Quelques résultats de constructibilité uniforme et de calculabilité en cohomologie étale.

2013年5月 晨兴数学中心

Fabrice Orgogozo

version du 2013-5-24 à 8h59 TU (7a173cb)

Après de brefs rappels sur les théorèmes classiques de finitude en cohomologie étale, nous expliquerons quelques prolongements dans deux directions : uniformité et calculabilité.

Uniformité. Nous montrerons que l'image directe d'une famille « uniformément constructible-modérée » de complexes par un morphisme propre est également uniformément constructible-modérée, et que l'on contrôle la « taille » des images directes. Ceci est une généralisation du fait suivant : si X est un schéma séparé de type fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique p, les nombres de Betti modulo ℓ sont bornés indépendamment de $\ell(\neq p)$. (Si le temps le permet, le cas non-nécessairement propre ainsi que d'autres des 6-opérations seront considérées.)

Calculabilité. Nous montrerons la calculabilité algorithmique de la cohomologie modulo ℓ d'un schéma X comme ci-dessus, ainsi que des flèches induites par fonctorialité (par exemple le polynôme caractéristique mod. ℓ du Frobenius). Une extension au cas des images directes supérieures par un morphisme propre sera également considérée.

Table des matières

Première partie : uniformité

2013-5-10

1. Introduction

1.1. Une définition *à la Čech* de la cohomologie étale.

1.1.1. Un morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est dit **étale** s'il existe une présentation $B = A[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_r)$ telle que l'image dans B du déterminant jacobien $\mathrm{dét}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ soit inversible. Un morphisme de schémas est étale si, localement en haut et en bas pour la topologie de Zariski, il est de ce type. (Un morphisme étale n'est pas nécessairement séparé, ni présentation finie [mais il est *localement* de présentation finie].)

[Comparaison avec définition classique : Écrivons $B = P/I$ où P est l'algèbre de polynômes en les $X_1, \dots, X_n$. Les dérivées partielles induisent un isomorphisme $I/I^2 \xrightarrow{\sim} B^n$ si bien que l'on peut choisir des g_i dans I tels que la i-ième dérivée partielle de g_j soit $[i = j\ ?] \mod I$. Les g_i engendrent I localement aux points de $\mathrm{Spec}(B)$ de sorte que le schéma des zéros des g_i est l'union disjointe de $\mathrm{Spec}(B)$ et d'un schéma Z. Prenons g dans P égal à 1 sur B et 0 sur Z. La A-algèbre B a donc la présentation « élémentaire » $A[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]/(g_1, ..., g_n, 1 - gX_{n+1})$.

Exemple : si A est une $\mathbf{F}_p$-algèbre, $B = A[x]/(x^p - x - a)$, $a \in A$.

Remarque : un morphisme $Y \to X$ entre schémas de type fini sur $\mathbf{C}$ est étale si et seulement si son analytifié, c'est-à-dire le morphisme $Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ induit entre espaces analytiques, est un *isomorphisme local.* Cela est équivalent à : pour tous points fermés $y \mapsto x$, $\mathcal{O}^{\wedge}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\wedge}_{Y,y}$.

1.1.2. *Composantes connexes.* Soit X un schéma. On note $\pi_0(X)$ l'espace topologique totalement discontinu, quotient de X [par la relation d'équivalence « être dans la même composante connexe »], satisfaisant la propriété universelle suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{loc. const.}"] \arrow[d] & E \\ \pi_0(X) \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd}$$

Si X est cohérent (=quasi-compact, quasi-séparé) — par exemple $X = \mathrm{Spec}(A)$ — alors $\pi_0(X) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{B})$, où $\mathbb{B} = \mathrm{Idem}\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est l'algèbre booléienne des idempotents de X [addition : $(e, e') \mapsto (e - e')^2$; multiplication usuelle]. Si A est nœthérien, c'est un espace topologique fini discret, en bijection avec l'ensemble des idempotents *indécomposables* (non nuls) de A, ainsi qu'avec $\mathrm{Hom}_{\mathtt{Alg}}(\mathbb{B}, \mathbf{F}_2)$.

Remarque : si $Y \to X$ est étale *séparé*, avec X connexe, toute section est l'immersion d'une composante connexe ouverte de Y.

↳ π_0 « dit quelque chose » sur les flèches (étales). C'est utile quand on veut montrer (*infra*) que $\pi_1(X_y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X)$.

1.1.3. *Ensembles simpliciaux, modules cosimpliciaux.* Soit Δ la catégorie dont les objets sont les $[n] := \{0, \dots, n\}$, pour $n \in \mathbf{N}$, et les flèches les applications croissantes. Faces : $\delta_{i,n} : [n-1] \hookrightarrow [n]$ d'image omettant i. Un **ensemble simplicial** est un foncteur $E_\bullet : \Delta^\circ \to \mathrm{Ens}$. Fixons un nombre premier ℓ. À $E_\bullet$ est associé un $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$-module *cosimplicial*

$$\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^{E_0} \rightrightarrows \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^{E_1} \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^{E_2} \cdots,$$

puis un complexe, obtenu considérant la différentielle usuelle $d = \sum_i (-1)^i \delta_{i,n}$,

$$0 \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^{E_0} \xrightarrow{d_0} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^{E_1} \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}^{E_2} \cdots,$$

et, enfin, des groupes de cohomologie :

$$H^i(E_\bullet, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) := \mathrm{Ker}(d_i)/\,\mathrm{Im}(d_{i-1}).$$

Remarque : le complexe ci-dessus calcule $R\Gamma(E_\bullet, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, où $E_\bullet$ est vu comme un topos.

1.1.4. *EG, BG.* Cf. [扶磊], §4.1. Soit G un groupe fini. On note EG l'ensemble simplicial *contractile* $[n] \mapsto G^{[n]} = \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ens}}([n], G)$, et BG le quotient $EG\,/\,G$, où G agit par translation à droite sur les $(n+1)$-uplets. (On a bien sûr $BG_n \xrightarrow{\sim} G^n$, via $(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_0 g_1^{-1}, g_1 g_2^{-1}, \dots, g_{n-1} g_n^{-1})$.) Les groupes de cohomologie $H^i(BG, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ définis ci-dessus ne sont autres que les groupes usuels de cohomologie de G, définis à l'aide des cochaînes homogènes (resp. inhomogènes si l'on utilise les isomorphismes $BG_n \xrightarrow{\sim} G^n$).

Remarque : EG est le « revêtement universel » de BG.

1.1.5. *Čech.* Soit X une variété algébrique sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, par exemple $X = \mathrm{Spec}(A)$ où $A = \mathbf{F}_p[t_1, \ldots, t_m]/(g_1, \ldots, g_e) \otimes_{\mathbf{F}_p} \overline{\mathbf{F}_p}$. Il existe un système projectif *dénombrable* de recouvrements étale $X_\alpha \to X$ qui soit cofinal au sens suivant : pour tout recouvrement étale $U \twoheadrightarrow X$ étale, il existe une factorisation d'un $X_\alpha \twoheadrightarrow X$ à travers U. Notons $\mathbb{X}_\alpha$ l'ensemble simplicial $\pi_0(X_\alpha/X) : \mathbb{X}_\alpha([n]) = \pi_0(X_\alpha \times_X \cdots \times_X X_\alpha)$ ($n+1$ facteurs). [On note $X_\alpha \times_X \cdots \times_X X_\alpha = (X_\alpha/X)^{[n]}$.]

Si $X = \mathrm{Spec}(A)$, on peut prendre $X_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ avec $A_\alpha = A[x_1, \ldots, x_r]/(f_1, \ldots, f_r)$, pour $r \in \mathbf{N}$, $f_i \in A[x_1, \ldots, x_r]$. Dans ce cas $\mathbb{X}_\alpha([n])$ est le π_0 de l'anneau $A_\alpha \otimes_A \cdots \otimes_A A_\alpha = A[x_{ij} : 1 \leq i \leq r, j \in [n]] \,/\, (f_{ij})$, où $f_{ij} = f_i(x_{1j}, \ldots, x_{rj})$.

On a :

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = \mathrm{colim}_\alpha\, H^i(\mathbb{X}_\alpha, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}).$$

Remarque : en général (Verdier) la cohomologie de X une colimite portant sur les *hyperrecouvrements* étales (et pas seulement les cosq_0). On utilise ici le fait (M. Artin) que si $c \in H^j((X_\alpha/X)^n, \mathbf{Z}/\ell)$, avec $j > 0$, il existe $X_\beta \to X_\alpha$ tel que l'image de c dans $H^j((X_\beta/X)^n, \mathbf{Z}/\ell)$ soit nulle. [C'est trivialement vrai si $n = 1$.]

1.1.6. *Cohomologie galoisienne.* Soient K un corps, $\overline{K}$ une clôture séparable, $G \coloneqq \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ limite projective des groupes finis $G_\alpha = \mathrm{Gal}(K_\alpha/K)$. Si l'on fait la même construction pour $X_\alpha = \mathrm{Spec}(K_\alpha) \to \mathrm{Spec}(K) = X$, la colimite ci-dessus est $H^i(G, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ (cohomologie continue). En effet, d'après la théorie de Galois-Grothendieck, $K_\alpha \otimes_K K_\alpha \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{G_\alpha} K_\alpha$, etc.

Il en résulte que les corps sont, pour la topologie étale, l'analogue des espaces topologiques $\mathbf{K}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{1})$. (Voir aussi *infra.*)

1.1.7. **Théorème.** *Soit X un $\overline{\mathbf{F}_p}$-schéma séparé de type fini. Les espaces vectoriels $H^i(X, \mathbf{F}_\ell)$, pour $\ell \neq p$, sont de dimension finie, notée $b^i(X, \mathbf{F}_\ell)$, et sont nuls pour $i > 2\dim(X)$. De plus :*

- **(i)** *Il existe une constante C_X telle que $b^i(X, \mathbf{F}_\ell) \leq C_X$ pour tout $\ell \neq p$;*
- **(ii)** Pour chaque *ℓ, on peut* calculer *les entiers $b^i(X, \mathbf{F}_\ell)$: il existe un programme (une* machine de Turing*) dont la donnée est i, ℓ ainsi qu'une « description » de X et dont la sortie est l'entier $b^i(X, \mathbf{F}_\ell)$.*

Description : dans le cas d'un schéma affine défini sur $\mathbf{F}_p$, on peut fixer la « complexité » en se donnant m (nombre de variables), e le nombre d'équations, d (borne sur leurs degrés), p, et des coefficients $x \in \mathbf{A}^N_{\mathbf{F}_p}(\mathbf{F}_p)$ d'équations $g_i \in \mathbf{F}_p[t_1, \ldots, t_m]$, et considérer $X = V(g_1, \ldots, g_e) \hookrightarrow \mathbf{A}^m_{\overline{\mathbf{F}_p}}$, fibre géométrique du morphisme « universel » $\mathscr{X} \to \mathbf{A}^N_{\mathbf{F}_p}$ en x.

Calculabilité (bonus) : il existe une partition finie de $\mathbf{A}^N_{\mathbf{F}_p}$ par des parties constructibles [=réunion finie de parties localement fermées] $D_{i,b,\ell}$, dont on peut déterminer explicitement des (in)équations, telles que $b^i(X, \mathbf{F}_\ell) = b$ si et seulement si $x \in D_{i,b,\ell}$.

Le but de ces exposés est d'expliquer la démonstration du résultat précédent et de quelques généralisations.

(ii) : avec **David Madore**. (i)′+(ii) : avec l'aide d'**Ofer Gabber**.

Remarque : tel quel, on peut démontrer (i) assez rapidement en utilisant des méthodes proches de celle de N. Katz utilisées pour majorer les nombres de Betti ℓ-adiques. (Voir [Illusie, 2010] pour des résultats semblables mais plus généraux.) Notre objectif, dans la première partie du cours, est en fait de démontrer une variante (i)′ valable en caractéristique positive des résultats d'uniformité de l'article [Katz-Laumon] sur la transformation de Fourier.

Remarque : l'existence d'une stratification comme dans le « bonus » ci-dessus est bien connue. En démontrant (i)′, nous verrons qu'il existe une partition convenant pour chaque $\ell \neq p$.

