Exposé X

DIMENSION COHOMOLOGIQUE : PREMIERS RESULTATS

par M. ARTIN

Sommaire :

1. Introduction.

Dans cet exposé on convient, sauf mention expresse du contraire, que "faisceau" signifie "faisceau abélien".

Soient X un schéma et $\ell \in \mathbb{P}$. "Rappelons" qu'on appelle *ℓ-dimension cohomologique* de X le plus grand entier $cd_{\ell} X = n$ (ou $= \infty$ si ce nombre n'existe pas) tel que $H^n(X,F) \neq 0$ pour au moins un faisceau de ℓ-torsion F sur X . Si $X = \operatorname{Spec} A$, nous écrivons $cd_{\ell} A = cd_{\ell} \operatorname{Spec} A$. Tenant compte du dictionnaire (VIII 2) on retrouve ainsi la notion "classique" de [CG] dans le cas où $A = k$ est un corps. Comme on a évidemment la formule

$$cd_{\ell} (\coprod_i X_i) = \sup_i cd_{\ell} X_i$$

on peut, de façon évidente, étendre la théorie classique à un anneau artinien quelconque. Cette théorie est exposée dans (CG) = "cohomologie Galoisienne" de Serre. Nous y apporterons quelques précisions dans le n° 2.

Prenons par exemple le cas d'une variété X algébrique irréductible, de dimension n , sur un corps séparablement clos k, et fixons $\ell \neq$ car k . Un théorème qu'on trouvera dans le n°4 donne pour la dimension cohomologique la majoration 2n , qui est la dimension "véritable" de X (suggérée par l'analogie topologique dans le cas où $k = \mathbb{C}$). Ce résultat est assez élémentaire à partir de la théorie pour les corps, et en fait la majoration par 2n peut être améliorée sauf dans le cas où X est complète : il existe une autre majoration, 2n-1 , qui est vraie chaque fois que dans X il "manque au moins un point". Cette dernière est la bonne "majoration stable", dans le sens que chaque X de dimension n contient un ouvert de dimension cohomologique 2n-1 . Une troisième majoration est obtenue pour une variété affine, où on obtient n comme dimension cohomologique. C'est une généralisation d'un des théorèmes de Lefschetz pour les sections hyperplanes. Ces deux dernières assertions sont plus profondes et ne pourront être démontrées que plus tard (XIV).

Notons que la dimension cohomologique n'est pas une notion locale (contrairement à ce qui a lieu pour les espaces paracompacts). Par exemple un anneau hensélien à corps résiduel séparablement clos est de dimension cohomologique nulle, mais si on enlève le point fermé, on peut obtenir un nombre arbitrairement grand, savoir 2n-1 si n = dim A dans les cas les plus importants; ce qui est également en accord avec l'analogie topologique fournie par la cohomologie de $U - \{x\}$, où U est un petit voisinage ouvert d'un point x d'un espace analytique complexe .

2. Résultats auxiliaires sur un corps

On a le suivant

Théorème 2.1. Soit k'/k une extension de type fini d'un corps k, et soit $\ell \in \mathbb{P}$. Alors

$$\mathrm{cd}_\ell k' \leqq \mathrm{cd}_\ell k + \mathrm{deg.tr.}(k'/k) ,$$

Si l'inégalité stricte est vraie et si $\ell \neq \mathrm{car}\, k$, alors $\ell = 2$, k est ordonnable, et k' n'est pas ordonnable (i.e. -1 est une somme de carrés dans k').

Rappelons que lorsque $\ell = \mathrm{car}\, k$ on a $\mathrm{cd}_\ell k' \leqq 1$ (CG II 2.2) donc la question d'égalité dans 2.1 ne se pose guère. De plus, on a $\mathrm{cd}_2 k = \infty$ si k est ordonnable. En effet la clôture algébrique $\bar{k}$ de k contient une sous-extension $\tilde{k}$ (un sous-corps maximal ordonné de $\bar{k}$) avec $[\bar{k}:\tilde{k}] = 2$. Evidemment, $\mathrm{cd}_2 \tilde{k} = \infty$, et $\mathrm{cd}_2 \tilde{k} \leqq \mathrm{cd}_2 k$ d'après (CG I Prop. 14).

Démonstration. C'est presque tout bien connu. L'inégalité ainsi que l'égalité si $\mathrm{cd}_\ell k < \infty$, sont des résultats de Tate (CG II 4.1.2). Il reste à démontrer que $\mathrm{cd}_\ell k' < \infty$ et $\mathrm{cd}_\ell k = \infty$ implique k ordonnable et $\ell = 2$, et il suffit de traiter les deux cas suivants :

a) $[k':k] < \infty$,

b) $k' = k(x)$ avec x transcendant sur k.

Dans le cas a) on peut supposer k'/k séparable. Alors le groupe de Galois $H = G(\bar{k}/k')$ est un sous-groupe ouvert de $G = G(\bar{k}/k)$ et d'après un résultat de Serre [5] on a $\mathrm{cd}_\ell H = \mathrm{cd}_\ell G$ sauf si G contient un élément d'ordre ℓ. Comme un corps algébriquement clos $\bar{k}$ ne peut pas avoir un sous-corps $\tilde{k}$ d'indice fini sauf si $\ell = 2$ et $\tilde{k}$ est ordonnable [7], on trouve le résultat.

