

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Cohomologie étale : quelques résultats d'annulation, constructibilité et propriété cohomologique

Fabrice Orgogozo

version : 1f964fc 2017-08-30 14:15:19 +0200
fabrice.orgogozo.perso.math.cnrs.fr/articles/HDR.pdf

Table des matières

Présentation des travaux	1
Introduction	3
Cycles proches	5
1. Généralités	5
2. Propreté cohomologique des morphismes f_x	6
3. Motivation et applications	7
Finitude	9
4. Travaux de Gabber	9
5. Dimension cohomologique	15
6. Uniformité	17
Calculabilité	21
7. Introduction	21
8. Calculabilité et suites spectrales	22
9. Remarques	25
Liste des travaux présentés	27
Articles	29
Modifications et cycles proches sur une base générale	31
[ORGOGOZO 2006]	
Introduction	31
A.1. Cycles proches sur une base générale (rappels) et énoncé du théorème	32
A.2. Premières réductions	33
A.3. Réduction au cas « plurinodal »	36
A.4. Le cas plurinodal	42
A.5. Le cas des singularités isolées	44
A.6. Calcul des fibres	46
A.7. Énoncés	48
A.8. Conditions de finitude dans les topos $X \overleftarrow{X}_Y Z$	49
A.9. Démonstration du théorème A.7.1	51
A.10. Un exemple	55
A.11. Conjugaison des cycles évanescents à la manière de S. Lefschetz.	56

Sur la p -dimension des corps	61
[GABBER et ORGOGOZO 2008]	
B.1. Introduction	61
B.2. p -dimension : rappels et compléments	63
B.3. Minoration de $\dim_p(K)$	71
B.4. Majoration de $\dim_p(K)$: le cas d'égle caractéristique	73
B.5. Majoration de $\dim_p(K)$: le cas d'inégale caractéristique	76
B.6. Le cas d'un ouvert de $A[p^{-1}]$	82
B.7. Appendice : le théorème de structure de Cohen-Gabber	86
Constructibilité et modération uniformes en cohomologie étale	91
Introduction	91
C.1. Définitions, sorites et préliminaires topologiques	93
C.2. Lemmes d'Abhyankar et courbes nodales	103
C.3. Image directe par un morphisme propre	111
C.4. Image directe par une immersion ouverte	121
C.5. Six opérations	128
C.6. Applications	131
Calculabilité de la cohomologie étale modulo ℓ	137
[MADORE et ORGOGOZO 2015]	
Introduction	137
D.1. $K(\pi, 1)$ pro- ℓ	141
D.2. Calculabilité du H^1	152
D.3. Série ℓ -centrale descendante et groupe fondamental	155
D.4. Cohomologie ℓ -étale n -approchée d'un schéma simplicial	158
D.5. Systèmes essentiellement constants	162
D.6. Approximation d'un pro- ℓ -groupe par ses quotients finis	165
D.7. Calcul de la cohomologie d'une polycourbe ℓ -élémentaire	169
D.8. Descente	171
D.9. Functorialité	173
D.10. Structure de l'algorithme et exemple simple	175
D.11. Compléments	177
D.12. Corps et extensions de corps	186
D.13. Modules de type fini sur une k -algèbre de type fini	192
D.14. Algèbres de type fini sur un corps : description algorithmique	196
D.15. Algèbre commutative effective	199
D.16. Schémas de type fini sur un corps : description algorithmique	205
D.17. Géométrie algébrique effective	209
Bibliographie	212

Présentation des travaux

Introduction

Le texte qui suit présente quelques contributions de l'auteur à l'étude de la cohomologie étale des schémas à valeurs dans des faisceaux constructibles. Il est découpé en deux parties de longueurs inégales : dans la première, on expose brièvement les résultats — tout en renvoyant le lecteur aux articles correspondants pour des introductions plus détaillées ou mettant l'accent sur un aspect légèrement différent — ; dans la seconde, ont été reproduits les manuscrits, à l'exception des chapitres du volume Astérisque sur les travaux de Ofer Gabber qui ont un statut particulier, s'agissant de résultats qui lui sont exclusivement dûs^①.

✱

Soient k un corps de caractéristique p et X un k -schéma algébrique, par exemple donné par une k -algèbre de type finie A . On s'intéresse ici à la *cohomologie étale* de X , ou plutôt de $X \otimes_k k^{\text{sép}}$, où $k^{\text{sép}}$ est une clôture séparable de k . Cette théorie cohomologique a l'avantage d'être très proche de l'intuition topologique (si on oublie que la droite affine n'est pas simplement connexe) : à la fin des années 1950 et au début des années 1960, Alexander Grothendieck associe à X , *a priori* « discret » — c'est-à-dire démuné de topologie —, des pendants algébriques des invariants reflétant la « forme » des espaces topologiques. Le cas du π_0 était élémentaire : considérer par exemple les fonctions idempotentes ; le cas du π_1 déjà beaucoup moins : il fallait dégager une bonne classe de morphismes devant jouer le rôle d'isomorphismes locaux — les morphismes *étales*^② —, une théorie du recollement d'objets donnés localement — la théorie de la descente —, et vérifier que la théorie obtenue, construite pour étendre la théorie de Galois, donnait les résultats escomptés pour les courbes — ce qui fut établi grâce à un théorème d'algébrisation (GAGF) joint (dans le cas propre) à la lissité de l'espace des modules de courbes de genre fixé. C'est déjà plus qu'il n'en faut pour *proposer* une définition à la Čech-Artin-Mazur (lorsque $k = k^{\text{sép}}$ pour simplifier) :

$$H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := \text{colim}_{U \rightarrow X} H^i(\pi_0(U/X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

où $U \rightarrow X$ parcourt les morphismes étales surjectifs, $\pi_0(U/X)$ désigne l'ensemble simplicial défini par les composantes connexes des produits fibrés $U \times_X \cdots \times_X U$ ^③ et $H^i(\pi_0(U/X), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ la cohomologie du complexe déduit du $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module cosimplicial associé.

①. N'étant pas une monographie de recherche — et quoiqu'il en soit trop longue — [MADORE et ORGOGOZO 2008-2013] est également absente, ni même présentée.

②. Par exemple, $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est *étale* s'il existe une présentation $B = A[x_1, \dots, x_r]/(f_1, \dots, f_r)$ telle que l'image dans B du déterminant jacobien $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ soit inversible ; le cas général se déduit de cette définition en localisant en haut et en bas pour la topologie de Zariski.

③. Si par exemple $X = \text{Spec}(A)$ et $U = \text{Spec}(B)$, avec B comme ci-dessus, l'ensemble $\pi_0(U/X)_m := \pi_0(U^{\times_{X^m+1}})$ n'est autre que l'ensemble des *idempotents* ($e^2 = e$) indécomposables de la k -algèbre $A[x_{ij} : 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq m] / (f_{ij})$, où $f_{ij} = f_i(x_{1j}, \dots, x_{rj})$.

Une telle définition nous laisse totalement démuni. Bien que féconde, particulièrement sous la forme que lui a donnée Pierre Deligne — la *descente cohomologique* —, nous adoptons plutôt (mais pas exclusivement) le point de vue initial de Grothendieck. Le miracle, maintes fois évoqué^④, est qu'en étendant le problème de la construction et l'étude des groupes $H^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ — encore mystérieux pour $i \geq 2$ — à celui d'établir un formalisme des 6-opérations pour des coefficients plus généraux (constructibles ; faisceaux ou complexes), la souplesse gagnée nous ramène souvent, « par dévissage », à vérifier les propriétés attendues dans le cas relativement élémentaire des courbes (pour lesquelles on sait définir les bons invariants). Plus précisément : un tel dévissage, pour montrer que les faisceaux constructibles sont stables par image directe, marche dans le cas d'un morphisme *propre* ; dans le cas général, Grothendieck avait mis en évidence l'importance d'un autre type de dévissage, s'appuyant sur la résolution des singularités et de la pureté (cohomologique).

✱

Les résultats qui suivent sont en grande partie des prolongements naturels de ces idées de Grothendieck, rendues plus puissantes encore par la descente cohomologique sus-mentionnée et les théorèmes de Aise Johan de Jong sur la résolution des singularités de variétés algébriques ou de courbes relatives.

Il n'échappera pas au lecteur que, ça et là, nous avons aussi utilisé, de façon cruciale, des observations d'Ofer Gabber^⑤.

On s'est principalement intéressé :

- (i) à l'action du groupe de Galois de k sur $H^i(X \otimes_k k^{\text{sép}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, ou plus généralement à la variation de la cohomologie des fibres d'un morphisme $f : X \rightarrow S$, autrement dit à la théorie des **cycles évanescents** ;
- (ii) à l'annulation pour i grand de ces groupes ou, plus exactement, à la **dimension cohomologique** de corps des fractions d'anneaux locaux henséliens ;
- (iii) à la dépendance en n de la taille de ces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules (un renforcement des théorèmes de finitude de Deligne et Grothendieck) ainsi que, dans une situation relative, des ouverts sur lesquels ils forment des systèmes locaux, au sujet desquels sont établis des résultats d'**uniformité** ;
- (iv) à la **calculabilité** (un autre renforcement des théorèmes de finitude), pour i et n fixés, de ces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules ou, plus généralement — mais sans parvenir à exploiter d'élégants dévissages —, des images directes de faisceaux constructibles.

^④. Nous conseillons vivement la lecture de [ILLUSIE 2014] pour une belle discussion de la naissance de la cohomologie étale.

^⑤. Qui mériterait bien des éloges et des remerciements ; probablement n'est-ce pas l'endroit adéquat.

Cycles proches

1. Généralités

1.1. Motivé, semble-t-il, par une conjecture de John Milnor sur la quasi-unipotence de la monodromie d'un point critique isolé, Alexander Grothendieck enrichit son formalisme des 6-opérations par deux nouveaux foncteurs : cycles évanescents et cycles proches. En particulier, il « faisceautise » la cohomologie de ce que l'on appelle maintenant les *fibres de Milnor* : si $X \rightarrow S$ est un morphisme de type fini, S un trait strictement hensélien et $\bar{\eta}$ un point générique géométrique, la cohomologie de $X_{x,\bar{\eta}} := X_{(x)} \times_S \bar{\eta}$, où x est un point géométrique de x au-dessus du point fermé s de S , à valeurs dans un complexe \mathcal{F} sur X n'est autre que la fibre en x de $R\Psi\mathcal{F}$, un complexe sur X_s .