Remarque : si X est *projectif lisse* sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, on a $b^i(X, \mathbf{Q}_\ell) = b^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ pour $\ell \gg 0$ [Gabber + Weil II ; ou (i) ci-dessus + Katz-Messing] et $b^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ se « lit » sur la fonction ζ de X [Deligne, Weil II]. (En particulier, $b^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ est indépendant de ℓ.)

Questions (pour X non nécessairement projectif lisse) :
— A-t-on $b^i(X, \mathbf{F}_\ell) = b^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ pour $\ell \gg 0$?
— Les nombres de Betti ℓ-adiques $b^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ sont-ils indépendant de $\ell \neq p$?
— Les nombres de Betti ℓ-adiques $b^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$ sont-ils calculables ?

On a surtout des résultats *virtuels*.

1.2. **Faisceaux constructibles.** Soient X un schéma nœthérien et $n \geq 1$ un entier. (On pourrait souvent remplacer nœthérien par *cohérent*, c'est-à-dire quasi-compact et quasi-séparé.)

Notons $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathrm{Mod}(\Lambda)$ la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$.

1.2.1. **Proposition.** *Soit $\mathscr{F} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}(\Lambda)$. Les conditions suivantes sur $\mathscr{F}$ sont équivalentes :*

- **(i)** *être* nœthérien *: toute suite croissante de sous-trucs est stationnaire ;*
- **(ii)** *être* de présentation finie *: le foncteur $\mathsf{Hom}(\mathscr{F}, -)$ commute aux colimites filtrantes ;*
- **(iii)** *être quotient d'un faisceau $\Lambda_{U,X}$ pour $U \to X$ étale de présentation finie ;*
- **(iv)** *être sous-objet d'un $\pi_* C$, où $\pi : X' \to X$ est fini et C est un faisceau de Λ-modules, constant constructible sur chaque composante connexe de X' ;*
- **(v)** *être localement constant constructible [=représenté par un revêtement étale] sur les strates d'une partition $X = \biguplus X_i$ en parties localement fermées ;*
- **(vi)** *être représenté par un espace algébrique (localement séparé, étale)* de type fini.

Lorsque $\mathscr{F}$ satisfait les conditions précédentes, on dit qu'il est **constructible**.

Il résulte de ce qui précède qu'un sous-quotient d'un constructible est constructible et qu'une extension de constructibles est constructible.

1.2.2. Tout faisceau $\mathscr{F} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}(\Lambda)$ est colimite filtrante de ses sous-faisceaux de Λ-modules constructibles.

1.3. **Trois théorèmes.** Pour les détails, voir SGA 4 (troisième tome), SGA 4½ [Arcata] ou [扶磊, §7.2—3].

1.3.1. **Théorème.** *Soient k un corps séparablement clos et X une courbe projective lisse connexe de genre g sur k. Si n est inversible sur k, $H^i(X, \Lambda)$ est nul pour $i > 2$ et libre de rang respectivement* $1, 2g, 1$ *lorsque* $i = 0, 1, 2$.

Plus précisément, $H^1(X, \mu_n) = \mathrm{Ker}([n] : \mathrm{Pic}_X \to \mathrm{Pic}_X)$ et $H^2(X, \mu_n) = \mathrm{Coker}([n] : \mathrm{Pic}_X \to \mathrm{Pic}_X)$.

Point clef : le théorème de 曾炯 (Zēng Jiǒng), d'après lequel le corps des fractions rationnelles $k(t)$ est C_1 [tout polynôme homogène en $n > d$ variables a un zéro non trivial].

1.3.2. **Théorème.** *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow{g} & Y \end{array}$$

un diagramme cartésien avec f propre [séparé, de type fini, universellement fermé]. Alors :

- **(i)** *Pour tout $\mathscr{F} \in \mathrm{Mod}(\Lambda)$, et tout $i \in \mathbf{N}$, la flèche de changement de base*
$$g^* R^i f_* \mathscr{F} \to R^i f'_* g'^* \mathscr{F}$$
est un isomorphisme *;*
- **(ii)** *Si $i > 2\dim(\mathit{fibres})$, alors $R^i f_* \mathscr{F} = 0$;*
- **(iii)** *Si $\mathscr{F}$ est* constructible*, il en est de même des $R^i f_* \mathscr{F}$.*

Points clefs :
— réduction au cas des courbes [Idée : si $X = \mathrm{Spec}(A)$ avec $A = k[a_1, \dots, a_d]$, on peut factoriser $X \to \mathrm{Spec}(k)$ par les morphismes $\mathrm{Spec}(k[a_1, \dots, a_{i+1}]) \to \mathrm{Spec}(k[a_1, \dots, a_i])$.] ;
— réduction au cas où Y est le spectre d'un anneau local nœthérien complet, de point fermé y [M. Artin] ;
— réduction aux coefficients constants et à la démonstration des trois énoncés suivants :

- **(i)** (pour H^0) $\pi_0(X_y) \xrightarrow{\sim} \pi_0(X)$. Il suffit de montrer que les morphismes $\lim_n \Gamma(X_n, \mathscr{O}_{X_n}) \leftarrow \Gamma(X, \mathscr{O}_X)^\wedge \leftarrow \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(X_y, \mathscr{O}_{X_y})$ induisent des isomorphismes sur les idempotents.
- **(ii)** (pour le H^1) $\pi_1(X_y) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X)$. Il suffit, d'après ce qui précède, de savoir relever les revêtements $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}_y)$ de X_y.
- **(iii)** (pour le H^2) $\mathrm{Pic}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}(X_y)$. [+ « effaçabilité »]

On utilise les théorèmes de finitude et d'existence pour les morphismes propres [en cohomologie cohérente] de ÉGA III, §3—5.

1.3.3. **Théorème.** *Soit X un schéma séparé de type fini, lisse sur $\mathbf{C}$. Pour chaque i, le morphisme $H^i(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to H^i(X^{\mathrm{an}}, \Lambda)$ est un* isomorphisme.

On se ramène à montrer que si $c \in H^j(X^{\mathrm{an}}, \Lambda)$ ($j > 0$) et $x \in X$, il existe un voisinage étale U de X tel que l'image de c dans $H^j(U^{\mathrm{an}}, \Lambda)$ soit nulle.

Point clef : Zariski localement, X^{an} est un $K(\pi, 1)$ où π est une extension itérée de groupes libres de type fini. On utilise alors les faits suivants :
— pour un tel [« bon »] groupe $H^j(\pi^\wedge, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^j(\pi, \Lambda)$;
— l'énoncé GAGA (« Grauert-Remmert ») $\pi_1(X(\mathbf{C}))^\wedge \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_{\text{ét}})$.

2. Constructibilité uniforme

2.1. Énoncé du théorème d'uniformité.

2.1.1. Soit $\underline{n} = (n_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers ; on note $D^b_c(X, \mathbf{Z}/\underline{n}\mathbf{Z}) = \prod_i D^b_c(X[\frac{1}{n_i}], \mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$.

On sait que ces catégories sont stables par f_*, avec f propre (et même plus) ; on cherche des sous-catégories qui traduisent un « air de famille » [uniformité] et qui soient stables par f_*. (Bien entendu, on intéresse également au cas où f n'est pas propre et à d'autres opérations : $f^!$, etc.)

2.1.2. *Faisceaux constructibles adaptés à une stratification.* Soit X un schéma nœthérien. Une **stratification $\mathfrak{X}$** de X est une partition finie en sous-schémas réduits X_i localement fermés, appelés « strates », telle que pour toute strate S, le bord $\partial S = \overline{S} - S$ soit réunion de strates. Observations : (1) si S est une strate maximale pour la relation d'ordre partiel « $x \subseteq \overline{y}$ », elle est ouverte : $X - S = \bigcup_{T \neq S} T = \bigcup_{T \neq S} \overline{T}$ (2) toute strate est ouverte dans son adhérence.

On dit qu'un faisceau constructible $\mathscr{F}$ est **adapté à $\mathfrak{X}$** (ou $\mathfrak{X}$-constructible) s'il est localement constant sur chacune des strates.

2.1.3. *Mise en garde I.*

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et $\mathfrak{X}$ une stratification de X. Il n'existe *pas nécessairement* une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y telle que

$$R^i f_*(\text{faisceau } \mathfrak{X}\text{-constructible}) = \text{faisceau } \mathfrak{Y}\text{-constructible}.$$

Exemple. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et considérons le revêtement d'Artin-Schreier $\wp : \mathbf{A}^1_k \to \mathbf{A}^1_k$, $x \mapsto x^p - x$, de groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Fixons ℓ tel que $p|(\ell - 1)$. On a $\wp_* \mathbf{F}_\ell = \bigoplus_{\psi : \mathbf{F}_p \to \mathbf{F}_\ell^\times} \mathscr{L}_\psi$. Il en résulte (Leray) que $R\Gamma_c(\mathbf{A}^1_k, \mathscr{L}_\psi) = 0$ si $\psi \neq \mathbf{1}$ et est non nul sinon. Fixons ψ non trivial et considérons, pour $\lambda \in k$ variable, les faisceaux $\mathscr{L}_\lambda = \mathscr{L}((x-\lambda)y)$ sur $\mathbf{A}^2_k = \operatorname{Spec}(k[x,y])$ obtenus par image inverse par $(x,y) \mapsto (x-\lambda)y$. On a $R\mathrm{pr}_{1!}\mathscr{L}_\lambda$ *nul* sur $\mathbf{A}^1_k - \{\lambda\}$ mais pas en λ. Pourtant, la famille $j_! \mathscr{L}_\lambda$, où $j : \mathbf{A}^2_k \hookrightarrow \mathbf{A}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$, est constructible adaptée à une même stratification (« uniformément constructible »).

On va donc imposer une **condition de modération**.

Remarque : c'est également trivialement nécessaire si l'on veut majorer les nombres de Betti uniformément : cf. formule de Grothendieck-Ogg-Шафаревич.

Un faisceau sur un schéma nœthérien X est dit **modéré** si pour tout X-schéma strictement hensélien T de point fermé t et tout point géométrique $\overline{u}$ de T localisé en u, l'action de $\pi_1(u, \overline{u})$ sur la fibre en $\overline{u}$ se factorise à travers un quotient d'ordre premier à l'exposant caractéristique de $\kappa(t)$. (On peut supposer que les schémas-test T ci-dessous sont des hensélisés stricts de X.)

Quelle condition sur les *familles* ?

2.1.4. *Mise en garde II.*

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et $\mathscr{F}_\lambda$ une famille de faisceaux lisses, modérés sur X. Il n'est pas nécessairement vrai qu'il existe un morphisme *fini* surjectif $r : Y' \to Y$ tel que les $r^* R^i f_* \mathscr{F}_\lambda$ soient modérés.

Exemple : cf. 2013-5-15.

2.1.5. **Théorème.** *Soient Y un schéma nœthérien excellent de dimension finie, et $f : X \to Y$ un morphisme* propre. *Alors, f_* envoie $D^b_{h-cm}(X, \mathbf{Z}/\underline{n})$ dans $D^b_{h-cm}(Y, \mathbf{Z}/\underline{n})$, où $D^b_{h-cm}(X, \mathbf{Z}/\underline{n}) = \bigcup_{(q : X' \twoheadrightarrow X, \mathfrak{X}')} D^b_{(q,\mathfrak{X}')-cm}(X, \mathbf{Z}/\underline{n})$ est la catégorie des familles de complexes uniformément constructible-proprement modérés.*

Remarque : on peut aussi dire quelque chose sur la « taille » des images directes.
Remarque : le théorème s'applique en particulier à $n_i = n$; $n_i = \ell^i$; $n_i = \ell_i$.

2013-5-15

2.1.6. *Énoncé.* Commençons par rappeler l'énoncé du théorème principal de cette partie. (On ne fait plus d'hypothèse de propreté, et l'on précise la remarque sur la taille des images directes.)

Soient Y un *bon* schéma, $\overline{f} : X \to Y$ un morphisme propre, $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, $\mathfrak{U}$ une stratification de U et $q : X' \twoheadrightarrow X$ un morphisme propre et surjectif.
Notons f le morphisme composé $\overline{f} \circ j$. Il existe une *altération* $r : Y' \twoheadrightarrow Y$ et une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur $U[1/n]$ supposé :
— $\mathfrak{U}[1/n]$-constructible, et
— de prolongement par zéro à $X[1/n]$ modéré par q,
alors le complexe image directe de $\mathscr{F}$ par $f[1/n]$ est $\mathscr{Y}[1/n]$-constructible et son image inverse par $r[1/n]$ est modérée.
De plus, il existe une constante C ne dépendant que de $\overline{f}$ et j telle que les fibres des faisceaux $\mathsf{R}^\alpha f[1/n]_* \mathscr{F}$ soient extensions itérées au plus C fois de sous-quotients de fibres de $\mathscr{F}$ [en des points de la fibre de f dans le cas propre].