Traitons le cas b). Soit R le hensélisé de Spec $k[x]$ au point $x = 0$, qui est un anneau de valuation discrète, et soit K le corps des fractions de R . Alors $\mathrm{cd}_{\ell}\, k(x) < \infty$ implique $\mathrm{cd}_{\ell} K < \infty$. Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{cd}_{\ell} K < \infty$ implique $\mathrm{cd}_{\ell} k < \infty$, ce qui est conséquence du théorème suivant :

Théorème 2.2 (*). Soit R un anneau de valuation discrète hensélien, à corps de fractions K et corps résiduel k . Soit $\ell \in \mathbb{P}$. On a

$$\mathrm{cd}_{\ell} K = \mathrm{cd}_{\ell} k + 1$$

dans les deux situations suivantes :

(i) $\ell \neq \mathrm{car}\, k$.

(ii) $\ell \neq \mathrm{car}\, K$, k parfait, et $\mathrm{cd}_{\ell} k < \infty$.

Remarque : Naturellement, si $\ell = \mathrm{car}\, K$ on a $\mathrm{cd}_{\ell} K \leq 1$ en tous cas (CG II 2.2). Il reste donc à étudier la relation de $\mathrm{cd}_{\ell} K$ avec, peut-être, le module des différentielles absolues Ω^1_k (EGA IV 20.4.3), dans le cas d'inégales caractéristiques lorsque $\mathrm{car}\, k = \ell$, k non parfait.

Démonstration du théorème. Comme pour le théorème (2.1), la plupart est due à Tate. Le cas (ii) est traité explicitement dans (CG II Prop. 12) si R est complet, et on se réduit à ce cas au moyen du lemme suivant :

Lemme 2.2.1. Soit R un anneau de valuation discrète hensélien, à corps des fractions K , et soit $\hat{K}$ le corps des fractions du complété $\hat{R}$ de R . Alors

$$G(\bar{\hat{K}}/\hat{K}) \simeq G(\bar{K}/K) .$$

Démonstration. Cela veut dire que le foncteur $L \longmapsto \hat{L} = L \otimes_K \hat{K}$

(*) Ce théorème a été démontré récemment par Ax [1] .

de la catégorie des K-algèbres étales dans la catégorie des $\hat{K}$-algèbres étales est une équivalence. Or chaque algèbre étale $\hat{K}'$ de $\hat{K}$ est induite par une algèbre étale convenable K' de K. En effet, si $\hat{K}' = \hat{K}[\alpha]$ où α satisfait à l'équation irréductible séparable $f(T) = 0$ à coefficients dans $\hat{R}$, il suffit de prendre pour K' l'algèbre $K[\alpha_0]$, où α_0 est racine d'une équation $f_0(T) = 0$ à coefficients dans R avec $f_0 \equiv f \ (\hat{m}^N)$, N grand et $\hat{m}$ l'idéal maximal de $\hat{R}$. C'est l'application de la "méthode de Newton" habituelle (Bourbaki, Alg. Comm. III 4.5). Il reste à démontrer que le foncteur est pleinement fidèle (il est évidemment fidèle), et il revient au même de démontrer que si K' est un <u>corps</u>, il en est de même de $\hat{K}'$. Soit R' le normalisé de R dans K', qui est fini sur R puisque K'/K est séparable. L'anneau R' est un anneau de valuation discrète, et le complété de R' est $\hat{R}' = R' \otimes_R \hat{R}$. Donc $\hat{R}'$ est un anneau de valuation discrète, et comme $\hat{K}'$ en est l'anneau total des fractions, il est bien un corps.

Traitons l'assertion i) de 3.1. Si $cd_\ell k < \infty$ on est encore ramené par 2.2.1 à (CG II Prop. 12) (l'hypothèse faitedans l'énoncé de cette proposition que k soit parfait n'est utilisé dans la démonstration que dans le cas de caractéristique résiduelle ℓ). Il reste donc à démontrer que $cd_\ell K < \infty$ implique $cd_\ell k < \infty$.

Soit $\bar{G} = G(\bar{k}/k) = G(\tilde{K}/K)$ où $\tilde{K}$ est l'extension non ramifiée maximale de K (i.e. le corps des fractions de l'anneau de valuation discrète $\tilde{R}$, à corps résiduel séparablement clos, hensélisé strict de R), $G = G(\bar{K}/K)$, $H = G(\bar{K}/\tilde{K})$, donc $\bar{G} = G/H$. Soit $\bar{G}' \subset \bar{G}$ un ℓ-sous-groupe de Sylow, et soient k'/k, K'/K les extensions correspondant à $\bar{G}'$. On a $cd_\ell k < \infty$ si et seulement si $cd_\ell k' < \infty$ (CG I Prop. 14), donc en remplaçant R par son normalisé dans K', on se réduit au cas où $\bar{G}$ est un ℓ-groupe. Il suffit alors de démontrer que si $cd_\ell G < \infty$, alors $H^N(\bar{G}, \mathbb{Z}/\ell) = 0$ pour N assez grand (CG I Prop. 20).

On a $cd_{\ell} H = 1$ d'après la partie de i) déjà démontrée, appliquée à $\tilde{R}$. De plus, on a

(2.2.2 $$H^1(H, \mu_\ell) = H^1(\mathrm{Spec}\ \tilde{K}, \mu_\ell) = \tilde{K}^*/\tilde{K}^{*\ell} = \mathbb{Z}/\ell \ .$$

En effet, $H^1(\mathrm{Spec}\ \tilde{K}, \mu_\ell) = \tilde{K}^*/\tilde{K}^{*\ell}$ d'après la théorie de Kummer IX 3.2. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{R}^* \longrightarrow \tilde{K}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \ ,$$

et $\tilde{R}^*$ est divisible par ℓ puisque $\tilde{R}$ est strictement local et inversible dans $\tilde{R}$, d'où (2.2.1).

Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(\bar{G}\ , H^q(H, \mu_\ell)) \Longrightarrow H^{p+q}(G, \mu_\ell) \ .$$

On a $E_2^{pq} = 0$ si $q > 1$. Si de plus $cd_{\ell} G < \infty$, le morphisme "cobord"

$$H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H, \mu_\ell)) \longrightarrow H^{n+1}(\bar{G}, \mu_\ell)$$

doit être bijectif pour n assez grand, et il faut démontrer qu'alors

$$H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H, \mu_\ell)) = H^{n-1}(\bar{G}, \mathbb{Z}/\ell) = 0 \ .$$

Posons $R' = R[x']$ avec $x'^{\ell} = x$, x le paramètre local de R , et soient K' le corps des fractions de R', $G' = G(\bar{K}/k')$, etc... Le corps résiduel de R' est k, puisque nous avons supposé $\bar{G}$ un ℓ-groupe, donc que les racines ℓ.èmes de l'unité sont dans K. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} H' \arrow[r] \arrow[d, hook] & G' \arrow[r] \arrow[d, hook] & \bar{G} \\ H \arrow[r] & G \arrow[r] & \bar{G} \end{tikzcd} \ ,$$

d'où un morphisme de suites spectrales de Hochschild-Serre, qui donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^{n-1}(\bar{G},H^1(H', \mu_\ell)) \arrow[dr] & \\ & H^{n+1}(\bar{G}, \mu_\ell) \\ H^{n-1}(\bar{G}, H^1(H, \mu_\ell)) \arrow[uu, "\varepsilon"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme $cd_\ell\, G < \infty$ implique $cd_\ell\, G' < \infty$, tous les morphismes dans ce diagramme sont des isomorphismes pour n grand. Mais le morphisme

$$\mathbb{Z}/r = H^1(H, \mu_\ell) \longrightarrow H^1(H', \mu_\ell) = \mathbb{Z}/\ell$$

qui induit la flèche ε est évidemment nul, donc $H^{n-1}(\bar{G}, \mathbb{Z}/\ell) = 0$, cqfd.

<u>Théorème</u> 2.3. <u>Soient</u> A <u>un anneau noethérien hensélien de dimension</u> 1 , <u>et</u> $\ell \in \mathbb{P}$ <u>inversible dans</u> A . <u>Soient</u> k <u>le corps résiduel de</u> A <u>et</u> R(A) <u>l'anneau des fonctions rationnelles sur</u> Spec A . <u>On a</u>

$$cd_\ell\, R(A) \leq cd_\ell\, k + 1 ,$$

<u>et l'égalité est vraie si</u> $\ell \neq 2$ <u>ou si</u> k <u>n'est pas ordonnable</u>.

Démonstration. En remplaçant A par A/P pour un idéal premier minimal P de A et en appliquant (VIII 1) on voit qu'on peut supposer A intègre. Soient K son corps des fractions, R son normalisé, qui est local et hensélien, donc un anneau de valuation discrète (il est noethérien d'après Krull-Akizuki (Bourbaki, Alg. Comm. Chap. 7, § 2, prop. 5)) et soit k' le corps résiduel de R . Il est connu que $[k':k] < \infty$ (loc. cit.). Or K est le corps des fractions de R et on a donc

$$cd_\ell K = cd_\ell k' + 1 \leq cd_\ell k + 1$$

d'après 2.2 , avec l'égalité sous la dernière hypothèse de 2.3 , d'après 2.1 .

Exemple : L'égalité n'est pas vraie pour $\ell = 2$, A étant le hensélisé à l'origine de $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2)$.

Corollaire 2.4. *Soit* A *un anneau local noethérien à corps résiduel* k *, et soit* $\ell \in \mathbb{P}$ *inversible dans* A *. Supposons que* $\ell \neq 2$ *où qu'aucun corps résiduel de* Spec A *ne soit ordonnable. Alors on a*

$$cd_\ell R(A) \geq cd_\ell k + \dim A ,$$

où R(A) *est l'anneau des fonctions rationnelles sur* Spec A .

Démonstration. On peut supposer A intègre, a corps des fractions $R(A) = K$. Soit $x \in \Gamma A$ un élément qui n'est pas diviseur de zéro. Alors $\dim A/(x) = \dim A - 1$. Par récurrence sur dim A, on a

$$cd_\ell R(A/(x)) \geq cd_\ell k + \dim A - 1 .$$

Soit k' un corps résiduel de $R(A/(x))$ tel que $cd_\ell k' = cd_\ell R(A/(x))$ (cf VIII 1), et soit P l'idéal premier, noyau de $A \to k'$. L'anneau A_P est de dimension 1 . Il suffit donc de démontrer le corollaire pour l'anneau local A_P , c'est-à-dire, on est réduit au cas où $\dim A = 1$.
Soit $\widetilde{A}$ le hensélisé de A . Chaque corps résiduel de $R(\widetilde{A})$ s'identifie à une extension séparable de $R(\widetilde{A}) = K$, et on a donc

$$cd_\ell R(A) = cd_\ell K \geq cd_\ell R(\widetilde{A}) .$$

On est ainsi ramené au cas où A est de dimension 1 et hensélien, ce qui est conséquence de 2.3 .