Ce formalisme est extrêmement fécond, et ouvre notamment la voie à l'usage de méthodes globales pour résoudre un problème *a priori* local (et vice-versa) : il permet à Grothendieck de donner une démonstration de ladite conjecture, faisant usage de la résolution des singularités, au prix de quitter le cadre (faussement rassurant) des singularités isolées !

Le caractère malgré tout fondamentalement local de $R\Psi\mathcal{F}$, dont la fibre en x est $(Rf_{x*}\mathcal{F})_{\bar{\eta}} = R\Gamma(X_{x,\bar{\eta}}, \mathcal{F})$, où f_x est le morphisme $X_{(x)} \rightarrow S_{(s)} = S$ entre « petites boules », laisse entrevoir les difficultés que l'on peut rencontrer pour établir des résultats de finitude : le morphisme f_x est loin d'être propre.

1.2. Non résolu en toute généralité par Grothendieck (voir cependant [SGA 7 XIII, §2.3] pour le cas de la caractéristique nulle), ce problème l'a été par Pierre Deligne, de façon très astucieuse dans [Th. finitude, §3] sans hypothèse de résolution des singularités. Il démontre aussi un résultat de commutation aux changements de base $S' \rightarrow S$: finalement, les morphismes locaux f_x se comportent un peu comme des morphismes propres.

Bien entendu, une fois que l'on a convenablement faisceautisé la cohomologie des fibres de Milnor, il n'y a pas de raison de s'arrêter dans leur analyse aux seules désingularisations par modification birationnelle : il suffit de pouvoir invoquer la descente cohomologique. Ainsi, le théorème de résolution des singularités de [A. J. DE JONG 1996], faisant intervenir des *altérations*, permet de retrouver les résultats de P. Deligne suivant la méthode de Grothendieck.

1.3. Pourquoi se limiter au cas particulier où la base S est de dimension 1 ? Les morphismes $f_{x,s} : X_{(x)} \rightarrow S_{(s)}$ déduits d'un morphisme de type fini $X \rightarrow S$, avec S non nécessairement un trait, sont bien entendu intéressants ; la cohomologie de ses fibres apparaît d'ailleurs dans la définition de la condition de locale acyclicité d'une paire (f, \mathcal{F}) , dont on peut souvent déduire des résultats de lissité (=locale constance) pour les $Rf_{x*}\mathcal{F}$. Outre le fait

que la dimension 1 « suffise » souvent, quitte à faire des contorsions (projections sur \mathbf{A}^1 , etc.), une raison pouvant expliquer la tardiveté de l'émergence d'une théorie pour S arbitraire est la nécessité de définir un espace sur lequel vivrait le putatif $\mathcal{R}\Psi_f\mathcal{F}$ dont les $(\mathcal{R}f_{x,s\star}\mathcal{F})_t$, pour $x \mapsto s$ et $t \rightarrow S_{(s)}$, seraient les fibres. Ceci a été réalisé par P. Deligne : il existe bien un topos $X\overline{X}_S\mathcal{S}$ dont les points sont les $(x \mapsto s \leftarrow t)$ comme ci-dessus, et un complexe $\Psi_f\mathcal{F}$ sur ce topos faisceautisant la cohomologie des « tubes » $X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(t)}$ (dont $X_{x,\overline{\eta}}$ est un exemple). Sa définition a été rédigée dans [LAUMON 1983] ; voir aussi [ILLUSIE 2017, §1] pour un survol. (Nous reviendrons sur ce qui semble avoir été une motivation de P. Deligne dans la section n°3 ci-dessous ; d'autres sont signalées dans [LAUMON 1983, §2].)

2. Propreté cohomologique des morphismes f_x

2.1. Lorsque S n'est plus nécessairement régulier de dimension 1, la question de savoir si les morphismes locaux f_x se comportent cohomologiquement comme des morphismes propres – constructibilité et commutation aux changements de base des $\mathcal{R}f_{x\star}\mathcal{F}$ –, garde un sens. (Indépendamment d'ailleurs du problème de la définition du topos $X\overline{X}_S\mathcal{S}$ et du complexe $\Psi_f\mathcal{F}$, même si on s'attend à ce que ces derniers interviennent dans les *démonstrations* de résultats sur cette question et permettent d'en préciser les énoncés.)

Dans le cas particulier où les singularités de la paire (f, \mathcal{F}) sont *finies* sur la base S , P. Deligne avait observé dès [LAUMON 1981] que la situation est aussi bonne qu'en dimension 1. Par contre, il était bien connu que des phénomènes dits d'« éclatements », étudiés dans [SABBAH 1983] par voie transcendante, mettent en défaut les énoncés les plus optimistes.

De même que, d'après Abhyankar, « la ramification tue la ramification » ; P. Deligne conjecture dans ce contexte qu'un éclatement de la base devrait « tuer » le défaut de propriété cohomologique des f_x à coefficients dans un faisceau (constructible) donné.

2.2. Qu'il en soit bien ainsi est le résultat principal de [ORGOGOZO 2006], auquel nous renvoyons pour un énoncé précis (A.1.1 et A.7.1 dans ce texte). Disons simplement quelques mots de la démonstration : par des dévissages et une récurrence sur la dimension standard, on se ramène au cas où f est une courbe nodale. (Altérer la base est nécessaire pour obtenir une bonne fibration par des courbes nodales, dont l'existence est assurée par [A. J. DE JONG 1997].) Le cas d'une telle courbe n'est pas difficile et résulte essentiellement du cas déjà connu des singularités isolées dans leurs fibres.

Le seul point qui nous semble être une surprise dans la démonstration est dû à O. Gabber. L'esquisse précédente suppose implicitement que le morphisme f est dominant. Pour faire marcher la récurrence, et se ramener au cas dominant, on aimerait donc que toute modification d'un fermé de la base soit dominée par la restriction d'une modification de la base. C'est presque vrai – voir A.3.2.1 – et cela suffit pour conclure.

3. Motivation et applications

3.1. Motivation. P. Deligne semble avoir développé sa théorie des cycles évanescents sur une base quelconque de façon concomitante à ses recherches sur la formule du produit pour les facteurs ε , dont le terme global apparaît dans l'équation fonctionnelle de la fonction L d'un faisceau constructible \mathcal{F} sur une courbe projective lisse X sur un corps fini. Cette formule remarquable est démontrée dans [LAUMON 1987, §3], où l'on trouvera également une discussion de sa pertinence pour le programme de Langlands ainsi qu'un résumé des cas précédemment connus, dont le cas particulier que nous allons maintenant aborder d'un faisceau *modéré*, traité par P. Deligne dans son séminaire à l'IHÉS de 1981.

Sans entrer dans les détails, disons que le point de départ menant au calcul fonctoriel et local sur X du déterminant $\det R\Gamma(X, \mathcal{F})$ est la formule de Künneth symétrique qui identifie – quitte à faire un dévissage élémentaire sur \mathcal{F} – son dual au groupe de cohomologie $H^n(X^{(n)}, \mathcal{F}^{(n)})$, où $n := -\chi(X, \mathcal{F})$, et $X^{(n)}$ (resp. $\mathcal{F}^{(n)}$) désigne le produit symétrique n -ième de la courbe (resp. le faisceau puissance tensorielle symétrique externe correspondant). Il a alors l'idée de pousser $\mathcal{F}^{(n)}$ sur Pic_X^n par l'application d'Abel-Jacobi AJ_n , envoyant un multi-ensemble de points $\{x_1, \dots, x_n\}$ (c'est-à-dire un diviseur) sur $[\sum_i x_i]$. Le fait remarquable qui, combiné à des résultats de convolution, est la clef de son résultat est que si \mathcal{F} (restreint à son ouvert de lissité) est modéré, alors la paire $(\text{AJ}_n, \mathcal{F}^{(n)})$ est *localement acyclique* sauf peut-être au-dessus de $K_{\mathcal{F}} := \text{rg}_{\eta}(\mathcal{F}) \cdot K + \sum_p a_p(\mathcal{F}) \cdot P \in \text{Pic}^n(X)$, où K est la classe $[\omega_X]$ du diviseur canonique et $a_p(\mathcal{F})$ désigne la chute du rang en P ^⑥.

Ici, la base est une jacobienne, de dimension > 1 . (On suppose d'ailleurs le genre g de la courbe ≥ 2 .) Cette difficulté est contournée par P. Deligne en projetant un voisinage de $K_{\mathcal{F}}$ dans Pic_X^n vers \mathbb{G}_a . Cependant, l'usage systématique des cycles évanescents sur la jacobienne devrait certainement simplifier cette partie de l'argument et permettre surtout, espérons-le, d'attaquer le cas sauvage, une fois que l'on aura mieux compris les singularités de cette paire^⑦.

3.2. Applications.

3.2.1. Bien que le cas des singularités finies soit déjà, on l'a vu, « sans éclatement », le formalisme des cycles évanescents sur une base quelconque permet par exemple de mieux comprendre l'action du groupe de monodromie sur les classes de cycles évanescents associées à un pinceau de Lefschetz, notamment dans le cas qui restait ouvert de la caractéristique 2 et des sections hyperplanes de dimension paire. (Voir §A.11.)

3.2.2. L'application la plus intéressante de notre résultat, faisant véritablement appel à un éclatement, est donnée dans [LAFFORGUE et GENESTIER 2017], établissant une paramétrisation de Langlands locale (à semi-simplification près, pour les corps de fonctions) et la compatibilité local-global. Elle conduit aussi à un certain nombre de questions naturelles :

⑥. L'appartenance de $K_{\mathcal{F}}$ à $\text{Pic}^n(X)$ est une conséquence de la formule d'Ogg-Šafarevič.

⑦. Joël Riou et moi nous intéressons à cette question.

- dépendance de la modification en la torsion : qu'elle parcoure les puissances d'un même nombre premier ℓ (cas particulièrement simple) ou qu'elle soit simplement inversible sur les schémas considérés ;
- lien avec les cycles évanescents itérés[Ⓢ].

Auxquelles on peut ajouter le problème de savoir si le centre de la modification peut être choisi disjoint du lieu d'universelle locale acyclicité.

[Ⓢ]. Voir par exemple [MAISONOBE 2013] dans le cas complexe.

