application n^{ique} de M dans $TS^n(M)$ donnée par $m \longmapsto \overset{n}{\otimes} m$ définit une application φ, dite canonique, de $\Gamma^n(M)$ dans $TS^n(M)$, vérifiant

$$\varphi(\gamma^n(m)) = \overset{n}{\otimes} m \quad .$$

Cette application est un isomorphisme pour M libre de type fini (ROBY [1,IV pg.272]) donc aussi pour M plat (5.5.2.4 et 5.5.1.1).

Soit M un A-module et P une suite exacte

$$P : P_1 \xrightarrow{d} P_o \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \quad .$$

Soit $P_1' = P_1 \times P_o$, et soient j_o et j_1 les morphismes de P_1' dans P_o de coordonnées (d,Id) et (0,Id). La suite

$$\Gamma^n(P_1') \underset{\Gamma^n(j_1)}{\overset{\Gamma^n(j_o)}{\rightrightarrows}} \Gamma^n(P_o) \longrightarrow \Gamma^n(M) \longrightarrow 0$$

est alors exacte (ROBY [1 pg.284]). Pour P une présentation plate de

M, on en déduit une description du foncteur Γ^n via le foncteur TS^n

$$(5.5.2.5.1)\qquad TS^n(P_1') \rightrightarrows TS^n(P_0) \longrightarrow \Gamma^n(M) \longrightarrow 0 \quad .$$

5.5.2.6. Si $M = M' \oplus M''$, l'application n^{ique}

$$m \longmapsto (\gamma^{n'}m \otimes \gamma^{n''}m)_{n'+n''=n}$$

définit un isomorphisme, dit canonique (ROBY [1, III 4])

$$(5.5.2.6.1)\qquad \Gamma^n(M) \xrightarrow{\sim} \sum_{n'+n''=n} \Gamma^{n'}(M) \otimes \Gamma^{n''}(M) \quad .$$

Si Σ est une suite exacte

$$\Sigma : 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

le module $\Gamma^n(M)$ est muni d'une filtration canonique (décroissante) et de morphismes

$$(5.5.2.6.2)\qquad \Gamma^i(M') \otimes \Gamma^{n-i}(M') \longrightarrow Gr^i(\Gamma^n(M)) \quad .$$

Ces données sont caractérisées par les propriétés d'être fonctorielles en Σ et de vérifier une compatibilité évidente avec (5.5.2.6.1) pour Σ scindable. Les flèches (5.5.2.6.2) sont des isomorphismes pour Σ scindable, donc aussi pour M'' plat (5.5.1.4).

5.5.2.7. Le foncteur Γ^n commute à l'extension des scalaires (ROBY [1, III 3 pg.262]) (la propriété analogue pour TS^n est en général fausse).

5.5.2.8. Si $u : M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ est une application bilinéaire, alors $\gamma^n \circ u$ est une loi polynôme bihomogène de bidegré (n,n) et définit donc

$$(5.5.2.3)\quad u^n : \Gamma^n(M_1) \otimes \Gamma^n(M_2) \longrightarrow \Gamma^n(N) \text{ vérifiant } u^n(\gamma^n x \otimes \gamma^n y) = \gamma^n u(x,y).$$

En particulier, si B est une A-algèbre, le produit : $B \times B \longrightarrow B$ induit un produit sur $\Gamma^n(B)$. Ce produit fait de $\Gamma^n(B)$ une A-algèbre, et l'application canonique de $\Gamma^n(B)$ dans $TS^n(B)$ est un homomorphisme d'algèbres.

5.5.3. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On désignera par $\mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A})$ la catégorie des objets co-semi-simpliciaux de $\mathcal{A}$, par $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes différentiels K avec $K^i = 0$ pour $i < 0$, et par $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ l'image de $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ dans $K(\mathcal{A})$. Si $K \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A})$, le complexe normalisé associé $N(K) \in \mathrm{Ob}\ C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ est défini par

(5.5.3.1)
$$\begin{cases} N(K)^n = \text{intersection des noyaux des opérateurs de dégénérescence de } K^n \text{ dans } K^{n-1} \\ d = \Sigma(-1)^i \partial_i \end{cases}$$

Si on désigne encore par K le complexe de composantes K^n, et de différentielle $d = \Sigma(-1)^i \partial_i$, alors N(K) est un sous-complexe facteur direct dans K, et K/N(K) est homotope à zéro.

D'après **DOLD-PUPPE** [1], le foncteur N est une équivalence de catégories

$$N : \mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{\geq 0}(\mathcal{A}) \quad .$$

Cette équivalence et son inverse transforment morphismes homotopes en morphismes homotopes. De plus, pour tout $K \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{ssimpl}^+(\mathcal{A})$, K^n est somme de copies de $N(K)^i$ $(i \leq n)$; si $\mathbb{P}$ est une propriété d'objets de $\mathcal{A}$, stable par sommes finies et facteurs directs, on en déduit que les K^i ont la propriété $\mathbb{P}$ pour $i \leq n$ si et seulement si les $N(K)^i$ ont cette propriété pour $i \leq n$.

L'équivalence N est utilisée par DOLD et PUPPE pour étendre tout foncteur (non nécessairement additif) $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ dans une catégorie quelconque $\mathcal{B}$ en un foncteur $C^{\geq 0}(T)$ (ou simplement T) de $C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ dans $C^{\geq 0}(\mathcal{B})$

(5.5.3.2) $$C^{\geq 0}(T) = N\ T\ N^{-1} \quad .$$

Le foncteur $C^{\geq 0}(T)$ passe au quotient pour définir

(5.5.3.3) $$T \text{ ou } K^{\geq 0}(T) : K^{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow K^{\geq 0}(\mathcal{B}) \quad .$$

5.5.3.4. Si T est de degré $\leq n$, i.e. si le $(n+1)^{\text{ième}}$ "cross effect" est nul (DOLD-PUPPE [1, 4.18 pg.232]) alors, pour tout $K \in \text{Ob } C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ tel que $K^i = 0$ pour $i > m$, on a $[T(K)]^i = 0$ pour $i > nm$ (DOLD-PUPPE [1, 4.2.3 pg.233]).

5.5.3.5. En particulier, si T est un foncteur de degré fini de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules, qui transforme objet plat en objet plat, alors un complexe plat borné a pour image un complexe plat borné.

Lemme 5.5.4. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

(i) Les quasi-isomorphismes dans $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ permettent un calcul des fractions à gauche et à droite.

(ii) Le foncteur évident est une équivalence entre la catégorie déduite de $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ en inversant les quasi-isomorphismes et la catégorie $D^{\geq 0}(\mathcal{A})$.

Le foncteur $\tau_{\geq 0} : C(\mathcal{A}) \longrightarrow C^{\geq 0}(\mathcal{A})$ (1.1.13) passe au quotient pour définir un foncteur $\tau_{\geq 0} : K(\mathcal{A}) \longrightarrow K^{\geq 0}(\mathcal{A})$, adjoint à gauche à l'inclusion de $K^{\geq 0}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}$. Le foncteur $\tau_{\geq 0}$ transforme quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, et la flèche d'adjonction $X \longrightarrow \tau_{\geq 0}(X)$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $H^i(X) = 0$ pour $i < 0$. Le lemme 5.5.4 résulte donc de VERDIER [CD] et des points (i) et (ii) du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 5.5.4.1. Soient K une catégorie, K' une sous-catégorie pleine, S un ensemble de morphismes de K égal à l'image inverse de l'ensemble des isomorphismes de $K(S^{-1})$ (cf. [GAB.ZIS 1, chap 1]) et S' sa trace dans K'. On suppose que l'inclusion i de K' dans K admet un adjoint à gauche τ , et que $\tau(S) \subset S'$.

(i) Le foncteur évident de $K'(S'^{-1})$ dans $K(S^{-1})$ est pleinement fidèle, et admet τ pour adjoint à gauche.

(ii) Si $K(S^{-1})$ peut se calculer par calcul de fractions à gauche (resp. à droite), alors $K'(S'^{-1})$ a la même propriété.

Si l'inclusion i n'a pas nécessairement d'adjoint à gauche, et si τ désigne le foncteur non partant défini adjoint à gauche à i, on a :

(iii) Si $K(S^{-1})$ peut se calculer par calcul de fractions à gauche (resp. à droite) et si pour tout $u \in S$, de but (resp. de source) dans K', $\tau(u)$ est défini et dans S', alors $K'(S'^{-1})$ admet un calcul de fractions à gauche (resp. à droite) et le foncteur $K'(S'^{-1}) \longrightarrow K(S^{-1})$ est pleinement fidèle.

5.5.5. Soit $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur entre catégories abéliennes. Comme en 1.2.1, on définit les dérivés de T

$$LT : D^{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow Pro(D^{\geq 0}(\mathcal{B}))$$

$$RT : D^{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow Ind(D^{\geq 0}(\mathcal{B}))$$

par les formules

$$LT(K) = \text{"lim"}_{\overleftarrow{s:K' \to K}} T(K')$$

$$RT(K) = \text{"lim"}_{\overrightarrow{s:K \to K'}} T(K') ,$$

où s parcourt la catégorie filtrante des quasi-isomorphismes de but (resp. de source) K .

On dit que T est dérivable à gauche (resp. à droite) en K si LT(K) (RT(K)) est représentable. On dit que K est déployé à gauche (resp. à droite) pour T (ou, par abus de langage, déployé pour LT (resp. RT)) si la flèche canonique suivante est un isomorphisme :

$$LT\ K \xrightarrow{\sim} TK \quad (\text{resp. } TK \xrightarrow{\sim} RT\ K) \quad .$$

Proposition 5.5.6. Soit F un foncteur de la catégorie des modules sur un anneau A dans une catégorie abélienne $\mathcal{B}$. Supposons que les limites inductives filtrantes dans $\mathcal{B}$ soient représentables et soient exactes, et que F commute aux limites inductives filtrantes. Alors tout complexe borné $M^{\cdot} \in Ob\ K^{\geq 0}(A)$ de modules plats est déployé pour LF .

La proposition résulte immédiatement des définitions, du lemme suivant, qui sera prouvé en 5.5.6.4, et du fait que les quasi-isomorphismes $u : N^{\cdot} \longrightarrow M^{\cdot}$, avec $N^{\cdot} \in B^{b,\geq 0}(A)$ à composantes plates, forment un ensemble cofinal dans la catégorie des quasi-isomorphismes de but $M^{\cdot}$.

Lemme 5.5.6.1. Soit $u : N^{\cdot} \longrightarrow M^{\cdot}$ un quasi-isomorphisme entre complexes plats, objets de $C^{b,\geq 0}(A)$. Alors, $F(u)$ est un quasi-isomorphisme.

Lemme 5.5.6.2. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie additive et d un intervalle borné supérieurement de $\mathbb{Z}$. On désigne par C^{d} (resp. $C^{d,b}$, resp. K^{d}, resp. $K^{d,b}$) la catégorie des complexes nuls en degrés $i \notin d$ (resp. et bornés, resp. à homotopie près). On a une équivalence

$$\underline{\ell} \ : \ \mathrm{Ind}(C^{d,b}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\approx} C^{d}(\mathrm{Ind}\ \mathcal{A}) \quad ;$$

l'inverse de cette équivalence induit un foncteur

$$\underline{\ell}' \ : \ K^{d}(\mathrm{Ind}\ \mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ind}(K^{d,b}(\mathcal{A})) \quad .$$

A) Prouvons que $\underline{\ell}$ est pleinement fidèle. Soit donc K un complexe borné d'objets de $\mathcal{A}$ et $L = \text{"}\varinjlim\text{"}\ L_{\alpha}$ un Ind-complexe. On a

$$\mathrm{Hom}(K,L) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \varinjlim \mathrm{Hom}(K,L_{\alpha}) = \varinjlim Z^{0}(\mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L_{\alpha})) \simeq Z^{0} \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,L_{\alpha})$$

$$\xrightarrow{\sim} Z^{0}\ \mathrm{Hom}^{\cdot}(K,\ell L) = \mathrm{Hom}(K,\ell L) \quad ,$$

l'avant-dernier isomorphisme provenant du fait que K est fini, de sorte que la $\varinjlim$ commute au passage du double au simple complexe. Ceci prouve l'assertion.

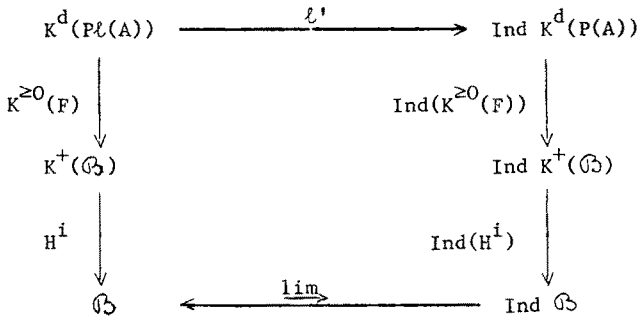
B) On laisse au lecteur le soin (assez fastidieux) de vérifier que $\underline{\ell}$ est essentiellement surjectif en construisant, de gauche à droite, à partir d'un degré arbitrairement choisi, "suffisamment" de complexes bornés s'envoyant dans un complexe borné supérieurement de Ind-objets K ; et de développer de même le point suivant :

C) Si $\ell f : \ell \varinjlim K_\alpha \longrightarrow \ell \varinjlim L_\beta$ est homotope à zéro : $f = d\,H + H\,d$, alors, pour tout α, H se relève en $H^i_\alpha : K^i_\alpha \longrightarrow L^i_{\beta(\alpha)}$ qui, pour β assez grand, définit une homotopie à zéro de $f_\alpha : K_\alpha \longrightarrow L_{\beta(\alpha)}$.

5.5.6.3. Soient A un anneau, d un intervalle borné supérieurement de $\mathbb{Z}$, P(A) la catégorie des A-modules projectifs de type fini, $P\ell(A)$ la catégorie des A-modules plats. Désignons par $D^{\mathrm{Tor}\subset d}(A)$ l'image de $C^d(P\ell(A))$ dans D(A) et par $D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)$ l'image de $C^{d,b}(P(A))$ dans D(A). D'après 5.5.1.2, on a $P\ell(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}\ P(A)$. On a par ailleurs $K^{d,b}(P(A)) \xrightarrow{\sim} D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)$. On déduit dès lors de 5.5.6.2, et du fait que H^i commute aux limites inductives filtrantes, qu'il existe un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{array}{ccc}
C^d(P\ell(A)) & \xleftarrow[\sim]{\varinjlim} & \mathrm{Ind}\ C^{d,b}(P(A)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K^d(P\ell(A)) & \xrightarrow{\ell'} & \mathrm{Ind}\ K^{d,b}(P(A)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
D^{\mathrm{Tor}\subset d}(A) & \xrightarrow{\ell''} & \mathrm{Ind}\ D^{\mathrm{parf}\subset d}(A)
\end{array}$$

5.5.6.4. Prouvons 5.5.6.1. Avec les notations de 5.5.6.3, si d est un intervalle [0,k], on dispose (car F commute aux $\varinjlim$) de diagrammes commutatifs



Si u est comme en 5.5.6.1, alors, d'après 5.5.6.3, $\ell'(u)$ est un isomorphisme, et $H^i\ K^{\geq 0}(F)(u)$ est donc un isomorphisme, ce qu'il fallait prouver.

5.5.7. Soient X un schéma sur un schéma S et k un entier. On suppose que la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^k_S(X)$ est définie. Le lecteur qui voudrait ne pas faire cette hypothèse pourra se placer dans la catégorie des espaces algébriques (ARTIN [1]) . On annèle S par un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{A}$. A partir de 5.5.19, $\mathcal{A}$ sera supposé de torsion. On désignera encore par $\mathcal{A}$, par abus de notations, l'image réciproque de $\mathcal{A}$ sur un quelconque S-schéma.

Soit F un faisceau de modules sur X ; le faisceau $\overset{k}{\boxtimes} F$, produit tensoriel externe de n copies de F, est un faisceau sur X^k/S, équivariant par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ sur X^k/S . Par

passage aux invariants, il définit un faisceau $TS^k_{ext}(\underline{F})$ sur $Sym^k_S(X)$, appelé puissance tensorielle symétrique externe de $\underline{F}$

Pour raisonner "point par point", il est utile de travailler avec les points de $Sym^k_S(X)$ décrits comme suit.

5.5.7.1. Soit s un point géométrique de S . Un point x de $Sym_S(X)$ à valeurs dans k(s) définit un point géométrique de $Sym_S(X)$. On désignera par $(x_1 \dots x_k)$ un point de $(X/S)^k$ à valeurs dans k(s) d'image x, par $y_1 \dots y_\ell$ les éléments distincts de la suite $x_1 \dots x_k$ et par $n_i (1 \leq i \leq \ell)$ la multiplicité de y_i dans cette suite ($\Sigma\, n_i = k$).

Avec les notations de 5.5.7.1, et désignant par $\mathfrak{S}$ un groupe symétrique, on a

$$(5.5.7.2) \qquad TS^k_{ext}(F)_x \xrightarrow{\sim} (\bigotimes_1^\ell (\bigotimes^{n_i} F_{y_i}))^{\prod_1^\ell \mathfrak{S}_{n_i}} ,$$

les produits tensoriels étant pris sur $\mathcal{A}_S$. En particulier, pour F plat, on a, grâce à 5.5.2.5 :

$$(5.5.7.3) \qquad TS^k_{ext}(F)_x \xleftarrow{\sim} \bigotimes_1^\ell \Gamma^{n_i} F_{y_i} ,$$

en utilisant un argument par récurrence sur ℓ, utilisant la platitude des $\Gamma^{n_i} F_{y_i}$ (5.5.2.4) et le fait suivant : si G (resp. H) est un groupe fini opérant sur un A-module M(resp. N), et si M et N^H sont plats, alors $M^G \otimes_A N^H \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N)^{G \times H}$.

5.5.8. Soit F un Module sur X, et P une présentation plate de F

$$P : P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow F \longrightarrow 0 \quad .$$

On définit P'_1, j_o et j_1 comme en 5.5.2.5, et on définit $\Gamma^k_{ext}(F)$ (foncteur Γ externe) comme le conoyau de la double flèche $(TS^k_{ext}(j_o), TS^k_{ext}(j_1))$. Avec les notations de 5.5.7.1, on déduit de 5.5.7.3 et 5.5.2.5 des isomorphismes

$$\Gamma^k_{ext}(F)_x \simeq \bigotimes_1^{\ell} \Gamma^{n_i}(F_{y_i}) \quad . \tag{5.5.8.1}$$

De cette formule, on déduit que $\Gamma^k_{ext}(F)$, qui a priori dépend fonctoriellement de P, ne dépend, à isomorphisme unique près, que de F .

5.5.9. On dispose d'un morphisme fonctoriel

$$\alpha : \Gamma^k_{ext}(F) \longrightarrow TS^k_{ext}(F) \quad .$$

Le couple (Γ,α) est caractérisé par les deux propriétés :

(i) Pour F plat, α est un isomorphisme

(ii) Avec les notations de 5.5.2.5, pour toute présentation

$$P_1 \xrightarrow{d} P_o \xrightarrow{\varepsilon} F \longrightarrow 0$$

de F, la suite

$$\Gamma^k_{ext}(P'_1) \rightrightarrows \Gamma^k_{ext}(P_o) \longrightarrow \Gamma^k_{ext}(F) \longrightarrow 0$$

est exacte.

On a de plus :

(iii) Les foncteurs TS^k et Γ^k commutent aux limites inductives filtrantes (d'après 5.5.7.2, 5.5.8.1, 5.5.2.4).

(iv) Le foncteur Γ^k commute à toute extension $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ de l'anneau de base.

(v) Le foncteur Γ^k commute à tout changement de base $S' \longrightarrow S$: pour tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array} \quad ,$$

on a

$$\mathrm{Sym}_g^k(g')^* \, \Gamma^k_{ext} \simeq \Gamma^k_{ext} \, g'^* \quad .$$

(5.5.8.1 et 5.5.2.7).

(vi) Le foncteur Γ^k commute aux images inverses par tout morphisme <u>radiciel</u> $i : X' \longrightarrow X$ (par exemple une immersion fermée) : On a

$$\mathrm{Sym}_S^k(i)^* \, \Gamma^k_{ext} \simeq \Gamma^k_{ext} \, i^*$$

(5.5.8.1).

(vii) Pour $j : X' \longrightarrow X$ une <u>immersion</u>, on a

$$\mathrm{Sym}_S^k(j)_! \, \Gamma^k_{ext} \simeq \Gamma^k_{ext} \, j_!$$

(5.5.8.1).

5.5.10. Soient k_1, k_2 et $k = k_1 + k_2$ trois entiers ≥ 0 . On dispose alors d'un morphisme fini ( ) :

$$\vee_{k_1 k_2} : \mathrm{Sym}_S^{k_1}(X) \, X_S \, \mathrm{Sym}_S^{k_2}(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}_S^k(X) \quad .$$

Si F_i (i=1,2) est un Module sur $\mathrm{Sym}_S^{k_i}(X)$, on désigne par $F_1 \vee F_2$ le faisceau sur $\mathrm{Sym}_S^k(X)$

$$F_1 \vee F_2 = \vee_{k_1 k_{2*}} (F_1 \boxtimes F_2) \quad .$$

5.5.11. Soit une suite exacte de Modules sur X

$$\Sigma : 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Avec les notations 5.5.7.1, on dispose, grâce à 5.5.8.1 et 5.5.2.6, d'une filtration sur $\Gamma^k_{ext}(F)_x$, et de morphismes :

$$\sum_{\substack{\ell \\ \sum_1 i_\alpha = i}} \bigotimes_1^\ell \Gamma^{i_\alpha}(F'_{y_\alpha}) \otimes \bigotimes_1^\ell \Gamma^{n_i - i_\alpha}(F''_{y_\alpha}) \longrightarrow Gr^i(\Gamma^k_{ext}(F)_x) \quad .$$

Le premier membre n'est autre que $(\Gamma^i_{ext}(F') \vee \Gamma^{k-i}_{ext}(F''))_x$. On vérifie facilement que ces données, construites point par point, proviennent d'une (unique) filtration en k+1 crans de $\Gamma^k_{ext}(F)$, et de morphismes (uniques)

$$(5.5.11.1) \qquad \Gamma^i_{ext}(F') \vee \Gamma^{k-i}_{ext}(F'') \longrightarrow Gr^i(\Gamma^k_{ext}(F)) \quad .$$

Si la suite exacte Σ est scindée, on a plus précisément (vérification point par point à partir de 5.5.2.6.2).

$$(5.5.11.2) \qquad \Gamma^k_{ext}(F' \oplus F'') \simeq \sum_{k_1+k_2=k} \Gamma^{k_1}_{ext}(F') \vee \Gamma^k_{ext}(F'').$$

Si la suite exacte Σ est scindable point par point, ou si F'' est plat, les morphismes (5.5.11.1) sont des isomorphismes (cf. 5.5.1.4).

5.5.12. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas. On suppose que les puissances symétriques $Sym^k_S(X)$ et $Sym^k_S(Y)$ existent. Soient F un Module sur X, G un Module sur Y et $v \in Hom(u^*G, F) \simeq Hom(G, u_*F)$ un u-homomorphisme de F dans G (0.2). Si $\prod^n u$ est la puissance cartésienne $n^{ième}$ de u, l'homomorphisme v induit un $\prod^n u$-homomorphisme $\boxtimes^n v$ de $\boxtimes^n F$ dans $\boxtimes^n G$.