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathfrak{U}}{U} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, "\overline{f}"] & X' \arrow[l, "q"'] \\
& \underset{\exists \mathfrak{Y}}{Y} & Y' \arrow[l, dashed, "\exists r"']
\end{tikzcd}$$

Remarques : connu d'Ofer Gabber. Proche de [Katz-Laumon] et, dans le cas des coefficients constants, de [Illusie, 2010]. (Dans *loc. cit.*, la borne sur les nombres de Betti modulo ℓ est obtenue en utilisant le théorème sur la torsion de Gabber.)

2.1.7. **Corollaire.** *Soit X propre et lisse sur $k = \overline{k}$, D dcn, et $U = X - D$ l'ouvert complémentaire. Il existe une constante $C_{X,D}$ telle que, pour tout $\ell \neq p$ et tout $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U, modéré le long de D, on ait $h^i_c(U, \mathscr{L}) \leq C_{X,D} \cdot \operatorname{rang}(\mathscr{L})$.*

Démonstration en caractéristique nulle (Cl. Sabbah). Soit T un voisinage tubulaire *ouvert* de $D(\mathbf{C})$ tel que l'inclusion du *compact* $K = X(\mathbf{C}) - T$ dans $U(\mathbf{C})$ soit une équivalence d'homotopie ; le groupe de cohomologie $\mathsf{H}^i_{\mathrm{Betti},c}(U(\mathbf{C}), \mathscr{L})$ est donc isomorphe à $\mathsf{H}^i_{\mathrm{Betti}}(K, \mathscr{L})$. Par compacité, il existe un recouvrement *fini* $(V_i)_i$ de K par des ouverts simplement connexes. Il en résulte que la cohomologie de $U(\mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathscr{L}$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont les objets de la première « page » ne dépendent que des V_i [et de leurs intersections] et du rang de $\mathscr{L}$. On conclut par le théorème de comparaison Betti-étale d'Artin-Grothendieck.

2.1.8. *Un (contre-)exemple [cf. mise en garde II* supra*].* Remarque : sur un *trait*, proprement modéré = finiment modéré.

Soient $g \geq 1$ et $f \in \mathbf{F}_p[x]$ un polynôme de degré $2g$ sans facteur carré. Soit $\pi_{U_0} : \mathscr{C} \to U_0 = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p[t]) - \{\text{racines de } f\}$ la courbe projective lisse d'équation (affine) $y^2 = f(x)(t-x)$. Considérons $\mathscr{H} = R^1\pi_{U_0 *}\mathbf{F}_\ell$. D'après 井草 (Igusa) $[g=1]$ et 于如岡 (Yu Jiu-Kang) $[g \geq 1]$, le groupe de monodromie géométrique est $\mathrm{Sp}(2g, \mathbf{F}_\ell)$ $(\ell \neq 2)$.

Points clefs (voir aussi [Katz-Sarnak, p. 293 — 300] pour une approche plus géométrique) :

— Soit t tel que $f(t) \neq 0$ et $g(x) = f(x)(t-x)$; on a $H^1_c(\mathbf{A}^1, \overline{\mathscr{L}_{\chi_2}}(g)) = H^1(\mathscr{C}_t, \mathbf{F}_\ell)$. En d'autres termes, on a — sur U_0 — l'égalité $\mathscr{H} = \overline{\mathscr{L}_{\chi_2}}(f) \star_{+,!} \overline{\mathscr{L}_{\chi_2}}$ [**convolution additive** sur $\mathbf{A}^1$].

Ici, $\mathscr{L}_{\chi_2}$ est le $\mathbf{F}_\ell$-faisceau de Kummer quadratique sur $\mathbf{G}_m$, $\overline{\mathscr{L}_{\chi_2}}$ son image directe sur $\mathbf{A}^1$. Les variantes avec g sont obtenues en considérant l'image inverse par $\{g \neq 0\} \xrightarrow{g} \mathbf{G}_m$ puis prolongement par image directe.

— Disons, avec Nicholas Katz [GKM, §8.2], qu'un faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathbf{A}^1$ est *de Fourier* si $\mathscr{F} \xrightarrow{\sim} j_*j^*\mathscr{F}$ est un isomorphisme — où j est l'ouvert de lissité — et si $\mathrm{TF}(\mathscr{F}) \coloneqq \mathsf{R}\mathrm{pr}_{2!} \cdots [1]$ n'a de cohomologie qu'en degré 0. D'après Brylinski (*op. cit.*, 8.4.1), la transformée de Fourier préserve les faisceaux Fourier-irréductibles [=Fourier + géométriquement irréductible]. Il en résulte que $\mathscr{H}$ est **Fourier-irréductible**.

Ceci est formel à partir des faits suivants : TF transforme $\star_{+,!}$ en $\otimes$, le faisceau $\overline{\mathscr{L}_{\chi_2}}(f)$ est Fourier-irréductible, $\mathrm{TF}(\overline{\mathscr{L}_{\chi_2}})$ est Fourier-irréductible de rang 1, $\mathrm{TF}^2 = \mathrm{Id}$ (presque).

— Soit $z \in \mathbf{A}^1$ tel que $f(z) = 0$; $\mathscr{H}$ est modérée en z, et l'espace des coinvariants est de dimension 1. Il en résulte que l'inertie en z est engendrée par une transvection. [Alternativement : utiliser Picard-Lefschetz.]

Cela résulte de [Katz, RLS, 3.3.6], donc indirectement de la formule de GOШ via le calcul de la dimension de la transformée de Fourier. On utilise la modération de $\mathscr{L}_{\chi_2}(f)$.

— théorie des groupes (Залесский [Zalesskiĭ]-Сережкин [Serežkin]).

Voir [Weil I, 5.11] pour une variante Lie-ℓ-adique.

On considère maintenant l'application rationnelle $\mathbf{A}^2_k \dashrightarrow \mathbf{A}^1_k$ $[k = \mathbf{F}_p]$, $(u,v) \mapsto t = u/v$, qui induit un morphisme $U = \mathbf{A}^2_k - \{\text{droites}\} \to U_0 = \mathbf{A}^1_k - \{\text{pentes}\}$. On étend $\pi_U = \pi_{U_0} \times_{U_0} U$ en un morphisme propre sur $\mathbf{A}^2_k$ par normalisation [voir $\mathscr{C}$ comme un revêtement double de $\mathbf{P}^1$].

Fait : la monodromie locale en $O \in U$ est égale à la monodromie globale sur U_0. [C'est un énoncé de surjectivité de π_1 c'est-à-dire de connexité.] (L'existence d'une section à $U \to U_0$ montre bien que l'on a surjectivité sur les π_1 *globaux*.)

$$\begin{tikzcd}
 & & Y' \arrow[dl, "\text{Stein}"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\mathbf{A}^1"] & & \\
V_0 \times_{U_0} U = V \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] & X' \arrow[d, "\text{Écl}_O"'] \arrow[dr, "\mathbf{A}^1"] & Y_0 \arrow[d] & V_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
U \arrow[r, hook] \arrow[rrrr, bend right] & X \arrow[r, equal] & \underset{= \mathbf{A}^2_k}{X} \arrow[r, dashed] & \underset{= \mathbf{P}^1_k}{X_0} & U_0 \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

On utilise alors le fait que $Y' \times_X \text{origine} = Y_0$, qui est connexe. Comme $Y \to X$ est la factorisation de Stein de $Y' \to X$ [cf. algèbre finie sur $\mathscr{O}(\mathbf{A}^2)$, normale, égale à $\mathscr{O}(V)$ sur U], on a $Y \times_X \text{origine} = \text{point}$.

[Merci à 斎藤毅 [SAITÔ Takeshi] pour ces détails !]

Rappel : $\# \mathrm{Sp}(2g, \mathbf{F}_\ell) = \ell^{g^2} \prod_1^g (\ell^{2i} - 1)$. Il en résulte que les p-Sylow de la monodromie locale sont non triviaux pour une infinité de ℓ et, plus précisément, [comme il existe des $\ell \equiv 1 \mod .p^r$ pour tout $r \geq 1$] que l'on ne peut pas les trivialiser par une même extension finie.

2.1.9. *Un cas particulier simple.*

> *Soit X séparé de type fini sur un corps algébriquement clos k. Alors, il existe une constante C_X telle que pour chaque $\ell \neq p$, on ait l'inégalité $b^i(X, \mathbf{F}_\ell) \leq C_X$.*

Esquisse de démonstration. Par de Jong et descente cohomologique, on peut supposer que X est le complémentaire d'un DCN dans k-schéma projectif et lisse (de même dimension). Par dualité ($\rightsquigarrow b^i_c$) et récurrence sur dimension, OPS X projectif et lisse. Par le théorème de Lefschetz $[b^i(X \cap H) = b^i(X), i < d-1 ; b^i(X \cap H) \geq b^i(X), i = d-1]$, le résultat pour les b^i, $i < d$ résulte de l'hypothèse de récurrence. Par dualité ($b^i = b^{2d-i}$), il suffit de majorer b^d, ou encore — compte tenu de ce qui précède — $\chi = \sum (-1)^i b^i$. Si X est un courbe : $\chi(X, \mathbf{F}_\ell) = 2 - 2g$ ($\leftrightarrow \pi_1$). Sinon, on peut supposer qu'il existe un pinceau de Lefschetz $f : X \to \mathbf{P}^1$ [descente ou bien $H^*(X) \hookrightarrow H^*(\widetilde{X})$]. On a : $\chi(X, \mathbf{F}_\ell) = \chi(\mathbf{P}^1, \mathsf{R} f_* \mathbf{F}_\ell)$. Fixons i fixé et considérons les $\mathsf{R}^i f_* \mathbf{F}_\ell$ (ℓ variable). Ces faisceaux sont : **modérés** [Picard-Lefschetz] ; lisses sur **ouvert** $\neq \varnothing$ **commun** ; de rang générique contrôlé par l'hypothèse de récurrence ; leurs « sauts » en les mauvaises fibres contrôlés (cycles évanescents/Picard-Lefschetz).

Rappel ([G]OШ)

$$\chi(C, K) = \mathrm{rang}_\eta(K) \cdot \chi(C) - \sum_s \big(\mathrm{rang}_\eta(K) - \mathrm{rang}_s(K) \big[+ \mathrm{Swan}_s(K) \big] \big).$$

$\square$

2.2. **Remarques topologiques.**

2.2.1. L'énoncé du théorème principal porte sur les familles de faisceaux qui sont (uniformément) constructibles-modérées, *localement pour la topologie propre et surjective.* C'est équivalent à l'être localement pour la topologie h [lettre h pour homotopique]. En effet, une famille constructible-modérée l'est si et seulement si elle l'est localement pour la topologie de Zariski ; on utilise alors le fait qu'un h-recouvrement d'un schéma X a un raffinement qui est un recouvrement Zariski d'un X' propre et surjectif sur X.

2.2.2. Notons également qu'une famille constructible après changement de base par un morphisme surjectif de type fini est déjà constructible. En effet, il suffit (par récurrence nœthérienne) de trouver un ouvert dense U, en bas, et une strate U', en haut, tels que toute spécialisation en bas se relève en une chaîne de spécialisation-générisation en haut. C'est le cas dès que l'image directe $(U' \to U)_*\underline{2}$ est lisse et de formation commutant aux changements de base.

En effet, si $u_2 \rightsquigarrow u_1$ est une spécialisation en bas, on a $\pi_0(U'_{u_2}) \xleftarrow{\sim} \pi_0(U'_{(u_1)}) \xrightarrow{\sim} \pi_0(U'_{u_1})$ d'où l'existence d'une composante connexe [par arcs] de $U'_{(u_1)}$ s'envoyant surjectivement sur u_1 et u_2.

2.2.3. *Cas d'une immersion fermée [O. Gabber].* Nous allons voir que tout se passe comme si les h-recouvrements d'un fermé étaient les traces de h-recouvrement de l'espace ambiant.