Finitude

4. Travaux de Gabber

Dans cette section, on présente succinctement quelques résultats d'Ofer Gabber annoncés lors de la conférence en l'honneur de Pierre Deligne (Princeton, 2005) et rédigés avec son aide dans la monographie [STG]^⑨. Leur influence sur les travaux présentés ci-après est manifeste.

Un des principaux résultats est le suivant.

4.1. THÉORÈME (O. Gabber). *Soient Y un schéma noëthérien quasi-excellent, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini, n un entier inversible sur Y , et \mathcal{F} un faisceau constructible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur X . Alors, pour tout q , le faisceau $R^q f_* \mathcal{F}$ est constructible, et il existe un entier N tel que $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ pour $q \geq N$.*

Rappelons que ce théorème était déjà connu dans les cas suivants :

- (i) f propre, sans hypothèse d'excellence (A. Grothendieck, [SGA 4 XIV]);
- (ii) f morphisme de \mathcal{S} -schémas de type fini, avec \mathcal{S} régulier de dimension ≤ 1 (P. Deligne, [Th. finitude]).
- (iii) Y de caractéristique nulle (M. Artin, [SGA 4 XIX]);

Comme celle de M. Artin dans le cas (iii), la démonstration d'O. Gabber repose sur un ingrédient cohomologique (la pureté absolue, déjà établie par O. Gabber) et un ingrédient géométrique, une variante *locale* du théorème d'Hironaka :

4.2. THÉORÈME (O. Gabber). *Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent, Z un fermé rare de X . Il existe une famille finie de morphismes $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$, couvrante pour la topologie des altérations et telle que, pour tout $i \in I$:*

- (a) X_i soit régulier et intègre;
- (b) $p_i^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.

(Un raffinement « premier à ℓ » de cet énoncé — où l'on contrôle les degrés génériques des altérations par désingularisation de quotients par un ℓ -groupe — est également vrai ; voir l'exposé [STG IX] et [TEMKIN 2017].)

4.3. En particulier, localement pour la *topologie des altérations*, tout schéma noëthérien quasi-excellent est régulier. Dans les applications cohomologiques, une source de difficultés (sur lesquelles nous reviendrons), notamment pour établir le résultat de finitude énoncé ci-dessus, est le caractère *local* de cette topologie : les morphismes p_i ne sont pas nécessairement

⑨. Voir également [STG 0] pour un autre résumé.

propres. En effet, cette topologie est engendrée par les morphismes propres, surjectifs, génériquement finis *et* les recouvrements par des ouverts de Zariski. (Nous renvoyons à [STG II, §2] pour une définition précise et des sorites.) Il n'est pas difficile d'établir que cette topologie est plus fine que la topologie étale : cela repose essentiellement sur le lemme [ORGOGOZO 2006, 10.3] (voir aussi [BHATT 2011a, lemme 2.3]). Par des arguments semblables, on montre le fait suivant, élémentaire mais essentiel :

un recouvrement pour la topologie des altérations est dominé par un recouvrement de la forme $(U_i \hookrightarrow X' \twoheadrightarrow X)$ où $X' \rightarrow X$ est un morphisme propre surjectif de présentation finie et $(U_i \hookrightarrow X')$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

Outre le fait qu'il permet par exemple une description des points pour cette topologie, ce fait est utile pour les applications globales des techniques d'approximation que nous allons maintenant aborder.

4.4. La démonstration du théorème d'uniformisation se ramène sans difficulté au cas où X est local hensélien mais la réduction au cas où X est *complet* (de même dimension) est délicate[Ⓜ]. Partant d'une uniformisation du complété d'un schéma hensélien excellent, on descend l'uniformisation par la procédure naturelle décrite ci-dessous ; la difficulté est de vérifier que les propriétés des schémas (p. ex. la régularité) et des morphismes (p. ex. être génériquement fini) sont conservées. Pour être plus précis, quelques notations et définitions. Soit $X = \text{Spec}(A)$ local hensélien excellent et $\widehat{X} = \text{Spec}(\widehat{A})$ son complété. Tout morphisme de présentation finie $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \widehat{X}$ se descend en un morphisme de présentation finie $f' : Y' \rightarrow X' = \text{Spec}(B)$, où B est une sous- A -algèbre de type fini de \widehat{A} , appelé un **modèle** de \bar{f} sur X' . Pour toute section $\sigma : X \rightarrow X'$, on désigne — abusivement : on oublie la dépendance en le choix de f' — par f_σ le morphisme $f' \times_{X', \sigma} X : Y_\sigma \rightarrow X$. On dira que σ **approche** $\widehat{X} \rightarrow X'$ à l'ordre n (un entier ≥ 1) si les composés $X(n) \hookrightarrow X \xrightarrow{\sigma} X'$ et $X(n) \hookrightarrow \widehat{X} \rightarrow X'$ coïncident, où l'on a posé $X(n) := \text{Spec}(A/\mathfrak{m}^n)$. Les deux \widehat{X} -schémas \bar{Y} et $Y_\sigma \times_X \widehat{X}$ ont alors même réduction modulo \mathfrak{m}^n . L'existence pour chaque n d'une section $X \rightarrow X'$ approchant le morphisme $\widehat{X} \rightarrow X'$ à l'ordre n est une conséquence du théorème d'approximation d'Artin-Popescu.

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{Y} & \dashrightarrow & Y' & \dashleftarrow & Y_\sigma \\
 \downarrow \bar{f} & & \downarrow f' & & \downarrow f_\sigma \\
 \widehat{X} & \longrightarrow & X' & \dashleftarrow \sigma & X \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & & X(n) & &
 \end{array}$$

Pour notre propos — réduction de l'uniformisation du cas hensélien au cas complet —, la construction et les définitions ci-dessus ne sont véritablement utiles que si l'on sait montrer

[Ⓜ]. Nous verrons plus loin en quoi l'hypothèse de complétion permet à O. Gabber de procéder par récurrence sur la dimension.

que pour chaque fermé rare Z de X et chaque uniformisation $(\bar{f}_i : \bar{Y}_i \rightarrow \hat{X})_{i \in I}$ de la paire (\hat{X}, \hat{Z}) , il existe un choix de X' et n tels que pour toute section σ approchant $\hat{X} \rightarrow X'$ à l'ordre n , il existe des ouverts $U_{i,\sigma}$ ($i \in I$) des $Y_{i,\sigma}$ couvrant X pour la topologie des altérations et satisfaisant les propriétés requises, portant principalement sur la régularité des schémas en jeu. Disons suivant O. Gabber que de deux algèbres C, C' sur un anneau R sont (I, n) -**isomorphes**, où $I \subseteq R$ est un idéal et n un entier, s'il existe un isomorphisme de $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} I^k$ -algèbres entre $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} I^k C / I^{k+n} C$ et $\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} I^k C' / I^{k+n} C'$. (On convient que $I^k = R$ pour $k \leq 0$.) Cette notion préserve la dimension et la régularité, au sens suivant :

- (i) si C et C' sont deux R -algèbres noéthériennes $(I, 1)$ -proches, pour tout $x \in \text{Spec}(C/I) = \text{Spec}(C'/I)$, on a :

$$\dim(C_x) = \dim(C'_x).$$

- (ii) si C et C' sont deux R -algèbres noéthériennes $(I, 2)$ -proches, pour tout $x \in \text{Spec}(C/I) = \text{Spec}(C'/I)$, on a :

C_x est régulier si et seulement si C'_x est régulier.

Le point clef est alors le théorème d'approximation des morphismes suivant, énoncé dans le cas particulier affine pour simplifier.

THÉORÈME (O. Gabber). *Soient X comme ci-dessus et $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow \hat{X}$ un morphisme affine de type fini. Il existe un entier c , une factorisation $X'' \rightarrow X$ de type fini du morphisme $\hat{X} \rightarrow X$ et un modèle Y'' de \bar{Y} sur X'' tels que pour toute factorisation $X' \rightarrow X'' \rightarrow X$ comme ci-dessus et toute section σ de $X' \rightarrow X$ approchant $\hat{X} \rightarrow X'$ à un ordre $n \geq c + 1$, les \hat{X} -schémas \bar{Y} et $\hat{Y}_\sigma := Y''_\sigma \times_X \hat{X}$ soient $(n - c)$ -isomorphes, relativement à l'idéal maximal de \hat{X} .*

Esquissons rapidement l'argument. On plonge \bar{Y} dans un \hat{X} -espace affine : on écrit l'anneau \bar{B} des fonctions sur \bar{Y} comme le conoyau d'un morphisme C -linéaire $C^r \rightarrow C$, où C est un anneau de polynômes sur \hat{A} . Il n'est alors pas difficile de déduire le théorème précédent des deux faits suivants, où C est un anneau noéthérien et I un idéal :

- (i) Soient r, s et $n \geq c \geq 0$ des entiers. Si deux applications C -linéaires $C^r \rightarrow C^s$ coïncident modulo I^n et ont une image admettant c pour constante d'Artin-Rees, au sens où pour tout $t \geq c$, on a $I^t C^s \cap \text{Im} \subseteq I^{t-c} \text{Im}$, alors leurs conoyaux sont $(I, n - c)$ -proches.
- (ii) Soient r, s, t et c des entiers. Si $\mathcal{K} = (C^r \xrightarrow{\psi} C^s \xrightarrow{\varphi} C^t)$, et $\mathcal{K}' = (C^r \xrightarrow{\psi'} C^s \xrightarrow{\varphi'} C^t)$ coïncident modulo I^{c+1} , où c est une constante d'Artin-Rees pour $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Im}(\psi)$. Alors, c est également une constante d'Artin-Rees pour $\text{Im}(\varphi')$.

(On trouvera des résultats semblables dans [CONRAD et JONG 2002, lemme 3.1 et théorème 3.2] ainsi que, dans une moindre mesure, [PESKINE et SZPIRO 1973, I.§6].)

4.5. La réduction du paragraphe précédent nous permet de supposer le schéma à désingulariser local complet (noéthérien). La méthode d'O. Gabber partiellement inspirée de [SGA

4 XIX] consiste à procéder par récurrence : on fixe $d \geq 0$ et on suppose le théorème d'uniformisation vrai pour toute paire (S, T) , où S est un schéma noethérien quasi-excellent de dimension $\leq d - 1$ et T un fermé rare. Il s'agit d'en déduire le théorème d'uniformisation pour toute paire (X, Z) , où X est un schéma noethérien local complet de dimension $\leq d$. Les ingrédients essentiels sont les suivants :

- le théorème « d'algébrisation partielle », dû à O. Gabber ;
- le théorème de résolution des singularités des courbes dû à Aise Johann de Jong ;
- le théorème de résolution des singularités des log-schémas log-réguliers dû à Katô Kazuya.