Par passage aux invariants, celui-ci définit

$$TS^n(v) : TS^n_{ext}(F) \xrightarrow[Sym^n_S(u)]{} TS^n_{ext}(G) \quad .$$

On déduit de la définition 5.5.8 qu'il existe un et un seul $Sym^n(u)$-homomorphisme $\Gamma^n_{ext}(v)$, fonctoriel en (F, G, v),

$$(5.5.12.0) \qquad \Gamma^n_{ext}(v) : \Gamma^n_{ext}(F) \xrightarrow[Sym^n_S(u)]{} \Gamma^n_{ext}(G)$$

rendant commutatif le diagramme suivant (cf. (0.2) pour le sens (inhabituel) des flèches) :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^n_{ext}(F) & \xrightarrow[\text{sur } Sym^n_S(u)]{\Gamma^n_{ext}(v)} & \Gamma^n_{ext}(G) \\ \alpha \uparrow \text{ sur Id} & & \alpha \uparrow \text{ sur Id} \\ TS^n_{ext}(F) & \xrightarrow[\text{sur } Sym^n_S(u)]{TS^n_{ext}(v)} & TS^n_{ext}(G) \end{array}$$

On utilisera cette flèche surtout comme "flèche de Künneth symétrique" : pour $G = u_*F$, et v la flèche canonique, la flèche $\Gamma^n_{ext}(v)$ s'identifie à un homomorphismes de Modules

$$(5.5.12.1) \qquad k^n : \Gamma^n_{ext}(u_*F) \longrightarrow Sym^n(u)_* \Gamma^n_{ext}(F) \quad .$$

5.5.13. Soit la condition :

(5.5.13.1). $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X, \mathcal{A})$ et, pour tout point géométrique x de X, le complexe K_x est homotope à un complexe de modules plats $L_x \in Ob\ C^{b,\geq 0}(\mathcal{A}_x)$.

Lemme 5.5.13.2. La sous-catégorie $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A})$ de $D^b(X,\mathcal{A})$ formée des complexes de Tor-dimension ≤ 0 est équivalente à la catégorie qui se déduit de la catégorie des complexes $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A})$ vérifiant (5.5.13.1) en inversant les quasi-isomorphismes. Cette construction peut se faire indifféremment par calcul de fractions à gauche ou à droite.

Soit P la sous-catégorie de $K^-(X,\mathcal{A})$ formée des complexes point par point homotopes à un complexe de modules plats. On sait (VERDIER [C.D.]) que $D^-(X,\mathcal{A})$ se déduit de P en inversant les quasi-isomorphismes, par calcul de fractions à droite ou à gauche. On applique alors 5.5.4.1 à l'inclusion de $K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A}) \cap P$ dans P . En effet, si K est de Tor-dimension ≤ 0, et point par point homotope à des complexes de modules plats L_x , alors $\tau_{\geq 0}(K)$ est point par point homotope aux $\tau_{\geq 0}(L_x)$, et ceux-ci sont encore des complexes de modules plats, de sorte que $\tau_{\geq 0}(K)$ vérifie 5.5.13.1.

5.5.14. D'après 5.5.6.1, 5.5.7.2 ou 5.5.8.1 et 5.5.2.4, tout quasi-isomorphisme $v : K' \longrightarrow K$ entre complexes vérifiant (5.5.13.1) induit des quasi-isomorphismes

$$TS^k(v) : TS^k_{ext}(K') \xrightarrow{\approx} TS^k_{ext}(K)$$

$$\Gamma^k(v) : \Gamma^k_{ext}(K') \xrightarrow{\approx} \Gamma^k_{ext}(K)$$

Il en résulte que les foncteurs Γ^k et TS^k sont dérivables (5.5.5) sur la sous-catégorie $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A})$ de $D^b(X,\mathcal{A})$, et que les complexes vérifiant (5.5.13.1) sont déployés à gauche pour ces foncteurs. D'après

5.5.2.4, Γ^k et TS^k induisent des foncteurs

$$(5.5.14.1) \qquad LTS^k : D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}) \longrightarrow D^{b,tor\leq 0}(Sym^k_S(X),\mathcal{A})$$

$$(5.5.14.2) \qquad L\Gamma^k : D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}) \longrightarrow D^{b,tor\leq 0}(Sym^k_S(X),\mathcal{A}) \quad .$$

De plus, le morphisme canonique α (5.5.9) induit d'après 5.5.9 (i) un isomorphisme entre les foncteurs 5.5.14.1 et 5.5.14.2

$$(5.5.14.3) \qquad \alpha : L\Gamma^k \xrightarrow{\sim} LTS^k \quad .$$

5.5.14.4. Les isomorphismes de 5.5.9 (iv) (v) (vi) (vii) passent à la catégorie dérivée et définissent des isomorphismes :

(iv') Pour $\mathcal{A}'$ une $\mathcal{A}$-algèbre, on a

$$L\Gamma^k_{ext_{\mathcal{A}}}(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{A}' \simeq L\Gamma^k_{ext_{\mathcal{A}'}}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \quad .$$

(v') Pour tout changement de base $g : S' \longrightarrow S$, on a

$$Sym^k_g(g')^* \, L\Gamma^k_{ext} K \simeq L\Gamma^k_{ext}(g'^*K) \quad .$$

(vi') Pour tout morphisme <u>radiciel</u> $i : X' \longrightarrow X$, on a

$$Sym^k_S(i)^* \, L\Gamma^k_{ext} K \simeq L\Gamma^k_{ext} \, i^*K \quad .$$

(vii') Pour $j : X' \longrightarrow X$ une <u>immersion</u>, on a :

$$Sym^k_S(j)_! \, L\Gamma^k_{ext} \simeq L\Gamma^k_{ext} \, j_! \quad .$$

5.5.15. Soit une suite exacte de complexes plats de $C^{\geq 0}(X,\mathcal{A})$,

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0 \quad ,$$

et appliquons le foncteur Γ^k_{ext} (5.5.3). On trouve (comme en 5.5.11) que le Module semi-simplicial $\Gamma^k_{ext}(N^{-1}K)$ sur $Sym^k_S(X)$ admet une filtration

dont les quotients successifs sont les Modules semi-simpliciaux $\Gamma^{k'}_{ext}(N^{-1}K') \vee \Gamma^{k''}_{ext}(N^{-1}K'')$ $(k'+k'' = k)$.

Passant à la catégorie dérivée on trouve que $L\Gamma^{k}_{ext}(K)$ est représenté par un complexe filtré dont les quotients successifs représentent les objets $L\Gamma^{i}_{ext}(K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{k-i}_{ext}(K'')$ de la catégorie dérivée (appliquer 5.5.2.4 et le théorème de EILENBERG-ZILBER-CARTIER (isomorphisme dans $\mathcal{K}$ d'un objet semi-simplicial double et de sa diagonale : DOLD PUPPE[1.2.9 pg.213]).

Dans la catégorie dérivée, cette construction peut déjà se faire à partir d'une suite exacte de complexes vérifiant 5.5.13.1.

* En termes plus intrinsèques, soit Δ un "vrai triangle" d'objets de $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_b)$, i.e. un objet de la "catégorie dérivée filtrée" avec $Gr^{i}(\Delta) = 0$ pour $i \neq 0,1$ et $Gr^{i}(\Delta) \in Ob\ D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A})$ (DELIGNE, in Appendice à VERDIER [2], ou VI B n° 2.5.1, 2.5.2).

La construction précédente fournit alors un objet $L\Gamma^{k}_{ext}(\Delta)$ de la catégorie dérivée filtrée de $Sym^{k}_{S}(X)$, des isomorphismes

$$Gr^{i}(L\Gamma^{k}_{ext}(\Delta)) \simeq L\Gamma^{i}_{ext}(Gr^{1}(\Delta)) \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{k-i}_{ext}(Gr^{0}(\Delta)$$

et, désignant par $|\ \ |$ le complexe sous-jacent à un complexe filtré, un isomorphisme

$$|\ L\Gamma^{k}_{ext}(\Delta))\ | \simeq L\Gamma^{k}_{ext}(|\Delta|) \quad . \quad *$$

Lemme 5.5.16. Soit N un entier. La catégorie $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A})$ se déduit de la catégorie des complexes $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A}_b)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) ci-dessous en inversant les quasi-isomorphismes :

(i) Condition (5.5.13.1).

(ii) Le complexe K est déployé pour tout foncteur image directe de dimension cohomologique $\leq N$, relatif à un isomorphisme de topos $f : \widetilde{X}_{et} \longrightarrow T$.

Qu'il y ait un calcul des fractions à droite résulte de 5.5.13 et du fait que, via les résolutions flasques canoniques tronquées (4.2.9), tout complexe K vérifiant (i) s'envoie dans un complexe vérifiant (i) et (ii).

5.5.17. Soit un morphisme de S-schémas $u : X \longrightarrow Y$. On suppose que $Sym^n_S(X)$ et $Sym^n_S(Y)$ existent, qu'il existe un entier N tel que le foncteur u_* soit de dimension $\leq N$ sur la catégorie des $\mathcal{A}$-Modules, et que le foncteur Ru_* transforme complexes bornés de Tor-dimension ≤ 0 en complexes de Tor-dimension ≤ 0 . Ces deux dernières conditions sont automatiques si u est propre, $\mathcal{A}$ de torsion et Y cohérent (i.e. quasi-compact, quasi-séparé) (5.2.8.1, 5.2.10).

Soit $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A})$ un complexe vérifiant les conditions (i) et (ii) de 5.5.16, avec N comme ci-dessus. D'après 5.5.14, la flèche

$$\beta : L\Gamma^n_{ext}(K) \xrightarrow{\sim} \Gamma^n_{ext}(K)$$

est un quasi-isomorphisme. De même, la flèche

$$\gamma : u_*K \xrightarrow{\sim} Ru_*K$$

est un quasi-isomorphisme.

On définit la flèche de Künneth symétrique de $L\Gamma^n_{ext}\ Ru_*(K)$ dans $R\ Sym^n(u)_*\ L\Gamma^n_{ext}(K)$ comme le composé

(5.5.17.1) $$k^n : L\Gamma^n_{ext} Ru_*K \xleftarrow[\gamma]{\sim} L\Gamma^n u_*K \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Gamma^n_{ext} u_*K \xrightarrow[(5.5.12.1)]{} Sym^n_S(u)_* \Gamma^n_{ext}(K) \longrightarrow R\ Sym^n_S(u)_* \Gamma^n_{ext}(K)$$

$$\xleftarrow[\beta]{\sim} R\ Sym^n_S(u)_*\ L\Gamma^n_{ext}(K) \quad .$$

Il résulte de 5.5.16 que les morphismes (5.5.17.1) définissent un morphisme entre foncteurs de $D^{b,tor\leq 0}(X,\mathcal{A}_\cdot)$ dans $D^+(Sym^n_S(Y),\mathcal{A}_\flat)$

(5.5.17.2) $$k^n : L\Gamma^n_{ext}\ Ru_* \longrightarrow R\ Sym^n_S u_*\ L\Gamma^n_{ext} \quad ,$$

appelé encore morphisme de Künneth symétrique.

Ce morphisme est caractérisé par la propriété 5.5.18 ci-dessous.

5.5.17.3. Soient S, X, Y et u comme plus haut, $K \in Ob\ C^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A}_\flat)$ un complexe de Tor-dimension ≤ 0, $K_1 \in Ob\ C^{b,\geq 0}(Y,\mathcal{A}_\flat)$ et $K_2 \in Ob\ C^b(Sym^n_S(X),\mathcal{A}_\flat)$. Soit v un u-homomorphisme (0.2) de K dans K_1, et soit t un homomorphisme (au sens oridnaire, comme tous ceux qui suivent) de $\Gamma^n_{ext}(K)$ dans K_2 . On dispose de morphismes

a) $\Gamma^n_{ext}(v) : \Gamma^n_{ext}(K_1) \longrightarrow Sym^n_S(u)_*\ \Gamma^n_{ext}(K)$ (5.5.12.0)

b) $Sym^n_S(u)_*(t) : Sym^n_S(u)_*\ \Gamma^n_{ext}(K) \longrightarrow Sym^n_S(u)_*\ K_2$,

de composé

$$\varphi' : \Gamma^n_{ext}(K_1) \longrightarrow Sym^n_S(u)_*\ K_2 \quad ,$$

définissant, par composition

$$\varphi : L\Gamma^n_{ext}(K_1) \longrightarrow R\,Sym^n(u)_*K_2 \quad .$$

De plus, v et t induisent :

$$\begin{cases} v' : K_1 \longrightarrow Ru_*K \\ t' : L\Gamma^n_{ext}K \longrightarrow K_2 \end{cases} .$$

On a alors :

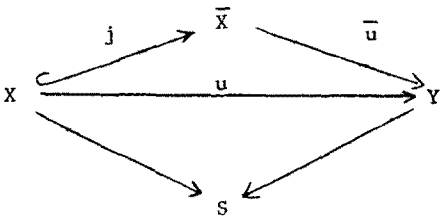
Proposition 5.5.18. Sous les hypothèses 5.5.17.3, le diagramme suivant est commutatif dans $D^+(Sym_S(Y), \mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n_{ext}\,Ru_*K & \xrightarrow[\text{(Künneth symétrique)}]{k^n} & R\,Sym^n_S(u)_*\,L\Gamma^n_{ext}K \\ \uparrow{\scriptstyle L\Gamma^n_{ext}(v')} & & \downarrow{\scriptstyle R\,Sym^n_S(u)_*(t')} \\ L\Gamma^n_{ext}\,K_1 & \xrightarrow{\varphi} & R\,Sym^n_S(u)_*K_2 \end{array}$$

La démonstration est toute pareille à celle de 5.4.1.5 et laissée au lecteur.

5.5.19. On suppose dorénavant $\mathcal{A}$ de torsion.

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme compactifiable de S-schémas :



On suppose que $\mathrm{Sym}_S^n(X)$, $\mathrm{Sym}_S^n(\bar{X})$ et $\mathrm{Sym}_S^n(Y)$ existent. Pour tout Module F sur X, on a alors

(5.5.19.1) $$\Gamma^n_{ext}(j_!F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_S(j)_! \, \Gamma^n_{ext}(F) \quad ,$$

et cet isomorphisme passe trivialement aux catégories dérivées.

On définit le <u>morphisme de Künneth symétrique</u> entre foncteurs de $D^{b,tor\leq 0}(X,\Lambda)$ dans $D^{b,tor\leq 0}(\mathrm{Sym}^n_S(Y),\Lambda)$

(5.5.19.2) $$k^n_u \text{ ou } k^n : L\Gamma^n_{ext}Ru_! \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}_S(u)_! L\Gamma^n_{ext}$$

comme étant le composé

$$L\Gamma^n_{ext}Ru_! \overset{dfn}{\simeq} L\Gamma^n_{ext}R\bar{u}_*j_! \xrightarrow{(5.5.17.2)} R\,\mathrm{Sym}^n_S(\bar{u})_*\, L\Gamma^n_{ext}\, j_!$$

$$\xrightarrow[\sim]{(5.5.19.1)} R\,\mathrm{Sym}^n_S(\bar{u})_*\, \mathrm{Sym}^n_S(j)_!\, L\Gamma^n_{ext}$$

$$\xrightarrow{(5.5.13.5\ (vii'))} R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext}$$

5.5.20. On laisse au lecteur le soin de faire les vérifications suivantes, faciles en principe en utilisant 5.5.18.

5.5.20.1 (Caractère intrinsèque). Le morphisme (5.5.19.2) est indépendant du choix de la compactification $\bar{u}$ de u .

5.5.20.2 (Transitivité). Soit un diagramme de S-schémas

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \quad ,$$

avec u et v quasi-projectifs ; on suppose que $\mathrm{Sym}^n_S(Z)$ existe (donc aussi $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ et $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ (SGA 1 V 1.7, EGA II 4.5.4)). Le diagramme de foncteurs suivant est alors commutatif

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n_{ext}\, R(vu)_! & \xrightarrow{k^n_{vu}} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(vu)_!\, L\Gamma^n_{ext} \\ \| & & \| \\ L\Gamma^n_{ext}\, Rv_! Ru_! & \xrightarrow{k^n_v} R\,\mathrm{Sym}^n_S(v)_! L\Gamma^n_{ext} Ru_! \xrightarrow{k^n_u} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(v)_! R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext} \end{array} .$$

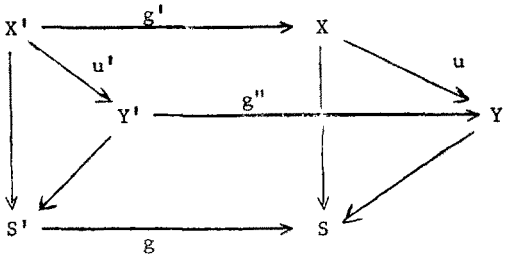
5.5.20.3. Le morphisme de Künneth symétrique est compatible aux changements de base ou d'espace du type 5.5.9 (iv) (v) (vi). De façon plus précise, on a les compatibilités suivantes avec les morphismes 5.5.13.5 (iv') (v') (vi').

(iv") Pour toute $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{A}'$, et tout S-morphisme quasi-projectif $u : X \longrightarrow Y$ le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L\Gamma^n_{ext}\, Ru_!(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' & \simeq & L\Gamma^n_{ext}(Ru_!(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext} Ru_!(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \\ \downarrow k^n_u & & & & \downarrow k^n_u \\ R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext}(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}' & \xrightarrow{\sim} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!(L\Gamma^n_{ext}(K) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') & \simeq & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}') \end{array}$$

est commutatif.

(v") Pour tout changement de base $g : S' \longrightarrow S$, donnant lieu à un diagramme cartésien

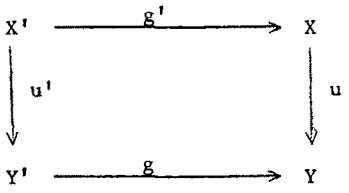


,

le diagramme de foncteurs, tout analogue à (iv"), est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sym}^n_g(g'')^*L\Gamma^n_{ext}Ru_! & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext}g''^*Ru_! & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext}Ru'_!\, g'^* \\ \downarrow{\scriptstyle k^n_u} & & & & \downarrow{\scriptstyle k^n_{u'}} \\ \mathrm{Sym}^n_g(g'')^*R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!L\Gamma^n_{ext} & \xrightarrow{\sim} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u')_!\,\mathrm{Sym}^n_g(g')^*L\Gamma^n_{ext} & \xrightarrow{\sim} & R\,\mathrm{Sym}^n_S(u')_!L\Gamma^n_{ext}g'^*. \end{array}$$

(vi") Pour tout changement de base <u>radiciel</u> $g : Y' \longrightarrow Y$, donnant lieu à un diagramme cartésien de S-schémas



,

le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sym}_S^n(g)^* L\Gamma^n_{ext}\, Ru_! & \simeq & L\Gamma^n_{ext} g^*\, Ru_! & \xrightarrow{\sim} & L\Gamma^n_{ext}\, Ru'_!\, g'^* \\ \downarrow k^n_u & & & & \downarrow k^n_{u'} \\ \mathrm{Sym}_S^n(g)^*\, R\,\mathrm{Sym}_S^n(u_!) & \Rightarrow & R\,\mathrm{Sym}_S^n(u')_! g'^* L\Gamma^n_{ext} & \simeq & R\,\mathrm{Sym}_S^n(u')_! L\Gamma^n_{ext} g'^* \end{array}$$

Théorème 5.5.21. (Formule de Künneth symétrique). Soient S un schéma cohérent (= quasi-compact quasi-séparé) annelé par un faisceau d'anneaux commutatifs de torsion $\mathcal{A}$, à fibres des anneaux noethériens. On annèle chaque S-schéma par l'image réciproque de $\mathcal{A}$. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs. Quel que soient l'entier $n \geq 0$ et $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,tor\leq 0}(X, \mathcal{A}_0)$, la flèche de Künneth symétrique (5.5.17.2)

$$k^n : L\Gamma^n_{ext}\, Ru_! K \longrightarrow R\,\mathrm{Sym}^n_S(u)_!\, L\Gamma^n_{ext}\, K$$

est un isomorphisme dans $D^{b,tor\leq 0}(\mathrm{Sym}^n_S(Y), \mathcal{A})$.

La démonstration de ce théorème occupera toute la suite de 5.5.

Remarque 5.5.21.1. L'hypothèse de quasi-projectivité sert seulement à assurer que u admet une compactification $\bar{u}$

$$X \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{u}} Y$$

telle que les schémas $\mathrm{Sym}^n_S(X)$, $\mathrm{Sym}^n_S(\bar{X})$ et $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ existent pour tout n. Le langage des espaces algébriques devrait permettre de remplacer cette hypothèse par la seule hypohtèses que u est compactifiable.

La première partie de la démonstration consiste à ramener par dévissage 5.5.21 à un cas "irréductible" :

Lemme 5.5.22. Le théorème 5.5.21 est impliqué par le cas particulier suivant :

(*) Pour tout corps algébriquement clos k, toute courbe projective et lisse X sur k et tout nombre premier ℓ, les flèches de Künneth symétriques (obtenues pour Y = S = Spec(k), $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/\ell$, K = $\mathbb{Z}/\ell$; voir explications ci-dessous)

$$(5.5.22.1) \qquad L\Gamma^n(R\Gamma(X,\mathbb{Z}/\ell)) \longrightarrow R\Gamma(Sym^n_k(X),\ \mathbb{Z}/\ell)$$

sont des isomorphismes ($n \geq 0$).

Dans 5.5.22.1, le symbole Γ a un malencontreux double usage : dans l'expression $R\Gamma$, il désigne le foncteur "sections globales" ; dans l'expression $L\Gamma^n$, il désigne le foncteur 5.5.2.3 . On utilise dans cette formule l'isomorphisme $\Gamma^n_{ext}(\mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\ell$.

Soient donnés S, X, Y, u et $\mathcal{A}$ comme en 5.5.21.

Lemme 5.5.22.2. Soit une suite exacte de complexes dans $C^{b,\geq 0}(X,\mathcal{A})$, de tor-dimension ≤ 0 :

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \longrightarrow 0 \quad .$$

Si les flèches de Künneth k^n ($n \geq 0$) relatives à deux des complexes K', K et K'' sont toutes des isomorphismes, alors les flèches de Künneth relatives au troisième sont aussi des isomorphismes.

On se ramène au cas où u est projectif, et où les complexes K', K, K" vérifient les conditions (i) et (ii) de 5.5.16, pour N au moins égal au double de la dimension des flèches de u . Les flèches de Künneth symétriques sont alors données par 5.5.17.1.

Montrons par récurrence sur n que si pour $i \leq n$ et deux des complexes K', K, K", les flèches k^i sont des isomorphismes, alors les flèches k^i ($i \leq n$) sont des isomorphismes pour le troisième.

Pour le voir, on note que grâce à 5.5.14, le morphisme

$$(a) \qquad k^n : L\Gamma^n_{ext}\, Ru_*\, K \longrightarrow R\,Sym^n(u)_*\, L\Gamma^n_{ext}\, K$$

peut se représenter par un morphisme de complexes filtrés

$$k'^n : K_o \longrightarrow K_1$$

de filtration finie, ce morphisme induisant sur les quotients successifs des flèches isomorphes aux flèches composées

$$(b_i) \quad L\Gamma^i_{ext}\, Ru_*K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{ext} Ru_*K'' \longrightarrow R\,Sym^n(u)_*(L\Gamma^i_{ext}K' \vee L\Gamma^{n-i}_{ext}K'')$$

suivantes :

$$L\Gamma^i_{ext}Ru_*K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{ext}Ru_*K'' \xrightarrow{k^i \overset{\mathbb{L}}{\vee} k^{n-i}} R\,Sym^i(u)_*L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} R\,Sym^{n-i}(u)_*L\Gamma^{n-i}_{ext}(K'')$$

$$\underset{\text{defn}}{=\!=} \vee_{i,n-i_*}(R\,Sym^i(u)_*L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} R\,Sym^{n-i}(u)_*L\Gamma^{n-i}_{ext}(K")) \xrightarrow[\sim]{5.4.3}$$

$$\vee_{i,n-i_*}(R\,Sym^i(u)_* \times R\,Sym^{n-i}(u)_*)\,(L\Gamma^i_{ext}\,K' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L\Gamma^{n-i}_{ext}\,K")$$

$$=\!= R\,Sym^n(u)_* \vee_{i,n-i_*}(L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L\Gamma^{n-i}_{ext}\,K") \underset{\text{dfn}}{=\!=} R\,Sym^n(u)_*(L\Gamma^i_{ext}K' \overset{\mathbb{L}}{\vee} L\Gamma^{n-i}_{ext}K")$$

D'après l'hypothèse de récurrence (et la formule de Künneth), ces flèches sont des quasi-isomorphismes pour $i \neq 0,n$. Deux quelconques des assertions suivantes impliquent donc la troisième : (a) est un quasi-isomorphisme ; (b_o) est un quasi-isomorphisme ; (b_n) est un quasi-isomorphisme. Il s'agit là des trois flèches qui étaient en question, cqfd.