On veut :

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[d, "p.s."'] & & \\
F \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F_{X'} \arrow[l, two heads, dashed] \arrow[d, hook] \arrow[r, equal] & \dot{\bigcup}_\alpha T_\alpha \arrow[ull, dashed, bend right] \\
X & X' \arrow[l, two heads, dashed, "\text{alt.}"] &
\end{tikzcd}$$

(platification par éclatement)

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[d, dashed, "\text{p.s.}"'] & Z' \arrow[l, dashed, hook] \arrow[d, dashed, "\text{alt.}"'] & \widetilde{Z'} \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed, "\text{fini}"] \\
F & \forall Z \arrow[l, hook] & \widetilde{Z} = \text{Écl}_{\mathcal{J}}(Z) \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{J}$: idéal de R.
Par compacité de F^{cons}, il existe un nombre fini de fermés intègres Z_i tels que $F = \bigcup_i (Z_i - R_i)$.

$$\begin{tikzcd}
F' & Z'_i \arrow[l, hook] \arrow[d, "\text{alt.}"'] & \widetilde{Z'_i} \arrow[l] \arrow[d, "\text{fini}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T'_\alpha \arrow[l, dashed] \arrow[d, "\text{fini}"] \\
F \arrow[u, leftarrow, "\text{p.s.}"] \arrow[dd, hook] & Z_i \arrow[l, hook] & \widetilde{Z}_i \arrow[l] \arrow[d, hook] & T_\alpha \subseteq F \times_X \widetilde{X} \arrow[l, dashed] \arrow[dd, hook] \\
& & \text{Écl}_{\mathcal{J}_i}(X) = \widetilde{X}_i \arrow[dll] & \\
X & & & \widetilde{X} = \text{Écl}_{\prod \mathcal{J}_i}(X) \arrow[lll] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Le schéma $T' = \amalg_\alpha T'_\alpha$ est *fini surjectif* sur $F_{\widetilde{X}}$ et il existe un F-morphisme de T' vers F'.

Ceci nous ramène au cas où $F' \twoheadrightarrow F$ n'est plus propre mais fini (surjectif). Supposons pour simplifier X affine : $X = \text{Spec}(A)$, $F = \text{Spec}(B)$, $F' = \text{Spec}(B')$. On écrit $B' = B[x_1, \dots, x_n]$ avec $q_i(x_i) = 0$, $q_i \in B[t]$ unitaire. Choisissons des relèvements unitaires arbitraires p_i des q_i à $A[t]$ et considérons le **schéma de décomposition universel** des p_i, $X' = \text{Spec}(\text{Adu}_A(p_i))$. Considérons un point maximal η_α du produit fibré $F_{X'}$, point générique d'une composante irréductible réduite T_α, et le diagramme à traits pleins ci-dessous (à gauche). L'existence de la ν-flèche $\eta_\alpha \to \nu'$ résulte du fait que l'extension η_α / ν est normale, par construction. Le fait que le morphisme $\eta_\alpha \to F'_\alpha$ s'étende en $T_\alpha \to F'_\alpha$ est évident par construction. (Voir diagramme ci-dessous, à droite.)

$$\begin{tikzcd}
\overline{\eta_\alpha} \arrow[r] \arrow[dr] & \eta_\alpha \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend left] & T_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & F_{X'} \arrow[r, hook] \arrow[dd, bend left] & X' \arrow[dd] \\
& \nu' \arrow[r] \arrow[d] & F'_\nu \arrow[r, hook] \arrow[d] & F' \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\square"] & \\
& \nu \arrow[r] & F_\nu \arrow[r, hook] & F \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K'' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & R'' \arrow[d, dash, dashed] & \text{Adu}_R(q_1, \dots, q_n) \arrow[l, two heads] \\
K' \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & R' \arrow[r, equal] \arrow[d, dash] & R[x_1, \dots, x_n],\ q_i(x_i) = 0 \\
K \arrow[r, dash] & R &
\end{tikzcd}$$

Si X n'est pas affine, on considère un recouvrement affine U_i, et l'on étend les $U'_i \twoheadrightarrow U_i$ en un morphisme fini surjectif $X'_i \twoheadrightarrow X$ en considérant la somme disjointe de $X - U_i$ et d'une approximation de la normalisation de X dans U'_i. (Écrire la normalisation comme une limite de schémas finis sur X et s'arrêter lorsqu'elle induit un isomorphisme au-dessus de U.) Considérer alors le produit fibré $\prod_i X'_i$.

Remarques :

— Il résulte de ce qui précède qu'une famille constructible-modérée localement pour la topologie h l'est aussi pour la topologie des altérations.

— On peut supposer ces altérations *génériquement étales.*

En effet, toute altération $X' \to X$ se décompose en $X' \to X'' \to X$, où $X'' \to X$ est une altération génériquement étale et $X' \to X''$ est un morphisme fini radiciel : si, localement, $X' \to X$ est donné par $A \hookrightarrow B$, considérer la factorisation $A \hookrightarrow A[B^{p^n}] \hookrightarrow B$. Cette construction se recolle et, pour n grand, l'extension de $\mathrm{Frac}(A)$ ainsi obtenue est étale (cf. p. ex. **Bourbaki**, A.V.§7.n°7, cor. 2). Or, toute famille modérée par X' est modérée par X'' : le morphisme de Frobenius induit une équivalence entre les sites étales.

2013-5-17

2.3. **Démonstration du théorème d'uniformité.** On va maintenant démontrer le théorème suivant. (Voir les remarques sur le cas non nécessairement propre ainsi que sur les majorations des images directes.)

Soient Y un schéma nœthérien excellent de dimension finie, $f : X \to Y$ un morphisme propre, $\mathfrak{X}$ une stratification de X et $q : X' \twoheadrightarrow X$ une altération. Il existe une altération $r : Y' \twoheadrightarrow Y$ et une stratification $\mathfrak{Y}$ de Y tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/n$-modules sur $X[1/n]$ supposé :
— $\mathfrak{X}[1/n]$-constructible, et
— de prolongement par zéro à $X[1/n]$ modéré par q,
alors le complexe image directe de $\mathscr{F}$ par $f[1/n]$ est constructible adapté à $\mathfrak{Y}[1/n]$ et son image inverse par $r[1/n]$ est modérée.

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathfrak{X}}{X} \arrow[d, "f"] & X' \arrow[l, "q"'] \\ \underset{\exists \mathfrak{Y}}{Y} & Y' \arrow[l, dashed, "\exists r"'] \end{tikzcd}$$

On procède par récurrence lexicographique sur $(\delta = \dim(Y), \rho, d = \dim(X))$, avec $\delta, d \geq 0$, $\rho \geq -1$. L'énoncé $CM(\delta, \rho, d)$ étant comme ci-dessus, à ceci près que la conclusion est : *« … le complexe **tronqué** $\tau_{\leq \rho} \mathsf{R} f_* \mathscr{F}$ est $\mathfrak{Y}$-constructible et r-modéré. »*.

2.3.1. *Dévissages.* On utilise implicitement quelques propriétés soritales (stabilité par extension, image inverse, etc.)

(i) Par descente cohomologique, on peut supposer $q = \mathrm{Id}$.

$$\begin{tikzcd} X_i, \mathfrak{X}_i \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[ddd, bend right=60, "f_i"'] & & \\ & X', \mathfrak{X}' \arrow[dl, "q"] & \\ X \arrow[d, "f"] & & \\ Y & \overset{\mathfrak{Y}_i}{Y_i} \arrow[l, "r_i"'] & \overset{\mathfrak{Y}}{Y'} \arrow[l, dashed] \arrow[ll, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

$$R f_* \mathscr{F} = R f_{\bullet *} \mathscr{F}_{\bullet}$$
$$(R^j f_{i*} \mathscr{F}_i \Rightarrow R^n f_* \mathscr{F})$$

(ii) On peut supposer $\mathscr{F} = i_* j_! \mathscr{L}$ où $j : U \hookrightarrow \overline{U}$, pour une strate U, $i : \overline{U} \hookrightarrow X$ et $\mathscr{L}$ est lisse. [Remarque : j est une immersion *ouverte*.]

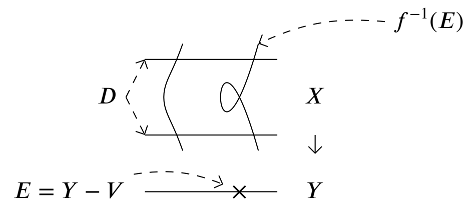
(iii) On peut supposer $\mathscr{F} = j_! \mathscr{L}$. [Utiliser $f_* i_* = (fi)_*$ + finitude nombre de strates.]

(iv) On peut rétrécir U si nécessaire. [Si $V \subseteq U$, $i : X - V \hookrightarrow X$, on a $j_{U!}\mathscr{L} / j_{V!}\mathscr{L}_{|V} = i_* \mathscr{G}$; utiliser $CM(\delta, \rho, d-1)$.]

(v) On peut supposer qu'il existe un ouvert dense $V \subseteq Y$ tel que $f : (X, U) \to (Y, V)$ soit le composé de courbes nodales *adaptées*. [Utilise un théorème de Jong (cf. *infra*), la descente cohomologique, et le cas d'une immersion fermée (cf. composantes de X de se surjectant pas sur Y).]

2.3.2. *Courbes nodales.* Soit Y un schéma nœthérien. Rappelons qu'un Y-schéma X est une courbe **nodale** si le morphisme structural $f : X \to Y$ est projectif, plat, à fibres géométriques des courbes connexes ayant au pire des singularités quadratiques ordinaires. Une courbe nodale $f : X \to Y$ est **adaptée** à une paire (U, V) où U (resp. V) est un ouvert dense de X (resp. Y), lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- le morphisme f est lisse au-dessus de V ;
- il existe un diviseur D étale sur Y contenu dans le lieu lisse de f tel que $U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$.



Proposition (de Jong). *Données : $f : X \to Y$ morphisme propre, avec Y intègre [nœthérien, excellent], et U un ouvert dense de X. Quitte à altérer X, Y, et rétrécir U, il existe un ouvert dense V de Y tel que f soit somme de morphismes plurinodaux adaptés à (U, V) et d'un morphisme non dominant.*

2.3.3. *log-géométrie, paire torique.* Slogan : on enrichit les schémas avec un (faisceau de) monoïde(s), de façon à avoir plus de lissité : une courbe nodale (resp. un faisceau modérément ramifié) devient lisse.

Si X est un schéma et $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert dense, la paire (X, U) est dite **torique** si le schéma X muni de la log-structure $M_X := \{g \in \mathscr{O}_X : g \text{ inversible sur } \} \hookrightarrow \mathscr{O}_X$, est *log-régulier* et U est l'ouvert de trivialité de cette log-structure [est exclu $\mathbf{A}^2 - \{0\} \hookrightarrow \mathbf{A}^2$]. La définition de log-régularité est due à 加藤和也 [KATÔ Kazuya] : si l'on note $I_{X,\overline{x}} = M_{X,\overline{x}} - \mathscr{O}^{\times}_{X,\overline{x}}$, on veut que $V(I_{X,\overline{x}}) \subseteq X_{(\overline{x})}$ [stratification par le rang] soit régulier, de dimension $\dim X_{(\overline{x})} - \mathrm{rg}\, \overline{M_{X,\overline{x}}}^{\mathrm{grp}}$ [en général, cette expression est seulement un minorant]. Le schéma X est alors normal ; il est régulier si et seulement si la paire est régulière au sens ci-dessous.

Exemple (paire « **régulière** ») : (X régulier, $X-$ DCN).

Nous admettons qu'il existe une topologie (Kummer étale) telle que, par exemple, on ait $\pi_1^{\log}(X,U)=\pi_1^{\mathrm{mod}}(U)$ pour chaque paire régulière.

Remarque : la log-lissité peut se définir par « formelle lissité » (+ hypothèses de finitude).

Signalons, sans démonstration ni définitions, quelques résultats dans cette direction.