Détaillons un peu quel est ce premier théorème, dont la démonstration repose sur les théorèmes de Weierstraß (préparation), Renée Elkik ([ELKIK 1973, théorème 5]), et Helmut Epp (élimination de la ramification sauvage).

THÉORÈME (O. Gabber). *Soient $X = \text{Spec}(A)$ un schéma local noethérien complet normal de dimension $d \geq 2$ et Z un fermé rare. Quitte à remplacer X (resp. Z) par un X -schéma fini, local noethérien normal excellent de dimension d (resp. par son image inverse), il existe un schéma local noethérien régulier S de dimension $d - 1$, un S -schéma de type fini dominant X' intègre et affine, un point fermé x' de la fibre spéciale de $X' \rightarrow S$, un fermé rare Z' de X' , et enfin un morphisme $c : X \rightarrow X'$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- le morphisme c induit un isomorphisme $X \simeq \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X', x'}})$;
- l'image inverse $c^{-1}(Z')$ de Z' coïncide avec Z .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & X' \\ & & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

Pour démontrer ce théorème, O. Gabber commence par améliorer un résultat de Cohen.

PROPOSITION (O. Gabber). *Soit A un anneau local complet noethérien réduit, d'égale caractéristique $p > 0$, équidimensionnel de dimension d et de corps résiduel k . Il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que A soit fini sur A_0 , sans torsion et génériquement étale.*

Si le schéma X du théorème précédent n'est pas d'égale caractéristique, une variante en caractéristique mixte de l'énoncé précédent est également établie ; elle repose sur le théorème de Epp :

Soit $T \rightarrow S$ un morphisme dominant de traits complets, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Notons κ_S et κ_T leurs corps résiduels respectifs. Supposons κ_S parfait et le sous-corps parfait maximal de κ_T algébrique sur κ_S . Il existe une extension finie de traits $S' \rightarrow S$ telle que le produit fibré réduit normalisé

$$T' := (T \times_S S')_{\text{red}}^{\text{norm}}$$

ait une fibre spéciale réduite au-dessus de S' .

L'anneau A_0 de la proposition précédente s'algèbrise trivialement : c'est le complété de l'anneau hensélien $k\{t_1, \dots, t_d\}$. Pour transférer ce fait à A , on utilise le théorème d'Elkik :

Soient $(X = \text{Spec}(A), F)$ une paire hensélienne avec A noëthérien, et U le sous-schéma ouvert complémentaire de F dans X . Notons $X_{\widehat{F}}$ le complété de X le long de F , ainsi que \widehat{F} le fermé correspondant à F et \widehat{U} son complémentaire dans $X_{\widehat{F}}$. Le foncteur $X' \mapsto X' \times_X X_{\widehat{F}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des X -schémas finis, étales sur U , et la catégorie des $X_{\widehat{F}}$ -schémas finis, étales sur \widehat{U} .

Pour algébriser également le fermé $Z \subseteq X = \text{Spec}(A)$, on utilise le théorème de préparation de Weierstraß :

Soient κ un anneau local séparé complet d'idéal maximal \mathfrak{m} et d un entier.

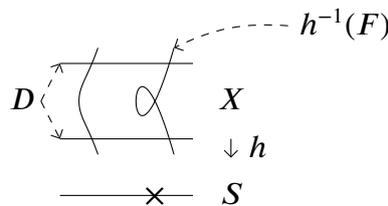
- (i) Pour tout élément $s \in \kappa[[t_1, \dots, t_d]]$ non nul modulo $(\mathfrak{m}, t_1, \dots, t_{d-1})$, il existe une unité $u \in \kappa[[t_1, \dots, t_d]]^\times$ et un polynôme P , unitaire en t_d , $P \in \kappa[[t_1, \dots, t_{d-1}]][t_d]$, tel que

$$s = u \cdot P.$$

- (ii) Pour tout élément $s \in \kappa[[t_1, \dots, t_d]]$ non nul modulo \mathfrak{m} , il existe un automorphisme κ -linéaire c de $\kappa[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que $c(t_d) = t_d$ et $c(s)$ soit non nul modulo $(\mathfrak{m}, t_1, \dots, t_{d-1})$.
- (iii) Soit $s \in \kappa[[t_1, \dots, t_d]]$ congru modulo $(\mathfrak{m}, t_1, \dots, t_{d-1})$ à $ut_d^N + \lambda_{d+1}t_d^{N+1} + \dots$ où u est une unité de κ et les λ_i , pour $i \geq N + 1$, appartiennent à κ . Pour tout $h \in \kappa[[t_1, \dots, t_d]]$, il existe un unique couple $(q, r) \in \kappa[[t_1, \dots, t_d]] \times \kappa[[t_1, \dots, t_{d-1}]][t_d]$ tel que $h = qs + r$ et $\deg_{t_d}(r) < N$.

**

Ceci achève notre esquisse de la démonstration du théorème d'algèbrisation partielle, d'après lequel on peut supposer le schéma X intègre de dimension d , source d'un morphisme propre surjectif $X \rightarrow S$, de fibre générique de dimension 1, où S est local noëthérien régulier de dimension $d - 1$. Pour en déduire son théorème de résolution des singularités 4.2, O. Gabber fait alors appel au théorème de résolution des singularités des courbes [A. J. DE JONG 1997, 2.4] d'après lequel, quitte à altérer X et S , on peut supposer que X/S est une courbe *nodale* et le fermé $Z \subseteq X$ contenu dans la réunion d'un diviseur D étale sur S , contenu dans le lieu lisse de $X \rightarrow S$, et la préimage d'un fermé rare F de S .



En altérant S , on peut perdre sa régularité (et, bien sûr, son caractère local). Cependant, étant de dimension $d - 1$, on peut appliquer le théorème d'uniformisation à la paire (S, F) , car on procède par récurrence sur d . On se ramène donc au cas où (S, T) est une paire régulière. La paire (X, Z) n'est peut-être pas régulière mais, compte tenu de nos hypothèses, elle est

log-régulière (ou « torique »). On peut alors conclure grâce au théorème de résolution des singularités toriques de Katô K.

4.6. Comme l'avait déjà observé Grothendieck, la constructibilité des images directes que l'on souhaite démontrer serait conséquence formelle (a) du théorème de constructibilité des images directes pour les morphismes propres — qui nous permet par dévissage de nous ramener à établir la constructibilité des $Rj_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte —, (b) d'un théorème, à démontrer, de résolution des singularités comme celui d'Hironaka (pour les schémas quasi-excellents) — qui nous permettrait de supposer $(X, X \setminus U)$ régulière —, et enfin (c) de la pureté cohomologique absolue.

Pureté :

Soient S un schéma régulier noethérien, $D = \sum_{i \in I} D_i$ un diviseur strictement à croisements normaux, $j : S - D \hookrightarrow S$ l'immersion ouverte et n un entier inversible sur S . Alors on a $R^0 j_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $R^1 j_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}_{D_i}$ et $R^q j_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigwedge^q R^1 j_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En particulier, $Rj_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \in D_c^b(S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Pour démontrer son théorème de finitude 4.1, O. Gabber s'appuie sur les résultats suivants : (a') le théorème de constructibilité générique de P. Deligne (cf. infra), (b') son théorème de résolution des singularités (=uniformisation locale), (c') la pureté absolue — dont il a également donné une nouvelle démonstration —, et enfin (d') une formule de changement de base. La raison pour laquelle sa démonstration est moins directe que celle espérée par Grothendieck est simple. On peut à nouveau se ramener à la constructibilité des $Rj_{\star} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte mais le théorème d'uniformisation d'O. Gabber est *local* : la paire $(X, X \setminus U)$ est seulement régulière *localement pour la topologie des altérations* mais *a priori* pas pour la topologie propre.

Constructibilité générique [Th. finitude][Ⓣ] :

Soient S est un schéma noethérien, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini et n un entier inversible sur S . Pour tout $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -faisceau constructible \mathcal{F} sur X il existe un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ tel que $(Rf_{\star} \mathcal{F})|_U \in D_c^b(U, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Dans la situation envisagée par Grothendieck, on procéderait ainsi : si $\varepsilon : X_{\bullet} \rightarrow X$ est un hyperrecouvrement propre qui résout les singularités de $(X, X \setminus Z)$, on a par descente cohomologique $j_{\star} \Lambda = \varepsilon_{\star} j_{\star} \Lambda$ (où l'on écrit j_{\star} pour Rj_{\star} et $\Lambda := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour n inversible sur X), la constructibilité de $j_{\star} \Lambda$ étagé par étage par pureté et enfin celle de $j_{\star} \Lambda$ par pureté des ε_p et finitude pour les morphismes propres.

Ⓣ. Signalons que, par descente cohomologique, il est possible de donner une démonstration plus « géométrique » de la constructibilité générique, reposant sur la pureté cohomologique et le théorème de résolution des singularités de de Jong (pour les schémas algébriques sur un corps). Voir par exemple [ORGOGOZO 2003a] dans le cas non commutatif des champs, ainsi que [ILLUSIE 2010] pour une variante « uniforme en n ». (Nous y reviendrons lorsque nous évoquerons [ORGOGOZO 2017, §4.5].)

O. Gabber observe que bien qu'on ne puisse appliquer tel quel cet argument lorsque les ε_p ne sont plus propres — comme c'est le cas de ses morphismes uniformisants —, on peut malgré tout l'adapter de la façon suivante : pour vérifier que le complexe $j_*\Lambda$ (ou tout autre complexe) est constructible, il suffit que ses restrictions à un ouvert et au fermé complémentaire le soient^⑫. Ou encore : pour tout fermé $i : F \hookrightarrow X$, il existe un ouvert dense $F^\circ \subseteq F$ tel que la restriction de $i^*j_*\Lambda$ à F° soit constructible. C'est exactement ce qu'entraîne le théorème de constructibilité générique si l'on a l'égalité $i^*j_*\Lambda = \varepsilon_{F*}i^*j_*\Lambda$, où ε_F est l'hyperrecouvrement, pour la topologie des altérations, de F déduit par changement de base $F \rightarrow X$ d'un hyperrecouvrement de X résolvant les singularités de $(X, X \setminus U)$. Or, on a bien une telle égalité ; plus généralement :

PROPOSITION. Soient $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ un diagramme de schémas avec f cohérent et $\varepsilon : S_\bullet \rightarrow S$ un hyperrecouvrement pour la topologie h , engendrée par les morphismes propres surjectifs et les recouvrements de Zariski. Pour tout faisceau \mathcal{F} de torsion sur X , le morphisme

$$g^*f_*\mathcal{F} \rightarrow \varepsilon_{Y*}(g_*f_*\mathcal{F}|_X)$$

est un isomorphisme, où l'on désigne par f_\bullet, g_\bullet (resp. ε_Y) les morphismes simpliciaux (resp. l'hyperrecouvrement) déduits de f, g (resp. ε) par changement de base $S_\bullet \rightarrow S$ (resp. $Y \rightarrow S$).