5.5.22.3. Supposons vraie l'assertion (*) envisagée dans 5.5.22, et prouvons 5.5.21. Soient donc S, X, Y, $\mathcal{A}$, K et u comme en 5.5.21. Le problème est local sur S, qu'on peut supposer affine. Tout complexe K est extension successive de complexes de la forme $i_!i^*K$ pour i inclusion dans X d'une partie affine localement fermée. Par dévissage (5.5.22.2), on peut donc supposer K de la forme $i_!K_1$, pour une immersion $i : X_1 \longrightarrow X$ de source affine. La compatibilité 5.5.20.2 permet de remplacer X par X_1, K par K_1 et de supposer donc u affine. Factorisons u comme un composé $u = u_1 \ldots u_k$ de morphismes à fibres de dimension ≤ 1 . La compatibilité 5.5.20.2 montre qu'il suffit de prouver que les flèches k^n relatives aux u_i et à un quelconque complexe K sont des isomorphismes. On est ainsi ramené au cas S affine, u de dimension relative ≤ 1 .

5.5.22.4. Pour que k^n soit un isomorphisme, il suffit que ses restrictions aux flèches géométriques de $\mathrm{Sym}^n_S(Y)$ le soient ; la compatibilité 5.5.20.3 (v") nous ramène donc à supposer S spectre d'un corps algébriquement clos k .

5.5.22.5. Pour tout point rationnel y de $\mathrm{Sym}^n_k(Y)$, il existe une partie réduite finie Y' de Y telle que x soit dans l'image de $\mathrm{Sym}^n_k(Y')$. La compatibilité 5.5.20.3 (vi") nous permet donc de supposer que Y est somme d'un nombre fini de copies de Spec(k).

5.5.22.6. Si $Y = \coprod Y_i$, alors tout complexe K sur X est somme de complexes concentrés sur l'un des schémas $X_i = u^{-1}(Y_i)$. Par dévissage (5.5.22.2) et d'après la compatibilité 5.5.20.3 (vi"), il suffit de prouver 5.5.21 pour chacun des morphismes $u_i : X_i \longrightarrow Y_i$. Par 5.5.22.5, ceci nous ramène au cas où

$$Y = S = \mathrm{Spec}(k) \text{ , } k \text{ algébriquement clos, } \dim X \leq 1 \text{ .}$$

Le faisceau $\mathcal{A}$ se réduit maintenant à un anneau noethérien A . La proposition suivante permettra de se ramener au cas où A est un corps.

Proposition 5.5.23. Soient A un anneau noethérien (commutatif), $K \in \mathrm{Ob}\, D^-(A)$ un complexe borné supérieurement de A-modules et n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) K est de Tor-dimension $\leq n$

(ii) Pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$ et tout $i < -n$, $H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A k(x)) = 0$.

On a (i)$\Longrightarrow$ (ii) trivialement, Supposons (ii). Pour prouver (i), nous prouverons par récurrence noethérienne sur le fermé F de Spec(A) que si un module N vérifie $N_x = 0$ pour $x \notin F$, alors $H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A N) = 0$ pour $i < -n$.

Soit I l'unique idéal qui définisse F tel que A/I soit réduit, et soit N_k le sous-module de N annulé par I^k . On a $N = \varinjlim N_k$. Puisque les foncteurs Tor commutent aux limites inductives filtrantes, on se ramène au cas où il existe k tel que $N = N_k$, de sorte que N est extension successive de modules tués par I , et la suite exacte longue de cohomologie nous ramène au cas où N est déjà un A/I-module.

Soit η un point maximal de F, et définissons des A/I-modules M_1 et M_2 par la suite exacte

$$(5.5.23.1) \qquad 0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \otimes k(\eta) \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0 \quad .$$

On a $(M_j)_\eta = 0$ $(j = 1,2)$. Si pour chaque fermé $G \subset F$ avec $\eta \notin G$ on désigne par $M_{j,G}$ le sous-module de M_j formé des sections de M_j à support dans G, on a

$$M_j = \varinjlim_{\eta \notin G} M_{j,G} \quad .$$

D'après l'hypothèse de récurrence et un passage à la limite, on a donc

$$H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_A M_j) = 0 \quad \text{pour } i < -n \quad .$$

Le module $N \otimes k(\eta)$ est un vectoriel sur $k(\eta)$, donc une somme de copies de $k(\eta)$. Par hypothèse , on a

$$H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (N \otimes k(\eta)) = 0 \quad \text{pour } i < -n \quad .$$

Si I est l'image de la flèche i de (5.5.23.1), on dispose de suites exactes

$$H^{i-1}(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M_2) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} I) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} (N \otimes k(\eta)))$$

$$H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} M_1) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} N) \longrightarrow H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} I),$$

dont on tire que $H^i(K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} N) = 0$ pour $i < -n$, cqfd.

Corollaire 5.5.24. Pour qu'une flèche $u : K \longrightarrow L$ dans $D^-(A)$ soit un isomorphisme, il suffit que pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$, la flèche

$$u_x : K \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x) \longrightarrow L \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x)$$

soit un isomorphisme dans $D^-(k(x))$.

Soit M le cône (mapping cylinder) de u . Par hypothèse, on a $M \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$. D'après 5.5.23, on a donc $M = 0$, et u est un isomorphisme.

5.5.25.1. Poursuivons la démonstration de 5.5.22, interrompue en 5.5.23. D'après la compatibilité 5.5.20.3 (iv") et 5.5.24, le morphisme k^n relatif à $K \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\geq 0}(X,A)$ est un isomorphisme si et seulement si les morphismes k^n relatifs aux $K \overset{\mathbb{L}}{\underset{A}{\otimes}} k(x) \in \mathrm{Ob}\, D^{b,\mathrm{tor}\geq 0}(X,k(x))$ sont des isomorphismes, pour $x \in \mathrm{Spec}(A)$. Ceci nous ramène au cas où A est un corps de caractéristique $\ell > 0$.

5.5.25.2. La suite exacte (où C désigne un cône)

$$0 \longrightarrow K[-1] \longrightarrow C\,K[-1] \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

montre que les flèches k^n sont des isomorphismes pour K si et seulement si elles le sont pour $K[-1]$ (5.5.22.2).

5.5.25.3. Les suites exactes

$$0 \longrightarrow \sigma_{\geq n} K \longrightarrow K \longrightarrow \sigma_{\leq n} K \longrightarrow 0$$

montrent que pour les flèches de Künneth soient un isomorphisme, pour K complexe plat, il suffit qu'elles le soient pour les composantes de K , placées en degré 0 (5.5.22.2) et (5.5.25.2).

5.5.25.4. Soit donc F un faisceau de A-vectoriels. Ce faisceau est limite inductive de faisceaux constructibles (IX 2.7.2), automatiquement plats puisque A est un corps, et par passage à la limite, on se ramène au cas K constructible, réduit au degré zéro.

5.5.25.5. Si un complexe K est facteur direct d'un complexe L, le morphisme k^n relatif à K est facteur direct du morphisme k^n relatif à L, donc un isomorphisme si ce dernier en est un . La méthode de la trace (IX 5.8) s'applique donc et il suffit de traiter le cas où F est de la forme $j_! A_{X'}$, pour $j : X' \longrightarrow X$ quasi-fini. La compatibilité 5.5.20.2 permet de remplacer X par X', d'où la réduction

$$X \text{ est de dimension } \leq 1 \text{ et } K = A_X \quad .$$

5.5.25.6. On peut supposer X réduit. Si $j : U \longrightarrow X$ est l'ouvert de lissité de X, de complément $i : F \longrightarrow X$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_! j^* A_X \longrightarrow A_X \longrightarrow i_! i^* A_X \longrightarrow 0$$

nous ramène par dévissage aux cas où X est soit une courbe lisse, soit un ensemble fini. De plus, la formule

$$A_X = A \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}/\ell} (\mathbb{Z}/\ell)_X$$

ramène par 5.5.20.3 (iv") au cas où $A_X = \mathbb{Z}/\ell$.

Si X est une courbe, on plonge X dans la courbe projective et lisse correspondante, et un nouveau dévissage ramène à l'un des deux cas suivants

(i) X est une courbe projective et lisse, Y = S = Spec(k) avec k algébriquement clos, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/\ell$, K = $\mathbb{Z}/\ell$.

(ii) X est une somme d'un nombre fini de copies de Spec(k), Y = S = Spec(k) (k algébriquement clos), $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/\ell$, K = $\mathbb{Z}/\ell$.

Un ultime dévissage de $\mathbb{Z}/\ell_X$ en les faisceaux $\mathbb{Z}/\ell_{X'}$, pour X' composante connexe de X, ramène dans (i) et (ii) à supposer X connexe. Le cas (ii) est alors trivial. Ceci prouve 5.5.22 .

Lemme 5.5.26. Le théorème 5.5.21 est conséquence des deux cas particuliers suivants de l'assertion (*) de 5.5.22 :

Cas 1 . On suppose que k = $\mathbb{C}$.

Cas 2 . On suppose que k est de caractéristique p > 0 et que ℓ = p .

Avec les notations de 5.5.22, désignons par p la caractéristique de k . Si p = 0, le principe de Lefschetz (s'appuyant ici sur la compatibilité 5.5.20.3 (v"), et sur XII 5.4) permet de se ramener au cas où k = $\mathbb{C}$.

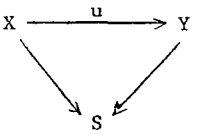
Reste à traiter le cas où p > 0 et où $\ell \neq p$. La courbe X se remonte en une courbe X' sur l'anneau W(k) des vecteurs de Witt sur k (SGA 1 III 7.4). Posons S = Spec(W(k)), soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X'_\eta & \longrightarrow & X' & \longleftarrow & X \\ \downarrow{\scriptstyle f_\eta} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \eta & \longrightarrow & S & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(k) \end{array} ,$$

et soient f_n , f'_n et $f_{\eta\, n}$ les projections respectives de $\mathrm{Sym}^n_k(X)$, $\mathrm{Sym}^n_S(X')$ et $\mathrm{Sym}^n_\eta(X'_\eta)$ sur Spec(k), S et η . On sait que f'_n est un morphisme projectif et lisse (la projectivité est évidente ; pour la lissité, le plus simple est de se ramener au cas où $X' = \mathbb{P}^1_S$, auquel cas $\mathrm{Sym}^n_S(X') \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^n$ comme il résulte du théorème des fonctions symétriques élémentaires). D'après le théorème de spécialisation XVI 2.2, les faisceaux $R^i f'_{n*}$ $(\mathbb{Z}/\ell)$ sont localement constants sur S . Il en est de même des faisceaus $L^i\Gamma^n(Rf'_*\, \mathbb{Z}/\ell)$. Pour vérifier que la flèche de (5.5.22.1) relative à X sur k est un isomorphisme, il suffit donc d'après 5.5.20.3 (v") de prouver l'énoncé analogue pour la fibre générique géométrique $X_{\bar\eta}$ de X sur S . Le corps $k(\bar\eta)$ est de caractéristique 0, et, vu la première réduction, ceci prouve 5.5.26.

Pour prouver 5.5.21 dans les deux cas particuliers 5.5.26, on comparera le morphisme de Künneth symétrique d'une part à son analogue transcendant (5.5.27 et 5.5.28) d'autre part à son analogue cohérent (5.5.29 à 5.5.37).

5.5.27. Si $p : X \longrightarrow S$ est une application continue entre espaces topologiques, avec S annelé par un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{A}$, les constructions 5.5.7, 5.5.8 s'appliquent telles quelles pour définir un foncteur Γ^n_{ext} des modules sur X dans les modules sur $\mathrm{Sym}^n_S(X) = X^n/\mathfrak{S}_n$. Les sorites 5.5.7 à 5.5.18 se transposent. De même, si S, X et Y sont des espaces topologiques localement compacts séparés



,

et si les fibres de u sont de dimension cohomologique bornée, le sorite 5.5.19, 5.5.20 du morphisme de Künneth symétrique en cohomologie à support propre se transpose.

Si $p : X \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, les foncteurs Γ^n et $L\Gamma^n$ commutent aux foncteurs "passage au transcendant". Enfin, si X, Y, S, $\mathcal{A}$, K sont comme en 5.5.21, avec S separé de type fini sur $\mathbb{C}$, et si on désigne génériquement par ϵ les morphismes de sites de type $\epsilon : X_{c\ell} \longrightarrow X_{et}$, le diagramme suivant est commutatif :

(5.5.27.1)
$$\begin{array}{ccc} \epsilon^* L\Gamma^n_{ext} Ru_! K & \xrightarrow{k^k} & \epsilon^* R Sym^n_S(u)_! L\Gamma^n_{ext} K \\ \downarrow & & \downarrow \\ L\Gamma^n_{ext} R u^{an}_! \epsilon^* K & \xrightarrow{k^{n\ an}} & R Sym^n_S(u^{an})_! L\Gamma^n_{ext} \epsilon^* K \end{array}$$

5.5.28. D'après la compatibilité 5.5.27.1, et un cas élémentaire du théorème de comparaison (XI 4.4 ou XVI 4.1), pour traiter le cas 1 de 5.5.26, il suffit de vérifier que si X est une courbe projective non singulière complexe, alors l'analogue topologique de 5.5.22.1 est un isomorphisme.

L'espace topologique X^{an} est triangulable (ce fait est ici trivial, car X est un revêtement ramifié de la sphère de Riemann). L'analogue topologique du lemme de dévissage 5.5.22.2 nous ramène alors à prouver

(*) Si D est un simplexe fermé (de dimension 0, 1 ou 2), la flèche de Künneth symétrique topologique

(5.5.28.1) $\quad k^n : L\Gamma^n R\Gamma(D,\mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow R\Gamma(\mathrm{Sym}^n(D, \mathbb{Z}/\ell)$

est un isomorphisme.

On a

$$R\Gamma(D,\mathbb{Z}/\ell) = \mathbb{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0 ,$$

et donc

$$L\Gamma^n R\Gamma(D, \mathbb{Z}/\ell) = \mathbb{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0 .$$

D'autre part, $\mathrm{Sym}^n(D)$ est contractible, et on a encore

$$R\Gamma(\mathrm{Sym}^n(D), \mathbb{Z}/\ell) = \mathbb{Z}/\ell \text{ placé en degré } 0 .$$

Les H^i des deux membres de 5.5.28.1 sont donc nuls, et la flèche induite sur le H^0 s'identifie à l'identité de $\mathbb{Z}/\ell$.

5.5.29. Pour l'application que nous avons en vue, il y a intérêt à regarder un faisceau quasi-cohérent sur un schéma X comme étant un faisceau quasi-cohérent de $\mathcal{O}$-modules sur le site étale de X .

Soit $p : X \longrightarrow X$ un morphisme quasi-projectif de schémas (cf. 5.5.21.1 (*)). Si $\underline{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules sur X_{et} , alors

a) On désigne par $\overset{n}{\boxtimes} \underline{F}$ le faisceau de modules sur $(X/S)^n_{et}$ produit tensoriel des $\mathcal{O}_{(X/S)^n}$-modules images réciproques de $\underline{F}$ sur $(X/S)^n_{et}$;

b) le faisceau $\overset{n}{\boxtimes} \underline{F}$ est un faisceau $\mathfrak{S}_n$-équivariant. Par passage aux invariants, il définit un faisceau $TS^n_{ext}(\underline{F})$ sur $\mathrm{Sym}^n_S(X)$: si σ est la projection de $(X/S)^n$ sur $\mathrm{Sym}^n_S(X)$, on a

(*) Tout ce qui suit, y inclus 5.5.34, est valable en supposant seulement que X et Y admettent des faisceaux inversibles amples relativement à S (sans supposer X et Y de type fini sur S).

(5.5.29.1) $$TS^n_{ext}(\underline{F}) = (\sigma_* \overset{n}{\otimes} \underline{F})^{\mathfrak{S}_n} .$$

Supposons que p soit plat ; comme en 5.5.8, on définit alors le foncteur Γ^n_{ext} come étantle 0.ème dérivé gauche du foncteur TS^n_{ext} . Avec les notations de 5.5.2.5 et 5.5.8, si

$$P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow \underline{F} \longrightarrow 0$$

est une présentation plate de $\underline{F}$, alors la suite

$$TS^n_{ext}(P'_1) \underset{j_1}{\overset{j_o}{\rightrightarrows}} TS^n_{ext}(P_o) \longrightarrow \Gamma^n_{ext}(F)$$

est exacte. Si x est un point géométrique de $Sym^n_S(X)$ comme en 5.5.7.1, on a (cf. 5.5.8.1)

(5.5.29.2) $$\Gamma^n_{ext}(\underline{F})_x = \mathcal{O}_x \otimes_C (\overset{\ell}{\underset{1}{\otimes}} \Gamma_{\mathcal{O}_S}{}^{n_i}(F_{y_i})) ,$$

avec $$C = \overset{\ell}{\underset{1}{\otimes}} Sym^{n_i}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_{y_i}) .$$

Il suffit en effet de vérifier cette formule dans le cas trivial où les fibres de F sont libres. On notera que $\mathcal{O}_x$ est plat sur C, étant l'hensélisé strict de C au point fermé image de x .

5.5.30. Supposons X et S affines, p plat et $\underline{F}$ quasi-cohérent. Soient $S = Spec(A)$, $X = Spec(B)$ et soit $F = H^o(X,\underline{F})$, de sorte que $\underline{F}$ est le faisceau $F^\sim$ défini par le B-module F . On lit alors sur (5.5.29.1) que

$$TS^n_{ext}(\underline{F}) = TS^n_A(F)^\sim ,$$

et, par dérivation, on a donc

(5.5.30.1) $\Gamma^n_{ext}(\underline{F}) = \Gamma^n_A(F)^\sim$.

Le foncteur Γ^n_{ext} apparaît donc comme un foncteur Γ^n "relatif à A ", ce que(5.5.29.2)exprimait déjà sous forme locale.

5.5.31. On désignera par $\mathbf{D}^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X)$ la sous-catégorie de $D^b(X,\mathcal{O}_X)$ formé des complexes de $\mathcal{O}_X$-modules qui, en tant que complexes de $p^{-1}(\mathcal{O}_S)$-modules sont de Tor-dimension ≤ 0 .

Soit la condition

(5.5.31.1) $K \in Ob\ C^{b,\geq 0}(X,O_X)$ et, en chaque point géométrique x de X, K_x est homotope à un complexe de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules, à degrés positifs, plat sur $\mathcal{O}_{S,p(x)}$.

Le morphisme p étant plat, de sorte qu'il y a "assez" de $\mathcal{O}_X$-modules plats sur S, on vérifie comme en 5.5.13.2 que $\mathbf{D}^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X)$ se déduit de la catégorie des complexes $K \in Ob\ K^{b,\geq 0}(X,\mathcal{O}_X)$ vérifiant (5.5.31,1)en inversant les quasi-isomorphismes.

On lit sur (5.5.29.2) et 5.5.6.1 que si $u : K \longrightarrow L$ est un quasi-isomorphisme entre complexes vérifiant (5.5.31.1), alors $\Gamma^n_{ext}(u)$ (au sens de DOLD-PUPPE) est encore un quasi-isomorphisme. Le foncteur Γ^n_{ext} se dérive dès lors en

(5.5.31.2) $L\Gamma^n_{ext} : D^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow D^{b,tor_S^{\leq 0}}(Sym^n_S(X), \mathcal{O}_{Sym^n_S(X)})$

5.5.32. On désignera par $D^{b,tor_S^{\leq 0}}_{qcoh}(X,\mathcal{O}_X)$ la sous-catégorie de $D^{b,tor_S^{\leq 0}}(X,\mathcal{O}_X)$ formée des complexes à cohomologie quasi-cohérente.

Des arguments standards permettent, comme en 5.5.17, de définir une flèche de Künneth symétrique du type suivant:

Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme de S-schémas quasi-projectifs et plats sur S ; pour $K \in Ob\ D^{b,tor_S\leq 0}_{qcoh}(X,\mathcal{O}_X)$, la flèche de Künneth symétrique k^n dans $D^{b,tor_S\leq 0}_{qcoh}(Sym^n_S(Y),\mathcal{O})$ est une flèche

$$(5.5.32.1) \qquad k^n : L\Gamma^n_{ext}\ Ru_*K \longrightarrow R\ Sym^n_S\ u_*\ L\Gamma^n_{ext}\ K \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les propriétés formelles de 5.5.32.1 qui seront utilisées, notamment la suivante :

Lemme 5.5.33. Si S est de caractéristique $p > 0$, et si $u : X \longrightarrow S$ est propre et plat, le diagramme de flèches de Künneth symétriques 5.5.17.2 et 5.5.32.1 est commutatif ($Y = S$, $K = \underline{\mathbb{Z}}/p$ ou $\mathcal{O}_X$) :

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n_{\underline{\mathbb{Z}}/p}\ Ru_*(\underline{\mathbb{Z}}/p) & \xrightarrow{k^n} & R\ Sym^n_S(u)_*(\underline{\mathbb{Z}}/p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L\Gamma^n_{\mathcal{O}}\ Ru_*(\mathcal{O}) & \xrightarrow{k^n} & R\ Sym^n_S(u)_*\mathcal{O} \end{array} \quad .$$

Proposition 5.5.34. Sous les hypothèses de 5.5.32, la flèche de Künneth symétrique (5.5.32.1) est un isomorphisme.

a) La question est locale sur S, qu'on peut supposer affine.

b) Pour tout point x de $Sym^n_S(Y)$, il existe un ouvert affine Y_1 de Y tel que x soit dans $Sym^n_S(Y_1)$. Par localisation, on peut donc supposer Y affine.

c) Tout complexe K du type considéré peut se représenter par un complexe K_o de modules quasi-cohérents sur S, nul en degrés $i < 0$. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement affine de X, alors K admet une résolution finie par des sommes de complexes de la forme j_*j^*K pour j inclusion d'un ouvert affine (complexe de Čech alterné). Utilisant l'analogue quasi-cohérent du lemme de dévissage 5.5.22.2, ceci nous ramène au cas où il existe un ouvert affine $j : X_1 \hookrightarrow X$ de X et $K_1 \in D^{b,tor_S\leq 0}_{qcoh}(X_1,\mathcal{O})$ tel que $K = Rj_* K_1$.

d) Vu l'analogue quasi-cohérent de la transitivité 5.5.20.2, il suffit de prouver 5.5.34 pour uj et j. La réduction b), appliquée à j, nous ramène enfin au cas où X, Y et S sont affines. On peut alors représenter K par un complexe $K_2 \in C^{b,\geq 0}(X,\mathcal{O}_X)$ à composantes plates et quasi-cohérentes ( ). Les foncteurs Ru_* et $L\Gamma^n$ se calculent alors sans plus devoir résoudre K_2, et il reste à noter que, d'après 5.5.30.1, pour $\underline{F}$ quasi-cohérent sur X, on a

$$\Gamma^n_{ext}\, u_*\, \underline{F} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_S(u)_*\, \Gamma^n_{ext}\, \underline{F} \quad ,$$

les deux membres s'identifiant à

$$\Gamma^n_A(F)^\sim \quad \text{pour } \underline{F} = F^\sim \quad ,$$

cqfd.

5.5.35. Traitons le cas 2 de 5.5.26. Avec les notations de 5.5.22, le diagramme suivant est commutatif (5.5.33) :

(5.5.35.1)

$$\begin{array}{ccc} L\Gamma^n(R\Gamma(X,\mathbb{Z}/p)) & \xrightarrow[①]{k^n} & R\Gamma(Sym^n_k(X),\mathbb{Z}/p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L\Gamma^n(R\Gamma(X,\mathcal{O})) & \xrightarrow[②]{k^n} & R\Gamma(Sym^n_k(X),\mathcal{O}) \end{array} ,$$

et d'après 5.5.34, la flèche ② est un isomorphisme. L'endomorphisme de Frobenius $F : x \longrightarrow x^p$ de $\mathcal{O}$ agit p-linéairement sur $R\Gamma(X,\mathcal{O})$ et sur $R\Gamma(Sym^n_k(X),\mathcal{O})$. Il agit donc aussi p-linéairement sur $L\Gamma^n(R\Gamma(X,\mathcal{O}))$. On vérifie que k^n et F commutent.