<u>Corollaire</u> 2.5. <u>Soit</u> X <u>un schéma noethérien et soit</u> $\ell \in \mathbb{P}$ <u>inversible sur</u> X . <u>Alors</u>

$$\mathrm{cd}_\ell R(X) \geqslant \dim X .$$

En effet, soit $x \in X$ un point tel que $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ (ou tel que $\dim \mathcal{O}_{X,x}$ est très grand si $\dim X = \infty$). Soit A le hensélisé strict de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors on a $\mathrm{cd}_\ell R(X) \geqslant \mathrm{cd}_\ell R(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant \mathrm{cd}_\ell R(A)$ d'après le raisonnement habituel. De plus, $\dim A = \dim X$ (resp. est très grand). Si $\ell = 2$, et si ℓ est inversible sur X , alors l'équation $T^2 + 1 = 0$ est séparable sur A , donc -1 est un carré dans A parce que A est strictement local, donc les corps résiduels de A sont non ordonnables. Donc les hypothèses de 2.4 sont satisfaites pour A en tout cas, et on a $\mathrm{cd}_\ell R(A) \geqslant \dim A$, d'où le résultat.

3. Corps des fractions d'un anneau strictement local.

3.0. Nous aurons un besoin essentiel, pour les numéros suivants, de la connaissance de $\mathrm{cd}_\ell R(A)$, où A est un anneau strictement local, c'est-à-dire hensélien à corps résiduel séparablement clos. Malheureusement on ne connaît pas $\mathrm{cd}_\ell R(A)$ dans le cas général, par exemple si $A = \hat{\mathbb{Z}}_p[[x]]$ $(p \neq \ell)$.

On conjecture cependant que si A est noethérien et ℓ est inversible dans A, on aura

$$(3.1) \qquad \mathrm{cd}_\ell R(A) = \dim A \qquad (\ell \text{ inversible dans } A) ,$$

du moins dans les cas les plus importants, par exemple si A est un anneau <u>excellent</u> (EGA IV 7.8.2).

Notons que si $\dim A = 1$, (3.1) est vrai d'après 2.3 . De plus, on a l'inégalité $\geqslant$ d'après 2.5 en tout cas. Nous démontrerons plus tard (XIX) que (3.1) est aussi vrai si A est excellent de caractéristique résiduelle nulle, en utilisant la résolution des singularités [3] . Ici nous démontrerons (3.1) seulement dans le cas facile 3.2. ci-dessous.

Naturellement on a $cd_{\ell} R(A) \leq 1$ si A est de caractéristique ℓ , donc ce cas est trivial. Il reste de plus à analyser le cas d'inégales caractéristiques, avec caractéristique résiduelle ℓ , et on ne s'attend pas à ce que 3.1 soit vrai dans ce cas là. Il faudra certainement tenir compte du rang du module Ω^1_k (k le corps résiduel), i.e. du degré $[k : k^{\ell}]$.

<u>Proposition</u> 3.2. <u>Soit</u> X <u>un préschéma de type fini sur le spectre d'un corps</u> k <u>ou sur le spectre d'un anneau de valuation discrète</u> R , <u>et soit</u> $\ell \in \mathbb{P}$ <u>inversible dans</u> k (resp. R). <u>Alors</u> 3.1 <u>est vrai pour chaque anneau</u> A <u>qui est un localisé strict de</u> X .

<u>Démonstration</u>. Prenons X intègre (on se réduit à ce cas comme d'habitude), et soit $n = \dim X$.

Supposons que X soit défini sur un corps <u>séparablement clos</u> k . Alors pour chaque anneau A qui est un localisé strict de X en un point <u>fermé</u>, on a $\dim A = n$. Comme chaque corps résiduel K de R(A) s'identifie à une extension algébrique de R(X) et comme

$$\text{deg.tr.}(R(X)/k) = \dim X = n ,$$

on a $cd_{\ell} K \leq n$ d'après 2.1 , d'où $cd_{\ell} R(A) \leq n$. L'inégalité opposée est conséquence de 2.5.

Supposons maintenant que X soit de type fini sur Spec R , R un anneau de valuation discrète, et soit A le localisé strict de X en un point x . Si x n'est pas au-dessus du point fermé de Spec R , on se réduit immédiatement au cas où X est de type fini sur un corps (en localisant R). On peut aussi pour la même raison supposer que le morphisme $X \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ est dominant.

Supposons pour l'instant que de plus R est un anneau de valuation discrète <u>strictement local</u> et que le point x est <u>fermé</u> dans X . Alors on a $\dim A = \dim X = n$ (EGA IV 5.6.5) . Comme chaque corps résiduel K de $R(A)$ s'identifie à une extension séparable de $R(X)$ on a

$$\begin{aligned} cd_{\ell} R(A) \leqslant cd_{\ell} R(X) \leqslant cd_{\ell} L + \text{deg.tr.}(R(X)/L) \\ = 1 + (n-1) = n \end{aligned}$$

d'après 2.1 et 2.2 , où L est le corps des fractions de R , d'où le résultat dans ce cas, compte tenu de 2.5 .

On déduit le cas général de ces cas particuliers au moyen du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 3.3.

(i) <u>Soit</u> X <u>de type fini sur le spectre d'un corps</u> k <u>et soit</u> A <u>un anneau localisé strict de</u> X <u>en un point</u> x . <u>Alors il existe un corps</u> k' séparablement clos, <u>un schéma</u> X' <u>de type fini sur</u> Spec k' , <u>et un point</u> x' fermé <u>dans</u> X' <u>tel que</u> A <u>soit isomorphe à un anneau localisé strict de</u> X' <u>en</u> x' .