Référence : [Illusie, 2002]. Voir aussi [Mochizuki, 1999], [Illusie, 2010], [Gabber & Ramero, 2009]

Proposition (Log-lissité des courbes nodales)**.** *Soit $f : X \to Y$ une courbe nodale adaptée à une paire d'ouverts denses (U,V) telle que (Y,V) soit* torique*. Alors le morphisme $(X,U)\to(Y,V)$ est* log-lisse *[non défini] et la paire (X,U) est torique.*

Proposition (Résolution des singularités toriques, 加藤和也)**.** *On peut résoudre les singularités toriques par un morphisme propre et birationnel, induisant un isomorphisme sur le lieu régulier en bas.*

On poursuit maintenant la démonstration du théorème. On considère les faisceaux $Rf_*(j_!\mathscr{L})$, où $f : (X,U)\to(Y,V)$ est « pluri »-nodal et $\mathscr{L}$ est lisse sur U [et (de prolongement par zéro) modéré sur X].

2.3.4. *Réduction au cas d'une courbe nodale sur une paire régulière.* Localement (pour la topologie h), la paire (Y,V) est régulière : c'est un théorème de de Jong si Y est de type fini sur un anneau de Dedekind excellent et un théorème de Gabber dans le cas général. Factorisons f :

$$\begin{tikzcd}
(X,U) \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & (X_\bullet,U_\bullet) \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed, "h_\bullet"] & \\
(Z,W) \arrow[d, "g"] & (Z_\bullet,W_\bullet) \arrow[l, dashed] \arrow[dl, dashed, "g_\bullet"] & = [(Z_0,W_0) \leftleftarrows (Z_1,W_1) \Lleftarrow \cdots] \\
(Y,V) & &
\end{tikzcd}$$

Par log-lissité de g, la paire (Z,W) est torique ; par log-résolution des non-singularités (加藤和也), il existe un hyperrecouvrement propre $Z_\bullet \to Z$ tel que la paire (Z_0,W_0) soit régulière.

Par descente et composition, il suffit de montrer que les $R^{\beta}g_{\alpha *}R^{\beta'}h_{\alpha *}j_!\mathscr{L}$ sont, h-localement sur Y, constructibles-modérés, pour $\alpha+\beta+\beta'\leq\rho$.

$-\ \alpha=0$: résulte du cas des courbes (*infra*) et de $CM(\delta,\rho,d-1)$;

$-\ \alpha>0$: résulte de $CM(\delta,\rho-1,d)$.

2.3.5. *Cas des courbes nodales.* Ce cas est déjà connu. Commençons par quelques deux rappels.

[n est inversible sur les schémas considérés.]

Proposition (Log-pureté, 加藤和也, 藤原一宏 (FUJIWARA Kazuhiro))**.** *Soit (X,U) une paire torique. Notons $\varepsilon : X^{\log}\to X$ le morphisme de topos.*

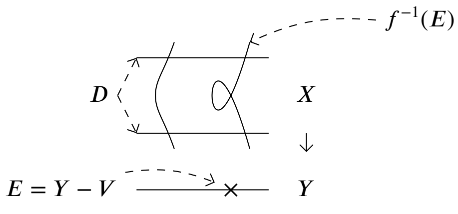
- **(i)** *Les morphismes $\mathbf{Z}/n \to Rj_*^{\log}\mathbf{Z}/n$ et donc $R\varepsilon_*\mathbf{Z}/n \to Rj_*\mathbf{Z}/n$ — qui s'en déduit par application du foncteur $R\varepsilon_*$ — sont des isomorphismes. En particulier, $R\Gamma(X^{\log},\mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U,\mathbf{Z}/n)$.*
- **(ii)** *Soit $U'\to U$ un revêtement étale modéré [aux points maximaux de $X-D$] et $X'\to X$ le normalisé de X dans U'. Alors, (X',U') est torique et $(X',U')\to(X,U)$ est log-lisse.*

Pour (i), il suffit de démontrer $R\varepsilon_*\mathbf{Z}/n \xrightarrow{\sim} Rj_*\mathbf{Z}/n$. Dans le cas d'une paire régulière, cela résulte de la pureté usuelle. Le cas général se démontre par désingularisation.

Corollaire (Log-acyclicité, 中山能力 (NAKAYAMA Chikara))**.** *Si (Y,V) est un log-trait, et $f : (X,U)\to(Y,V)$ log-lisse, alors $R\Phi^{\log}(\mathbf{Z}/n)=0$.*

Corollaire (variante de Rapoport-Zink)**.** *Soient (Y,V) une paire régulière, et $f : (X,U)\to(Y,V)$ une courbe nodale adaptée. Alors, pour tout entier $n\geq 1$ inversible sur X et tout faisceau lisse de $\mathbf{Z}/n$-modules $\mathscr{L}$ sur U tel que $j_!\mathscr{L}$ soit modéré, le complexe $\mathsf{R}f_*(j_!\mathscr{L})$ est :*

- **(i)** *constructible et adapté à la stratification $V\cup E$ de Y, où $E=Y-V$;*
- **(ii)** *modéré.*



Démonstration. (i) L'image directe est nulle sur E. OPS $Y = V$. La paire $(f, j_!\mathscr{L})$ est alors localement acyclique hors du fermé D de X, fini sur Y. Les cycles évanescents commutent donc au changement de base et OPS que Y est un trait strictement local. Dans ce cas, leur nullité est connue [SGA 7 XIII.2.1.11]).

(ii) Par अभयंकर [Abhyankar], on peut également supposer que Y est un trait strictement local. Par log-pureté (ii), il existe un revêtement fini $(X', U') \to (X, U)$, log-lisse, trivialisant $\mathscr{L}$ (sur U'). Le conoyau de $\mathscr{L} \to \pi_*\pi^*\mathscr{L}$ est modéré (au sens fort). [On utilise le fait que le π_1 local log est (abélien) premier à p.] On est donc ramené au cas des coefficients constants : c'est-à-dire à montrer la modération du complexe $\mathsf{R}f_*(j_!\mathbf{Z}/n)$, où n est un entier inversible sur Y et où f est le morphisme sous-jacent à un morphisme log-lisse $(X, U) \to (Y, V)$. Or, par log-pureté la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme et, par log-acyclicité, le terme de gauche est muni d'une action du π_1 logarithmique.

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(X^{\log}_{\bar\eta}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \arrow[r, "\sim"] & R\Gamma(U_{\bar\eta}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \\ \pi_1^{\log}(Y) = \pi_1^{\mathrm{mod}}(\eta) & \pi_1(\eta) \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$

□

2.4. **Remarques.**

2.4.1. *Remarques sur le cas non nécessairement propre.* [Pour de « bons » schémas.]
On se ramène au cas d'une immersion ouverte $j : U \hookrightarrow X$ (paire *régulière*) et on vérifie [अभयंकर + pureté] que si $j_!\mathscr{L}$ est modéré, $Rj_*\mathscr{L}$ est modéré, constructible adapté à la stratification donnée par le nombre de branches de $D = X - U$.

2.4.2. *Remarques sur l'existence de la constante C.*

(i) (cas propre) borner le genre d'une famille de courbes
(ii) (immersion ouverte) par pureté [description du $R^1 j_*$ et $R^\alpha j_* = \Lambda^\alpha R^1 j_*$], borner le nombre de branches.

2.4.3. *Remarques sur l'unipotence.* Un faisceau sur X est dit **constructible-unipotent** relativement à une stratification $\mathfrak{X}$ s'il est $\mathfrak{X}$-constructible et si pour tout X-schéma strictement local T, le faisceau $\mathscr{F}_{|T}$ est unipotent sur chaque strate (c'est-à-dire extension de faisceaux *constants*). On a une variante du théorème principal de cette partie, en remplaçant « modéré » par « unipotent » (cf. lettre de Richard Pink à N. Katz).

2.4.4. *Une question.* Peut-on démontrer un résultat semblable en bornant la ramification sauvage ?

2.5. **Quelques corollaires.**

2.5.1. *Le théorème de Gabber sur la torsion dans la cohomologie étale ℓ-adique.*

Théorème ([Gabber, 1983])**.** *Soit X une variété projective lisse sur un corps algébriquement clos. Alors, $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ est sans torsion pour presque tout ℓ.*

Remarques :
— problème ouvert dans le cas non propre et lisse ;
— par de Jong, le cas propre résulte du cas projectif.

Esquisse d'argument possible. [Utilise Weil II]

Soit $A = \prod_{\ell \neq p} \mathbf{F}_\ell$ et $\mathfrak{L}$ un ultrafiltre non principal [parties non vides, stable par $\cap$ finie, maximal pour l'inclusion, $\bigcap_{E \in \mathfrak{L}} E = \varnothing$].

Posons $\mathbf{F}_\mathfrak{L} \coloneqq \prod_{/\mathfrak{L}} \mathbf{F}_\ell = A/\mathfrak{m}_\mathfrak{L}$, où $\mathfrak{m}_\mathfrak{L} = \{a = (a_\ell) | \{\ell : a_\ell = 0\} \in \mathfrak{L}\}$; c'est un corps de caractéristique nulle.

↳ théorie cohomologique : $\mathsf{H}^i(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L}) \coloneqq \prod_{/\mathfrak{L}} \mathsf{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) = (\prod_{\ell \neq p} \mathsf{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_\mathfrak{L}$.

C'est une « cohomologie de Weil » (sur les variétés projectives lisses) : on a finitude, Poincaré, Lefschetz faible et formule des traces [ζ]. Le seul point un peu délicat est la finitude, que l'on a établie.

Par Katz-Messing, $b^i(X, \mathbf{F}_\mathfrak{L}) = \lim_{l,\mathfrak{L}} b^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ est nécessairement égal à $b^i(X, \mathbf{Q}_\ell) = b^i(X)$. Il en résulte que la suite des $(b^i(X, \mathbf{F}_\ell))_\ell$ est essentiellement constante, de valeur $b^i(X)$. La conclusion résulte de la formule des coefficients universels :

$$0 \to \mathsf{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell \to \mathsf{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) \to \mathsf{H}^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)[\ell] \to 0,$$

Remarque : il n'est pas difficile de produire de la torsion dans la cohomologie. Si S est une surface simplement connexe, on a $H^2(S, \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} \simeq H_1(S, \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}}$ (formule des coefficients universels). Or, J.-P. Serre (inspiré par Godeaux ; [México, 1956]) a montré que tout groupe fini est réalisable comme groupe fondamental d'une surface projective lisse. Plus explicitement (exemple historique) : considérer $\Sigma = \{x_0^5 + \cdots + x_3^5 = 0\}$ dans $\mathbf{P}^3$, où $\mathbf{Z}/5$ agit par $x_i \mapsto \zeta^i x_i$ ($i = 0, \ldots, 3$, ζ racine 5-ième de l'unité). La surface quotient S convient. (On a $H^0 = H^4 = \mathbf{Z}$, $H^2 = \mathrm{Pic} = \mathbf{Z}^9 \oplus \mathbf{Z}/5$ et $H^1 = 0$.) On peut aussi prendre le quotient d'une surface $K3$ par une involution, etc.

2.5.2. *Deux résultats asymptotiques.*

Proposition. *Soient n un entier et $\underline{d} = (d_1, \dots, d_r)$ un uplet. Il existe une constante $L_{n,\underline{d}}$ telle que pour tout corps algébriquement clos k de caractéristique p et tout schéma projectif* lisse *$V \subseteq \mathbf{P}^n_k$ intersection de r hypersurfaces de degrés $d_1, \dots, d_r$, les $\mathbf{Z}_\ell$-modules $\mathrm{H}^i(V, \mathbf{Z}_\ell)$ soient sans torsion pour chaque nombre premier $\ell > L_{n,\underline{d}}$ différent de p.*

Cela ne résulte par directement du théorème de lissité des images directes ℓ-adiques par un morphisme propre et lisse : une sous-variété projective lisse V de $\mathbf{P}^n$, vu comme point de l'espace des paramètres, peut appartenir à l'image du lien singulier du morphisme universel. [Ceci est lié à l'impossibilité de relever certains schémas projectifs lisses.]