5. Dimension cohomologique

Dans la section précédente, nous avons été relativement vague quant au problème de l'existence de l'entier N annoncé dans 4.1. Dans [STG], O. Gabber donne une autre démonstration de la constructibilité des $R^q f_*\mathcal{F}$ qui établit simultanément leur annulation pour q grand. (Voir [STG XIII] pour les détails.) Il démontre aussi un théorème de Lefschetz affine « absolu », c'est-à-dire sans supposer le schéma de type fini sur un corps (cas traité par Artin et Grothendieck) ou bien de type fini sur un trait (cas traité par O. Gabber, cf. [ILLUSIE 2003, §2]) :

Soient X un schéma noethérien strictement local quasi-excellent, un ouvert affine U de X , et un entier inversible n sur X . Alors,

$$H^q(U, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0 \text{ si } q > \dim(X).$$

Ici, nous souhaitons présenter brièvement une autre application de la technique d'algébrisation d'O. Gabber esquissée en 4.4 ; pour les détails, voir [GABBER et ORGOGOZO 2008]. Le point de départ est un résultat de Katô K. en dimension 1 (rappelé *infra*) sur lequel on s'appuie pour établir un résultat, conjecturé par Katô K., en dimension quelconque.

5.1. Soit A un anneau de valuation discrète hensélien de corps des fractions K et de corps résiduel k . L'égalité suivante, qui semble due à John Tate, est bien connue ([SERRE 1994]) : on a

$$\dim.\text{coh.}_\ell(K) = \dim.\text{coh.}_\ell(k) + 1$$

lorsque ℓ est différent de la caractéristique de k , ou — sous l'hypothèse supplémentaire que k est *parfait* — lorsque ℓ est différent de la caractéristique de K . Dans [SGA 4 X], M. Artin

⑫. Il n'en va pas de même du fait d'être *modéré*.

remarque que si A est de caractéristique mixte $(0, p)$, et k imparfait, on peut s'attendre à un lien entre $\dim.\text{coh.}_p(K)$ et le module des différentielles absolues de k . En [K. KATO 1982, cor. au théorème 3], il est en effet démontré que si $p = \text{car.}(k)$ et $\text{car.}(K) = 0$, on a

$$\dim.\text{coh.}_p(K) \approx \dim_k \Omega_k^1 + 1.$$

(Pour avoir une égalité, il faut remplacer le p -rang $\dim_k \Omega_k^1$ par la « p -dimension » $\dim_p(k)$ qui lui est égale ou vaut 1 de plus ; voir [ibid., introduction] ou [GABBER et ORGOGOZO 2008, §1] pour une définition.) La démonstration de Katô K. est K -théorique ; des analogues du complexe introduit dans [HERR 1998, §2,§4], considérés par exemple dans [SCHOLL 2006, §2.2] ou [MORITA 2008, §3][ⓑ] lorsque le corps résiduel est de p -rang fini non nécessairement nul, fournissent une autre approche, rendant plus transparente le lien entre cohomologie galoisienne et p -bases du corps résiduel.

5.2. Dans [GABBER et ORGOGOZO 2008], on ne fait pas usage de ces techniques de théorie de Hodge p -adique mais on procède par récurrence sur la dimension de l'anneau pour établir le théorème suivant, conjecturé par Katô K.

THÉORÈME (B.1.2). *Soit A un anneau local hensélien excellent, intègre de dimension d . Soient k son corps résiduel, de caractéristique $p > 0$, et K son corps des fractions, de caractéristique 0. Alors, on a l'égalité*

$$\dim.\text{coh.}_p(K) = \dim(A) + \dim_p(k).$$

REMARQUES.

- a) Dans [ibid.], le cas d'égale caractéristique est également traité ; le terme de gauche est alors la p -dimension de K . La démonstration en caractéristique mixte repose sur ce cas, qui est donc établi en premier.
- b) Katô K. a démontré dans [Sh. SAITO 1986, §5] sa conjecture lorsque A est normal de dimension 2, à corps résiduel algébriquement clos : $\dim.\text{coh.}_p(K) = 2$. Ceci a été étendu au cas d'un corps résiduel quelconque par Kuzumaki Takako.

La principale difficulté est de majorer la dimension cohomologique ; la minoration est élémentaire à partir du cas d'un trait : se placer en un point de codimension 1 et procéder par récurrence sur d .

Résumons rapidement la stratégie :

- (1) réduction au cas complet [Artin-Popescu] ;
- (2) choix de coordonnées t_1, \dots, t_{d-1} telles que A soit *fini* sur l'anneau de séries formelles $C[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$, où C est anneau de valuation discrète [Cohen] ;
- (3) changement de coordonnées pour que le lieu de ramification ne contienne pas le fermé $p = 0$ [Epp et relèvement de la proposition du §4.5] ;

[ⓑ]. Le complexe calculant d'après [ibid., théorème 3.1] la cohomologie galoisienne de K est de longueur le p -rang de k plus 2 ; il en résulte une *majoration* de la dimension cohomologique. L'auteur prétend que c'est une égalité, ce qui semble en contradiction avec le théorème de Katô K. Il semblerait que personne n'ait rédigé en détail une démonstration du théorème de Katô K. en suivant cette voie.

- (4) algébrisation partielle du lieu de ramification [Weierstraß] ;
- (5) algébrisation partielle du revêtement ramifié [Elkik] ;
- (6) extension d'une classe de cohomologie sur K , dont on veut montrer la nullité, à un gros ouvert de $\text{Spec}(A)$, c'est-à-dire contenant les points maximaux de la fibre spéciale [Katô] ;
- (7) algébrisation partielle de la classe de cohomologie [Elkik et Fujiwara-Gabber] ;
- (8) conclusion par récurrence sur d et l'inégalité $\dim.\text{coh}_p(F(t)) \leq \dim.\text{coh}_p(F) + 1$ [Grothendieck].

6. Uniformité

6.1. Les résultats de finitude en cohomologie étale, c'est-à-dire de préservation de la constructibilité par image directe (et autres foncteurs), peuvent être raffinés dans différentes directions. L'une d'elle fait l'objet du bref chapitre suivant. Ici, nous nous intéressons à des propriétés d'indépendance de ℓ , sous une forme assez faible que l'on peut résumer (en simplifiant) ainsi :

- (i) existence d'un ouvert de lissité commun aux images directes $(Rf_* \mathcal{F}_\ell)_\ell$ de familles de faisceaux dont $(\mathbb{F}_\ell)_\ell$, pour ℓ inversible sur le but de f , est un archétype ;
- (ii) majoration uniforme des nombres de Betti des fibres.

On aimerait bien sûr beaucoup mieux : établir

- (a) être en présence de systèmes compatibles sur les ouverts de lissité (si l'on part d'un tel système en haut), et donc
- (b) des résultats d'indépendance de ℓ des nombres de Betti ℓ -adiques.

Tout ce que l'on espère démontrer est bien connu en caractéristique nulle ; en caractéristique p , on dispose principalement de deux outils :

- les résultats de [DELIGNE 1980], éventuellement complétés par l'astuce de torsion par des faisceaux de rang 1 très ramifiés (voir par exemple [KATZ 1983]) ou même non ramifiés (voir [FUJIWARA 2002]) ;
- des résultats de résolution des singularités des schémas/morphismes permettant d'établir des résultats du type (i) par pureté cohomologique et changement de base propre et lisse.

Cette seconde approche, plus élémentaire, est celle suivie dans [ILLUSIE 2010] et [KATZ et LAUMON 1985] : une démonstration *géométrique* de la constructibilité ne voit pas la caractéristique des coefficients (malgré tout présente, cachée dans les flèches). Dans [ibid.], c'est le théorème de résolution des singularités d'Hironaka qui est utilisé : les théorèmes de A. J. de Jong n'étaient pas encore connus. Dans [ORGOGOZO 2017], nous suivons la même approche en utilisant cet outil, comme nous l'avons fait dans notre étude des cycles évanescents.

Nous renvoyons à l'introduction de [ibid.] pour une discussion plus détaillée des quelques difficultés techniques que l'on rencontre, principalement liés à des phénomènes de ramification sauvage que l'on traite assez grossièrement : comme dans [DELIGNE 2012] par exemple,

on considère des faisceaux modérés par un même morphisme. Pour des résultats quantitatifs, bien plus profonds, voir les travaux de Alexander Beilinson et Saitô Takeshi, notamment [BEILINSON 2017] et [T. SAITO 2017].

Un des principaux résultats établi dans [ORGOGOZO 2017] est le suivant.

6.2. THÉORÈME (C.5.1). *Soient S un schéma noëthérien quasi-excellent, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, et $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ une S -compactification de X .*

$$\begin{array}{ccc}
 & \bar{\mathfrak{X}} & \bar{X}' \\
 & & \downarrow \alpha \\
 X & \xleftarrow{j} & \bar{X} \\
 \downarrow f & \nearrow f & \\
 S & \xleftarrow{\beta} & S' \\
 & & \cong
 \end{array}$$

Pour tout entier $c \geq 0$, toute altération $\alpha : \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ et toute stratification $\bar{\mathfrak{X}}$ de \bar{X}' , il existe une altération $\beta : S' \rightarrow S$ et une stratification \mathfrak{S} de S' telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X[1/n]$ tel que $\alpha[1/n]^* j[1/n]_* \mathcal{F}$ soit modéré[Ⓐ] et constructible le long de $\bar{\mathfrak{X}}[1/n]$ alors chaque $\beta[1/n]^* R^c f[1/n]_* \mathcal{F}$ est modéré et constructible le long de $\mathfrak{S}[1/n]$.