(ii) <u>Soit</u> X <u>de type fini sur</u> Spec R , R <u>un anneau de valuation discrète</u>, <u>soit</u> x <u>un point de</u> X <u>au-dessus du point fermé de</u> Spec R et <u>soit</u> A <u>un localisé strict de</u> X <u>en</u> x . <u>Il existe un anneau de valuation discrète</u> strictement local R', <u>un schéma</u> X' <u>de type fini sur</u> Spec R' , <u>et un point</u> fermé x' <u>de</u> X' <u>au-dessus du point fermé de</u> Spec R' , <u>tel que</u> A <u>soit isomorphe à un localisé strict de</u> X' <u>en</u> x'.

Démonstration. (i) On peut prendre X affine. Soit Y l'adhérence de x dans X , avec la structure induite réduite, et soit $d = \dim Y$. Par le lemme de normalisation ([2] Chap. V § 3 n° 1) , il existe un morphisme

$$X \longrightarrow \operatorname{Spec} k[y_1, \dots, y_d] = T$$

induisant un morphisme <u>fini</u> $Y \to T$. Par suite l'anneau localisé strict de $O_{X,x}$ est isomorphe au localisé strict de $O_{X',x'}$, où $X' = X \times_T \mathrm{Spec}\overline{R(T)}$, et où x' est un point fermé dans X' .

(ii) Ce cas se traite d'une façon analogue. On peut supposer X affine, d'anneau A . Soit Y l'adhérence de x dans X avec la structure induite réduite, qui est un sous-schéma fermé de la fibre fermée X_o de X sur Spec R , et soit $d = \dim Y$. Alors, en relevant les éléments $y_1,\dots,y_d$ de $A \otimes_R k$ envisagés dans i) en des éléments de A , on trouve un morphisme

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R[y_1,\dots,y_d] = T$$

induisant un morphisme <u>fini</u> $Y \longrightarrow T_o$. Soit R' le localisé strict de $R[y_1,\dots,y_d] = B$ en l'idéal premier $\underline{m}B$. Alors R' est un anneau de valuation discrète strictement local, et on peut prendre $X' = X \times_T \mathrm{Spec}\, R'$, et x' un point fermé de X' au-dessus de x .

4. <u>Dimension cohomologique : cas ℓ inversible dans $\underline{O}_X$</u> .

<u>Théorème 4.1</u> <u>Soit X un schéma noethérien, $\ell \in \mathbb{P}$, et φ une fonction sur X , à valeurs dans $\mathbb{N}$, et satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

(i) <u>Pour chaque</u> $x \in X$, $\mathrm{cd}_\ell\, k(x) \leq \varphi(x)$.

(ii) <u>Soit</u> $x \in X$ <u>et</u> $y \in Y$ = <u>adhérence de</u> x , $y \neq x$. <u>Soit K l'anneau des fonctions rationnelles d'un localisé strict de Y au-dessus de y</u> . <u>On a</u> $\mathrm{cd}_\ell\, K < \varphi(x) - \varphi(y)$.

<u>Alors pour chaque faisceau de ℓ-torsion F sur X on a</u>

$$H^q(X,F) = 0$$

<u>si</u> $$q > \varphi(F) \underset{\text{déf}}{=\!=} \mathrm{Sup}\{\varphi(x) \mid x \in X ,\ F_{\bar{x}} \neq 0\} .$$

Démonstration. Les hypothèses seront aussi vérifiées pour la fonction restriction de φ, à un sous-préschéma quelconque de X, donc par récurrence noethérienne nous pouvons supposer le théorème vrai pour chaque sous-préschéma fermé de X distinct de X. Soit F donné et écrivons $F = \varinjlim F_i$ où les F_i sont les sous-faisceaux constructibles de F (IX 2.9 (iii)).

Pour chaque F_i, l'ensemble des $x \in X$ tels que $F_x \neq 0$ est constructible dans X, et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à chaque F_i dont le support n'est pas dense. On voit ainsi que l'hypothèse de récurrence implique en fait que le théorème est vrai pour chaque F qui est nul en au moins un des points maximaux de X. Nous allons donc supposer que F ne satisfait pas à cette condition.

Soit maintenant $i : \operatorname{Spec} R(X) \longrightarrow X$ l'inclusion, où $R(X)$ est l'anneau des fonctions rationnelles de X, et considérons la suite exacte suivante, où K et C sont définis comme noyau et conoyau respectivement :

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow i_* i^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0 \ .$$

Ici K et C sont nuls en chaque point maximal de X, donc d'après (ii), $\varphi(K)$ (resp. $\varphi(C)$) est strictement plus petit que $n = \varphi(F)$, d'où $H^q(X,K) = H^q(X,C) = 0$ pour $q \geq n$. Donc pour démontrer $H^q(X,F) = 0$ pour $q > n$, il suffit, grâce aux suites exactes de cohomologie, de démontrer $H^q(X,i_* i^* F) = 0$, donc nous pouvons supposer que F est de la forme $i_* G$, pour un ℓ-faisceau convenable G sur $\operatorname{Spec} R(X)$.

Examinons la suite spectrale de Leray.

$$E_2^{p,q} = H^p(X,R^q i_* G) \Longrightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} R(X),\ G) \ .$$

Or $R(X)_{\text{réd}}$ est produit des corps $k(x)$ pour x maximal dans X, donc $\operatorname{cd}_\ell R(X) \leq n$ d'après (i), donc l'aboutissement de la suite spectrale est nul en dim $> n$.