Démonstration. Par constructibilité uniforme, il existe un ensemble fini $V_1, \dots, V_s$ de schéma projectifs lisses comme dans l'énoncé tels que pour chaque V on puisse trouver un indice $i \in [1, s]$ tel que $\mathrm{H}^\star(V, \mathbf{Z}_\ell) \simeq \mathrm{H}^*(V_i, \mathbf{Z}_\ell)$ pour chaque ℓ différent de la caractéristique de V et de celle de V_i. La conclusion résulte du théorème de Gabber appliqué aux variétés projectives lisses $V_1, \dots, V_s$. $\square$

Proposition. *Soient n un entier et $\underline{d} = (d_1, \dots, d_r)$ un uplet. Il existe une constante $P_{n,\underline{d}}$ telle que pour tout corps algébriquement clos k de caractéristique $p > P_{n,\underline{d}}$ et tout schéma projectif $V \subseteq \mathbf{P}^n_k$ intersection de r hypersurfaces de degrés $d_1, \dots, d_r$, on ait l'égalité des nombres de Betti $b^i(V, \mathbf{Q}_\ell) = b^i(V, \mathbf{Q}_{\ell'})$ pour tout entier i et toute paire de nombres premiers ℓ et ℓ' distincts de p.*

Ceci résulte déjà des énoncés dans Katz-Laumon.

Démonstration. Soient Y le $\mathbf{Z}$-schéma de type fini paramétrant les sous-schémas $\mathbf{P}^n$ comme dans l'énoncé et $f : X \to Y$ le schéma universel. Il existe une stratification $\mathfrak{Y} = (Y_\alpha)$ de Y telle que pour chaque indice i et chaque nombre premier ℓ, les faisceaux $\mathscr{B}^i_\ell = \mathrm{R}^i f_* \mathbf{Q}_\ell$ soient lisses sur les $Y_\alpha[1/\ell]$. Quitte à raffiner la stratification, on peut supposer les Y_α *irréductibles.* Quitte à se restreindre à un ouvert dense de Spec($\mathbf{Z}$) — ce qui revient à exclure un nombre fini de caractéristiques résiduelles — et rétrécir Y en conséquent, on peut supposer que chaque Y_α a un point de caractéristique nulle. Soit maintenant v_p un point géométrique de Y, correspondant à un schéma V_p sur un corps d'exposant caractéristique p. Soient ℓ et ℓ' deux nombres premiers distincts de p. Par hypothèse, il existe un α tel que v_p soit localisé en Y_α et un point géométrique v_0 de Y_α de caractéristique nulle (correspondant à un schéma V_0). Les faisceaux $\mathscr{B}^i_\ell$ et $\mathscr{B}^i_{\ell'}$ étant lisses sur le schéma (nœthérien) *connexe* $Y_\alpha[1/\ell]$, le choix d'un chemin $v_0 \rightsquigarrow v_p$ induit des isomorphismes

$$\mathscr{B}^i_{\ell\ v_p} \simeq \mathscr{B}^i_{\ell\ v_0} \text{ et } \mathscr{B}^i_{\ell'\ v_p} \simeq \mathscr{B}^i_{\ell'\ v_0}$$

entre les fibres. En prenant le rang, on en déduit les égalités $b^i(V_p, \mathbf{Q}_\ell) = b^i(V_0, \mathbf{Q}_\ell)$ et $b^i(V_p, \mathbf{Q}_{\ell'}) = b^i(V_0, \mathbf{Q}_{\ell'})$. Comme d'autre part on a $b^i(V_0, \mathbf{Q}_\ell) = b^i(V_0, \mathbf{Q}_{\ell'})$, par comparaison avec la cohomologie de Betti, on a bien le résultat attendu. $\square$

Seconde partie : calculabilité

2013-5-22

3. Calculabilité

3.1. Énoncé et remarques.

3.1.1. **Théorème** (+ David Madore (+ O. Gabber)). *Soient p un nombre premier, n un entier premier à p, k une clôture algébrique de $\mathbf{F}_p$, $f : X \to Y$ un morphisme de schémas séparés de type fini sur k et i un entier. Il existe un algorithme calculant une présentation, par générateurs et relations, des $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules de type fini $H^i(X,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ et $H^i(Y,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ ainsi qu'une « matrice » de $H^i(f) : H^i(Y,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to H^i(X,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ relativement aux choix des générateurs précédents.*

Rappelons que $H^i(X,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathrm{colim}_{X_\alpha/X} H^i(\mathbb{X}_\alpha,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, où la colimite porte que un système projectif filtrant, que l'on peut supposer dénombrable, de recouvrements étales de X.

Pour simplifier l'exposition, nous ne considérons ici que le cas où n est un nombre premier, noté ℓ. (Le cas général n'est pas plus difficile.)

Remarque : $H^i(X,\mathbf{Q}_\ell)$?

3.1.2. *Stratégie.*

— réduction au cas où $X = B\pi$ (c'est-à-dire $K(\pi,1)$ étale), avec π un pro-ℓ-groupe « contrôlé » ;

— approximation de la cohomologie de π par ses quotients finis : si $\pi = \lim_\alpha \pi^{(\alpha)}$ est une limite de groupes finis, et avec $H^i(\pi,\mathbf{F}_\ell) = \mathrm{colim}_\alpha H^i(\pi^{(\alpha)},\mathbf{F}_\ell)$, il existe $\alpha \le \beta$ tels que la colimite soit isomorphe à $\mathrm{Im}\left(H^i(\pi^{(\alpha)},\mathbf{F}_\ell) \to H^i(\pi^{(\beta)},\mathbf{F}_\ell)\right)$. [Détailler.]

Nous allons présenter dans un ordre relativement chronologique les ingrédients essentiels ; nous terminerons par une synthèse de la démonstration.

3.1.3. Démonstration plus Grothendieckienne ?

[Càd calcul de $Rf_!\mathscr{F}$, par exemple via dévissage $0 \to j_!\mathscr{F}_U \to \mathscr{F} \to i_*\mathscr{F}_F \to 0$ et réduction au cas de « bonnes courbes ». Pas clair…]

3.1.4. *Digression : groupes de Galois (sur $\mathbf{Q}$).* Dans ce paragraphe, on donne un exemple de procédure algorithmique classique, qui illustre ce que l'on entend par « calculer ».

Soit $f \in K[x]$ un polynôme unitaire séparable irréductible de degré d, donné explicitement.

Problème : calculer le groupe de Galois G de f, par exemple lorsque $K = \mathbf{Q}$.

Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et notons $x_1,\dots,x_d$ les racines de f dans ce corps. Posons :

$$F = \prod_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\left(T - \sum_i x_i U_{\sigma i}\right) \in K[T,U_1,\dots,U_d].$$

Ce polynôme est invariant par l'action de $\mathfrak{S}_d$ par permutation des variables $\underline{U}$. Si H est un facteur irréductible de F, le groupe de Galois cherché G est (conjugué, dans $\mathfrak{S}_d$) le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_d}(H)$. Il suffit donc de savoir factoriser F. Or, factoriser un polynôme en $n+1$ variables sur K se ramène à factoriser un polynôme en une variable sur K : pour $e \gg 1$, la substitution $(T,U_1,\dots,U_d) \mapsto (t,t^e,\dots,t^{e^d})$ induit une injection sur les diviseurs de F. [Car l'application $T^{\alpha_0}U_1^{\alpha_1}\cdots U_d^{\alpha_d} \mapsto t^{\alpha_0+\alpha_1 e+\dots+\alpha_d e^d}$ est injective sur les monômes de degré (en chaque variable) strictement inférieur à e.] Si $K = \mathbf{Q}$, on sait factoriser les polynômes, par exemple parce qu'il existe des majorations *a priori* des valeurs absolues archimédiennes des racines en fonction des coefficients.

Une variante. Soit $\mathrm{Adu}_K(f)$ l'algèbre de décomposition universelle de f sur K, dont les A-points sont les $\{(z_1,\dots,z_d) \in A^d : f = \prod_1^d (x - z_i) \in A[x]\}$. Elle est finie étale sur K [de degré $d! = \#\mathfrak{S}_d$], naturellement munie d'une action de $\mathfrak{S}_d$ et est isomorphe à un produit de corps, qui sont des corps de décomposition de f. On a $\#\pi_0(\mathrm{Adu}_K(f)) = [\mathfrak{S}_d : G]$. Plus précisément, si e est un idempotent indécomposable de A, le groupe de Galois est isomorphe à $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_d}(e)$. [Bien entendu, les deux approches sont liées : $\mathrm{Adu}_K(f) \otimes_K K(U_1,\dots,U_d) \leftarrow K(U_1,\dots,U_d)[T]/F$.]

On voit ainsi que le problème considéré est lié à celui du calcul des composantes connexes, lui-même lié au calcul de la décomposition primaire d'un idéal explicite d'une algèbre de polynômes sur K.

3.1.5. Ci-dessous, nous utiliserons sans autre commentaire le fait qu'il existe des algorithmes analogues pour des schémas non nécessairement de dimension nulle : calcul des composantes irréductibles/connexes, réduction, normalisation (cf. *infra*), etc. [Mise en garde : « isomorphes ? ».]

Dans les algorithmes, nous nous autorisons à faire des « **recherches** ». Par exemple, pour un polynôme $f \in \mathbf{Q}[X]$ *que l'on sait scindé* sur $\mathbf{Q}$, la méthode consistant à parcourir $\mathbf{Q}$ et tester si un nombre est racine est valable. [Par contre, cette méthode est proscrite si le question est « le polynôme est-il scindé ? ».]

3.2. $K(\pi,1)$ pro-ℓ et polycourbes ℓ-élémentaires.

[Les schémas considérés sont nœthériens, et le nombre premier ℓ y est inversibles.]

3.2.1. Soit X un schéma. Notons ρ_ℓ le morphisme de topos $X_{\text{ét}} \to X_{\ell\text{ét}}$, ce dernier topos étant défini via le site des X-schémas finis étales dont la monodromie est, sur chaque composante connexe, un ℓ-groupe. Si X est connexe, $X_{\ell\text{ét}} = B\pi$, π groupe pro-ℓ.

↳ On dit que X est un $K(\pi, 1)$ **pro-ℓ** si pour tout faisceau constructible de ℓ-torsion $\mathscr{L}_\ell$ sur $X_{\ell\text{ét}}$, le morphisme d'adjonction $\mathscr{L}_\ell \to R\rho_{\ell *}\rho_\ell{}^*\mathscr{L}_\ell$ est un isomorphisme. Si $x \to X$ point géométrique de X supposé connexe, et $\mathscr{L}$ est un faisceau abélien « ℓ-monodromique » [ℓ-torsion, monodromie pro-ℓ] sur X,

$$R\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X,x), \mathscr{L}_x) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X, \mathscr{L}).$$

On a la variante suivante du résultat de Michael Artin, d'après lequel

un schéma lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro est, Zariski-localement, un $K(\pi, 1)$.

3.2.2. **Proposition** (Friedlander ; Gabber)**.** *Soit ℓ un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos k. Tout k-schéma algébrique est, h-localement, un $K(\pi, 1)$ pro-ℓ.*

[On a également des informations sur la structure de π.]

Corollaire. *Il existe un h-hyperrecouvrement de X tel que $R\Gamma(X_{\text{ét}}, \mathbf{F}_\ell) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_{\bullet\ell\text{ét}}, \mathbf{F}_\ell)$ soit un isomorphisme.*

La démonstration de la proposition, qui repose sur le théorème de de Jong si X n'est pas déjà lisse sur k, est — comme celle d'Artin — géométrique ($\Rightarrow$ calculable). Présentons l'ingrédient clef.

3.2.3. *courbes et polycourbes ℓ-élémentaires.* On appelle **courbe élémentaire** sur Y un morphisme de schémas $f : X \to Y$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] & D \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

(**i**) j est une immersion ouverte dense dans chaque fibre, et $X = \overline{X} - D$;
(**ii**) $\bar{f}$ est une courbe (relative) projective lisse, à fibres géométriquement connexes ;
(**iii**) g est un revêtement étale, et chaque fibre de g est non vide.

Elle est dite **ℓ-élémentaire** si le faisceau $R^1 f_* \mathbf{F}_\ell$ est ℓ-monodromique. Un morphisme composé de courbes ℓ-élémentaires est une **polycourbe ℓ-élémentaire**.

La démonstration de la proposition précédente repose sur la

Proposition. *Soient ℓ un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos k et X une polycourbe ℓ-élémentaire sur k. Alors, le schéma X est un $K(\pi, 1)$ pro-ℓ et le pro-ℓ complété de son groupe fondamental est extension itérée de pro-ℓ groupes libres non abéliens.*

Le point clef est que les courbes ℓ-élémentaires préservent (par image directe) le caractère « ℓ-monodromique » des champs (en groupoïdes).

Pour en déduire la proposition susmentionnée, on montre que tout schéma est h-localement une polycourbe ℓ-élémentaire.