La théorie d'Artin-Scheier nous fournit des suites exactes

$$0 \longrightarrow H^i(X,\mathbb{Z}/p) \longrightarrow H^i(X,\mathcal{O}) \xrightarrow{F-I} H^i(X,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O} ,$$

et de même pour $Sym^n_S(X)$. Pour déduire que ① est un isomorphisme du fait que ② en soit un, il nous reste à vérifier le

Lemme 5.5.36. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $K \in C^{\geq 0}(\mathbb{Z}/p)$ un complexe de $\mathbb{Z}/p$-vectoriels de dimension finie, $L \in C^{\geq 0}(k)$ un complexe de k-vectoriels de dimension finie, F un endomorphisme p-linéaire de L et $u : K \longrightarrow L$ un morphisme. On suppose que $H^*(Fu) = H^*(u)$, et que les suites

$$0 \longrightarrow H^i(K) \longrightarrow H^i(L) \xrightarrow{F-I} H^i(L) \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Alors, les suites

$$0 \longrightarrow H^i(\Gamma^n K) \longrightarrow H^i(\Gamma^n L) \xrightarrow{F-I} H^i(\Gamma^n L) \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Puisque $H^*(Fu) = H^*(u)$ et que $\mathbb{Z}/p$ est un corps, il existe une homotopie

$$Fu - u = dH + Hd \quad .$$

Le corps k étant parfait, on peut écrire

$$F H_o - H_o = H \quad .$$

Remplaçant u par $u - (dH_o + H_o d)$, on peut supposer que $Fu = u$.

Le foncteur S qui à chaque k-vectoriel V muni d'un endomorphisme p-linéaire F associe le $\mathbb{Z}/p$-vectoriel V^S des $v \in V$ tels que $Fv = v$ est un foncteur exact. L'hypothèse signifie donc que morphisme

$$K \longrightarrow L^S$$

est un quasi-isomorphisme. Reste à prouver que le foncteur S commute au foncteur Γ^n . Ce point résulte aisément du lemme bien connu suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 5.5.37. Un vectoriel de dimension finie V sur un corps parfait k, muni d'un endomorphisme p-linéaire F, admet une et une seule décomposition

$$V = V_o + V_n$$

avec $V^S \otimes k \xrightarrow{\sim} V_o$, $F(V_n) \subset V_n$ et $F|V_n$ nilpotent.

Ceci achève la démonstration de 5.5.21.

6. Le foncteur $f_!$.

On se propose de donner une construction directe du foncteur $f_!$ de 5.1.11. On utilisera ensuite cette construction pour définir le "morphisme trace" (6.2.3) pour les morphismes plats quasi-finis de présentation finie.

6.1. Nouvelle construction du foncteur $f_!$.

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini. Une partie P de X est dite propre sur S si elle est l'image d'un sous-schéma de X propre sur S .

Proposition 6.1.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini et quasi-séparé.

(i) Une partie de X propre sur S est localement fermée, et est fermée si f est séparé.

(ii) Si f est séparé, la réunion de deux parties de X propres sur S est propre sur S.

(iii) Pour tout S-schéma U , désignons par $\phi_X(U)$ l'ensemble des parties de $U \times_S X$ propres sur U . Le foncteur ϕ_X est un faisceau pour la topologie fpqc. Si f est séparé, ϕ est un faisceau d'ensembles ordonnés filtrants pour la relation d'inclusion.

Les assertions (i) et (ii) sont triviales, et la seconde assertion de (iii) résulte de (ii). Le foncteur $U \longmapsto \mathcal{P}(U \times_S X)$ est un faisceau pour toute topologie pour laquelle les recouvrements soient surjectifs. Il résulte de EGA IV 2.3.14 et EGA IV 2.7.1 (vii) que ϕ_X en est un sous-faisceau.

Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau étale d'ensembles pointés sur un schéma X, rappelons (IV 8.5.2) que le support d'une section s de $\mathfrak{F}$ est le complémentaire du plus grand ouvert où s = 0, 0 désignant la section marquée.

Définition 6.1.2. Soient $f : X \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini et séparé, et $\mathfrak{F}$ un faisceau d'ensembles pointés sur X. On désigne par $f_! \mathfrak{F}$ le sous-faisceau de $f_* \mathfrak{F}$ dont les sections sur U (étale sur S) sont les sections de $\mathfrak{F}$ sur $U \times_S X$ à support propre sur U.

Il résulte de 6.1.1 que $f_! \mathfrak{F}$ est effectivement un faisceau.

On vérifie aisément que :

Lemme 6.1.3. Si f est le composé g h de deux morphismes séparés localement de type fini, il existe un et un seul isomorphisme de foncteur $f_! \xrightarrow{\sim} g_! h_!$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_! & \xrightarrow{\sim} & g_! h_! \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_* & = & g_* h_* \end{array}$$

Si f est une immersion ouverte (resp. un morphisme propre) le foncteur $f_!$ est le foncteur de prolongement par zéro (resp. le foncteur f_*). D'après 6.1.3, les définitions 6.1.2 et 5.1.11 coïncident donc dans leur domaine commun de validité.

Les propriétés du foncteur $f_!$ vérifiées dans le § 5 restent valable dans le cas plus général 6.1.2 .

Proposition 6.1.4. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé localement de type fini.

(i) Le foncteur $f_!$ est exact à gauche (i.e. commute aux limites projectives finies) et commute aux limites inductives filtrantes.

(ii) Si f est quasi-fini, le foncteur $f_!$ est un foncteur exact de la catégorie des faisceaux abéliens sur X dans celle des faisceaux abéliens sur S .

(iii) Pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

il existe un isomorphisme de changement de base rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} g^*f_! & = & f'_! g'^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ g^*f_* & \longrightarrow & f'_* g'^* \end{array} ,$$

dans lequel la seconde flèche horizontale est la flèche de changement de base XII 4.1.

Preuve. Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$, on a

$$f_! \mathfrak{F}(U) = \varinjlim_{P \in \Phi(U)} \Gamma_p(\mathfrak{F}) ,$$

et pour U quasi-compact quasi-séparé, le foncteur $\mathfrak{F} \longmapsto f_!\mathfrak{F}(U)$ commute aux limites projectives finies et aux limites inductives filtrantes, comme limite inductive filtrante (6.1.1) (iii) de foncteurs ayant ces propriétés.

Ceci prouve (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (iii) (prendre comme changements de bases les points géométriques de S).

L'assertion (iii) est de nature locale sur S, qu'on peut supposer affine. Soit I l'ensemble ordonné filtrant des ouverts de X de type fini sur S . Si $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ est un ouvert de X, $(fj)_!(\mathfrak{F}|U) = f_!(j_!(\mathfrak{F}|U))$ s'envoie dans $f_!(\mathfrak{F}|U)$. De plus

$$f_!(\mathfrak{F}) = \varinjlim_{U \in I} (fj_!(\mathfrak{F}|U) \quad .$$

Ceci permet de supposer X de type fini sur S et d'appliquer le lemme de Chow (EGA II 2è éd.) pour trouver un morphisme projectif et surjectif : $p^o : X^o \longrightarrow X$ tel que fp_o soit compactifiable. Soit $X^1 = X^o \underset{X}{\times} X^o$ et p^1 la flèche naturelle de X^1 dans X . La suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow p^o_* p^{o*}\mathfrak{F} \rightrightarrows p^1_* p^{1*}\mathfrak{F}$$

est exacte (VII 9.2).

Compte tenu de la fonctorialité de la flèche de changement de base, et de (i), il suffit de vérifier (iii) pour les faisceaux $p^o_* p^{o*}\mathfrak{F}$ et $p^1_* p^{1*}\mathfrak{F}$. Par le changement de notations ($p^1 \longmapsto p^o$)

on se ramène donc à supposer $\mathcal{F}$ de la forme $p_*^0\,\mathcal{G}$. L'assertion (iii) pour le couple $(f, p_*^0\,\mathcal{G})$ équivaut à l'assertion (iii) pour les couples $(p_*^0\,\mathcal{G})$ et $(f\,p_*^0,\ \mathcal{G})$. On conclut par 5.2.7 (i), applicable car p^0 et fp^0 sont compactifiables.

Contre-exemple 6.1.6. Le foncteur $Rf_!$ ne coïncide en général pas avec le foncteur dérivé du foncteur $f_!$. Si X est affine sur un corps algébriquement clos k, on a en effet

$$f_!\,\mathcal{F} = \sum_{x\in X(k)} H_x^0(\mathcal{F}) \quad ,$$

et le $i^{\text{ème}}$ foncteur dérivé de $f_!$ vaut donc en $\mathcal{F}$

$$\sum_{x\in X(k)} H_x^i(\mathcal{F}) \quad .$$

Par contre, si X est lisse et irréductible, et de dimension 1,

$$H_c^2\,(X, \mu_{\ell^n}) \simeq \mathbb{Z}/_{\ell^n}$$

pour ℓ premier à la caractéristique de k .

6.2. Le morphisme trace en dimension relative 0 .

Le résultat principal de ce n° est le théorème 6.2.3. Il est recommandé au lecteur de ne pas lire les préliminaires techniques 6.2.1, 6.2.2. Ceux-ci permettent, dans la démonstration de 6.2.3, de ne considérer que des morphismes f finis, réduction qui, via EGA IV 18.12. est de toute façon assez évidente.

6.2.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme <u>quasi-fini séparé</u>. Quel que soit $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$, désignons par $\Psi_f(U)$ la catégorie des couples formés d'un ensemble pointé fini I, de point marqué noté 0, et d'une décomposition de f^*U en parties ouvertes et fermées $f^*U = \coprod_{i\in I} V_i$, avec V_i fini sur U pour $i \neq 0$. Un morphisme de $\varphi = (V_i)_{i\in I}$ dans $\varphi' = (V'_i)_{i\in I'}$ est un morphisme σ de I' dans I tel que pour $i \in I$, on ait $V_i = \bigcup_{j\in\sigma^{-1}(i)} V'_j$. On dit que φ' <u>raffine</u> φ s'il existe un morphisme de φ dans φ'.

Soient $\mathfrak{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur S, $U \in \mathrm{Ob}\, S_{et}$, $\varphi = (V_i)_{i\in I} \in \mathrm{Ob}\, \Psi_f(U)$, $I^* = I \setminus \{0\}$, et f_i la projection de V_i sur U. On a

$$f_! f^* \mathfrak{F}|U = f_{0!} f_0^*(\mathfrak{F}|U) \oplus \bigoplus_{i\neq 0} f_{i*} f_i^*(\mathfrak{F}|U),$$

d'où une flèche composée

$$(6.2.1.1) \qquad \tau_\varphi : \mathfrak{F}^{I^*}|U \longrightarrow \bigoplus_{i\neq 0} f_{i*} f_i^*(\mathfrak{F}|U) \longrightarrow f_! f^* \mathfrak{F}|U .$$

Si $\sigma : I \longrightarrow J$ est un morphisme d'ensembles pointés, on désigne par ${}^t\sigma : \mathfrak{F}^{J^*} \longrightarrow \mathfrak{F}^{I^*}$ la flèche de coordonnées ${}^t\sigma^i j = \mathrm{Id}$ si $\sigma(i) = j$, et ${}^t\sigma^i j = 0$ si $\sigma(i) \neq j$. Si $\sigma : I' \longrightarrow I$ est un morphisme de φ dans φ', le diagramme

$$(6.2.1.2) \qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{F}^{I^*}|U & \xrightarrow{\ {}^t\sigma\ } & \mathfrak{F}^{I'^*}|U \\ & {\scriptstyle \tau_\varphi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \tau_{\varphi'}} & \\ & f_! f^* \mathfrak{F}|U & \end{array}$$

est commutatif. De plus, ${}^t(\sigma\rho) = {}^t\rho\,{}^t\sigma$. Les $\psi_f(U)$ forment une catégorie fibrée ψ_f sur S_{et} ; les constructions précédentes commutent à la localisation et définissent donc un S_{et}-foncteur $\varphi = (V_i)_{i \in I} \in \psi_f(U) \longmapsto \mathfrak{F}^{I*}|U$ de ψ dans la S_{et}-catégorie des faisceaux sur des ouverts étales de S, et un morphisme de foncteurs $\tau_\varphi : \mathfrak{F}^{I*}|U \longrightarrow f_! f^*\mathfrak{F}|U$.

Proposition 6.2.2. (i) La catégorie ψ_f est localement filtrante à droite (IV 14) sur S_{et} .

(ii) Les flèches (6.2.1.1) définissent un isomorphismes

$$\tau : \varinjlim_{\varphi=(V_i)_{i\in I} \in \psi_f(U)} \mathfrak{F}^{I*}|U \xrightarrow{\sim} f_! f^*\mathfrak{F} \quad .$$

Si S est strictement local de point fermé s, le S-schéma X admet une décomposition $\varphi \in \psi_f(S)$ en parties ouvertes et fermées $X = \coprod_{i\in I} X_i$ indexée par un ensemble pointé I telle que la fibre de X_o en s soit vide, que les $X_i (i \neq 0)$ soient finis sur S et que la fibre de $X_i (i \neq 0)$ en s soit réduite à un point (EGA IV 18.12.1). Une telle décomposition est un élément final de $\psi(S)$. De plus, en vertu de 6.1.4 (iii) (ou parce que c'est évident) la fibre en s de la flèche τ_φ (6.2.1.1) est un isomorphisme.

Dans le cas général, soit x un point géométrique de S et ψ_x la fibre de ψ_f en x ,

$$\psi_x = \varinjlim_{U(x)} \psi_f(U) \quad ,$$

pour U voisinage étale de x . Soit S_x le localisé strict de S en x , $X_x = X \times_S S_x$ et $f_x : X_x \longrightarrow S_x$. Les sorites de passage à la limite

montrent que la catégorie ψ_x est équivalente à la catégorie $\psi_{f_x}(S_x)$, donc filtrante à droite. Il en résulte que ψ est localement filtrante à droite. De plus, la fibre en x de τ s'identifie à la flèche

$$\tau_x \; : \; \varinjlim_{\psi_x} \mathfrak{F}_x^{I_x} \longrightarrow (f_! f^* \mathfrak{F})_x$$

et, d'après ce qui précède, cette flèche est un isomorphisme.

Théorème 6.2.3. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow S$, séparé, plat de présentation finie et quasi-fini, et tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur S, un morphisme trace

$$Tr_f \; : \; f_! f^* \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$$

de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(Var 1) Tr_f est fonctoriel en $\mathfrak{F}$.

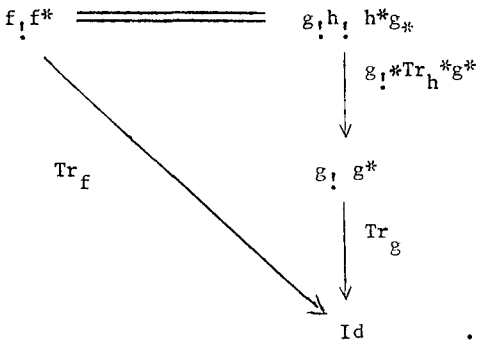
(Var 2) Tr_f est compatible à tout changement de base, i.e. pour tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

le diagramme de foncteurs suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} f'_! f'^* g^* & = & f'_! g'^* f^* & = & g^* f_! f^* \\ \downarrow{\scriptstyle Tr_{f'} * g^*} & & & & \downarrow{\scriptstyle g^* * Tr_f} \\ g^* & = & = & = & g^* \end{array}$$

(Var 3) Tr_f est compatible avec la composition, i.e. si f est le composé f = gh de deux morphismes séparés, plats, de présentation finie et quasi-finis, le diagramme suivant est commutatif :



(Var 4) (Normalisation). Si f est fini de rang constant n , l'homomorphisme composé

$$\mathcal{O} \longrightarrow f_*f^*\mathcal{O} = f_!f^*\mathcal{O} \xrightarrow{Tr_f} \mathcal{O}$$

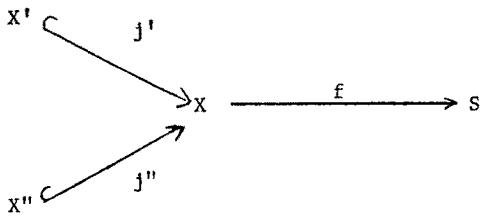
est la multiplication par n .

Notons tout d'abord que les conditions (Var 2) à (Var 4) impliquent que

Lemme 6.2.3.1. Si $X = X' \coprod X''$ alors, posant $f' = f|X'$ et $f'' = f|X''$, le morphisme Tr_f :

$$f_!f^*\mathcal{O} = f'_!\, f'^*\mathcal{O} \oplus f''_!\, f''^*\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$$

est somme de $Tr_{f'}$ et $Tr_{f''}$.



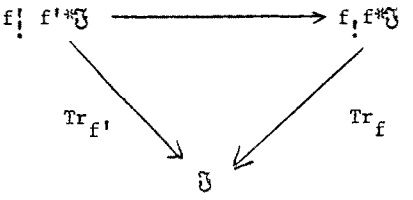
Si on applique (Var 2) à j', pour le changement de base par j', et (Var 4) pour l'application identique, on voit que

$$Tr_{j'} : j'_! j'^* f^* \mathfrak{F} \longrightarrow f^* \mathfrak{F}$$

est l'application canonique définie par la décomposition de $f^*\mathfrak{F}$ en somme directe

$$f^*\mathfrak{F} = j'_! j'^* f^* \mathfrak{F} \oplus j''_! j''^* f^* \mathfrak{F} \quad .$$

Si on applique (Var 3) à $f' = f \circ j'$, on voit que le diagramme suivant est commutatif



,

ce qui, joint à l'énoncé analogue pour f", n'est autre que 6.2.3.1 .

Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini séparé plat de présentation finie. Quel que soit $U \in Ob\ S_{et}$, soit $\psi_f^!(U)$ la sous-catégorie pleine de $\psi_f(U)$ (6.1.1) formée des décompositions $(V_i)_{i \in I}$ telle que, pour $i \neq 0$, V_i soit localement libre de rang constant sur U . Les

catégories $\psi_f'(U)$ forment une sous-catégorie fibrée de ψ_f , cofinale dans ψ_f .

Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ des faisceaux abéliens sur S . D'après 6.2.2 (ii), il revient au même de se donner un morphisme $g : f_! f^*\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ou de se donner, pour chaque décomposition $\varphi = (V_i)_{i\in I} \in \psi_f'(U)$, un morphisme $g_\varphi : \mathfrak{F}^{I*}|U \longrightarrow \mathfrak{G}|U$, compatible aux morphismes ${}^t\sigma$ de (6.2.1.2). Si f_i est la projection de V_i sur U, g_φ est la flèche de coordonnées les flèches composées :

$$g_\varphi^i \quad : \quad \mathfrak{F}|U \longrightarrow f_{i*} f_i^* \mathfrak{F}|U \longrightarrow f_! f^*\mathfrak{F}|U \xrightarrow{g} \mathfrak{G}|U$$

On en déduit qu'il existe une et une seule flèche Tr_f, compatible à la localisation étale et vérifiant (Var 4) et 6.2.3.1. Il est clair que cette flèche vérifie (Var 1) et (Var 2).

Pour vérifier (Var 3), on se ramène par changement de base au cas facile où S est le spectre d'un corps algébriquement clos.

6.2.4. Une pondération d'un morphisme quasi-fini séparé $f : X \longrightarrow S$ est la donnée, pour chaque point géométrique x de X d'un entier n(x), ne dépendant que du point de X image de x, cette donnée vérifiant :

(*) Quels que soient $U \in Ob\ S_{et}$ et la partie ouverte et fermée X_1 de $f^{-1}(U)$, finie sur U, la fonction qui à chaque point géométrie s de U associe le nombre $\sum_{x\in X_1(s)} n(x)$ est localement constante.

Si $f = g\,h$ est le composé de deux morphismes pondérés, on pondère f en posant $n_f(x) = n_h(x).n_g(h(x))$.

Si le morphisme f' se déduit par un changement de base g d'un morphisme pondéré f, on pondère f' en posant $n_{f'}(x) = n_f(g'(x))$.

Les arguments qui précèdent prouvent en fait :

Proposition 6.2.5. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme quasi-fini séparé pondéré $f : X \longrightarrow S$ et tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur S, un morphisme trace $Tr_f : f_!f^*\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$, qui soit fonctoriel en $\mathfrak{F}$, compatible aux changements de base et à la composition, et vérifie :

(Var'4) Si f est fini et s'il existe un entier n tel que, pour tout point géométrique s de S, on ait $\sum_{x \in X(s)} n(x) = n$, alors la flèche composée

$$\mathfrak{F} \longrightarrow f_*f^*\mathfrak{F} = f_!f^*\mathfrak{F} \xrightarrow{Tr_f} \mathfrak{F}$$

est la multiplication par n .

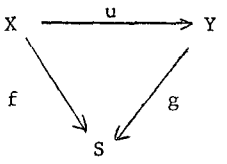
Exemple 6.2.6. Soient S un schéma noethérien géométriquement unibranche (par exemple normal), et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-fini séparé. Pour tout point géométrique x de X d'image s dans S, soit $\mathcal{O}_x$ (resp. $\mathcal{O}_s$) l'anneau strictement local de X en x (resp. de S en s). Le schéma $\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_s)$ est réduit et a un unique point maximal η . De plus, $\mathcal{O}_x$ est fini sur $\mathcal{O}_s$. On pose $n(x) = rg_\eta(\mathcal{O}_x)$. On vérifie que n(x) est une pondération de f, d'où un morphisme trace Tr_f .

6.2.7. Soit $u : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé quasi-fini plat de présentation finie. Le morphisme trace (6.2.3) étant fonctoriel, il définit, pour tout complexe de faisceaux abéliens K sur Y, un morphisme de complexes

(6.2.7.1) $\qquad Tr_u : u_! u^* K \longrightarrow K \quad .$

On appellera encore, au choix, morphisme trace, morphisme de Gysin ou morphisme u_* tout morphisme déduit de (6.2.7.1) ou 6.2.3 par application d'un foncteur. Par exemple les suivants.

Soit un diagramme commutatif



avec g séparé localement de type fini. Pour tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur Y, le morphisme trace définit un morphisme

(6.2.7.2) $\qquad Tr_u \text{ ou } u_* : f_! u^* \mathfrak{F} \simeq g_! u_! u^* \mathfrak{F} \xrightarrow{g_!(Tr_u)} g_! \mathfrak{F} \quad .$

Si g est compactifiable, et si K est un complexe borné inférieurement à cohomologie de torsion, ou un complexe de $g^*\mathcal{A}$-modules pour $\mathcal{A}$ faisceau d'anneaux de torsion sur S, le morphisme trace (6.2.7.1) induit de même

(6.2.7.3) $\qquad Tr_u \text{ ou } u_* : Rf_! u^*K \simeq Rg_! u_! u^*K \xrightarrow{Rg_!(Tr_u)} Rg_! K \ ,$

(6.2.7.4) $\qquad Tr_u \text{ ou } u_* : R^q f_! u^*K \simeq R^q g_! u_! u^*K \xrightarrow{R^q g_!(Tr_u)} R^q g_! K \quad .$

Pour S spectre d'un corps algébriquement clos,(6.2.7.4) est un morphisme

(6.2.7.5) $$u_* : \mathbf{H}^q_c(X, u^*K) \longrightarrow \mathbf{H}^q_c(Y, K)$$

On voit donc que la cohomologie à supports propres présente un caractère covariant vis-à-vis des morphismes quasi-finis.