Nous voulons démontrer que $E_2^{p0} = 0$ pour $p > n$. En examinant la suite spectrale, on voit qu'il suffit de démontrer que $E_2^{pq} = 0$ si $q > 0$ et si $p > n-q-1$. Donc, par récurrence, il suffit de démontrer que $\varphi(R^q i_* G) < n - q$ pour $q > 0$. Mais d'après VIII 5.2 la fibre de $R^q i_* G$ en un point géométrique $\bar{y}$ au-dessus d'un point $y \in X$ n'est autre que $H^q(\operatorname{Spec} K, G_K)$, où K est l'anneau des fonctions rationnelles du localisé strict de X en $\bar{y}$, et G_K est le faisceau induit sur $\operatorname{Spec} K$. On a $\operatorname{cd}_\ell K < n - \varphi(y)$ d'après (ii) , d'où $(R^q i_* G)_{\bar{y}} = 0$ si $q \geqslant n - \varphi(y)$, ce qui donne le résultat cherché.

Corollaire 4.2. Soient X un schéma noethérien, $\ell \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$, et supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

(i) Pour chaque point y de X de codimension c , on a $\operatorname{cd}_\ell k(y) \leqslant n - 2c$.

(ii) Pour chaque anneau A , localisé strict d'un sous-schéma fermé irréductible Y de X , on a $\operatorname{cd}_\ell R(A) \leqslant \dim A$.

Alors

$$\operatorname{cd}_\ell X \leqslant n .$$

Plus précisément, si F est un ℓ -faisceau qui est nul en chaque point y de codimension $< s$, on a

$$H^q(X,F) = 0 \text{ si } q > n - 2s .$$

En effet, on peut prendre $\varphi(y) = n-2\operatorname{codim} y$ et appliquer 4.1, dont la condition (i) (resp. (ii)) résulte de la condition correspondante de (i) (resp. (ii)) de (4.2), compte tenu pour (ii) de l'inégalité $\dim \underline{O}_{Y,y} + \dim \underline{O}_{X,x} \leqslant \dim \underline{O}_{X,y}$.

Corollaire 4.3. Soit X de type fini et de dimension n sur un corps k et soit $\ell \neq \operatorname{car} k$. Alors $\operatorname{cd}_\ell X \leqslant 2n + \operatorname{cd}_\ell k$.

On applique le corollaire précédent, en y remplaçant n par $2n + cd_\ell k$, et utilisant 2.1 et 3.2 pour vérifier les conditions (i) et (ii) de 4.2, et tenant compte pour (i) de l'inégalité

$$\text{deg.tr.}K(y)/k + \dim \underline{O}_{X,y} \leqslant \dim X \quad .$$

<u>Corollaire</u> 4.4. <u>Soit</u> X <u>noethérien</u>, <u>et</u> $\ell \in \mathbb{P}$ <u>inversible sur</u> X . <u>Supposons que la condition</u> (ii) <u>de</u> 4.2 <u>est satisfaite, et que de plus</u> $\ell \neq 2$ <u>où qu'aucun corps résiduel de</u> X <u>ne soit ordonnable</u>. <u>Alors on a</u>

$$cd_\ell X \leqslant cd_\ell R(X) + \dim X \leqslant 2cd_\ell R(X) \ .$$

On pose $n = cd_\ell R(X) + \dim X$ dans 4.2 , et on applique 2.4 , qui implique la condition (i) de 4.2 , car
$cd_\ell k(y) \leqslant cd_\ell R(\underline{O}_{X,y}) - \dim \underline{O}_{X,y} \leqslant cd_\ell R(X) - \dim \underline{O}_{X,y} \leqslant n - 2 \dim \underline{O}_{X,y}$.
La deuxième inégalité dans 4.4 résulte de 2.5 .

<u>Exemple</u> 4.5. L'hypothèse inélégante sur les corps résiduels faite dans 4.4 , est nécessaire, comme on voit avec $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+ y^2+ z^2)$, où toutes les autres conditions sont satisfaites, avec $\dim X = cd_\ell R(X) = \ell = 2$, mais le faisceau $\mathbb{Z}/2$ concentré au point $(0,0,0)$ a une cohomologie non nulle en chaque dimension, donc $cd_\ell X = +\infty$.

4.6. On est tenté aussi d'essayer dans 4.2 de mettre des hypothèses seulement sur les points fermés de X , mais ce n'est pas possible. Par exemple il existe des anneaux de valuation discrète à corps résiduel algébriquement clos et à corps de fonctions ayant une dimension cohomologique arbitrairement grande (*). Le spectre d'un tel anneau aura aussi une dimension cohomologique très grande.

(*) Pour s'en convaincre, il suffit de noter que si X est un schéma algébrique lisse sur un corps k , admettant un point $x \in X(k)$, alors on peut trouver un "arc de courbe formel" passant par x dont "l'enveloppe algébrique" soit X , et dont le corps des fonctions contient donc celui K de X , et y induit une valuation discrète dont le corps résiduel est k .

5. Dimension cohomologique : cas $\ell = p$.

5.0. En utilisant la théorie d'Artin - Schreier (IX 3.5) on obtient une meilleure majoration que 4.3 pour la p-dimension cohomologique d'un schéma X de caractéristique p . Soit cdqc X le plus grand nombre n tel que $H^n(X,F) \neq 0$ pour au moins un faisceau de Modules F quasi-cohérent sur X (au sens de Zariski). On a le

Théorème 5.1. Soit X un schéma noethérien de caractéristique $p > 0$. Alors

$$cd_p X \leq \text{cdqc}\, X + 1 .$$

En particulier, la p-dimension cohomologique d'un schéma noethérien affine X de caractéristique $p > 0$ est au plus égale à 1 .