3.3. Filtration ℓ-centrale descendante et calculabilité des topos $X^{(n)}_{\ell\text{ét}}$.

3.3.1. Soit π un pro-ℓ groupe, topologiquement de type fini. Posons $\pi^{[1]} = \pi$ et, par récurrence, $\pi^{[i+1]}$ comme l'adhérence de $\pi^{[i]\ell}\big(\pi^{[i]}, \pi\big)$. (Le second terme est le groupe engendré par les commutateurs ; le premier est le groupe engendré par les puissances ℓ-ièmes [on obtient même résultat sans prendre le groupe engendré].) Ce sous-groupe le plus petit groupe ferménormal tel que $\pi^{[i]}/\pi^{[i+1]}$ soit abélien ℓ-élémentaire et contenu dans le centre de $\pi/\pi^{[i+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{(i+1)}$; il est ouvert et les $\pi^{[n]}$ forment un système fondamental de voisinages de 1.

Exemple : $\pi^{(2)}$ est le quotient de Frattini, dual de $\mathsf{Hom}(\pi, \mathbf{F}_\ell)$.

Si π est le pro-ℓ groupe fondamental d'un schéma connexe (pointé) X, on note $X^{[n]}$ le revêtement fini étale de X correspondant au quotient fini $\pi^{(n)}$. On traite de même le cas non connexe et on définit le topos $X^{(n)}_{\ell\text{ét}}$, correspondant aux faisceaux sur $X_{\ell\text{ét}}$ trivialisés par $X^{[n]}$.

Proposition. *Donné X **normal**, séparé de type fini sur un corps algébriquement clos et un entier n, on peut calculer $X^{(n)}_{\ell\text{ét}}$.*

Remarque : la démonstration montre qu'on peut le faire fonctoriellement.

Démonstration. On procède par récurrence. Le cas crucial $n = 2$ — calcul de $H^1(X, \mathbf{F}_\ell)$ — sera traité séparément (cf. *infra*). Si $\pi^{(n)}$ est calculable, on peut construire $X^{[n]}$. D'après le cas $n = 2$, on peut construire $X^{[n][2]}$, galoisien de groupe G [calculable : c'est, par exemple, $\pi_0(X^{[n][2]} \times_X X^{[n][2]})$, si X est connexe] sur X. Or, $\pi^{(n+1)} = G^{(n+1)}$.

$$
\begin{tikzcd}
X^{[n][2]} \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right=60, no head, "G"'] & \\
X^{[n]} \arrow[d] & X^{[n+1]} \arrow[dl] \arrow[dl, bend left, "\pi^{(n+1)}"] \\
X &
\end{tikzcd}
$$

□

3.4. **Calcul de $H^1(X, G)$, G un ℓ-groupe fini.** Nous traitons le cas $G = \mathbf{F}_\ell$, qui est le seul dont nous aurons besoin. Le cas général s'y ramène facilement par dévissage.

3.4.1. Notons K le corps des fractions de X. Il suffit de trouver une extension étale K' / K trivialisant tous les G-torseurs sur X. Les torseurs sur X seront donc obtenus par normalisation à partir d'un torseur A_φ sur K [trivialisé par K'] correspondant à un morphisme $\varphi \in \mathsf{Hom}(\mathrm{Gal}(K'/K), G)$. [On utilise ici le fait que l'on sait calculer des normalisations ; cf. *infra.*]

Si X est une courbe, on sait calculer $H^1(X, \mathbf{F}_\ell)$ donc produire l'extension désirée : mieux si $k = \overline{k_0}$, et X est obtenue par changement de base à partir de X_0 / k_0, on peut produire une extension finie k_0' de k_0 et des torseurs sur $X_0 \otimes_{k_0} k_0'$ dont les classes sont les éléments [distincts] de $H^1(X, \mathbf{F}_\ell)$. [On utilise le fait qu'on sait détecter si deux G-torseurs sont isomorphes.]

On peut conclure par récurrence sur la dimension car étale-localement au voisinage du point générique de X, il existe un schéma Y de dimension un de moins et un morphisme $f : X \to Y$ à fibre générique une courbe lisse géométriquement connexe tel que :

— les G-torseurs considérés sont triviaux sur la fibre générique géométrique [on utilise cas des courbes] ;

— tout G-torseur sur X trivial sur la fibre générique géométrique provient de Y par image inverse.

Pour ce dernier point, on utilise la suite exacte

$$0 \to H^1(Y, f_*\mathbf{F}_\ell) \to H^1(X, \mathbf{F}_\ell) \to H^0(Y, R^1 f_*\mathbf{F}_\ell)$$

et une réduction au cas où $R^1 f_*\mathbf{F}_\ell$ est lisse de formation commutant aux changements de base [de sorte que $f_*\mathbf{F}_\ell = \mathbf{F}_\ell$ et $H^0(Y, R^1 f_*\mathbf{F}_\ell)$ s'injecte dans $H^1(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{F}_\ell)$].

3.4.2. *Normalisation.* Soit A un anneau nœthérien réduit et k son anneau total des fractions. Notons B le normalisé de A dans K.

Soit I un idéal de A contenant un élément i non diviseur de zéro. Posons $A' = \mathsf{End}_A(I)$. Le morphisme évident $A \to A'$ est *injectif*, de même que le morphisme $A' \to K$, $\varphi \mapsto \frac{\varphi(i)}{i}$ [indépendant du choix de i]. Par Cayley-Hamilton, A' est entier sur A. Notons que la structure d'anneau est facilement explicitable, d'abord comme A-module puis comme anneau. [Quotienter une présentation comme A-module par le noyau de la surjection auquel on adjoint des relations quadratiques définissant la structure d'anneau.]

Il en résulte que si A est normal, $A \to A'$ est un isomorphisme. On a la réciproque suivante.

Proposition (Grauert-Remmert). *Soit k un corps parfait et $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_e)$ un anneau intègre de dimension $n - c$. Notons J l'idéal engendré par les déterminants des sous-matrices jacobiennes $c \times c$ et I son radical. Alors :*

- **(i)** *l'idéal J est non nul et contenu dans le conducteur $\mathrm{Ann}_A(B/A)$ [=plus grand idéal de B contenu dans A];*
- **(ii)** *le morphisme $A \to A'$ est un isomorphisme si et seulement si A est normal.*

La proposition précédente leur a permis de montrer que le lieu non-normal est analytique [岡潔 OKA Kiyoshi].

Si B est un A-module de type fini, la suite $A \subseteq A' \subseteq A'' \subseteq \dots$ doit s'arrêter, sur le normalisé d'après ce qui précède. que l'on suppose fini sur A (comme A-module).

2013-5-24

3.5. **Systèmes inductif essentiellement constants.**

3.5.1. *Motivation.* Problèmes :

— [polycourbe] $H^i(X_{\ell \text{ét}}, V) = \mathrm{colim}_n H^i(X^{(n)}_{\ell \text{ét}}, V) = ?$

— [schéma général] $H^i(X, \mathbf{F}_\ell) = H^i(X_{\bullet \ell \text{ét}}, \mathbf{F}_\ell) = \mathrm{colim}_n H^i(X^{(n)}_{\bullet \ell \text{ét}}, \mathbf{F}_\ell) = ?$

3.5.2. Soient N un entier et $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une application croissante telle que $\varphi(n) \geq n$.

Un système inductif (V_n) de $\mathbf{F}_\ell$-modules est dit (N, φ)**-essentiellement constant**, si

- **(i)** pour tout $m \geq \varphi(n)$, l'inclusion $\mathrm{Ker}(V_n \to V_{\varphi n}) \to \mathrm{Ker}(V_n \to V_m)$ est un isomorphisme ;
- **(ii)** pour tout $n \geq N$, l'inclusion $\mathrm{Im}(V_N \to V_{\varphi n}) \to \mathrm{Im}(V_n \to V_{\varphi n})$ est un isomorphisme.

D'après la première condition [nœthérianité explicite des noyaux], on a pour chaque n la description « explicite » du terme de droite :

$$V_n \,/\, \mathrm{Ker}(V_n \to V_{\varphi n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(V_n \to V_{\varphi n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(V_n \to V_\infty) \text{ [seulement épi. a priori]},$$

où l'on note $V_\infty = \mathrm{colim}_n V_n$. D'après la seconde condition, on a nœthérianité explicite des images : la suite croissante des $\mathrm{Im}(V_n \to V_{\varphi n}) = \mathrm{Im}(V_n \to V_\infty)$ stationne à partir de N. En particulier :

$$\mathrm{Im}(V_N \to V_{\varphi N}) \xrightarrow{\sim} V_\infty.$$

Par commodité, on dira que (V_n) est *explicitement* essentiellement constant si l'on peut calculer une paire (N, φ) comme ci-dessus.

[Notons qu'un système inductif explicitement essentiellement constant est bien « essentiellement constant », c'est-à-dire appartient à l'image essentielle de $\mathrm{Mod}(\mathbf{F}_\ell)$ dans la catégorie $\mathrm{Ind}\text{-}\mathrm{Mod}(\mathbf{F}_\ell)$, dont les Hom sont $\forall_i \exists_j$ ...]

Proposition (cf. Schön, « Effective algebraic topology »). *Si, dans une suite exacte de systèmes inductifs indexés par* $\mathbf{N}$*, deux d'entre eux sont* explicitement *essentiellement constants, il en est de même du troisième.*

Cet énoncé, élémentaire mais absolument crucial, nous a été communiqué par Ofer Gabber [indépendamment du travail de Schön].

Notons $(E_{r\geq r_0,\lambda})_\lambda$ un système inductif de suites spectrales dans le premier quadrant, dont on note — pour chaque λ — l'aboutissement E^d_λ.

Corollaire. *Soient m un entier et (N, φ) une paire comme ci-dessus. On peut calculer en fonction de ces données un entier C_m et un couple $(N_\infty, \varphi_\infty)$ tels que si, pour tout $p + q < C_m$, les systèmes inductifs $(\mathsf{E}^{p,q}_{r_0,\lambda})_\lambda$ soient (N, φ)*-essentiellement constants, *alors, pour chaque $0 \leq d \leq m$, l'aboutissement $(\mathsf{E}^d_\lambda)_\lambda$ soit $(N_\infty, \varphi_\infty)$-essentiellement constant.*

[Sauf erreur, $C_m = 2(m + 1)$ convient.]

3.6. Calcul de la cohomologie d'une polycourbe ℓ-élémentaire.

3.6.1. Soit X une polycourbe ℓ-élémentaire sur k, au-dessus [par définition] d'une k-courbe ℓ-élémentaire Y.

$$\begin{tikzcd} \pi & X \arrow[d] & X_{\overline{\eta}} \arrow[l] \arrow[d] & \pi' \\ \text{[pro-}\ell\text{-libre] } \pi'' & Y \arrow[d] & \overline{\eta} \arrow[l] & \\ & k & & \end{tikzcd}$$

Les pro-ℓ groupes fondamentaux s'insèrent dans une suite exacte

$$0 \to \pi' \to \pi \to \pi'' \to 0.$$

On veut montrer que $H^r(\pi, \mathbf{F}_\ell) = \mathrm{colim}_n H^r(\pi^{(n)}, \mathbf{F}_\ell)$ est explicitement essentiellement constant.

3.6.2. Si X est une courbe, c'est-à-dire $\pi = \pi''$ est pro-ℓ-libre [à d générateurs], on vérifie immédiatement que c'est un système inductif explicitement essentiellement constant, *et cela reste vrai si l'on remplace $\mathbf{F}_\ell$ par un système local V.*

— pour $H^1(\pi, V), H^1(\pi^{(n)}, V)$: les flèches sont injectives et on connaît le cardinal de la colimite [$= \#V^{d-1} \cdot \#H^0(\pi, V)$] ;

— pour $H^i(\pi, V), H^i(\pi^{(n)}, V)$, $i \geq 2$: la colimite est nulle et on peut tester quand une flèche de transition n'annule. [On peut même faire une estimation *a priori*.]

Dans le cas général, on va appliquer la suite spectrale d'Hochschild-Serre ; malheureusement, le foncteur $\pi \mapsto \pi^{(n)}$ n'est pas exact [à gauche].