De plus, il existe un entier N et un ouvert dense $S^\circ \subseteq S$, dépendant uniquement du quadruplet $(f, \alpha, \bar{\mathfrak{X}}, c)$, tels que chaque $R^c f[1/n]_* \mathcal{F}$ comme ci-dessus

- (i) soit « N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} »;
- (ii) commute aux changements de base $T \rightarrow S^\circ$.

Le (i) signifie en particulier que si \mathcal{F} est un faisceau de \mathbb{F}_ℓ -espaces vectoriels, le rang des fibres de l'image directe est majoré par N fois le rang maximal d'une fibre de \mathcal{F} . Si X est une variété projective lisse sur un corps séparablement clos de caractéristique p , il en résulte immédiatement que pour chaque point fermé $\mathfrak{l} \in \text{Spec}(\prod_{\ell \neq p} \mathbb{F}_\ell)$ de corps résiduel $\mathbb{F}_\mathfrak{l}$ de caractéristique nulle, les espaces vectoriels $H^i(X, \mathbb{F}_\mathfrak{l}) := (\prod_{\ell \neq p} H^i(X, \mathbb{F}_\ell)) \otimes \mathbb{F}_\mathfrak{l}$ sont de dimension finie. Comme me l'avait expliqué Nicholas Katz, on peut en déduire une autre démonstration du théorème de [GABBER 1983] sur l'absence de torsion pour presque tout ℓ dans la cohomologie \mathbb{Z}_ℓ -adique des variétés projective lisses. (Utiliser [KATZ et MESSING 1974] ; voir C.6.2)

Signalons aussi que l'on aurait pu formuler l'énoncé du théorème de façon légèrement différente ; par exemple en introduisant des catégories dérivées semblables à celles introduites dans [BEILINSON, BERNSTEIN et DELIGNE 1982, 2.2.9-...].

[Ⓐ]. Les groupes de Galois de points de schémas strictement locaux agissent par un quotient premier à la caractéristique résiduelle. (Définition due à O. Gabber.)

REMARQUES.

- (a) La définition par A. Beilinson et Saitô T. du support singulier d'un faisceau constructible – et des multiplicités permettant de le raffiner en un cycle caractéristique – conduisent naturellement à des questions de dépendance en le faisceau (de torsion variable) du type de celles considérées ici.
- (b) Sans être aussi ambitieux que de souhaiter démontrer des théorèmes de type Riemann-Roch, il devrait être possible de considérer des faisceaux *sauvagement* ramifiés, de façon « bornée ».

6.3. Une variante localement unipotente, dont l'énoncé et une esquisse de démonstration se trouve déjà dans [PINK 1995], est également considérée. On peut la voir comme une généralisation du théorème [BERTHELOT 1997, 6.3.2] de P. Deligne selon lequel

si X est un schéma algébrique sur le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète hensélien de caractéristique résiduelle p , il existe un sous-groupe ouvert I' de l'inertie $I \subseteq \text{Gal}(K^{\text{sép}} / K)$ tel que pour chaque $\ell \neq p$, l'action de I' sur les $H^*(X_{K^{\text{sép}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ et $H_c^*(X_{K^{\text{sép}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ soit unipotente.

(Ce résultat améliore le théorème de monodromie locale de Grothendieck : on peut choisir I' *indépendamment de ℓ* .) Le résultat précédent (ainsi que ceux de [KATZ et LAUMON 1985]) est un ingrédient essentiel dans la démonstration donnée dans [SERRE 2013] de la presque indépendance des représentations ℓ -adiques (pour ℓ variable) associées à une variété algébrique sur un corps de nombres. De même, notre théorème peut être utilisé pour démontrer l'extension du théorème de J.-P. Serre précédent au cas des schémas algébriques sur le point générique d'une variété de type fini sur un corps algébriquement clos. Un tel résultat a été établi dans [BÖCKLE, GAJDA et S. PETERSEN 2015], dont le lien avec notre travail est expliqué en détail dans [S. PETERSEN 2014, chap. 3]. Notons que dans la version publiée de cet article, les auteurs utilisent l'existence d'un ouvert de lissité indépendant de ℓ *pour les coefficients constants* – de sorte que [ILLUSIE 2010] suffit – et la semi-stabilité uniforme est établie par restriction aux courbes à la *Wiesend* (cf. [BÖCKLE, GAJDA et S. PETERSEN 2015, §4][Ⓟ]) et recours à [DELIGNE 1973, 9.8]. On peut cependant penser que notre théorème ci-dessus puisse être utile pour des variantes relatives, à énoncer, du résultat principal de [BÖCKLE, GAJDA et S. PETERSEN 2015].

6.4. La démonstration que nous donnons du théorème 6.2 est sans surprise. On commence par traiter le cas d'un morphisme propre ; par un lemme d'O. Gabber, on peut supposer le morphisme surjectif. Par des dévissages classiques, reposant sur théorème de fibration en courbes nodales établi dans [A. J. DE JONG 1997] – et, bien sûr, une (multiple) récurrence –, on se ramène à une situation où un résultat de (log-)acyclicité bien connu s'applique et permet de conclure. Le cas général, c'est-à-dire d'un morphisme non nécessairement propre, se ramène au cas d'une immersion ouverte. Comme dans les travaux de O. Gabber esquissés en 4.6 on

[Ⓟ]. D'après les auteurs ([*ibid.*, §6, p. 17], l'une des vertus de leur méthode est de donner une construction « effective » d'une extension finie modérant leurs représentations, contrairement à [30]=[ORGOGOZO 2017]. Pourtant, la détermination d'un corps K' comme dans [BÖCKLE, GAJDA et S. PETERSEN 2015, cor. 6.3] ne semble pas effective, sauf à utiliser les résultats du chapitre suivant.

veut utiliser la descente cohomologique, résolution des singularités et la pureté. La principale différence est que pour établir la modération de, disons, $j_* \mathcal{A}$, il ne suffit pas de montrer que ses restrictions à un fermé $i : F \hookrightarrow X$ et à l'ouvert complémentaire $X - F$ sont modérées : il faut donc légèrement raffiner l'approche précédente, en considérant pas seulement les restrictions mais plus précisément leurs prolongements par zéro.

REMARQUE. En plus de [KATZ et LAUMON 1985, §3] (uniformité pour des coefficients non nécessairement constants, par une méthode pré-de Jong) et [ILLUSIE 2010] (uniformité pour des coefficients constants, utilisant de Jong), notre théorème et sa démonstration sont à rapprocher de l'article [KATZ 2001], dans la seconde partie duquel les coefficients font partie d'un *système compatible*. Il y a un lien, classique, entre l'appartenance à un tel système et notre hypothèse de modération uniforme : par la formule des traces de Grothendieck, la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau se lit sur sa fonction L . (On suppose que le corps de base est la clôture algébrique d'un corps fini.) Si X est une courbe — cas auquel N. Katz se ramène dans sa majoration uniforme des nombres de Betti d'un système compatible de faisceaux lisses —, la modération d'un faisceau se teste, d'après la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič, sur sa caractéristique d'Euler-Poincaré. (Ce fait est d'ailleurs utilisé dans [DELIGNE 2012].)

Calculabilité

7. Introduction

Si k est un corps algébriquement clos et X un k -schéma algébrique sur lequel un nombre premier ℓ est inversible, un théorème de P. Deligne — dont on a vu des généralisations dans le chapitre précédent — affirme que chaque \mathbb{F}_ℓ -espace vectoriel $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ est de dimension finie. Si X est par exemple une courbe, une variété abélienne, une grassmannienne, une hypersurface de Fermat, on sait calculer ces nombres de Betti (et les variantes ℓ -adiques), par des arguments qui semblent dépendre de X . Une question naturelle est donc de savoir si une « nouvelle idée » est nécessaire à ce calcul lorsque l'on considère une nouvelle variété ou bien s'il existe une méthode générale, un algorithme. Cette question est d'ailleurs explicitement mentionnée par Torsten Ekedahl sur le site [mathoverflow](#) :

I asked Deligne about [sa démonstration de l'hypothèse de Riemann et l'utilisation présumée de cardinaux inaccessibles] what he thought and he agreed with me. (He also told me that he had spent some time trying to see if étale cohomology was recursively computable and had been able to conclude that with torsion coefficients it was but had been unable to get recursively computable bounds on the order of torsion in ℓ -adic cohomology.)

Dans [MADORE et ORGOGOZO 2015], on trouve notamment une vérification de ce fait (pour les coefficients de torsion), dont voici un énoncé un peu plus précis :

THÉORÈME (D.0.1). *Il existe un algorithme calculant la cohomologie étale $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ à coefficients dans \mathbb{F}_ℓ d'un schéma algébrique X sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de ℓ , ainsi que l'application $H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{F}_\ell)$ déduite par functorialité d'un morphisme $Y \rightarrow X$.*

Pour le sens exact à donner à cet énoncé, nous renvoyons à [D.11.6](#), [D.3.4.1](#) ; la seule intuition de ce qu'est un « algorithme » (=une machine de Turing=...) suffit pour lire ce qui suit. (En particulier : nous ne discutons pas ici de la façon dont on décrit un corps — voir [D.12.0.1](#) —, un espace vectoriel, ou un schéma algébrique. La difficulté n'est pas là.)

Pour des améliorations de cet énoncé — calcul de l'action galoisienne, de $R\Gamma(X, \mathbb{F}_\ell)$, cas des coefficients constructibles et images directes par un morphisme —, voir par exemple [[ibid.](#), 9.2, 8.4, 11.4] et *infra*.

Notons que la seule existence d'un algorithme comme ci-dessus entraîne par exemple que si $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{A}_k^r$ est un morphisme de type fini et ℓ fixé inversible sur k , il existe une stratification de l'espace affine au-dessus de laquelle les fibres ont même cohomologie modulo ℓ . (Cela résulte bien entendu des théorèmes généraux de constructibilité et commutation au changement

de base.) Comme on l'a vu au chapitre précédent, on peut même trouver des stratifications indépendantes de ℓ .