Démonstration. Appliquons IX 5.5 :
Tenant compte du fait que les $R^q f_* F$, $q > 0$, sont nuls pour un morphisme f fini et pour un faisceau abélien F (VIII 5.5) (resp. un faisceau F quasi-cohérent), on se ramène à démontrer que $H^q(X, i_!(\mathbb{Z}/p)_U) = 0$ pour $i: U \to X$ une immersion ouverte et pour $q > \text{cdqc}\, X$.

Or soit Y un sous-préschéma fermé de X de support X - U et soit J le faisceau cohérent d'idéaux définissant Y . Le morphisme $p : f \mapsto f^p - f$ (IX 3.5) induit un morphisme $J \to J$. En examinant la suite exacte IX 3.5 et la suite exacte

$$0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/p)_U \longrightarrow (\mathbb{Z}/p)_X \longrightarrow (\mathbb{Z}/p)_Y \longrightarrow 0 \quad ,$$

on voit qu'on a en fait une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow i_!(\mathbb{Z}/p)_U \longrightarrow J \longrightarrow J \longrightarrow 0 .$$

Puisque J est cohérent on a $H^q(X,J) = 0$ pour $q > \text{cdqc}\, X$, d'où le résultat par la suite exacte de cohomologie.

Pour un schéma quasi-projectif sur un corps k séparablement clos, on peut réduire cette majoration dans certain cas par 1. On a en fait

Corollaire 5.2. *Soit X un schéma de type fini sur un corps k de caractéristique $p > 0$. On a*

$$\mathrm{cd}_p X \leq \dim X + 1 ,$$

et si k est séparablement clos et X quasi-projectif (*), *on a*

$$\mathrm{cd}_p X \leq \dim X .$$

En effet, la première assertion est claire, puisque $\mathrm{cdqc}\, X \leq \dim X$ ([6] 4.15.2) . Traitons la deuxième : Pour un tel X, les groupes de cohomologie $H^n(X,F)$ $(n = \dim X)$, pour un faisceau cohérent F , sont des espaces vectoriels de dimension finie sur k . Soit $V = H^n(X,J)$, où J est le faisceau d'idéaux qui figure dans la suite exacte (*). Le morphisme $\varphi : V \longrightarrow V$ déduit de (*) est évidemment de la forme $\varphi = \varepsilon - \mathrm{id}$ ou ε satisfait à $\varepsilon(rv) = r^p \varepsilon(v)$ pour $r \in k$ et $v \in V$. La jacobienne de l'application Φ du schéma affine déduit de φ est donc $-I$, I la matrice identique. Par suite Φ est étale, donc surjectif parce que additif, et il s'ensuit que Φ est surjectif puisque k est séparablement clos, d'où aussitôt la conclusion.

(*) Utilisant le lemme de Chow, il est facile de remplacer la condition "X quasi-projectif" par "X séparé".

6. Dimension cohomologique pour un préschéma de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$.

Proposition 6.1. Soit X quasi-fini au-dessus de Spec $\mathbb{Z}$. Supposons que $\ell \neq 2$ où que chaque corps résiduel de X de caractéristique zéro est totalement imaginaire. Alors $\mathrm{cd}_\ell X \leqslant 3$.

C'est une conséquence de Théorème 2.2 (ii), du Corollaire 4.2 et du fait qu'un corps de nombres (totalement imaginaire si $\ell = 2$) est de ℓ-dimension cohomologique $\leqslant 2$ (CG II 4.4).

Il s'ensuit en fait de la théorie des corps de classes qu'on a l'égalité si le morphisme $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$ est propre et surjectif.

Malheureusement les résultats du n° 4 ne s'appliquent pas tels quels si X est seulement de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, parce que l'hypothèse (ii) de (4.2) n'est pas en général vérifiée pour les anneaux locaux de caractéristique résiduelle ℓ. On doit donc utiliser le résultat (5.1) pour obtenir la bonne majoration; on va maintenant se payer pour le théorème (5.1).

Théorème 6.2. Soit X de type fini sur Spec $\mathbb{Z}$, et soit $\ell \in \mathbb{P}$. Supposons, si $\ell = 2$, qu'aucun corps résiduel de X n'est ordonnable. Alors

$$\mathrm{cd}_\ell X \leqslant 2 \dim X + 1 .$$

Plus précisément, soit F un faisceau de ℓ-torsion tel que pour tout point x de X tel que $F_{\bar{x}} \neq 0$, on ait

$$\dim \overline{\{x\}} \leqslant \begin{cases} (N-1)/2 & \text{si } \ell \neq \mathrm{car}\ k(x) \\ N-1 & \text{si } \ell = \mathrm{car}\ k(x) \end{cases}$$

($\overline{\{x\}}$ est l'adhérence de $\{x\}$); alors

$$H^p(X,F) = 0 \quad \text{si} \quad p > N .$$

Démonstration. Par récurrence sur X, nous pouvons supposer le théorème vrai pour chaque sous-préschéma fermé distinct de X. Si F est comme dans l'énoncé et si on écrit $F = \varinjlim F_i$ où les F_i sont les sous-faisceaux constructibles de F (IX 2.9 (iii)), chaque F_i vérifie aussi les mêmes hypothèses. Il suffit donc de démontrer le théorème lorsque F est constructible.

Or dans ce cas l'ensemble E des $x \in X$ tels que $F_{\bar{x}} \neq 0$ est un sous-ensemble constructible, et l'hypothèse de récurrence implique que le théorème est vrai pour chaque F tel que E ne soit pas dense. De plus, le théorème est une conséquence de 5.1 pour un faisceau concentré sur la fibre de X en le point (ℓ) de Spec $\mathbb{Z}$, et de 4.3 pour un faisceau concentré sur la fibre en (p), où $p \neq \ell$, compte tenu que $cd_{\ell}\, \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z} = 1$ (CG II 2.2).