6.2.8. Soient $u : X \longrightarrow Y$ comme en 6.2.7, $\Delta_n = [0,n]$ l'ensemble type à $n+1$-éléments et X_n le produit fibré itéré $(n+1)^{\text{uple}}$ de X au-dessus de Y . Les X_n forment un schéma simplicial augmenté vers Y (cf. VI_B). On désignera par $u_n : X_n \longrightarrow Y$ le morphisme d'augmentation. Si $\mathfrak{F}$ est un faisceau abélien sur Y, les faisceaux $\mathfrak{F}_n = u_{n!}\, u_n^*\mathfrak{F}$ forment, en vertu (6.2.7.2) (appliqué après le changement de langage $S \longrightarrow Y$, $X \longrightarrow X_n$, $Y \longrightarrow Y$ ou X_m), un faisceau simplicial augmenté vers $\mathfrak{F}$. Le faisceau différentiel des "chaînes non dégénérées" de ce faisceau simplicial a par définition pour $n^{\text{ième}}$ composante le quotient de $\mathfrak{F}_n$, conoyau de la somme directe des opérateurs de dégénérescence de but $\mathfrak{F}_n$ et des morphismes $\sigma \sim \varepsilon(\sigma)$ pour σ opérateur de symétrie.

Proposition 6.2.9. Sous les hypothèses précédentes, pour u étale séparé de type fini surjectif et pour tout faisceau abélien $\mathfrak{F}$ sur Y, on a

(i) Les faisceaux $\mathfrak{F}_n$ forment une résolution (gauche) de $\mathfrak{F}$.

(ii) Le complexe différentiel des chaînes non dégénérées du faisceau simplicial $(\mathfrak{F}_n)$ est une résolution (gauche) de $\mathfrak{F}$. Si les fibres géométriques de u ont toutes au plus d points, cette résolution est de longueur $\leq d$.

Par changement de base, il suffit de vérifier cet énoncé pour Y le spectre d'un corps algébriquement clos, auquel cas 6.2.8 se ramène au calcul de l'hmologie simplicial d'un simplexe.

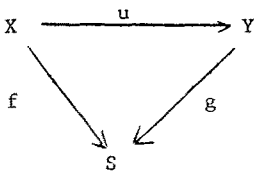
Soient $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini du schéma Y , $\mathfrak{F}$ un faisceau abélien sur Y et, pour chaque partie P de I, soit j_P l'inclusion de $U_P = \bigcap_{i\in P} U_i$ dans X . Supposons choisi un ordre total sur I . Si $X = \coprod_{i\in I} U_i$ et si u est la projection de X sur Y, la résolution 6.2.9 (ii) de $\mathfrak{F}$ est donnée par

$$(6.2.9.1) \qquad (\mathfrak{F}_n)_{n \text{ dég}} = \bigoplus_{|P|=n+1} j_{P!}\, j_P^*\, \mathfrak{F} \quad .$$

Cette résolution garde un sens pour I infini.

6.2.10. Sous les hypothèses de 6.2.9, soient $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux de torsion sur Y et $K \in Ob^-(Y,\mathcal{A})$. On annèle X par $u^*\mathcal{A}$. La résolution 6.2.9 (i) (resp. 6.2.9 (ii)), étant fonctorielles en $\mathfrak{F}$, définit une résolution de K par un double complexe K_1 . Cette résolution s'appelle <u>la résolution de Cech</u> extraordinaire (resp. <u>extraordinaire alternée</u>) de K.

Soit un diagramme commutatif



,

avec g compactifiable. Avec les notations de 6.2.8, si f_n est la projection de X_n sur S, on a $Rf_{n!} = Rg_!\, U_{n!}$. Le complexe K_1 , filtré

par le degré semi-simplicial, définit donc une suite spectrale

$$(6.2.10.1) \qquad E_1^{-p,q} = R^q f_{p!} (u_p^* K) \Longrightarrow R^{-p+q} g_! K ,$$

Les différentielles d_1 proviennent des flèches simpliciales, de sorte que

$$(6.2.10.2) \qquad E_2^{-p,q} = \check{\mathcal{H}}^p (R^q f_{p!} (u_p^* K)) \Longrightarrow R^{-p+q} g_! K .$$

Sous les hypothèses de (6.2.9.1), on trouve de même une suite spectrale

$$(6.2.10.3) \qquad E_1^{-p,q} = \bigoplus_{|P|=p+1} R^q f_{p!} (j_P^* K) \Longrightarrow R^{-p+q} g_! K .$$

Les suites spectrales (6.2.10.1) et (6.2.10.3) s'appellent les suites spectrales de localisation en haut.

Proposition 6.2.11. Si f est un morphisme étale, séparé de type fini, le foncteur $f_!$ est un adjoint à gauche du foncteur f^*, et admet le morphisme trace pour flèche d'adjonction.

On sait que si X est un objet d'un site S, le foncteur f^* de restriction des faisceaux abéliens à X admet un adjoint à gauche $f_!$. Si F est un faisceau abélien sur X, $f_! F$ est le faisceau engendré par le préfaisceau

$$V \longrightarrow \bigoplus_{\xi \in \mathrm{Hom}(V,X)} F(\xi) .$$

Dans le cas étale, notons provisoirement ce foncteur $f_!''$. De sa propriété d'adjonction résulte aussitôt que sa formation commute à tout changement de base. Le morphisme trace définit un morphisme t de $f_! \mathfrak{F}$ dans $f_!^0 \mathfrak{F}$,

compatible à tout changement de base. Il suffit de voir que t est un isomorphisme fibre par fibre, i.e. pour S spectre d'un corps séparablement clos, où cela est trivial.

6.2.11.1. On prendra garde que cette interprétation de $f_!^o$ est specifique au cas du site étale et ne s'étend pas au site fpqf d'un préschéma, par exemple.

6.3. Variante de la trace pour des coefficients continus.

On démontre dans ce n° les assertions de GROTHENDIECK [1, n°6], et on applique ces résultats à la définition d'un "morphisme trace" pour des faisceaux fppf convenables.

6.3.1. Soit A un anneau commutatif. Si L et M sont deux A-modules projectifs de type fini, l'application $u \longmapsto \overset{m}{\wedge} u$, de Hom(L,M) dans $\mathrm{Hom}(\overset{m}{\wedge} L, \overset{m}{\wedge} M)$, est compatible à tout changement de base et m-ique (5.5.2). D'après 5.5.2 , elle définit un morphisme

$$(6.3.1.1) \qquad \overset{m}{\wedge} : \Gamma^m \mathrm{Hom}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overset{m}{\wedge} L, \overset{m}{\wedge} M)$$

tel que, après tout changement de base, pour $u \in \mathrm{Hom}(L,M)$, on ait $\overset{m}{\wedge}(\gamma^m(u)) = \overset{m}{\wedge} u$. Puisque Hom(L,M) est plat, ce morphisme s'identifie (5.5.2) à un morphisme

$$(6.3.1.2) \qquad \overset{m}{\wedge} : TS^m \mathrm{Hom}(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overset{m}{\wedge} L, \overset{m}{\wedge} M) \quad .$$

N.B. On peut aussi définir un tel homomorphisme dès que 2 est inversible dans A : un élément symétrique de $\overset{m}{\otimes} \mathrm{Hom}(L,M)$ définit un homomorphisme symétrique de $\overset{m}{\otimes} L$ dans $\overset{m}{\otimes} M$, et celui-ci passe au quotient pour définir un homomorphisme de $\overset{m}{\wedge} L$ dans $\overset{m}{\wedge} M$.

Etant donnés trois A-modules projectifs de type fini, le diagramme

$$(6.3.1.3)\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma^m \mathrm{Hom}(L,M) \otimes \Gamma^m \mathrm{Hom}(M,N) & \longrightarrow & \Gamma^m \mathrm{Hom}(L,N) \\ \downarrow{\scriptstyle \bigwedge^m \otimes \bigwedge^m} & & \downarrow{\scriptstyle \bigwedge^m} \\ \mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m M) \otimes \mathrm{Hom}(\bigwedge^m M, \bigwedge^m N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\bigwedge^m L, \bigwedge^m N) \end{array},$$

dans lequel les flèches horizontales sont déduites des flèches de composition (et, pour la première, de (5.5.2.8)), est commutatif. Ceci traduit la formule $\bigwedge^m(vu) = \bigwedge^m v \circ \bigwedge^m u$.

Si L est un A-module libre de rang n, (6.3.1.2) définit un morphisme canonique

$$(6.3.1.4)\qquad \det : \Gamma^n \mathrm{End}_A(L) = TS^n \mathrm{End}_A(L) \longrightarrow A \quad ,$$

qui est un homomorphisme d'algèbres d'après 6.3.1.3. Par définition, on a

$$(6.3.1.5)\qquad \det(u^{\otimes n}) = \det(u ; L) \quad .$$

Si L est de plus un module sur une A-algèbre B, (6.3.1.4) définit par composition un homomorphisme d'algèbres

$$(6.3.1.6)\qquad \det_L : TS^n_A(B) \longrightarrow A \quad .$$

Lemme 6.3.2. Supposons que L s'insère dans une suite exacte

$$F : 0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow L'' \longrightarrow 0$$

avec L' (resp. L") localement libre de rang n_1 (resp. n_2). Soient $n = n_1 + n_2$, α le morphisme "gradué associé" du groupe End(E) des

endomorphismes de l'extension E dans End(L') ⊕ End(L") et, pour X et Y deux A-modules plats, soit β le morphisme de $TS^n(X \oplus Y)$ dans $TS^{n_1}(X) \otimes TS^{n_2}(Y)$ déduit de l'isomorphisme (5.5.2.6)

$$TS^n(X \oplus Y) \simeq \sum_{n'+n''=n} TS^{n'}(X) \otimes TS^{n''}(Y) \quad .$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} TS^n(End)(E)) & \xrightarrow{TS^n(\alpha)} & TS^n(End(L') \oplus Ens(L")) & \xrightarrow{\beta} & TS^{n_1}(End(L')) \otimes TS^{n_2}(End(L")) \\ \downarrow & & & & \downarrow \det \otimes \det \\ TS^n(L) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \det \qquad\qquad} & & A \end{array}$$

D'après la propriété universelle 5.5.2 de TS^n , il suffit de vérifier que pour $u \in End(E)$ les deux images de $u^{\otimes n}$ coïncident. Si $\alpha(u) = (u', u")$, ces images sont respectivement det(u) et det(u').det(u"), d'où la conclusion.

Lemme 6.3.3. Soient A un anneau, B une A-algèbre, C une B-algèbre non nécessairement commutative, E un B-module libre de rang n sur A, et F un C-module libre de rang m sur B . On suppose C plat sur A . D'après la propriété universelle 5.5.2.2 de Γ^{nm} et 5.5.2.3, il existe une unique flèche $\sigma : TS_A^{nm}(C) \longrightarrow TS_A^n\, TS_B^n(C)$ telle qu'après tout changement d'anneaux $A \longrightarrow A'$, on ait $\sigma(c^{\otimes nm}) = (c^{\otimes m})^{\otimes n}$. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TS_A^n(B) & \xleftarrow{TS_A^n(\det_F)} & TS_A^n\, TS_B^m(C) \\ \downarrow{\scriptstyle \det_E} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\ A & \xleftarrow{\det_E \otimes_B F} & TS_A^{nm}(C) \end{array}$$

Preuve. D'après 5.5.2.2 et 5.5.2.3, il suffit de montrer que les deux images d'un élément $u^{\otimes nm}$ de $TS_A^{nm}(C)$ coïncident. Ces images sont $\det_E(\det_F(u))$ et $\det_{E \otimes_B F}(u)$; elles s'expriment en termes de A, B, E, F et $u \in \mathrm{End}_B(F)$ et, pour vérifier qu'elles coïncident, on peut au préalable remplacer B par son image (commutative) B_1 dans End(E), et F par $F \otimes_B B_1$. La formule à prouver est alors la formule de calcul par bloc des déterminants (BOURBAKI, Alg. Ch. 8 § 12 lemme 2 p.140).

Lorsque C n'est plus nécessairement plat sur A, la même démonstration fournit plus généralement un diagramme commutatif d'algèbres

(6.3.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma_A^n(B) & \xleftarrow{\Gamma_A^n(\det_F)} & \Gamma_A^n\, \Gamma_B^n(C) \\ \downarrow{\scriptstyle \det_E} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma} \\ A & \xleftarrow{\det_E \otimes_B F} & \Gamma_A^{nm}(C) \,. \end{array}$$

6.3.4. Si B est une A-algèbre commutative, $\mathrm{Spec}(TS^n(B))$ n'est autre que la puissance symétrique $n^{\text{ième}}$ de Spec(B) sur Spec(A), i.e. le quotient de $(\mathrm{Spec}(B)/\mathrm{Spec}(A))^n$ par le groupe symétrique (SGA 1 IV 3).

Si X est un S-schéma séparé, on dira qu'un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathfrak{F}$ sur X est fini localement libre (resp. et de rang n) sur S si son support est fini sur S et si son image directe est localement libre de rang fini (resp. de rang n) sur S . Par support de $\mathfrak{F}$, on entendra encore le sous-schéma de X défini par l'annulation de $\mathfrak{F}$ (qui est un Idéal quasi-cohérent, $\mathfrak{F}$ étant quasi-cohérent de type fini).

Si $\mathfrak{F}$ est fini localement libre sur S, de rang n et de support E, le schéma E est affine sur S ; par globalisation sur S, $\mathfrak{F}$ définit, via (6.3.1.6), une section $\sigma_E(\mathfrak{F})$ de $\mathrm{Sym}^n_S(E)$, d'où, par fonctorialité, une section $\sigma(\mathfrak{F})$ de l'espace algébrique (*) $\mathrm{Sym}^n_S(X)$,

$$\sigma(\mathfrak{F}) \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(X)/S) \quad . \tag{6.3.4.1}$$

En particulier, si $f : S' \longrightarrow S$ est fini localement libre de rang n, on obtient, pour $\mathfrak{F} = \mathcal{O}_{S'}$, une section canonique

$$t \in \Gamma\,(\mathrm{Sym}^n_S(S')/S) \quad . \tag{6.3.4.2}$$

Proposition 6.3.5. Soient X un schéma séparé sur S et $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ deux $\mathcal{O}_X$-modules finis localement libres de rang n_1 et n_2 sur S . On pose $n = n_1 + n_2$. Soit d la flèche canonique $d : \mathrm{Sym}^{n_1}_S(X) \times \mathrm{Sym}^{n_2}_S(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_S(X)$. Si $\mathfrak{F}$ est une extension de $\mathfrak{F}_1$ par $\mathfrak{F}_2$, on a

$$\sigma(\mathfrak{F}) = d(\sigma(\mathfrak{F}_1), \sigma(\mathfrak{F}_2)) \quad .$$

(*) M. ARTIN, Algebraization of formal moduli I . On n'aura à utiliser la construction précédente que lorsque $\mathrm{Sym}^n_S(X)$ existe en tant que schéma, ce qui est le cas pour X quasi-projectif sur S .

On peut remplacer X par le support (fini sur S) de $\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$ et supposer S affine. Traduite en terme d'anneaux, la proposition résulte alors de 6.3.2.

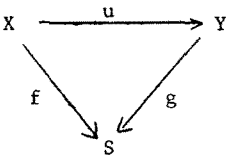
Lemme 6.3.6. Si X est un schéma séparé sur S, $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module fini localement libre de rang n sur S et si $\mathfrak{L}$ est un faisceau inversible sur X, on a

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{L}) \quad .$$

Remplaçons X par le support (6.3.4) de $\mathfrak{F}$ localement sur S, $\mathfrak{L}$ est alors isomorphe à $\mathcal{O}_X$, et l'assertion devient triviale.

Le lecteur vérifiera :

Proposition 6.3.7. Pour tout diagramme de S-schémas séparés sur S



,

et tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathfrak{F}$ fini localement libre de rang n sur S, le $\mathcal{O}_Y$-module $u_* \mathfrak{F}$ est fini localement libre de rang n sur S, et

$$u(\sigma(\mathfrak{F})) = \sigma(u_* \mathfrak{F}) \quad .$$

6.3.7.1. Notons enfin que la construction des morphismes σ (6.3.4.1) et t (6.3.4.2) est compatible à tout changement de base, ce qui a un sens d'après 5.5.2.7.

Application 1. Le cas des courbes lisses.

6.3.8. Soit $f : X \longrightarrow S$ une courbe lisse et quasi-projective sur S, i.e. un morphisme lisse quasi-projectif purement de dimension relative 1 . La théorie des schémas de Hilbert [GROTHENDIECK [1]) montre que le faisceau fpqc $\underline{Div}^n_{X/S}$ qui, à chaque S-schéma S', associe l'ensemble des diviseurs relatifs sur $X' = X \times_S S'$ qui sont finis sur S et de degré n, est un faisceau représentable.

Pour chaque diviseur relatif E sur X, fini de degré n sur S, on dispose d'un élément canonique (6.3.4.3) $t(E) \in \mathrm{Sym}^n_S(E)$, d'image $\sigma(E)$ dans $\mathrm{Sym}^n_S(X)$. Cette construction, étant compatible à tout changement de base, définit

$$(6.3.8.1) \qquad \sigma : \underline{Div}^n_{X/S} \longrightarrow \mathrm{Sym}^n_S(X) : E \longrightarrow \sigma(\mathcal{O}_E) \quad .$$

Chaque section s de f définit un diviseur relatif fini sur S de degré 1, le diviseur s(S). Le morphisme

$$(X/S)^n \longrightarrow \underline{Div}^n_{X/S} \quad : \quad (s_i)_{0<i\leq n} \longmapsto \sum s_i(S)$$

est symétrique, et induit donc un morphisme

$$(6.3.8.2) \qquad \alpha \quad : \quad \mathrm{Sym}^n_S(X) \longrightarrow \underline{Div}^n_{X/S} \quad .$$

Proposition 6.3.9. Les morphismes σ et α de 6.3.8 sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Preuve. a) $\sigma\,\alpha = \mathrm{Id}$. Il suffit de prouver que la flèche composée

$$(X/S)^n \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sym}^n_S(X) \xrightarrow{\alpha} \underline{Div}^n_{X/S} \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Sym}^n_S(X)$$

est π . Pour n = 1, l'assertion est claire ; le cas général s'en déduit via le

Lemme 6.3.9.1. Avec les notations de 6.3.5 et (6.3.8.1), on a

$$\sigma (E + F) = d(\sigma(E), \sigma(F)) \quad .$$

Ce lemme résulte de 6.3.5, 6.3.6 et de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-F) \otimes \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_{E+F} \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow 0 \quad .$$

b) On sait que $\underline{Div}^n_{X/S}$ est lisse sur S (il n'y a pas d'obstruction à relever infinitésimalement des diviseurs sur une courbe (cf. SGA 3 XI 1)). Le morphisme $\alpha \pi : (X/S)^n \longrightarrow \underline{Div}^n_{X/S}$ est un morphisme quasi-fini surjectif entre schéma lisses sur S de source à fibres équidimensionnelles. Il est donc plat (EGA 0_{IV} 17.3.5), donc $\alpha \pi$ est un épimorphisme de faisceaux fppf, donc α l'est aussi. Compte tenu de a), ceci achève la démonstration de 6.3.9.

Lemme 6.3.10. Soient k un anneau commutatif, M un k-module libre et u un endomorphisme de M . Désignons par $N_{\det(u-T)=0}$ la norme de $k[T]/\det(u-T)$ à k . Pour $P \in k[T]$, on a alors

$$N_{\det(u-T)=0} (P(T)) = \det(P(u), M) \quad .$$

Il s'agit de vérifier une identité algébrique entre les coefficients de la matrice de u et les coefficients de P . Pour prouver 6.3.10, il suffit donc (grâce à des arguments familiers) de traiter le cas où k est un corps algébriquement clos et où u est semi-simple, de valeurs propres a_i .

On a alors

$$\det(u - T) = \prod (a_i - T)$$

$$N_{\det(u - T) = 0}(P(T)) = \prod P(a_i) \quad \text{et}$$

$$\det (P(u), M) = \prod P(a_i) \quad .$$

6.3.11.0. Soient $f: X \longrightarrow S$ un morphisme quasi-projectif, de présentation finie, plat à fibres purement de dimension 1 et Cohen-Macaulay ; ces conditions sont donc vérifiées si X est une courbe lisse quasi-projective sur S . Soit $\mathfrak{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module, fini localement libre sur S . Le module $\mathfrak{F}$ étant nul sur un ouvert dense fibre par fibre de X, on dispose d'une flèche canonique $\psi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \det^*(\mathfrak{F})$ (SGA 6 XI ou MUMFORD [1 Ch. 5 § 3]). On désignera par $\delta(\mathfrak{F})$ le diviseur défini par l'idéal annulateur de coker (ψ) (Ibidem) ; ce diviseur est fini sur S .

Proposition 6.3.11.1. Sous les hypothèses 6.3.11.0 et avec les notations de 6.3.8 et(6.3.4.1), si $\mathfrak{F}$ est de rang n, alors $\delta(\mathfrak{F})$ est de degré n et

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\delta(\mathfrak{F})) \quad .$$

Démonstration. a) Cas f lisse. On se ramène de façon standard au cas S local artinien à corps résiduel algébriquement clos. L'additivité (6.3.5) de σ permet de supposer le support de $\mathfrak{F}$ concentré en un point rationnel x de X . On vérifie aussitôt que si T est une uniformisante en x, définissant $p : X \longrightarrow A^1_S$, alors $p_*(\mathcal{O}_{S(\mathfrak{F})}) \simeq \mathcal{O}_{\delta(p_*\mathfrak{F})}$ (car les constructions effectuées commutent au passage au complété). On se ramène par là et 6.3.7 au cas où $X = A^1_S$.

Si $X = \mathbb{A}^1_S$ et si S est affine, $S = \mathrm{Spec}(k)$, alors $\mathfrak{F}$ s'identifie à un k-module localement libre M, muni d'un endomorphisme u (l'action de T). Le module M, en tant que k[T]-module, admet la résolution

$$0 \longrightarrow k[T] \otimes_k M \xrightarrow{\varphi} k[T] \otimes_k M \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 ,$$

où $\varepsilon(P \otimes m) = P(u)(m)$ et où $\varphi(1 \otimes m) = 1 \otimes um - T \otimes m$. De la formule $\varphi = u - T$, on déduit que le diviseur $\delta(\mathfrak{F})$ admet pour équation $\det(u - T, M) = 0$.

Pour vérifier 6.3.11, il suffit de montrer que, après tout changement de base et pour toute φ section de $\mathcal{O}_X$, on a

$$\det_k(\varphi, M) = \det_k(\varphi, \mathcal{O}_{\delta(\mathfrak{F})}) \quad (= N_{\delta(\mathfrak{F})/S}(\varphi)) \quad .$$

Pour $f = P(T)$, c'est ce qu'affirme 6.3.10.

b) Cas général. Explicitons d'abord l'énoncé à prouver sous la forme plus concrète suivante :

Corollaire 6.3.11.2. Sous les hypothèses 6.3.11.0 sur $f: X \longrightarrow S$, soient M un module localement libre de type fini sur X, et u un endomorphisme de M tel que $\det u$ soit une section de $\underline{0}_X$ régulière sur chaque fibre X_s (d'où résulte que $\mathrm{Coker}\ u = M/u(M)$ et $\mathrm{Coker}\ \det u = \underline{0}_X/\det u$ sont tous deux plats de présentation finie sur S et à fibres quasi-finies). Supposons que le support commun de ces faisceaux soit fini sur S, de sorte qu'ils définissent des faisceaux localement libres de type fini sur S. Alors pour toute section φ de $\underline{0}_X$, les déterminants par rapports à $\underline{0}_S$ de φ opérant sur Coker u et sur Coker det u sont égaux :

$$\det_S(\varphi, M/u(M)) = \det_S(\varphi, \underline{0}_X/\det u) \quad . \tag{6.3.11.3}$$

On notera que cet énoncé implique l'égalité des rangs des deux Modules localement libres envisagés sur S, par raison d'homogénéité (lorsqu'on y remplace φ par $T\varphi$, T une section "indéterminée" de $\underline{O}_S$). D'ailleurs, remplaçant φ par $1 + T\varphi$, où j est une telle indéterminée (de façon précise, on fait un changement de base $S'=S[T] \longrightarrow S$), on déduit de(6.3.11.3) la formule en apparence plus générale

$$\text{(6.3.11.4)} \qquad \mathrm{Pol}_S(\varphi, M/uM)(T) = \mathrm{Pol}_S(\varphi, \underline{O}_X/\det u)(T)$$

sur les polynômes caractéristiques.