3.6.3. *Un peu de théorie des groupes.*

Lemme. *Il existe deux fonctions calculables φ et ψ telles que :*

- **(i)** *si π est un ℓ-groupe fini d'ordre $\leq n$ alors $\pi^{[\varphi n]} = 1$, et*
- **(ii)** *si π est un ℓ-groupe fini à d générateurs tel que $\pi^{[n]} = 1$, alors $\#\pi \leq \psi(d, n)$.*

(i) est trivial. Pour (ii), on utilise par exemple la majoration — qui résulte d'une majoration analogue pour les algèbres de Lie — :

$$\dim_{\mathbf{F}_\ell} N/(N^\ell[N, L]) \leq 1 + (d - 1)s,$$

où L est un pro-ℓ-groupe libre sur $d \geq 2$ générateurs et $N \subseteq L$ est un sous-groupe ouvert distingué d'indice ℓ^s. Il en résulte par récurrence que $\log_\ell \#L^{(n)} \leq (d + 1)^n$, ce qui suffit pour conclure.

Proposition (Artin-Rees). *Il existe une fonction τ calculable telle que, si $1 \to \pi' \to \pi \to \pi'' \to 1$ est une suite exacte courte de pro-ℓ-groupes, où π', π'' ont respectivement d', d'' générateurs, on a $\pi^{[\tau(d',d'',n)]} \cap \pi' \subseteq \pi'^{[n]} \subseteq \pi^{[n]} \cap \pi'$ pour tout n.*

Corollaire. *Soit $\widetilde{\pi}'^{(n)} = \pi'/\big(\pi' \cap \pi^{[n]}\big)$ le noyau de la surjection naturelle $\pi^{(n)} \twoheadrightarrow \pi''^{(n)}$ et fixons $j \in \mathbf{N}$. Si le système inductif $H^j(\pi'^{(n)}, \mathbf{F}_\ell)$ est explicitement essentiellement constant, il en est de même de $H^j(\widetilde{\pi}'^{(n)}, \mathbf{F}_\ell)$.*

3.6.4. On a $R\Gamma(\pi^{(n)}, \mathbf{F}_\ell) = R\Gamma\big(\pi''^{(n)}, R\Gamma(\widetilde{\pi}'^{(n)}, \mathbf{F}_\ell)\big)$. Il en résulte (suite spectrale de Hochschild-Serre, et observation *supra*) que le système inductif $H^r(\pi^{(n)}, \mathbf{F}_\ell)$ est *explicitement* essentiellement constants. Ainsi, si X est une polycourbe ℓ-élémentaire, on sait calculer $\alpha \leq \beta$, aussi grands que l'on veut, tels que

$$H^r(X, \mathbf{F}_\ell) = \mathrm{Im}\left(H^r(\pi^{(\alpha)}, \mathbf{F}_\ell) \to H^r(\pi^{(\beta)}, \mathbf{F}_\ell)\right)$$

pour tout $r \leq 2\dim(X)$ [ou toute autre borne].

3.7. **Descente.** Soit X séparé de type fini sur $k = \overline{k}$, ℓ un nombre premier inversible sur k et $n \geq 0$ un entier.

3.7.1. Il existe un h-hyperrecouvrement **tronqué** $X_\bullet \to X$ tel que $H^n(X, \mathbf{F}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\bullet\text{ét}}, \mathbf{F}_\ell)$ et les X_i soient des polycourbes ℓ-élémentaires sur k [donc en particulier des $K(\pi, 1)$ pro-ℓ].

Fait : $H^n(X_{\bullet\text{ét}}, \mathbf{F}_\ell) \to H^n(X_{\bullet\ell\text{ét}}, \mathbf{F}_\ell)$ est un *isomorphisme.* [Cela résulte du fait que les images directes entre topos simpliciaux se calculent étage par étage.]

On note $T^\infty := X_{\bullet\ell\text{ét}}$ et, pour chaque $\lambda \geq 2$, son approximation $T^{(\lambda)} := X^{(\lambda)}_{\bullet\ell\text{ét}}$.

[Étage par étage, dans le cas connexe, on a la description du morphisme de topos $B\pi^{(\infty)} = T^{(\infty)} \to T^{(\lambda)} = B\pi^{(\lambda)}$: l'image inverse est le foncteur évident $\pi^{(\lambda)}\text{-}\mathtt{Ens} \to \pi^{(\infty)}\text{-}\mathtt{Ens}_{\mathrm{cont}}$ et l'image directe le foncteur « invariants sous $\pi^{[\lambda]}$ ».]

3.7.2. Par construction, $H^n(X, \mathbf{F}_\ell) = H^n(T^{(\infty)}, \mathbf{F}_\ell) = \mathrm{colim}_\lambda\, H^n(T^{(\lambda)}, \mathbf{F}_\ell)$ [détailler].

On a la suite spectrale : $H^j(T_i^{(\lambda)}, \mathbf{F}_\ell) \Rightarrow H^n(T^{(\lambda)}, \mathbf{F}_\ell)$. Or, d'après ce qui précède, pour chaque paire i, j, le système inductif $H^j(T_i^{(\lambda)}, \mathbf{F}_\ell)$ est *explicitement essentiellement constant.* Il en résulte qu'il en est de même de $H^n(T^{(\lambda)}, \mathbf{F}_\ell)$. Ainsi, on peut trouver $\alpha \leq \beta$ explicites tels que

$$H^n(X, \mathbf{F}_\ell) = \mathrm{Im}(H^n(T^{(\alpha)}, \mathbf{F}_\ell) \to H^n(T^{(\beta)}, \mathbf{F}_\ell).$$

Le terme de droite est explicite : on sait calculer, fonctoriellement en le schéma Y et l'entier α, les topos $Y^{(\alpha)}_{\ell\text{ét}}$ ainsi que la cohomologie des groupes finis ! [Pour calculer la cohomologie du topos total constitué de BG, on peut par exemple utiliser la résolution de Godement ici.]

3.7.3. Si l'on sait calculer $X \amalg_Y X$, pour Y fermé dans X, on sait en déduire le résultat pour $H^i(X \mod Y)$ car $H^i(X \amalg_Y X) = H^i(X \mod Y) \oplus H^i(X)$.

[On utilise le fait que l'on sait $A \times_{A/I} A$, où A est une k-algèbre de type fini et I un idéal.]

3.8. **Abondance de polycourbes ℓ-élémentaires et de champs ℓ-monodromiques.**

3.8.1. Soit X un schéma comme ci-dessus. Localement pour la topologie h, X est lisse (A. J. de Jong). Zariski-localement, c'est même, une polycourbe élémentaire sur k (M. Artin) : le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ se factorise en $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(k)$, où f est une courbe élémentaire. Par un revêtement étale $Y' \to Y$, on peut rendre f ℓ-monodromique [et même tuer la monodromie !]. [C'est calculable : passer au point générique de Y (normal), etc.] On procède alors par récurrence sur la dimension : h-localement $Y' \to k$ est une polycourbe ℓ-élémentaire.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dl, phantom, "\square"] & X'' \arrow[l] \arrow[d, "f''"] \arrow[dl, phantom, "\square"] \\
Y \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[l] \arrow[dl, "g'"'] & Y'' \arrow[l] \arrow[dll, bend left, "g''"] \\
k & &
\end{tikzcd}$$

3.8.2. *Stabilité des champs ℓ-monodromiques : le cas [trivial] des faisceaux d'ensembles.* Soit $f : X \to Y$ une courbe ℓ-élémentaire. Montrons que si $\mathscr{L}$ est un *faisceau* [ensembliste] ℓ-monodromique, il en est de même de $f_*\mathscr{L}$. OPS Y sans revêtement connexe d'ordre ℓ [càd $Y_{\ell\text{ét}}$ local]. Il faut vérifier que $\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X \times_Y Y_{(y)}) \to \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X)$ est *surjectif,* ou encore $H^1(X, \mathbf{F}_\ell) \to H^1(X \times_Y Y_{(y)}, \mathbf{F}_\ell)$ est injective.

$$0 \to H^1(Y, f_*\mathbf{F}_\ell) \to H^1(X, \mathbf{F}_\ell) \to H^0(Y, R^1 f_*\mathbf{F}_\ell),$$

où : $f_*\mathbf{F}_\ell = \mathbf{F}_\ell$, $H^1(Y, \mathbf{F}_\ell) = 0$ (par hypothèse sur Y), et $R^1 f_*\mathbf{F}_\ell$ est constant sur Y (par hypothèse sur f) de sorte que $H^0(Y, R^1 f_*\mathbf{F}_\ell) = H^1(X \times_Y Y_{(y)}, \mathbf{F}_\ell)$.

3.9. **Une application : détermination de $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}}$.**

Corollaire (Olivier Wittenberg)**.** *Soient X une variété projective lisse sur $\overline{\mathbf{F}_p}$, On peut calculer la structure du $\mathbf{Z}_\ell$-module de type fini $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ [où $\ell \neq p$].*

Démonstration. Pour chaque i, notons $T^i = H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{tors}}$. On a $H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ isomorphe à $\mathbf{Z}_\ell^{b_i} \oplus T^i$, où b_i est calculable [P. Deligne]. Comme T^i est fini, on a $\# T^i/\ell^n = \# T^i[\ell^n]$, noté $a_{i,n}$. La suite exacte longue de cohomologie associée à $0 \to \mathbf{Z}_\ell \to \mathbf{Z}_\ell \to \mathbf{Z}/\ell^n \to 0$ montre que

$$\# H^i(X, \mathbf{Z}/\ell^n) = \#(H^i(X, \mathbf{Z}_\ell)/\ell^n) \cdot \#(T^{i+1}[\ell^n]) = \ell^{nb_i} a_{i,n} \cdot a_{i+1,n}.$$

On peut donc calculer les $a_{i,n}$ [égaux à 1 pour $i < 0$ ou $i > 2\dim(X)$]. On peut donc calculer

$$1 = a_{i,0} < a_{i,1} < \cdots < a_{i,N} = a_{i,N+1}.$$

Le groupe T^i est d'exposant ℓ^N et sa structure est entièrement déterminée par les $a_{i,j}$.

[La multiplicité de $\mathbf{Z}/\ell^N$ est l'entier r tel que $\ell^r = \frac{a_{i,N}}{a_{i,N-1}}$.]

□

3.10. **Image directe par un morphisme propre.** Donné $f : X \to Y$ et $\mathscr{F}$ sur X (constructible), on veut calculer $R^i f_* \mathscr{F}$, $i > 0$. On sait qu'il existe $\mathscr{F} \hookrightarrow \widetilde{\mathscr{F}}$, ce dernier étant *constructible*, tel que $R^i f_* \mathscr{F} \to R^i f_* \widetilde{\mathscr{F}}$ soit nul ; on peut le faire fonctoriellement.

Le calcul de $R^i f_* \mathscr{F}$ [en admettant le calcul fonctoriel des $R^j f_* \mathscr{G}$, $j < i$] se ramène donc à la détermination d'un faisceau comme ci-dessus.

Par dévissage, et quitte à tester tous les faisceaux, on se ramène à :

donnés $f : X \to Y$ et $\pi : X' \to X$ fini, décider si $R^i f_* \mathbf{Z}/n \to R^i f'_* \mathbf{Z}/n'$ est nulle.

Comme il existe une stratification explicite de locale constance, on se ramène — dans le cas propre — au calcul d'une flèche $H^i(F, \mathbf{Z}/n) \to H^i(F', \mathbf{Z}/n')$ entre fibre géométriques.

Références

[Gabber, 1983] Gabber, O. (1983). Sur la torsion dans la cohomologie ℓ-adique d'une variété. *C. R. Acad. sci. Paris Sér. I Math.*, 297(3), 179--182. 10

[Gabber & Ramero, 2009] Gabber, O. & Ramero, L. (2009). Foundations of p-adic Hodge theory. Version du 3 décembre 2009, disponible sur Arxiv. 9

[Illusie, 2002] Illusie, L. (2002). *An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology.* Paris: Astérisque. 9

[Illusie, 2010] Illusie, L. (2010). *Log régularité, actions très modérées.* Exposé VI dans [Illusie et al., 2010]. 9

[Illusie et al., 2010] Illusie, L., Laszlo, Y., & Orgogozo, F., éditeurs (2010). *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents.* 17

[Mochizuki, 1999] Mochizuki, S. (1999). Extending families of curves over log regular schemes. *J. reine angew. Math.*, 511, 43--71. 9