✱

Si notre résultat nous semble être, *sur le plan théorique*, une avancée dans la compréhension de la cohomologie étale, il est, *sur le plan pratique*, sans conséquence : on ne sait rien du nombre d'opérations à effectuer pour calculer un nombre de Betti modulo ℓ d'une variété donnée et notre algorithme utilise de façon cruciale le choix du nombre premier ℓ , sans apporter d'éclairage sur la dépendance en ℓ . En particulier, on ne fait aucun progrès sur des questions comme [SERRE 2012, 2.1.4, 2.2.4] — dénombrement en temps polynomial en $\log(p)$ de $X(\mathbb{F}_p)$ pour X de type fini sur \mathbb{Z} — ou [EDIXHOVEN et COUVEIGNES 2011, §Point counting in a more general context (épilogue)] :

Let us consider, for example, a smooth surface S in $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^3$ of degree at least 5, say. Letting ℓ be a prime number, one has the cohomology groups $H^i(S_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{F}_{\ell})$ for $0 \leq i \leq 4$, being finite dimensional \mathbb{F}_{ℓ} -vector spaces with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -action. It seems reasonable to suspect that, again, there is an algorithm that on input a prime ℓ computes these cohomology groups, with their $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -action, in time polynomial in ℓ . Once such an algorithm is known, one also has an algorithm that, on input a prime p of good reduction of S , gives the number $\#S(\mathbb{F}_p)$ of \mathbb{F}_p -valued points of S in time polynomial in $\log p$.

Même si l'on sait beaucoup moins que l'on aimerait (même à ℓ fixé) — nous terminerons d'ailleurs par quelques questions naturelles ouvertes —, notre résultat est malgré tout un point de départ pour d'autres calculs en géométrie arithmétique ; voir par exemple [POONEN, TESTA et LUIJK 2015], sur le calcul du groupe de Néron-Severi (conditionnellement à la conjecture de Tate).

8. Calculabilité et suites spectrales

Nous ne reproduisons pas ici l'essentiel des explications données en [MADORE et ORGOGOZO 2015, introduction et 10.1] pour présenter les grandes lignes de l'argument[Ⓢ]. Cependant, il est peut-être intéressant d'insister sur un argument mal mis en valeur dans *op. cit.*

On fixe un corps algébriquement clos k et ℓ un nombre premier inversible sur k .

8.1. Commençons par une remarque évidente : pourquoi notre théorème n'est-il pas absolument trivial ? Bien que cela n'explique rien, disons tout d'abord que, s'il l'était, il en serait de même du théorème de finitude de P. Deligne. Avant de revenir à la question précédente, il est aussi naturel de se demander pourquoi le théorème de finitude sus-mentionné ne pourrait pas être adapté pour fournir un calcul des nombres de Betti. Après tout, la finitude se ramène par descente cohomologique et pureté à celle de variétés propres et lisses, dont on sait calculer les nombres de Betti ℓ -adiques (par comptage, sur les corps finis)... Malheureusement, même

[Ⓢ]. La démonstration est assez indirecte. Comme nous l'a fait remarquer P. Deligne, on aurait aimé rendre effective la démonstration de « $Rf_!(\text{constructible}) = \text{constructible}$ » ; nous n'avons pas réussi.

en mettant de côté la subtile différence entre « ℓ -adique » et « modulo ℓ », on voit bien que notre mauvaise compréhension des différentielles apparaissant notamment dans la suite spectrale de descente ne nous permet pas d'aboutir à un calcul des nombres de Betti : on obtient seulement des *majorations*, comme nous l'avons vu au chapitre précédent.

En géométrie algébrique la définition des groupes de cohomologie fait intervenir, selon le point de vue, des objets gigantesques ou des passages à la limite : dans un cas comme dans l'autre cet « infini », qui ne disparaît qu'*a posteriori*, est à l'origine des difficultés à les calculer (ou simplement d'établir leur finitude). C'est clair si on les considère sous l'angle des résolutions flasques de Godement (gros objets) ou, à la Čech, via des hyperrecouvrements (passage à la limite). Notre point de départ est de mêler cette seconde approche avec l'idée classique — ayant déjà eu des applications importantes, dues par exemple à M. Artin et Gerd Faltings — de couvrir la variété dont on souhaite calculer la cohomologie par des espaces $K(\pi, 1)$ — faute d'avoir suffisamment de variétés acycliques — pour se ramener à des calculs de cohomologie galoisienne.

8.2. On utilise donc — encore ! — le théorème de résolution des singularités de de Jong et un résultat de Friedlander (dont nous présentons une autre approche, due à O. Gabber) selon lequel, localement pour la topologie étale, un k -schéma lisse est ce que nous appelons un $K(\pi, 1)$ *pro- ℓ* : (dans le cas connexe) sa cohomologie à valeurs dans un faisceau abélien lisse de ℓ -torsion et à monodromie un ℓ -groupe reçoit isomorphiquement la cohomologie de son groupe fondamental *pro- ℓ* Π_X (agissant sur la fibre).

8.3. Les groupes $H^1(X, G)$, où G est un groupe fini d'ordre inversible sur X , étant calculables, les quotients $\Pi_X^{(n)}$ de Π_X par la série ℓ -centrale descendante (dont le premier terme est le quotient de Frattini) le sont également. Si X est un $K(\pi, 1)$ *pro- ℓ* , on a donc

$$H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z}) = \operatorname{colim}_n H^i(\Pi_X^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z}),$$

où chaque terme de la colimite de droite est (fini) calculable. Mais, même dans ce cas, il n'est pas clair que l'on ait fait un quelconque progrès : le passage à la limite sur n est encore *a priori* mystérieux. Pourtant, les $K(\pi, 1)$ *pro- ℓ* que nous utilisons sont d'origine géométrique : il s'agit de polycourbes, et leur Π_X est extension itérée de *pro- ℓ* -groupes libres. La colimite est parfaitement explicite lorsque Π_X est (*pro- ℓ* -)libre ; c'est rassurant, mais dans le cas général la non-exactitude du foncteur $\Pi_X \mapsto \Pi_X^{(n)}$ complique le passage de la description explicite de la cohomologie des courbes à celle de la polycourbe. Heureusement, on contrôle le décalage induit par ce défaut d'exactitude en termes du nombre de (*pro- ℓ* -)générateurs des groupes libres en question (c'est-à-dire, ici, le genre des courbes affines apparaissant dans la fibration et le nombre de points à l'infini). C'est l'objet de ce que nous appelons le « lemme d'Artin-Rees-Frattini effectif » (D.6.3), dont l'énoncé est dû à O. Gabber.

8.4. Sans être rentré dans les détails, il est probablement clair que nous restons confrontés à deux problèmes sérieux (résolus de la même façon) :

- (i) si X est une bonne polycourbe, en particulier un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ , même si pour chaque n le groupe fini $\Pi_X^{(n)}$ était extension de deux groupes $\Pi_Y^{(n)}$ et $\Pi_Z^{(n)}$ pour lesquels on peut calculer explicitement chaque $\text{colim}_n H^i(\Pi_Y^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})$ et $\text{colim}_n H^j(\Pi_Z^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})$ (et des variantes à coefficients dans des systèmes locaux), il resterait à décrire explicitement la colimite de l'aboutissement de la *suite spectrale* d'Hochschild-Serre associée à l'extension

$$\Pi_Y^{(n)} \rightarrow \Pi_X^{(n)} \rightarrow \Pi_Z^{(n)}.$$

- (ii) si X est (hyper)recouvert par de bonnes polycourbes X_i , même si pour chaque i et chaque j on sait calculer explicitement la colimite $\text{colim}_n H^j(\Pi_{X_i}^{(n)}) = H^j(X_i)$, il reste à décrire explicitement la colimite (en n) de l'aboutissement de la *suite spectrale* de descente cohomologique dont la page E_2 est constituée de groupes $H^j(\Pi_{X_i}^{(n)})$.

Ce problème d'algèbre homologique mêlant colimites et suites spectrales a heureusement déjà été considéré par les topologues (et, sans grande surprise, résolu indépendamment par O. Gabber). C'est sur ce point que nous avons souhaité insister dans cette esquisse.

8.5. Commençons par formaliser un peu ce que l'on entend par « une description explicite d'une colimite ». Un système inductif $A_\bullet = (A_n)$ indexé par \mathbb{N} d'une catégorie abélienne est dit *c-essentiellement constant*, où c est une fonction $\mathbb{N}_{\geq i_0} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, si la colimite $A_\infty = \text{colim}_n A_n$ est représentable et si pour chaque $i \geq i_0$ on a $c(i) = (j, k)$ avec $i \leq j \leq k$ et $\text{Im}(A_j \rightarrow A_k) \simeq A_\infty$.

Bien entendu, si les A_n et A_∞ sont noéthériens, une telle fonction existe toujours.

Cette donnée est aussi appelée, dans le cas particulier des \mathbb{Z} -modules de type fini, « module de Schön » par les auteurs de [RUBIO et SERGERAERT 2002] qui font référence à un travail peu connu de Rolf Schön ([SCHÖN 1991, A Five Lemma for Calculations in Homological Algebra]), qui s'intéresse au calcul effectif des groupes d'homotopie en topologie algébrique. Nous en reproduisons le résumé :

As a rule, exact sequences in homological algebra do not give complete information about an object one wants to compute. This note shows, that at least in principle full information can be received, if homological algebra is restricted to finitely generated abelian groups [...]. Roughly speaking, we get then the result, that the middle term of a 5-term exact sequence is calculable, if the other four are. As a first step towards applications we prove a calculability proposition for spectral sequences or maps. [...]

Le résultat clef d'épaisseur de ces systèmes est le suivant :

LEMME (D.5.5). *Soit $0 \rightarrow A'_\bullet \rightarrow A_\bullet \rightarrow A''_\bullet \rightarrow 0$ une suite exacte de systèmes inductifs. Si deux des trois termes sont explicitement essentiellement constants, il en est de même du troisième.*

Cette observation, de démonstration immédiate, faite, on obtient le résultat désiré pour l'aboutissement de suites spectrales dont la première page est explicitement essentiellement constante (après troncation arbitraire). Les problèmes rencontrés au paragraphe précédent s'évanouissent.

9. Remarques

9.1. Groupes fondamentaux. Notons que même si notre approche fait jouer un rôle crucial au groupe fondamental des variétés en jeu, et utilise la possibilité de déterminer certains de leurs « ℓ -quotients », la structure de ce groupe n'en reste pas moins mystérieuse^⑦.

Voici deux exemples de questions qui me semblent naturelles — quoique peut-être naïves, d'autant plus vraisemblablement que je ne suis pas un expert de ces questions —.

Sur la functorialité, dans le cas des courbes.