Pour prouver 6.3.11.3, nous allons nous ramener au cas lisse déjà prouvé. Par localisation étale sur S, on se ramène au cas où S est strictement local de point fermé s, puis par additivité on se ramène au cas où le support de M/u(M) a un seul point sur X_s , soit x . Quitte à faire une extension plate de la base, on peut supposer l'extension résiduelle k(x)/k(s) triviale, et quitte à remplacer X par un voisinage assez petit de x, et à ajouter à φ une fonction qui induise l'opération nulle sur M/u(M) et sur $\underline{O}_X/\det u$ (ce qui ne modifie pas la formule à prouver), on voit aisément qu'on peut supposer que φ induit une section de $\underline{O}_{X_s}$ régulière en x, donc (quitte à rapetisser X) définitun morphisme quasi-fini et plat

$$p : X \longrightarrow X' = S[T] \quad .$$

Par localisation étale sur X et sur X', on peut donc supposer qu'on a un morphisme <u>fini</u> et <u>plat</u> p comme dessus, avec X' lisse sur S, et $\varphi = p^*(\varphi')$, où φ' est une section de $\underline{O}_{X'}$. Posons alors

$$M' = p_*(M) \quad , \quad u' = p_*(u) \ ,$$

$$P=\mathrm{Coker}\ u,\ Q = \mathrm{Coker}\ \det u \ ,$$

$$P'=\mathrm{Coker}\ u',\ Q'=\mathrm{Coker}\ \det u' \quad .$$

On sait qu'on a

$$\det u' = N_{X'/X} \det u, \text{ donc } Q' = \mathrm{Coker}\ N_{X'/X}(\det u) \quad .$$

On a trivialement

$$\det_S(\varphi,P) = \det_S(\varphi',P) \quad ,$$

et d'après la formule (6.3.11.3) prouvée dans le cas lisse,

$$\det_S(\varphi',P') = \det_S(\varphi',Q') \quad ,$$

de sorte qu'il reste à prouver la formule

$$\det_S(\varphi',Q') = \det_S(\varphi,Q) \quad ,$$

qui <u>équivaut</u> à la formule (6.3.11.3) à établir. On voit donc que la validité de celle-ci ne dépend que de la section $\det u$ de $\underline{O}_X$, ou encore qu'elle équivaut à la même formule dans le cas où M est remplacé par $\underline{O}_X$, et φ par $\det u$. Mais dans le cas $M=\underline{O}_X$ la formule (6.3.11.3) est tautologique ! Cela achève la démonstration.

Remarque 6.3.11.5. Dans le cas où S est artinien, l'égalité des rangs sur S de Coker u et Coker det u (notations de 6.3.11.2) est un cas particulier de EGA IV 21.10.17.3, dont (6.3.11.3) peut être considéré comme une version "relative".

Proposition 6.3.12. Soient X et Y deux courbes quasi-projectives de présentation finie, plates à fibres Cohen Macaulay sur S, et u : X → Y un morphisme quasi-fini et plat.

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Div}}^n_{X/S} & \xrightarrow{u_*} & \underline{\mathrm{Div}}^n_{Y/S} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_X} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_Y} \\ \mathrm{Sym}^n_S(X) & \xrightarrow{\mathrm{Sym}^n(u)} & \mathrm{Sym}^n_S(Y) \end{array}$$

est alors commutatif (*).

Puisque $u_*(D) = \delta(u_* \mathcal{O}_D)$, 6.3.12 réuslte de 6.3.7 et 6.3.11.1.

Application 2. Le morphisme trace.

6.3.13. Soit G un faisceau abélien sur le grand site fppf d'un schéma S (0.10). Supposons que G vérifie la condition suivante.

(6.3.13.1). Pour tout morphisme affine plat de présentation finie $f : X \longrightarrow Y$ de S-schémas, et pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Sym}^n_Y(X), G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S((X/Y)^n, G)$$

(*) Le morphisme u_* est défini parce qu'on se limite aux diviseurs finis sur S. On prend par exemple pour définition $u_*(D) = \delta(u_* \mathcal{O}_D)$, formule qui coïncide avec EGA IV 21.5.5 pour u fini.

est injectif et a pour image l'ensemble des morphismes symétriques de $(X/Y)^n$ dans G.

Cette condition est stable par changement de base.

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme fini localement libre de rang n. Soit pr_i la $i^{ème}$ projection de $(T/S)^n$ dans T, et t la section (6.3.4.3) de $Sym^n_S(T)$. Si $u \in G(T)$, alors $\Sigma\, pr_i^*(u)$ est un élément symétrique de $G(T/S)^n)$ et définit donc

$$u_n \in Sym^n_S(T) \quad .$$

On pose

$$Tr_f(u) = t^*(u_n) \quad .$$

Lorsque f est fini localement libre, on définit $Tr_f(u)$, localement sur S, par la formule précédente. Cette construction est compatible à tout changement de base et définit donc un morphisme trace

(6.3.13.2) $$Tr_f : f_*f^*G \longrightarrow G \quad .$$

6.3.14. La condition (6.3.13.1) est vérifiée dans les cas suivants

a) Si G est représentable, par définition des puissances symétriques.

b) Pour G l'image réciproque sur S_{fppf} d'un faisceau sur le petit site étale de S (0.10).

c) Pour G défini par un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent G_o.

L'énoncé c) se ramène à (5.5.2.7).

Proposition 6.3.15. Pour G vérifiant (6.3.13.1), on a :

(i) Le morphisme Tr_f est fonctoriel en G, donc additif.

(ii) Sa formation est compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow S$.

(iii) Si $T = \coprod_i T_i$, de sorte que $f_*G \xrightarrow{\sim} \Sigma\, f_{i*}\, G$, on a $Tr_f = \Sigma\, Tr_{f_i}$.

(iv) Si T est de rang constant n sur S, le morphisme composé

$$G \longrightarrow f_*f^*G \xrightarrow{Tr_f} G$$

est la multiplication par n .

(v) Le morphisme trace est compatible à la composition (cf. 6.2.3 Var 3).

Les assertions (i) et (ii) sont claires, et (iii) est conséquence facile de 6.3.5. Avec les notations de 6.3.13, si $u \in G(S)$, alors u_n est n fois l'image réciproque de u, de sorte que $Tr_f(f^*u) = t^*(u_n) = n\,u$.

Pour prouver (v), on se ramène, par localisation étale sur S et utilisant (iii), à prouver que pour

$$f = gh \ : \ S'' \xrightarrow{h} S' \xrightarrow{g} S \ ,$$

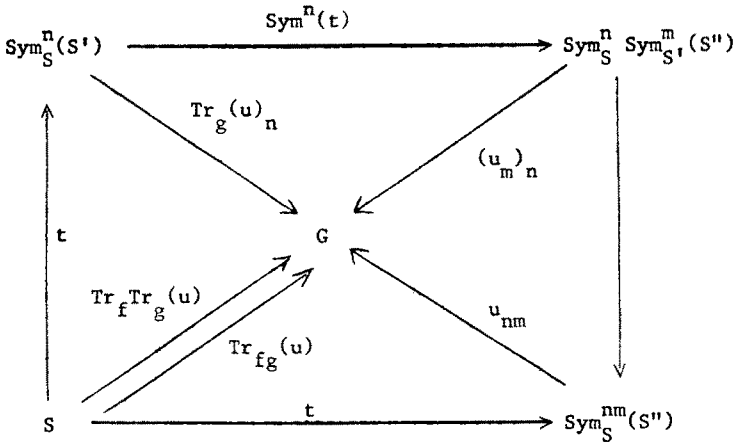
avec f et g finis localement libres de rangs constants n et m, le diagramme

(6.3.15.1)

$$\begin{array}{ccc} G(S'') & \xrightarrow{Tr_h} & G(S') \\ & {\scriptstyle Tr_f} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle Tr_g} & \\ & G(S) & \end{array}$$

est commutatif. Pour $u \in G(S'')$, considérons le diagramme

(6.3.15.2)



La flèche verticale de droite est définie car S' est plat sur S ; chaque triangle est commutatif et (v) sera donc conséquence de la commutativité du bord extérieur.

Traduisant en terme d'anneaux, c'est une conséquence du cas particulier B = E et C = F de 6.3.3.

6.3.16. Soit maintenant f : T ⟶ S un morphisme quasi-fini plat de présentation finie. Si $\underline{F}$ est un faisceau fppf sur T, on définit son image directe à support propre $f_!T$ sur S comme le préfaisceau qui à S'/S associe l'ensemble des sections de F sur T' dont le support est propre sur S' . Ce préfaisceau est un faisceau d'après 6.1.1. Avec la notation de 6.1.1, on peut aussi l'exprimer comme limite inductive locale (IV 14.).

$$f_! F = \varinjlim_{V \in \Phi(U)} f_*(F|V) \quad ,$$

formule qui rend compte du fait assez évident que les propriétés de $f_!$ se ramène à celles de f'_* pour f' fini. On trouve ainsi :

Proposition 6.3.17. On peut d'une et d'une seule façon définir, pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$ quasi-fini plat de présentation finie et pour tout faisceau fppf G sur S vérifiant (6.3.13.1), un morphisme trace

$$Tr_f : f_! f^* G \longrightarrow G$$

vérifiant :

(i) Pour f fini on retrouve le morphisme (6.3.13.2).

(ii) Les conditions (Var 1) à (Var 4) de 6.2.3 sont remplies, mutadis mutandis.

Le morphisme quasi-fini f induit un diagramme commutatif (cf. (0.11))de sites (dans lequel α_* est le foncteur "restriction"):

$$\begin{array}{ccc} T_{fppf} & \xrightarrow{\alpha} & T_{et} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_{et}} \\ S_{fppf} & \xrightarrow{\alpha} & S_{et} \end{array}$$

On a, pour G sur T_{fppf} ,

$$f_! \alpha_* \simeq \alpha_* f_! \quad .$$

On dispose aussi d'un morphisme "de changement de base"

$$c : f_{et}^{*}\,\alpha_{*} \longrightarrow \alpha_{*}f^{*} \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier la compatibilité suivante entre les morphisme traces 6.2.3 et 6.3.17 . Pour G sur S_{fppf} vérifiant (6.3.13.1), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} f_{et!}f_{et}^{*}\alpha_{*}\,G & \xrightarrow{f_{!}ch} & f_{et!}\alpha_{*}f^{*}G & \xleftarrow{\sim} & \alpha_{*}f_{!}f^{*}G \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (6.3.17.1)}\ {\scriptstyle Tr_f}\ {\scriptstyle (6.2.3)} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{*}Tr_f}\ {\scriptstyle (6.3.17)} \\ \alpha_{*}G & = & = & = & \alpha_{*}G \end{array}$$

En termes plus concrets, ceci signifie que si G est un faisceau fppf sur S, qui par restriction au site étale définit un faisceau étale $\alpha_{*}G$, et si u est une section à support propre de l'image réciproque $f_{et}^{*}(\alpha_{*}G)$, d'image u_1 dans f*G, les éléments $Tr_f(u)$ (au sens 6.2.3) et $Tr_f(u_1)$ (au sens 6.2.17) coïncident dans G(S).

Exemple 6.3.18. Soit $f : S' \longrightarrow S$ un morphisme fini localement libre de rang n et $u \in \Gamma(S',\mathcal{O}_{S'}) = \mathrm{Hom}_S(S', \mathbb{E}_S^1)$. Le morphisme u définit un morphisme

$$\mathrm{Sym}(u) : \mathrm{Sym}_S^n(S') \longrightarrow \mathrm{Sym}_S^n(\mathbb{E}_S^1) = \mathrm{Spec}(S[\sigma_1 \ldots \sigma_n] \quad ,$$

où les σ_i sont des fonctions symétriques élémentaires (cf. BOURBAKI, Alg. 5, App. I n°2). On a alors (par un calcul facile laissé au lecteur) :

(6.3.18.1) $\quad [\mathrm{Sym}(u) \circ t]^*(\sigma_i) = \sigma_i(u)$,

où $t \in \Gamma(\mathrm{Sym}^n_S(S')/S)$ est l'élément canonique (6.3.4.3), et où on désigne par $\sigma_i(u)$ le $i^{\text{ième}}$ coefficient du polynôme caractéristique de la multiplication par u dans $f_*\mathcal{O}_{S'}$. On en déduit que les applications "trace"

$$\begin{cases} \mathbb{G}_a(S') \longrightarrow \mathbb{G}_a(S) \\ \mathbb{G}_m(S') \longrightarrow \mathbb{G}_m(S) \end{cases}$$

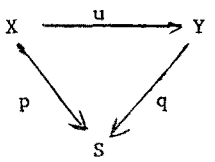
sont respectivement la trace et la norme usuels ; en effet, le morphisme $\mathrm{Sym}^n_S(\mathbb{E}^1_S) \longrightarrow \mathbb{E}^1_S$ déduit de la loi additive (resp. multiplicative) sur $\mathbb{E}^1_S$ est donné par la fonction σ_1 (resp. σ_n) sur $\mathrm{Sym}^n_S(\mathbb{E}^1_S) \simeq \mathrm{Spec}(S[\sigma_1,\ldots,\sigma_n])$.

On déduit alors de (6.3.17.1) que pour n inversible sur S le diagramme de faisceaux étales

(6.3.18.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & f_*\,\mu_n & \longrightarrow & f_*\,G_m & \longrightarrow & f_*\,G_m & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}_f} & (6.2.3) & \Big\downarrow{\scriptstyle N_f} & & \Big\downarrow{\scriptstyle N_f} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & G_m & \longrightarrow & G_m & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 6.3.19. Soit un diagramme commutatif



dans lequel X et Y sont des courbes lisses quasi-projectives sur S et u un morphisme quasi-fini.

(i) Si D est un diviseur sur X fini sur S (voir note p.192) et g une section de G_Y sur Y, on a

$$Tr_{D/S}(u^*g) = Tr_{(u_*D)/S}(g) \quad .$$

(ii) Si E est un diviseur sur Y fini sur S, g une section de G_X sur X et si u est fini, on a

$$Tr_{E/S}(Tr_{X/Y}(g)) = Tr_{(u_*E)/S}(G) \quad .$$

Preuve. (i) Soit g_n la section de G sur $Sym^n_S(Y)$ déduite de g (6.3.13). D'après 6.3.12, on a

$$Tr_{D/S}(u^*g) \overset{dfn}{=\!=} \sigma(D)^*(u^*g)_n = \sigma(D)^*(u^*g_n) = u \circ \sigma(D))^*(g_n)$$

$$= \sigma(u_*D)^*(g_n) = Tr_{u_*D}(g_n) \ .$$

(ii) La formule (ii) résulte de 6.3.15 (ii) et (v) :

$$Tr_{E/S}(Tr_{X/Y}(g)) = Tr_{E/S}\,(Tr_{u^*E/E}(g)) = Tr_{u^*E/S}(g) \quad .$$

Application 3. Trace d'un torseur.

6.3.20. Soit G un faisceau sur le grand site fppf de S qui vérifie (6.3.13.1). Soit u : X ⟶ Y un morphisme fini localement libre de S-schémas et K un G_X-torseur sur X. Supposons que, localement fppf sur Y, le torseur K sur X soit trivial. Tel est le cas si K est trivial localement pour la topologie étale.

Proposition 6.3.21. Sous les hypothèses 6.3.20, il existe à isomorphisme unique près un et un seul torseur $Tr_u(K)$ sous G_Y sur Y, muni d'un morphisme Tr_u ou Tr_u^K : $u_*K \longrightarrow Tr_u(K)$, qui, pour g section locale (au sens fppf) de G sur Y et k section locale de u_*K, vérifie

$$Tr_u^K(g\ k) = Tr_u(g).\ Tr_u(k) \quad .$$

Le problème est local sur Y ; on peut donc supposer K trivial : $K = G_X$. Une solution du problème est de prendre $K = G_Y$ et pour morphisme trace le morphisme (6.3.13.2). On vérifie aussitôt que c'est la seule.

Le foncteur trace 6.3.20 est défini en particulier lorsque G vérifie la condition suivante

(6.3.21.1) Pour tout S-schéma X, tout torseur sous G_X sur X est localement trivial pour la topologie étale.

Cette condition est vérifiée pour G un groupe lisse, pour G image réciproque d'un faisceau sur le petit site étale de S, ou pour G défini par un faisceau quasi-cohérent sur S .

On a par construction

$$(6.3.21.2) \qquad Tr_u(K) = u_*(K) \ X_{u_*G_X} \ G_Y \quad .$$

6.3.22. Pour définir un foncteur trace sous des hypothèses plus générales, le point clef est, pour $f : X \longrightarrow T$ un morphisme quasi-projectif plat de présentation finie de S-schémas, de définir un foncteur raisonnable $K \longmapsto K_n$ des G_X-torseurs sur X dans les G_Z-torseurs sur $Z = Sym_T^n(X)$.

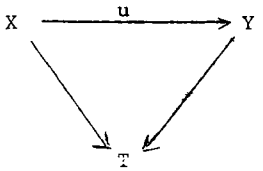
On a tout d'abord, f_n désignant la projection de $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ sur T, le lemme suivant, qui se démontre comme 6.3.21 :

Lemme 6.3.22.1. Avec les notations précédentes et si, localement sur T, le torseur K est trivial, alors il existe, à isomorphisme unique près, un et un seul torseur K_n sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, muni d'un morphisme $\alpha : f_*K \to f_{n_*}(K_n)$, qui pour g section locale (fppf) de $f_* G_X$ et k section locale de u_*K vérifie $\alpha(g \cdot k) = g_n \circ \alpha(k)$ (notation de 6.3.13 pour g_n ; la définition de g_n ici utilise l'hypothèse de platitude etc).

Le cas général se traitera par une descente un peu canulée. Tout d'abord :

Proposition 6.3.23. Soit un diagramme commutatif

(6.3.23.1)



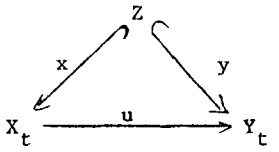
de T-schémas plats de présentation finie et quasi-projectifs, avec u étale surjectif. Alors, le système semi-simplicial des schémas $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1})$ est un hyperrecouvrement pour la topologie étale du schéma $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$.

Preuve. a) On aura à utiliser le résultat auxiliaire .

6.3.23.2. Soient (X,Y,T) comme plus haut, $t \in T$, Z un T-schéma somme d'un nombre fini de T-schémas $\mathrm{Spec}(k_i)$, pour k_i extension finie de k_t ,

et un diagramme commutatif de T-schémas

(6.3.23.3)



,

tel que x et y soient des immersions fermées. Soit $z \in \mathrm{Sym}^n_T(Z)$, et soient x(Z) et y(Z) ses images dans $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ et $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$. Alors, $\mathrm{Sym}^n_T(u)$ est étale en x(Z).

La formation du schéma $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ est compatible à tout changement de base $S' \longrightarrow S$ (5.5.2.7). Par réduction au cas noethérien, on en déduit que $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ est de présentation finie sur S ; il est par ailleurs plat sur S (5.5.2.4). Grâce au critère de platitude fibre par fibre, on se ramène pour prouver (6.3.23.2) au cas S spectre d'un corps. Le complété de $\mathrm{Sym}^n_T(X)$ en Z a alors pour algèbre affine la limite projective des algèbres affines localisées en x(z) des schémas $\mathrm{Sym}^n_T(Z_k)$, pour Z_k voisinage infinitésimal de Z dans X. Par hypothèse, u induit des isomorphismes entre les voisinages infinitésimaux de Z dans X et dans Y. Le complété de $\mathrm{Sym}^n_T(u)$ en x(z) et y(z) est donc un isomorphisme, et ceci prouve (6.3.23.2).

On déduit de 6.3.23.2 que le schéma somme, pour $z \in \mathrm{Sym}^n_T(Z)$, des hensélisés en y(z) de $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$ ne dépend que de Z et du T-schéma X^h_Z somme des hensélisés de X en les divers points de Z . On désignera ce schéma par la notation $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T(X^h_Z)$; il est fonctoriel en X^h_Z .

b) Par passage à la limite, pour prouver 6.3.23, il suffit de montrer que pour $y \in \mathrm{Sym}^n_T(Y)$, fermé dans sa fibre, l'image réciproque sur l'hensélisé de $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$ en y du schéma simplicial $\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1})$ est un hyperrecouvrement pour la topologie étale. Ce problème est local sur T pour la topologie étale ; on se ramène par là au cas où il existe un diagramme (6.3.23.3) avec $y = x(Z)$ (en tuant les extensions résiduelles par une extension séparable de k_t). Le système semi-simplicial considéré se déduit alors du système

$$\mathrm{Sym}^{h\,n}_T((X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{k+1}), \text{ augmenté vers } \mathrm{Sym}^{h\,n}_T(Y^h_Z)$$

par changement de base, de sorte qu'il suffit de considérer ce dernier. Le système semi-simplicial des $(X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{k+1}$ est semi-simplicialement homotope au système constant Y^h_Z, car $X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z$ admet une section. Le système $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T((X^h_{u^{-1}(Z)}/Y^h_Z)^{h+1})$ est donc de même homotope à $\mathrm{Sym}^{h\,n}_T(Y^h_Z)$, et en particulier en est un hyperrecouvrement. Ceci prouve 6.3.2.3.

6.3.24. Soient $f : Y \longrightarrow T$ un morphisme quasi-projectif plat de présentation finie de S-schémas, et K un G_Y-torseur sur Y. Considérons le problème suivant :

6.3.24.0. Définir, pour tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$, avec X quasi-projectif plat de présentation finie sur T, un torseur $(u^*K)_n$ sur $\mathrm{Sym}^n_T(X)$, et pour tout $v : X' \longrightarrow X$ un isomorphisme $c_v : (v^*u^*K)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^n_T(v)^*K_n$, de sorte que

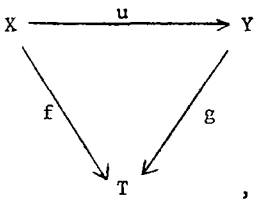
(i) les isomorphismes c_v sont compatibles à la composition ;

(ii) pour u*K localement trivial sur T, on retrouve le torseur de 6.3.22.1, et sa variance.

D'après 6.3.23, la question d'existence et d'unicité d'une solution à 6.3.24.0, pour tout torseur déduit de K par une image réciproque du type envisagé en 6.3.24.0, est une question locale pour la topologie étale sur Y . En particulier, si G vérifie(6.3.21.1), le problème 6.3.24.0 admet une et une seule solution.

Supposons maintenant que G vérifie :

(6.3.24.1) Pour tout entier n et pour tout diagramme de S-schémas affines



,

avec f et g plats de présentation finie et u fini localement libre surjectif, le schéma semi-simplicial tronqué $(\mathrm{Sym}^n_T((X/Y)^{k+1}))_{0\le k\le 2}$, augmenté vers $\mathrm{Sym}^n_T(Y)$, est de descente (GIRAUD [1]) pour la catégorie des G-torseurs.

6.3.24.1 bis. On déduit de façon standard de 6.3.23 que la condition (6.3.24.1) implique la condition analogue, où on suppose seulement f et g plats de présentation finie quasi-projectifs et u plat surjectif. Localement pour la topologie étale, u admet en effet des quasi-sections finies localement libres et on conclut par 6.3.23 et GIRAUD [1] appliqué à un diagramme formant carré de données de descente.

Etant donné un G_Y-torseur K sur un T-schéma Y quasi-projectif plat de présentation finie, il existe par définition un **morphisme fidèlement plat** de présentation finie $u : X \longrightarrow Y$ tel que u^*K soit trivial. Si u_i désigne la projection de $(X/Y)^{i+1}$ sur Y ($i \geq 0$), les torseurs $(u_i^*K)_n$ (6.3.22.1) sur les schémas $\mathrm{Sym}_T^n((X/Y)^{i+1})$ forment une donnée de descente ($i=0,1,2$) sur ce schéma semi-simplicial augmenté vers $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$. Supposons que G vérifie la condition :

(6.3.24.2) Les données de descentes construites plus haut sont toutes effectives (cf. 6.3.24.1).