Prenons X réduit, et soit $X = X_0 \cup X_1$ où X_1 est le sous-ensemble fermé, réunion des composantes irréductibles de X de caractéristique ℓ, et où X_0 est la réunion des autres composantes irréductibles, X_0 et X_1 étant munis des structures induites réduites. Soient $j_\nu : X_\nu \to X$ les inclusions et soit $d_\nu = \dim X_\nu$, et $N = \sup\{2d_0+1,\ d_1+1\}$. Pour tout F constructible sur X on a une suite exacte.

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow F \longrightarrow j_{0*}j_0^{*}F \oplus j_{1*}j_1^{*}F \longrightarrow C \longrightarrow 0 \ ,$$

où C est concentré sur $X_0 \cap X_1$, qui est de caractéristique ℓ et de dimension $\leqslant d_1-1$. Il s'ensuit que

$$H^q(X,C) = 0 \quad \text{si } q > N-1 \ ,$$

car en vertu de 5.1 on a $cd_{\ell}(X_0 \cap X_1) \leqslant \dim X_0 \cap X_1 + 1 \leqslant d_1 \leqslant N-1$. En examinant la suite exacte de cohomologie relative de $(*)$, on se ramène au cas $X = X_0$ où $X = X_1$, et ce dernier est conséquence de 5.1, comme on l'a déjà signalé.

Supposons donc que chaque point maximal de X est de caractéristique différente de ℓ , et soient $i_\nu : x_\nu \longrightarrow X$ les inclusions des points maximaux. En examinant la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow \bigoplus_\nu i_{\nu *} i_\nu^* F \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

on se réduit par récurrence au cas $F = i_{\nu *} i_\nu^* F$, c'est-à-dire F de la forme $i_* G$ pour un faisceau G convenable sur Spec $k(x)$, x un point de X . On peut donc supposer X irréductible et réduit, à point générique x , et que la caractéristique de $k(x)$ est zéro d'après 4.3 .

Examinons la suite spectrale

$$(**) \qquad H^p(X, R^q i_* G) \Longrightarrow H^{p+q}(\mathrm{Spec}\ k(x)\ ,\ G)\ .$$

Soit $s = \dim X$. Il nous faut démontrer que

$$(+) \qquad E_2^{p0} = 0 \quad \text{pour } p > 2s + 1\ .$$

Or $k(x)[i]$ est de degré de transcendance $s-1$ au-dessus de $\mathbb{Q}[i]$ qui est un corps de dimension cohomologique 2 . Puisque $k(x)$ n'est pas ordonnable si $\ell = 2$, il s'ensuit de 2.1 qu'on a $cd_\ell\, k(x) = s + 1$. Ça implique que le but de la suite spectrale est nul pour $n > s + 1$. Il suffit donc pour (+) de démontrer que dans (**) on a

$$(++) \qquad E_2^{pq} = 0 \quad \text{si } p > 2s - q \quad \text{et} \quad q > 0\ .$$

Soit y un point de X et K l'anneau des fractions d'un localisé strict en un point géométrique $\bar{y}$ de X au-dessus de y . Alors K est produit direct de corps dont chacun est de degré de transcendance $s-1$ sur un localisé strict de $\mathbb{Z}$, et on a donc, d'après 2.1 et 2.2 , $cd_\ell K \leqslant s$. De plus on peut appliquer 3.2 si la caractéristique résiduelle de y n'est pas ℓ . On a donc

$$(") \qquad (R^q i_* G)_{\tilde{y}} = 0 \quad \begin{cases} \text{si } q > \operatorname{codim} y, \text{ i.e. } \dim \bar{y} > s-q, \text{ et } \ell \neq \operatorname{car} k(y), \\ \text{ou si } q > s \text{ en tout cas.} \end{cases}$$

En particulier on a $E_2^{pq} = 0$ si $q > s$. Pour vérifier (++) dans le cas $0 < q \leqslant s$, on applique l'hypothèse de récurrence aux faisceaux $R^q i_*(G)$.

D'après l'énoncé et ("),il faut poser $N' = 2s - q$ et vérifier les deux inégalités

$$s - q \leqslant (N'-1)/2$$

$$s-1 = \dim X_\ell \leqslant N'-1 \quad ,$$

où X_ℓ est le fibré de X au-dessus du point (ℓ) de Spec $\mathbb{Z}$.
Elles sont bien vraies si $0 < q \leqslant s$, cqfd.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ax, J. Proof of some conjectures of Serre on cohomological dimension, Proc. Amer. Math. Society 16 (1965) 1214-1221.

[2] Bourbaki, N. Algèbre Commutative, Paris (1960)

[3] Hironaha, H. Resolution of singularities of an algebraic surface over a field of characteristic zero, Annals of Math. Vol. 79, No. 1,2 (1964)

[4] Nagata, M. Local Rings, New York (1962)

[5] Serre, J-P. Sur la dimension cohomologique de groupes profinis, Topology Vol. 3, p. 413 (1965)

[6] Godement, R. Théorie des Faisceaux, Paris (1958).

[7] E. Artin et A. Schreier - Eine Kennzeichnung der reel abgeschlossenen Körper, Hamb. Abh. 5 (1927) pp. 225-231.

[8] Serre, J.P. Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes n°5 (Springer).