Alors, on désignera par K_n le torseur sur $\mathrm{Sym}_T^n(Y)$ (déterminé à isomorphisme unique près) défini par cette donnée de descente.

6.3.25. Supposons que G vérifie (6.3.21.1) ou les conditions (6.3.24.1) (6.3.24.2). On laisse au lecteur le soin de donner un sens au formulaire suivant et de le vérifier :

6.3.25.1. Changement de base. Soit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T' & \xrightarrow[g]{} & T \end{array} .$$

Désignons par g'_n la flèche de $\mathrm{Sym}_{T'}^n(X')$ dans $\mathrm{Sym}_T^n(X)$. Pour K torseur sous G sur X, on a

$$g'^*_n K_n \simeq (g'^*K)_n .$$

Soit maintenant $f : X \longrightarrow T$ et K un G_X-torseur sur X.

6.3.25.2. Changement de groupe. Soit $r : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme entre groupes vérifiant tous deux (6.3.21.1) ou (6.3.24.1), (6.3.24.2). On a

$$r(K_n) \simeq r(K)_n .$$

6.3.25.3. Additivité en K : On a

$$(K' + K'')_n \simeq K'_n + K''_n .$$

6.3.25.4. Additivité en n . Soient n_1 et n_2 deux entiers, $n = n_1+n_2$ et

$$\alpha : \mathrm{Sym}_T^{n_1}(X) \underset{T}{\times} \mathrm{Sym}_T^{n_2}(X) \longrightarrow \mathrm{Sym}_T^{n}(X)$$

la flèche canonique ; on a alors

$$d^*K_n \simeq \mathrm{pr}_1^* K_{n_1} + \mathrm{pr}_2^* K_{n_2} .$$

6.3.25.5. Multiplicativité en n. Soient n et m deux entiers et α la flèche canonique de $\mathrm{Sym}_T^n(\mathrm{Sym}_T^m(X))$ dans $\mathrm{Sym}_T^{nm}(X)$ (cf. 6.3.3). On a

$$\alpha^*(K_{nm}) \simeq (K_m)_n .$$

6.3.26. Supposons que G vérifie (6.3.21.1) ou (6.3.24.1), (6.3.24.2). Si $f : X \longrightarrow T$ est un morphisme fini localement libre de rang n entre S-schémas, si t est la section (6.3.4.3) de $\mathrm{Sym}_T^n(X)$, et si K est un G_X-torseur sur X, on définit un G_T-torseur $\mathrm{Tr}_f(K)$ sur T par la formule

$$\mathrm{Tr}_f(K) = t^*(K_n) . \tag{6.3.26.1}$$

Si f est fini localement libre, on définit $Tr_f(K)$, localement sur T, par la même formule. Cette définition, via un isomorphisme canonique et fonctoriel, est équivalente à la définition 6.3.21 dans leur domaine commun de validité (la définition 6.3.21 fournissant une solution au problème de descente posé). On déduit aussitôt de (6.3.25.1), (6.3.25.2) et (6.3.25.3) que le foncteur Tr_f est <u>compatible aux changements de base</u> $T' \longrightarrow T$, <u>compatible aux changements de groupe</u> $r : G_1 \longrightarrow G_2$, <u>compatible à l'addition des torseurs</u>.

La commutativité du bord extérieur du diagramme (6.3.15.2), et (6.3.25.1) (6.3.25.4) fournissent une <u>compatibilité à la composition des morphismes</u> :

$$Tr_{fg}(K) \xrightarrow{\sim} Tr_f(Tr_g(K)) \quad .$$

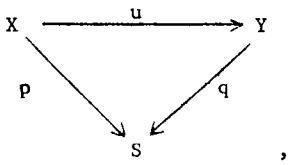
6.3.27. Dans le cas particulier des courbes relatives, on a de plus :

<u>Construction</u> 6.3.27.1. Si $f : X \longrightarrow S$ <u>est une courbe lisse et quasi-projective sur</u> S, D_1 <u>et</u> D_2 <u>deux diviseurs relatifs finis sur</u> S <u>et</u> K <u>un</u> G-<u>torseur sur</u> X, <u>on a, posant</u> $Tr_{D/S}(K) = Tr_{D/S}(K|D)$, <u>un isomorphisme canonique</u>

$$Tr_{D_1+D_2}(K) \xrightarrow{\sim} Tr_{D_1}(K) + Tr_{D_2}(K) \quad .$$

Cet isomorphisme se déduit aussitôt de l'isomorphisme (6.3.25.4) et de 6.3.9.1. Enfin les arguments de 6.3.19 fournissent encore :

<u>Construction</u> 6.3.27.2. <u>Soit un diagramme commutatif</u>



,

dans lequel X et Y sont des courbes lisses quasi-projectives sur S et u un morphisme quasi-fini.

(i) Si D est un diviseur sur X fini sur S et K un torseur sous G sur Y, on a (cf. note p.192):

$$Tr_{D/S}(u^*K) \simeq Tr_{(u_*D)/S}(K) \quad .$$

(ii) Si E est un diviseur sur Y fini sur S, K un torseur sous G sur X et si u est fini, on a

$$Tr_{E/S}(Tr_{X/Y}(K)) \simeq Tr_{u^*E/S}(K) \quad .$$

Proposition 6.3.28. Soient A et B deux R-algèbres (commutatives) et $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme qui fasse de B un A-module localement libre de type fini et fidèle. Alors le complexe semi-simplicial d'algèbres $(TS^n_R(\overset{k+1}{\underset{A}{\otimes}} B))_{k\geq 0}$ est, en tant que $TS^n_R(A)$-module différentiel semi-simplicial, une résolution scindée de $TS^n_R(A)$.

Preuve. Le complexe de modules associé au module semi-simplicial $TS^n_R(\overset{k+1}{\underset{A}{\otimes}} B)$ ne dépend que du A-module B, muni d'un homomorphisme de modules $u : A \longrightarrow B$. En tant que A-module , B peut s'écrire $B = A \oplus L$, et ceci permet d'expliciter un opérateur d'homotopie.

Rappelons que :

Proposition 6.3.29. Soient A un anneau , B* une A-algèbre co-semi-simpliciale, et $c : A \longrightarrow B^*$ le morphisme structural. Pour que le foncteur image réciproque de modules (= extension des scalaires) ε^* soit fidèle (resp. pleinement fidèle) il suffit que la suite de A-modules

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B^0$$

(resp. $0 \longrightarrow A \longrightarrow B^0 \xrightarrow{j_0 - j_1} B^1$)

soit exacte, et le reste après tensorisation par un quelconque A-module.

La démonstration est triviale et laissée au lecteur.

On déduit de façon standard de (6.3.28) (6.3.29) le

Corollaire 6.3.30. La condition (6.3.24.1) est vérifiée par tout groupe affine G .

(Utiliser qu'un torseur sous G est représentable par un schéma affine sur **T.**)

Il ne devrait pas être difficile d'étendre 6.3.30 à tout groupe G représentable par un espace algébrique (*). Je **conjecture** que la condition (6.3.24.2) est vérifiée par tout groupe représentable par un espace algébrique, et plat. On a l'énoncé canularesque:

Proposition 6.3.31. Soit une suite exacte sur S

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{r} G' \xrightarrow{u} H \longrightarrow 0 \quad .$$

Supposons que G' et H, donc G vérifient (6.3.13.1), que G' vérifie (6.3.21.1) et que G vérifie (6.3.24.1). Alors, G vérifie (6.3.24.2).

Ceci s'applique par exemple à un groupe affine noyau d'un épimorphisme de groupes représentables et lisses.

(*) Algebraic Spaces par M. ARTIN. Yale University, Whittemore Lectures, May 1969.

Preuve de 6.3.31. Soit K un G-torseur sur X. Par 6.3.23, la question est locale sur X pour la topologie étale ; il suffit donc de traiter le cas où r(K) est trivial. Les G-torseurs K tels que r(K) soit trivial s'identifient aux G'-torseurs triviaux K' munis d'un isomorphisme $k : H \xrightarrow{\sim} u(K')$. Posons $Z = \mathrm{Sym}^n_T(X)$. Le morphisme de torseurs triviaux k induit $k_n : H_Z \xrightarrow{\sim} u(K'_n)$, et le G-torseur correspondant sur $\mathrm{Sym}^n(X)$ représente la donnée de descente considérée.

7. Appendice

7.0. Préliminaires.

Nous utiliserons dans cet appendice les résultats de VI_B, dont nous conservons les notations.

7.0.1. Soit $Sch_!$ la catégorie dont les objets sont les schémas quasi-compacts et quasi-séparés, les morphismes étant les morphismes de schémas séparés de type fini : on désigne par $\mathcal{C}$ la catégorie bifibrée au-dessus de $Sch_!$, à catégories fibres des catégories opposées à des topos, définie par les faisceaux étales sur les schémas VI_B (4.3.0). On se fixe une fois pour toutes un objet R de $Sch_!$ et on désigne par $\mathcal{C}_R$ la catégorie bifibrée au-dessus de $Sch_{!R}$ déduite de $\mathcal{C}$. Soit enfin $\mathcal{A}$ un anneau du topos $\Gamma(\mathcal{C}_R^\circ)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $\mathcal{A}$ est une section cocartésienne de $\mathcal{C}_R^\circ$ au-dessus de $Sch_{!R}^\circ$.

(ii) Pour tout schéma X de $Sch_{!R}$, $\mathcal{A}_X$ est un faisceau de torsion.

Ceci posé, nous travaillerons avec la catégorie $\underline{Mod}(\mathcal{C}_R^\circ, \mathcal{A})$ (VI_B 1.3.5).

On se propose de définir, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $Sch_{!R}$, un foncteur $Rf_! : D(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathcal{A}_Y)$, coïncidant avec le foncteur précédemment défini lorsque f est compactifiable, et faisant des catégories $D(X,\mathcal{A}_X)$ pour X variable une catégorie cofibrée au-dessus de $Sch_{!R}$.

7.0.2. Bien que tous les résultats de cet appendice soient énoncés dans le cadre explicité en 7.0.1, on pourrait les transcrire avec des modifications évidentes dans le cadre suivant : on prend pour section de $\Gamma(\mathcal{C}_R^\circ)$ la section constante de valeur le faisceau constant $\mathbb{Z}$ et on se limite pour tout schéma X à la catégorie dérivée $D^*_{tors}(X)$ définie par les complexes de faisceaux de groupes abéliens dont les faisceaux de cohomologie sont de torsion (VI B 4.3.1).

Lemme 7.0.3. Soit un diagramme commutatif de schémas

(7.0.3.1)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\quad j' \quad} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[\quad j \quad]{} & Y \end{array}$$

où f , f' sont propres et j , j' sont des immersions. Alors pour tout complexe $K^{\cdot}$ de $D^{+}_{tors}(X')$, la flèche canonique

$$j_! \circ R^{+}f'(K^{\cdot}) \longrightarrow R^{+}f \circ j_!(K^{\cdot})$$

est un isomorphisme.

En vertu du "lemma on way-out functors" (R.D. I (7.1), il suffit de montrer que pour tout entier i et pour tout faisceau F de torsion, la flèche

(7.0.3.2) $$j_! \circ R^{i} f'(F) \longrightarrow R^{i}f \circ j_!(F)$$

est un isomorphisme.

En prenant les images fermées de j et j' on est ramené au cas où j et j' sont des immersions ouvertes dont les images sont partout denses : la propreté de f et de f' entraîne alors que le diagramme (7.0.3.1) est cartésien. Dans ces conditions, le théorème du changement de base pour un morphisme propre, sous la forme XII 5.2, montre que, pour tout point géométrique ξ de Y , la flèche $(j_! \circ R^{i} f'(F))_{\xi} \longrightarrow (R^{i}f \circ j_!(F))_{\xi}$ est un isomorphisme.

Construction 7.0.4. Soient D une catégorie, X et Y deux D-objets de $Sch_{/R}$ tels que pour toute flèche $\alpha \longrightarrow \beta$ de D , les morphismes $X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ et $Y_\beta \longrightarrow Y_\alpha$ soient propres. Soit $j : X \longrightarrow Y$ un morphisme tel que pour tout objet α de D , $j_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ soit une immersion : l'isomorphisme (7.0.3.2) pour $i = 0$ vérifie les conditions de compatibilités usuelles et permet de construire un foncteur exact :

$$j_! : Mod(\underline{\Gamma}(\bar{X}), \mathfrak{A}) \longrightarrow Mod(\underline{\Gamma}(\bar{Y}), \mathfrak{A})$$

(cf (VI_B 1.2.5 pour les notations).

qui induit un foncteur triangulé, encore noté $j_!$:

$$j_! : D(\underline{\Gamma}(\bar{X}), \mathcal{A}) \longrightarrow D(\underline{\Gamma}(\bar{Y}, \mathcal{A}))$$

Alors, pour tout objet α de D, on a un diagramme commutatif, où $j_{\alpha!}$ désigne le foncteur "prolongement par 0 " usuel :

$$\begin{array}{ccc} D(\underline{\Gamma}(\bar{X}),) & \xrightarrow{j_!} & D(\underline{\Gamma}(\bar{Y}), \mathcal{A}) \\ {\scriptstyle R\, e_\alpha^+}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R\, e_\alpha^+} \\ D(X_\alpha, \mathcal{A}_{X_\alpha}) & \xrightarrow[j_{\alpha!}]{} & D(Y_\alpha, \mathcal{A}_{Y_\alpha}) \end{array}$$

Construction 7.0.5. Soit un diagramme commutatif dans $Sch_{!R}$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[i]{} & Y \end{array} \tag{7.0.5.1}$$

où i , i' sont des immersions, f un morphisme propre et f' un morphisme propre surjectif. Il définit un diagramme commutatif d'objets simpliciaux de $Sch_{!R}$

$$\begin{array}{ccc} [X'|Y'] & \xrightarrow{j} & [X|Y] \\ {\scriptstyle u_{f'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_f} \\ C^\Delta_{Y'} & \xrightarrow[i]{} & C^\Delta_Y \end{array} \tag{7.0.5.2}$$

où $j_n : [X'|Y']_n \longrightarrow [X|Y]_n$ est une immersion pour tout n . Avec ces notations, on a un isomorphisme canonique

$$i_! \xrightarrow{\sim} R^+ \bar{u}_{f+} \circ j_! \circ L^+ \bar{u}_{f'} \quad .$$

En prenant les images fermées de i et i' on peut supposer que i et i' sont des immersions ouvertes dont les images sont partout denses. Le diagramme (7.0.5.1) est alors cartésien et f est surjectif. De plus, pour tout entier n , j_n est

une immersion ouverte et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [X'|Y']_n & \xrightarrow{j_n} & [X|Y]_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow[i]{} & Y \end{array}$$

est cartésien.

Dès lors $L^+ \bar{u}_f^+ \circ i_!$ est isomorphe à $j_! \circ L^+ \bar{u}_{f'}^*$: utilisant le fait que u_f est une augmentation de descente cohomologique (VI_B (4.3.2)), on trouve une suite d'isomorphismes

$$i_! \xrightarrow{\sim} R^+ \bar{u}_{f+} \circ L^+(\bar{u}_f^+) \circ i_! \xrightarrow{\sim} R^+ \bar{u}_{f*} \circ j_! \circ L^+ \bar{u}_{f'}^*$$

d'où l'isomorphisme voulu.

Enfin, nous utiliserons la variante suivante du lemme de Chow, dont la démonstration se trouvera dans EGA II 2ème édition, et qui est une amélioration de (XII 7.1) :

Lemme 7.0.6. Soient S un schéma quasi-compact et quasi-séparé et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme séparé de type fini. Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & \swarrow_{f} & \\ S & & \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) p est propre et surjectif

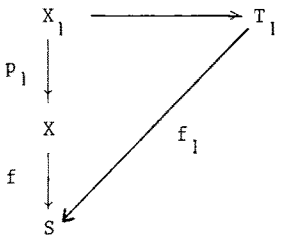
(ii) il existe un ouvert dense U de X tel que p induise un isomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur U

(iii) f' est quasi-projectif.

7.1. Définition de $R^+f_!$

Définition 7.1.1. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Une pseudo-compactification de f consiste en la donnée d'un diagramme commutatif

(7.1.1.0)



où p_1 est propre et surjectif, j_1 est une immersion et f_1 est propre.

7.1.2. Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de $Sch_{!R}$: d'après le lemme de Chow (7.0.6), f possède une pseudo-compactification (p_1,j_1,f_1). Le diagramme (7.1.1.0) définit un morphisme

$$[X_1|X] \xrightarrow{j_1} [T_1|S]$$

encore noté j_1, tel que j_{1n} soit une immersion pour tout n. On pose alors $R^{+(1)}f_! = L^+\bar{u}_{p_1} \cdot j_{1!} \circ R^+\bar{u}_{f_1}$ de sorte que l'on obtient un foncteur triangulé de $D^+(X,\mathcal{A}_X)$ dans $D^+(S,\mathcal{A}_S)$.

Construction 7.1.3. Pour tout couple $((p_1,j_1,f_1),(p_2,j_2,f_2))$ de pseudo-compactifications de f, on a un isomorphisme $\alpha_{12} : R^{+(1)}f_! \longrightarrow R^{+(2)}f_!$ tel que pour toute autre pseudo-compactification (p_3,j_3,f_3), on ait $\alpha_{23} \circ \alpha_{12} = \alpha_{13}$.

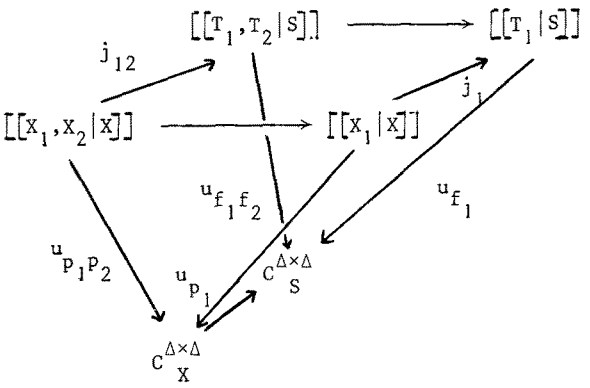
a) On définit un système simplicial double $[[X_1,X_2|X]]$ en posant

$$[[X_1,X_2|X]]_{[n]\times[m]} = [X_1|X]_n \times [X_2|X]_n$$

De même on pose

$$[[X_1|X]]_{[n]\times[m]} = [X_1|S]_n \quad ,$$

les morphismes $[[X_1|X]]_{[n]\times[m]} \longrightarrow [[X_1|X]]_{[n]\times[m']}$ induits par les morphismes $[m'] \longrightarrow [m]$ étant tous égaux à l'identité. On définit de la même manière les systèmes simpliciaux doubles $[[T_1,T_2|S]]$ et $[[T_1|S]]$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif



où j_{12} est une immersion degré par degré. Le procédé de calcul exposé dans VI b(2.3) permet de construire un morphisme

$$R^{+(1)}f_! \xrightarrow{\alpha_1} R^+\overline{u_{f_1f_2}} \circ j_{12!} \circ L^+\overline{u_{p_1p_2}} + = R^{+(1,2)}f_!$$

qui s'obtient à partir d'un morphisme de triple complexes de faisceaux sur S .

b) α_1 <u>est un isomorphisme</u> :

Pour démontrer ceci, on peut fixer le premier indice n provenant de $[[T_1,T_2|S]]_{[n]\times[m]}$ dans le morphisme de triple complexes précédent et regarder le morphisme de double complexes ainsi obtenu. On vérifie que ce morphisme n'est autre que l'isomorphisme défini dans le lemme 7.0.5 pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [X_1|X]_n \times X_2 & \longrightarrow & [T_1|S]_n \times T_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [X_1|X]_n & \longrightarrow & [T_1|S]_n \end{array}$$

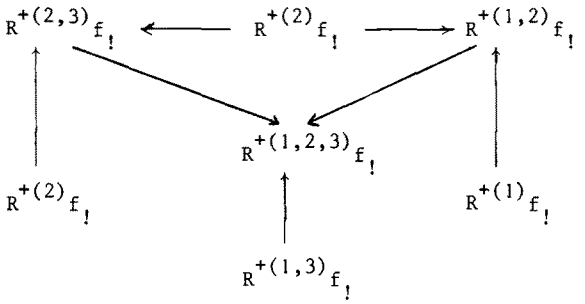
c) On construit de la même manière un isomorphisme

$$R^{+(2)}f_! \xrightarrow{\alpha_2} R^+\overline{u_{f_1f_{2+}}} \circ j_{12!} \circ \overline{L^+}\,\overline{u_{p_1p_2}}$$

et l'on pose $\alpha_{12} = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$.

Pour vérifier la relation $\alpha_{23} \circ \alpha_{12} = \alpha_{13}$, on utilise un objet simplicial triple : on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient un diagramme

commutatif :

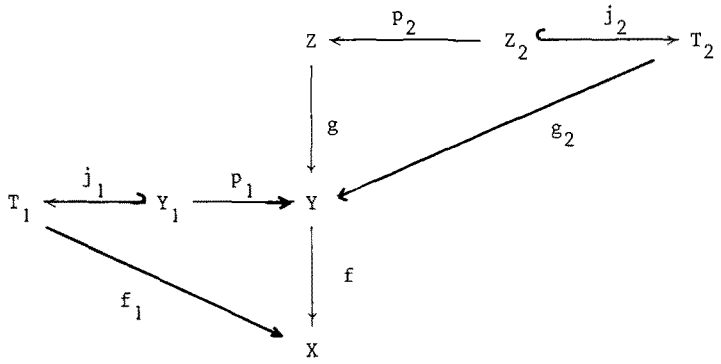


Construction 7.1.4. Soient $Z \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} X$ deux morphismes de $Sch_{!R}$. Pour tout triple $((p_1,j_1,f_1)$, (p_2,j_2,g_2) , $(p_3,j_3,(fg)_3))$, où (p_1,j_1,f_1) est une pseudo-compactification de f , (p_2,j_2,g_2) une pseudo-compactification de g et $(p_3,j_3,(fg)_3)$ une pseudo-compactification de fg , on a un isomorphisme $R^{+(3)}{}_{fg_!} \xleftarrow{\sim} R^{+(2)}{}_{g_!} \circ R^{+(1)}{}_{f_!}$ compatible avec les isomorphismes α_{ij} définis précédemment.

Nous procéderons en plusieurs étapes :

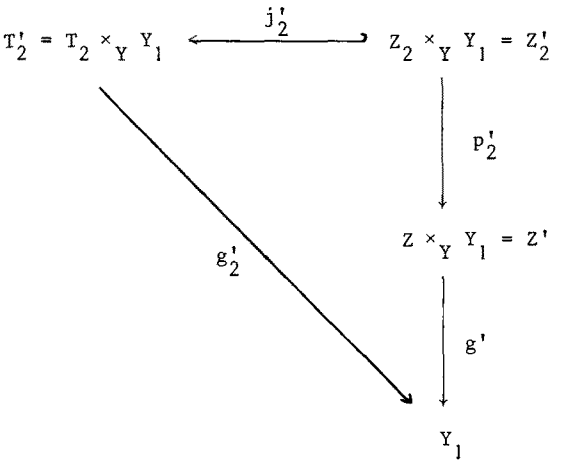
7.1.4.1. Soit (p_1,j_1,f_1) (resp. (p_2,j_2,f_2)) une pseudo-compactification de $f : Y \longrightarrow X$ (resp. de $g : Z \longrightarrow Y$) :

(7.1.4.1.1)



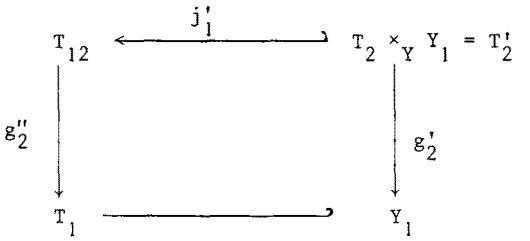
Le morphisme $Z' = Z \times_Y Y_1 \longrightarrow Y_1$ déduit de g par changement de base est muni d'une pseudo-compactification :

(7.1.4.1.2)



On choisit maintenant une compactification de $j_1 \cdot g'_2$.

(7.1.4.1.3)

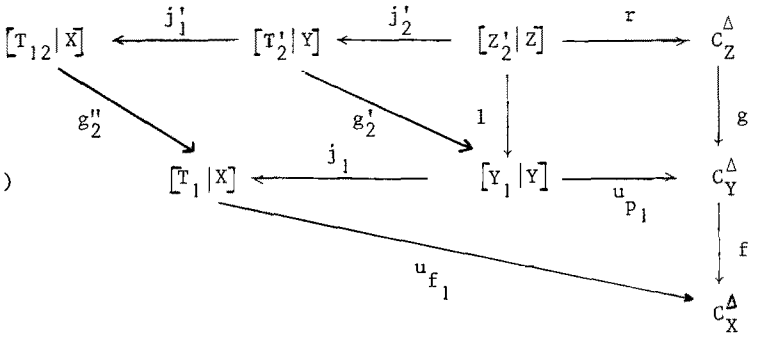


qui définit une pseudo-compactification du composé fg : on notera $R^{+(12)}{}_{!}g_{!}$ le foncteur correspondant.

7.1.4.2. Les données précédentes permettent de définir un isomorphisme $R^{+(12)}{}_{!}g_{!} \xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_{!} \cdot R^{+(2)}g_{!}$:

On dispose d'un diagramme commutatif, où toutes les flèches se déduisent naturellement de (7.1.4.1.1), (7.1.4.1.2) et (7.1.4.1.3).

(7.1.4.2.1)



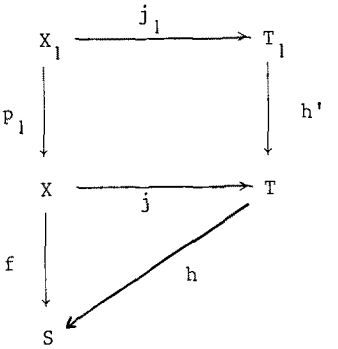
On va définir une flèche naturelle :

$$\beta : R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \longrightarrow R^{+(12)}fg_!$$

dont on va montrer que c'est un isomorphisme.

Pour cela nous utiliserons deux lemmes :

Lemme 7.1.4.2.2. Soit un diagramme commutatif :



où h , h' sont propres, p_1 est propre et surjectif et j , j_1 sont les immersions. Alors la flèche canonique

$$R^+h \circ j_! \longrightarrow R^{+(1)}(hh')_!$$

est un isomorphisme.

En effet, d'après (7.0.5) la flèche

$$j_! \longrightarrow R^{+-}u_{h'} \circ j_{1!} \circ L^+ \bar{u}_{p_1}$$

est un isomorphisme. D'où le résultat en appliquant R^+h .

Lemme 7.1.4.2.3. Avec les notations du diagramme (7.1.4.2.1), les flèches canoniques

$$R^{+(1)} f_! \circ R^+ \bar{u}_{p_1} \longrightarrow R^+ \bar{u}_{f_1} \circ j_{1!}$$

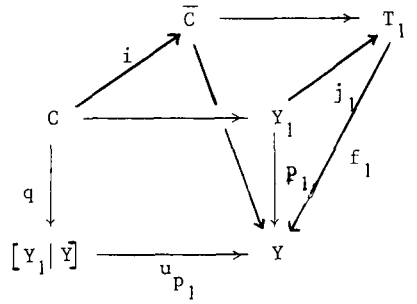
$$R^{+(2)} g_! \circ R^+ \bar{\mathbf{r}} \longrightarrow R^+ \bar{u}_{p_1} \circ R^+ g_2' \circ j_{2!}'$$

sont des isomorphismes.

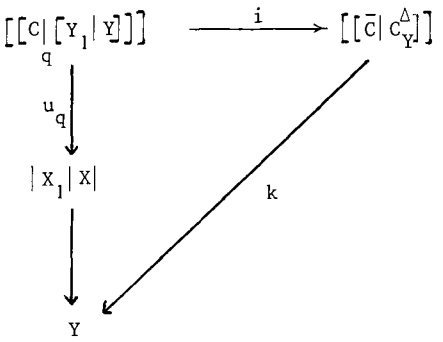
Nous n'établirons que le premier isomorphisme, laissant au lecteur le soin

d'en déduire le deuxième.

Avec des notations évidentes, on pose $C = [Y_1|\dot{Y}] \times_X X_1$ et $\bar{C} = [T_1|\dot{S}] \times_S T_1$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif :



où i est une immersion, q est propre et surjectif. On construit alors un diagramme



et il résulte de (7.1.4.2.2) que le foncteur $R\bar{u}_{j_1} \circ j_1$ s'identifie au foncteur $R^+\bar{k} \circ i_! \circ L^+\bar{u}_q$ et, grâce à (7.0.3) et au théorème du changement de base ce dernier foncteur s'identifie à $R^{+(1)}f_! \circ R^+\bar{u}_{p_1}$. Le lemme (7.1.4.2.3) étant établi, on dispose d'une suite d'isomorphismes

$$R^{+(3)}fg_! = R^+\bar{u}_{f_1} \circ R^+g''_2 \circ j'_{1!} \circ j'_{2!} \circ L^+\bar{r}^+$$

$$\xleftarrow{\sim} R^+\bar{u}_{f_{1+}} \circ j_{1!} \circ R^+g'_2 \circ j'_{2!} \circ L^+\bar{r}^+$$

$$\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^+\bar{u}_{p_{1+}} \circ R^+g'_{2+} \circ j'_{2!} \circ L^+\bar{r}$$

$$\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \circ R^+\bar{r} \circ L^+\bar{r}^+$$

$$\xleftarrow{\sim} R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_!$$

dont le composé donne β .

7.1.4.3. Si $(p_3,j_3,(fg)_3)$ est une pseudo-compactification de fg , on définit un isomorphisme

$$R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \xrightarrow{\gamma_{123}} R^{+(3)}fg_!$$

en composant $\alpha_{(12)3}$ avec β .

7.1.4.4. Soient maintenant $(p_{1'},j_{1'},f_{1'})$ et $(p_{2'},j_{2'},g_{2'})$ deux autres pseudo-compactifications de f et de g et un diagramme (7.1.4.3) ; on vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^{+(12)}fg_! & \xleftarrow{\beta} & R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{(12)(1'2')}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{11'} * \alpha_{22'}} \\ R^{+(1'2')}fg_! & \xleftarrow[\beta']{} & R^{+(1')}f_! \circ R^{+(2')}g_! \end{array}$$

en considérant un diagramme du type (7.1.4.4) où les objets simpliciaux sont remplacés par des objets simpliciaux doubles.

On en conclut que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^{+(3)}fg_! & \xleftarrow{\gamma_{123}} & R^{+(1)}f_! \circ R^{+(2)}g_! \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{33'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{11'} * \alpha_{22'}} \\ R^{+(3')}fg_! & \xleftarrow{\gamma_{1'2'3'}} & R^{+(1')}f_! \circ R^{+(2')}g_! \end{array}$$

pour toute pseudo-compactification $(p_{3'},j_{3'},(fg)_{3'})$ de fg , ce qui achève la démonstration de 7.1.4.

7.1.5. En choisissant pour tout morphisme f de $\mathrm{Sch}_{!R}$ une pseudo-compactification, de telle manière qu'à un morphisme identique soit associée la pseudo-compactification triviale, on définit pour tout morphisme $f: X \longrightarrow Y$ un foncteur triangulé

$$R^+f_! : D^+(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D^+(Y,\mathcal{A}_Y)$$

et tout couple (f,g) de morphisme, un isomorphisme

$$R^+fg_! \xrightarrow{c_{fg}^{\sim}} R^+f_! \circ R^+g_!$$

De plus si f est une identité, $R^+f_!$ est le foncteur identique et c_{fg} est l'identité.

Proposition 7.1.6. La correspondance $f \longrightarrow R^+f_!$ définit un pseudo-foncteur normalisé de $Sch_{!R}$ dans la 2-catégorie des catégories. En d'autres termes, les catégories $D^+(X,\mathcal{A}_X)$ pour X objet de $Sch_{!R}$ peuvent être organisées en catégorie cofibrée sur $Sch_{!R}$ en posant, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $Sch_{!R}$:

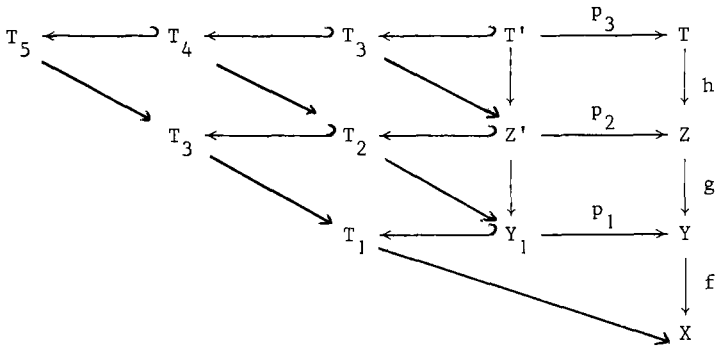
$$Hom_f(K,L) = Hom(R^+f_! K, L)$$

avec $K \in D^+(X,\mathcal{A}_X)$ et $L \in D^+(Y,\mathcal{A}_Y)$.

Il s'agit de voir que l'identification $R^+fg_! \xrightarrow{c_{fg}^{\sim}} Rf_! \circ Rg_!$ est compatible avec les composés triples. Soit donc $h : T \longrightarrow Z$, $g : Z \longrightarrow Y$ et $f : Y \longrightarrow X$ trois morphismes de $Sch_{!R}$: en vertu de ce qui précède, il suffit, pour vérifier cette compatibilité, de la vérifier après un choix arbitraire de pseudo-compactifications pour h , g et f .

On dispose d'un diagramme :

(7.1.6.1)

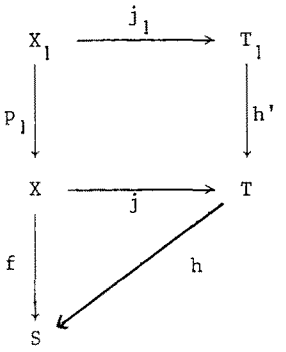


où toutes les flèches obliques sont propres et où p_1 , p_2 et p_3 sont propres et surjectifs.

Un diagramme du type (7.1.4.4) construit sur (7.1.6.1) permet alors de conclure.

Proposition 7.1.7. Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme compactifiable, le foncteur $Rf_!$ coïncide avec celui défini dans l'exposé XVII..

En effet, il existe un diagramme commutatif :



auquel on applique (7.1.4.2.2).

Définition 7.1.8. Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de $Sch_!$, le foncteur $R^+f_!$ que l'on vient de définir s'appellera le foncteur image directe à supports propres (au sens des catégories dérivées). Le foncteur $H^q \circ R^+f_!$, noté $R^qf_!$, s'appelera le $q^{ième}$ foncteur image directe à supports propres.

Avec ces notations, on laisse au lecteur le soin de vérifier la

Construction 7.1.9. Soit (π_1, j_1, f_1) une pseudo-compactification de $f : X \longrightarrow Y$ et désignons par π_1^n le morphisme canonique $[X_1|X]_n \longrightarrow X$. Alors, pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X, \mathcal{A}_X)$, il existe deux suites spectrales birégulières :

$$(7.1.9.1) \qquad E_1^{pq} = R^q f_!(K^p) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(K^\cdot)$$

$$(7.1.9.2) \qquad E_1^{pq} = R^q(f \circ \pi_1^p)_! (\pi_1^{p+}(K^\cdot)) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(K^\cdot)$$

(Prendre par exemple la résolution flasque canonique de $j_{1!} \circ L^+ \bar{u}_{p_1}^+(K^\cdot)$ (cf. XVII (4.2)), puis son image directe par u_{f_1}).

7.2. Quelques propriétés de $R^+f_!$.

Proposition 7.2.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $Sch_{!R}$ de dimension relative $\leqslant d$. Alors le foncteur $R^+f_!$ est de dimension cohomologique $\leqslant 2d$.

Il s'agit de montrer que pour tout faisceau F de $\mathscr{A}_X$-modules sur X , on a $R^if_!(F) = 0$ pour $i > 2d$. (On en déduit alors, par un argument standard, que pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X,\mathscr{A}_X)$ tel que $H^i(K^\cdot) = 0$ pour $i > k$, on a $R^if_!(K^\cdot) = 0$ pour $i > k + 2d$).

Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. On définit (XVII 6.2.9) une résolution gauche $K^\cdot_{\mathscr{U}} \longrightarrow F$ de F en posant :

$$K^n_{\mathscr{U}} = \bigoplus_{|P| = n+1} j_{P!}\, j_P^* (F)$$

où pour chaque partie P de I , j_P est l'inclusion de $\bigcap_{i\in P} U_i$ dans X .

On déduit de (7.1.9.1) une suite spectrale

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{|P| = p+1 \\ P\in I}} R^p (fj_P)_!\, j_P^*(F) \Longrightarrow R^{p+q} f_!(F)$$

et le fait que fj_P soit compactifiable, cas justiciable de l'exposé XVII, montre que $E_1^{pq} = 0$ pour $p > 0$ et $q > 2d$; on en déduit alors que $R^n f_!(F) = 0$ pour $n > 2d$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 7.2.2. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de $Sch_{!R}$ et $K^\cdot$ un objet de $D^b(X,\mathscr{A}_X)$ de Tor-dimension finie. Alors $R^+f_!(K^\cdot)$ est de Tor-dimension finie.

Comme précédemment, soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines. La fonctorialité de $K^n_{\mathscr{U}}$ permet de fabriquer une résolution gauche bornée de $K^\cdot$ par des complexes de Tor-dimension finie, car cette dernière propriété se vérifie point par point (XVII (4.1.9)) : nous noterons $K^{\cdot\cdot}_{\mathscr{U}}$ le double complexe ainsi obtenu, le deuxième indice correspondant à celui de $K^\cdot$. Avec les conventions de (VI b.(2.3.2)), on dispose pour tout entier n d'une suite exacte, où l'opération $\sigma_{\leqslant n}$ est prise dans $C^+\big(C^+(\mathrm{Mod}(X,\mathscr{A}_X))\big)$:

$$0 \longrightarrow (\sigma_{\leqslant n}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s \longrightarrow (\sigma_{\leqslant n+1}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s \longrightarrow (-1)^{n+1} K^{n+1,\cdot}_{\mathcal{U}} \longrightarrow 0$$

d'où un triangle distingué dans $D^+(X,\mathcal{A}_X)$:

$$\begin{array}{ccc} & K^{n+1,\cdot}_{\mathcal{U}} & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ (\sigma_{\leqslant n}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s & \longrightarrow & (\sigma_{\leqslant n+1}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s \end{array}$$

Utilisant le fait que $R^+f_!(K^{n+1,\cdot}_{\mathcal{U}})$ est de Tor-dimension finie pour tout $\mathcal{U}$ (XVII (5.2.10)), on en déduit que $R^+f_!((\sigma_{\leqslant 0}(K^{\cdot\cdot}_{\mathcal{U}}))_s) = R^+f_!(K^{\cdot})$ est de Tor-dimension finie.

Remarque 7.2.3. L'argument précédent ne permet pas d'affirmer que $R^+f_!(K^{\cdot})$ est de Tor-dimension $\leqslant k$ dès que $K^{\cdot}$ est de Tor-dimension $\leqslant k$ (cf.(3.7)).

Proposition 7.2.4. Soit un diagramme cartésien dans $\mathrm{Sch}_{!R}$:

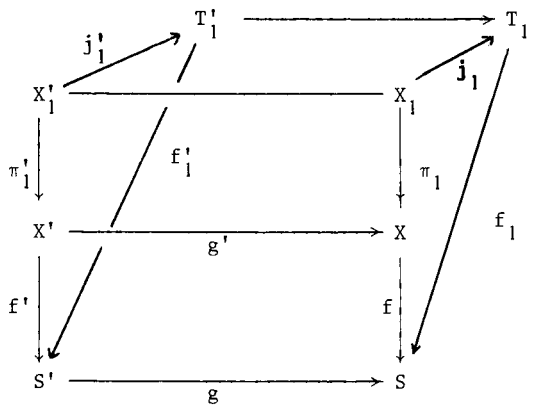
$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

Alors pour tout complexe $K^{\cdot}$ de $D^+(X,\mathcal{A}_X)$, le morphisme canonique

$$g^* \circ R^+f_!(K^{\cdot}) \xrightarrow{ch_{K^{\cdot}}} R^+f'_! \circ g'^*(K^{\cdot})$$

est un isomorphisme.

Soit (π_1,j_1,f_1) une pseudo-compactification de f : on en déduit par changement de base une pseudo-compactification (π'_1,j'_1,f'_1) de f' et un diagramme commutatif :



qui permet de définir la flèche ch_K.

On dispose alors, d'après (7.1.9.2), d'un morphisme de suites spectrales birégulières :

$$\begin{array}{ccc} g^* \circ R^q(f \circ \pi_1^p)_! \ (\pi_1^{p+} (K^\cdot)) & \Longrightarrow & g^* \circ R^{p+q} f_! (K^\cdot) \\ \Big\downarrow u_1^{pq} & & \Big\downarrow ch_K \\ R^q(f' \circ \pi_1'^p)_! \ (\pi_1'^p (g'^*(K^\cdot))) & \Longrightarrow & R^+ f'_! \circ g'^*(K) \end{array}$$

et ch_K. est un isomorphisme puisqu'il en est de même pour les u_1^{pq} d'après (XVII (5.2.6)).

7.3. Définition de $R f_!$

Nous nous proposons maintenant d'étendre "de façon raisonnable" le foncteur $R^+f_!$ en un foncteur $Rf_! : D(X,\mathscr{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathscr{A}_Y)$, pour tout morphisme f de $Sch_{!R}$

7.3.1. Soit (p_1,j_1,f_1) une pseudo-compactification de f et F un $\mathscr{A}_X$-module : prenant la résolution flasque canonique de $j_{1!} \circ L\bar{u}_{p_1}^*(F)$ (cf. XVII (4.2)), puis son image directe par f_1, puis le complexe simple associé au complexe double ainsi construit, on obtient un complexe de $\mathscr{A}_Y$-modules :

(7.3.1.1) $0 \longrightarrow \mathscr{X}^0(F) \xrightarrow{S^1(F)} \mathscr{X}^1(F) \ldots\ldots \mathscr{X}^n(F) \xrightarrow{S^n(F)} \mathscr{X}^{n+1}(F) \ldots\ldots$

fonctoriel en F et isomorphe dans $D^+(Y, \mathscr{A}_Y)$ à $R^+f_!(F)$.

D'après 7.2.1 $H^i(\mathscr{X}^\cdot(F)) = 0$ pour $i > 2d$, où d est un entier tel que la dimension relative de f soit $\leqslant d$, de sorte que le complexe

(7.3.1.2) $0 \longrightarrow \mathscr{X}^0(F) \longrightarrow \mathscr{X}^1(F) \longrightarrow \ldots \mathscr{X}^{2d-1}(F) \longrightarrow \operatorname{Ker} S^{2d}(F) \longrightarrow 0$

est canoniquement isomorphe dans $D^+(Y, \mathscr{A}_Y)$ au complexe (7.3.1.1). De plus :

Lemme 7.3.2. Les foncteurs $\mathscr{X}^0$, $\mathscr{X}^1$, ... , $\mathscr{X}^{2d-1}$, $\operatorname{Ker} S^{2d}$ sont exacts en F .

L'exactitude des foncteurs $\mathscr{X}^n$ résulte de l'exactitude de la résolution flasque canonique et du fait que l'image directe par un morphisme d'une suite exacte courte de faisceaux flasques est encore une suite exacte courte.

Pour voir l'exactitude de $\operatorname{Ker} S^{2d}$, on considère, pour une suite exacte courte $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ de faisceaux sur X , le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Ker} S^{2d}(F') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+1}(F') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+2}(F') \quad \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ker} S^{2d}(F) & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+1}(F) & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+2}(F) \quad \ldots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\operatorname{Ker} S^{2d}(F'') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+1}(F'') & \longrightarrow & \mathscr{X}^{2d+2}(F'') \quad \ldots
\end{array}$$

et la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d+1}(\mathscr{X}^\cdot(F')) \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d+1}(\mathscr{X}^\cdot(F)) \longrightarrow \sigma_{\geqslant 2d+1}\mathscr{X}^\cdot(F'')) \to 0$$

permet de conclure.

On dispose maintenant du lemme général suivant :

Lemme 7.3.3. Soient A et B deux catégories abéliennes et $Je^\cdot$ un objet de $C^b(\mathrm{Fex}(A,B))$ où $\mathrm{Fex}(A,B)$ désigne la catégorie des foncteurs exacts-de A dans B . Alors, en associant à tout complexe $K^\cdot$ de $C(A)$ le complexe simple associé au double complexe $Je^\cdot(K^\cdot)$ on obtient un foncteur triangulé $K(A) \longrightarrow K(B)$ qui préserve les quasi-isomorphismes.

On écrit le foncteur en question comme un composé

$$C(A) \longrightarrow C^b(C(B)) \xrightarrow{(\ )_s} C(B)$$

où le foncteur $(\ )_s$ est le foncteur complexe simple associé et on utilise (VI b (2.3.2.2). Remarque) : les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 7.3.4. Montrer que pour tout complexe $K^\cdot$ de $D^+(X,\mathcal{A}_X)$, la flèche canonique

$$\tau_{\leqslant 2d}\mathscr{K}^\cdot(K^\cdot) \longrightarrow \mathscr{K}^\cdot(K^\cdot)$$

induit un quasi-isomorphisme sur les complexes simples associés.

On remarquera pour cela que la flèche canonique

$$\varinjlim_{k\geqslant 2d} (\tau_{\leqslant k}\mathscr{K}^\cdot(K^\cdot))_s \longrightarrow (\mathscr{K}^\cdot(K^\cdot))_s$$

est un isomorphisme, puis que les faisceaux de cohomologie d'un complexe commutent aux limites inductives filtrantes.

7.3.5. Soit $R^{(1)}f_! : D(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathcal{A}_Y)$ le foncteur défini par (7.3.1.2) grâce à 7.2.3. En vertu de 7.2.4 on peut le calculer directement à partir de (7.3.1.1) et on peut vérifier qu'il "ne dépend pas" de la pseudo-compactification choisie. Il faudrait alors vérifier les énoncés 7.1.3, 7.1.4 et 7.1.6 en supprimant les exposants + , ce que le rédacteur n'a pas eu le courage de faire.

Définition 7.3.6. Le foncteur $Rf_! : D(X,\mathcal{A}_X) \longrightarrow D(Y,\mathcal{A}_Y)$ construit en 7.3.5 s'appelle encore foncteur image directe à supports propres.

7.3.7. On peut alors montrer que le foncteur $Rf_!$ commute aux changements de base et que les énoncés (XVII (5.2.9) et (5.2.10)) restent vrais pour tout morphisme de $Sch_{!R}$, ce qui justifie les constructions que l'on vient de faire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Dold and D. Puppe. Homologie nicht additiver Funktoren. Anwendungen. Ann. Inst. Fourier XI 1961.

[1] Gabriel-Zisman. Calculus of fraction and homotopy theory, Ergebnisse, Bd 35, Springer 1967.

[1] J. Giraud. Méthode de la descente, Mémoire n° 2 de la Société Mathématique de France (1964).

[TF] R. Godement. Théorie des faisceaux, Hermann, 1958. Act. Scient. Ind. n° 1252, (Paris) (cité [TF]).

[1] A. Grothendieck. TDTE IV : les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki 221 . Mai 1961. Repris dans FGA.

[RD] R. Hartshorne. Residues and Duality. Lecture Notes in Mathematics n° 20. Springer 1966.

[1] D. Lazard. Thèse - Paris 1960.

[1] N. Roby. Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules. Ann. E.N.S. 80 1963, p.213-248.

[CD] J.L. Verdier. Catégories dérivées (état 0), multicopié par l'I.H.E.S.

[2] J.L. Verdier. Catégories dérivées (à paraître dans Grundlehren der Math. Wiss, Springer).

[3] J.L. Verdier. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Séminaire Bourbaki 300. Nov 1965.