Si X est une courbe lisse (non nécessairement propre) sur un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique p , on connaît la structure du groupe fondamental pro- p' : c'est le complété (pro- p') d'un groupe explicite bien connu P_X . Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme (disons, fini, génériquement étale) de k -courbes lisses, le morphisme induit sur les groupes fondamentaux pro- p' provient-il d'un morphisme de groupes $P_Y \rightarrow P_X$? peut-on le calculer ?

Sur la finitude, dans le cas des surfaces.

Si maintenant X est une surface, il est démontré dans [Michèle RAYNAUD 1972] que le groupe fondamental (pro- p') de X est topologiquement de présentation finie. Est-ce le complété pro- p' d'un groupe discret de présentation finie, et dans ce cas, peut-on décrire un tel groupe discret ?

Pour chacune de ces questions, il faudra certainement — dans l'état actuel de nos connaissances — passer par des relèvements en caractéristique nulle. Ou bien identifier des quotients intéressants pour lesquels on puisse procéder purement algébriquement.

9.2. « Recherches non bornées ». Une première amélioration évidente de notre résultat serait d'éliminer le recours à des « recherches non bornées » c'est-à-dire des énumérations d'objets, jusqu'à en trouver un (dont l'existence est garantie) satisfaisant une propriété algorithmiquement testable, sans majoration *a priori* de la longueur de la recherche. Un exemple est notre usage de résultats de désingularisation : un théorème affirme qu'il existe une altération d'un schéma X de source lisse ; on les teste une par une... Dans ce but, il serait intéressant que des spécialistes reprennent les travaux de [A. J. DE JONG 1996] sous un angle algorithmique. (Voir §D.11.6 pour une présentation informelle mais plus précise de la distinction entre fonction récursive et récursive *primitive*.)

« Virtuellement », la situation est plus simple : si l'on souhaite calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré, les dévissages rendus possibles par l'additivité de χ sont plus élémentaires et il n'est pas difficile de voir que notre méthode fournit un algorithme *primitif récursif* de calcul de $\chi(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ dans le groupe de Grothendieck, muni d'une action du groupe de Galois si X est obtenu par extension des scalaires. Ce résultat a été obtenu indépendamment par Jinbi Jin dans sa thèse (Leyde, 2017).

^⑦. La preuve en est que, comme chacun sait, on ne sait toujours pas démontrer que le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est isomorphe à un groupe pro-libre à deux générateurs sans utiliser de théorème de comparaison [dû à Riemann ici], malgré des résultats pour certains quotients ; cf. [LIEBLICH et OLSSON 2010].

9.3. Variante ℓ -adique et 1-motifs. Comme la caractéristique d'Euler-Poincaré, il est classique que les groupes de cohomologie en degrés extrêmes — les H^1 et H^{2d-1} , si $\dim(X) = d$; et leurs variantes à support compact — sont, comparativement, mieux connus. Plus encore que l'amélioration de « récursif » en « primitif récursif », c'est peut-être l'analogie ℓ -adique qu'il serait intéressant de considérer en ces degrés. (Le cas général étant largement ouvert : le passage à la limite sur r dans $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})$ reste mystérieux.) Faisant suite à des travaux comme [BARBIERI-VIALE et SRINIVAS 2001] sur une conjecture de P. Deligne, Peter Mannisto a montré dans sa thèse (Berkeley, 2014; voir [MANNISTO 2013]) qu'il existe des 1-isomotifs dont les réalisations ℓ -adiques sont les groupes de cohomologie ℓ -adiques correspondant. Ces 1-motifs sont-ils calculables ?

On trouvera une courte liste de questions également naturelles en [D.11.5](#).

Liste des travaux présentés

Articles

- GABBER, Ofer et Fabrice ORGOGOZO (2008). « Sur la p -dimension des corps ». *Invent. math.* **174**(1), 47–80 (↑ p. [15](#), [16](#)).
- MADORE, David et Fabrice ORGOGOZO (2015). « Calculabilité de la cohomologie étale modulo ℓ ». *Algebra & Number Theory* **9**-7, 1647–1739 (↑ p. [21](#), [22](#), [93](#), [134](#)).
- ORGOGOZO, Fabrice (2006). « Modifications et cycles proches sur une base générale ». *Int. Math. Res. Not.* Art. ID 25315, 38 (↑ p. [6](#), [10](#), [98](#), [99](#), [107](#), [118](#)).

Livre (édition)

- STG** Luc ILLUSIE, Yves LASZLO et Fabrice ORGOGOZO (2014). *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008*. Astérisque **363–364**. Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng. Société mathématique de France, xxiv+627 pages.

Chapitres dans [STG]

- STG II Fabrice ORGOGOZO. « Topologies adaptées à l'uniformisation locale ».
- STG IV Fabrice ORGOGOZO. « Le théorème de Cohen-Gabber ».
- STG V Fabrice ORGOGOZO. « Algébrisation partielle ».
- STG VII Fabrice ORGOGOZO. « Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible) ».
- STG XII_A Fabrice ORGOGOZO. « Descente cohomologique orientée ».
- STG XII_B Weizhe ZHENG [郑维喆]. « On hyper base change ».
- STG XIII Fabrice ORGOGOZO. « Le théorème de finitude ».
- STG XVIII_B Fabrice ORGOGOZO. « Dimension cohomologique : raffinements et compléments ».

Manuscrits

- MADORE, David et Fabrice ORGOGOZO (2008-2013). *Théorie de Galois et ses ramifications* (↑ p. [3](#), [27](#)).
- ORGOGOZO, Fabrice (2017). « Sur les propriétés d'uniformité des images directes en cohomologie étale ». (prépublication disponible sur arXiv) (↑ p. [14](#), [17–19](#), [139](#)).

[MADORE et ORGOGOZO 2008-2013] est un livre inachevé d'environ 500 pages couvrant différents aspects de la théorie de Galois : les fondements de la théorie classique ainsi que quelques sujets plus avancés (algèbres d'Azumaya, thèse de Tate, théorème de Čebotarev [sous la forme plus faible due à Frobenius]) en passant par des aspects algorithmiques, accompagnés de nombreux exemples. Non présenté dans ce mémoire.

Articles

Modifications et cycles proches sur une base générale

Introduction

On se propose de démontrer un analogue en cohomologie étale du théorème principal de [SABBAH 1983], conjecturé par Pierre Deligne, selon lequel tout morphisme de schémas acquiert un comportement de « morphisme sans éclatement », quitte à effectuer une modification de la base. Nous renvoyons à [A.1.1](#) pour un énoncé précis en termes de cycles évanescents (ou plutôt « proches ») — dont la définition est rappelée en ¶1 — sur une base générale.

Le théorème principal de cet article entraîne en particulier que sur une telle base, contrairement au cas où celle-ci est un trait, si les cycles évanescents ne commutent plus nécessairement aux changements de base, cela est malgré tout vrai *localement pour la topologie de la descente effective universelle*.

Ces résultats généralisent également ceux de Roland Huber [HUBER 1996], §4.2, sur la cohomologie des cycles proches quand la base est le spectre d'un anneau valuatif (cf. [A.4.3](#)). Ces derniers sont une étape importante dans la démonstration des théorèmes de commutation au changement de base et constructibilité de *op. cit.*

Les cycles proches dont il est question ont été introduits par P. Deligne à l'occasion d'un séminaire à l'IHÉS sur les fonctions L il y a une vingtaine d'années et généralisent ceux définis par Alexandre Grothendieck dans [SGA 7 I]. C'est un moyen commode de regrouper la cohomologie des différents « tubes de Milnor » $X(x) \times_{S(s)} S(t)$ où t est une généralisation de $s = f(x)$ (les points sont géométriques), lorsque que l'on se donne un morphisme de schémas $X \xrightarrow{f} S$ et un faisceau étale \mathcal{F} sur X . Ces tubes apparaissent naturellement quand on calcule la fibre en t d'un faisceau $R^i f_{x*} \mathcal{F}$, où f_x est le morphisme local $X(x) \rightarrow S(s)$ induit par f entre les hensélisés stricts en x et s (les « petites boules » centrées en ces points). Dans ce langage, le théorème principal affirme qu'après modification de la base, les morphismes f_x se comportent cohomologiquement comme des morphismes propres (à \mathcal{F} fixé).

L'ingrédient essentiel de notre démonstration est un théorème sur les fibrations pluri- nodales dû à A. Johan de Jong ([A. J. DE JONG 1997]), auquel s'ajoutent le théorème d'acyclicité locale des morphismes lisses [SGA 4 XV, 2.1] et le théorème de changement de base propre [SGA 4 XII, 5.1].

Enfin, en guise d'application de ces topos exotiques, mais dans le cas beaucoup plus simple des singularités isolées (cf. ¶5), nous donnons en ¶A.11 une démonstration de la conjugaison des cycles évanescents associés à un pinceau de Lefschetz, plus proche de l'intuition topologique et également valable en caractéristique deux. L'ingrédient clef est ici dû à Ofer Gabber.

Remerciements. Je remercie très chaleureusement OFER GABBER et LUC ILLUSIE de m'avoir suggéré ce problème. C'est également avec plaisir que je remercie JÁNOS KOLLÁR d'avoir gentiment répondu à quelques questions naïves et le rapporteur pour sa patience, ses nombreuses relectures extrêmement attentives et ses commentaires utiles et détaillés, particulièrement dans les sections A.3, A.8 et A.10. J'ai également grandement bénéficié de discussions avec LUC ILLUSIE. Enfin, je suis tout particulièrement reconnaissant envers OFER GABBER de m'avoir expliqué la proposition A.3.2.1 à un moment critique, ainsi que de m'avoir fait part de ses précieuses remarques à l'origine de nombreuses améliorations.

Commutation aux changements de base

A.1. Cycles proches sur une base générale (rappels) et énoncé du théorème

Pour tout morphisme de topos $\mathfrak{f} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$, on peut définir un troisième topos $\mathfrak{X} \overleftarrow{\times}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}$ ([LAUMON 1983], ¶3) solution d'un problème universel 2-catégorique, dont les points sont les paires $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ où \mathfrak{x} est un point de \mathfrak{X} et \mathfrak{t} une généralisation de $\mathfrak{f}(\mathfrak{x})$. Ce topos est naturellement équipé d'un morphisme $\Psi_{\mathfrak{f}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \overleftarrow{\times}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}$, correspondant sur les points à $\mathfrak{x} \mapsto (\mathfrak{x}, \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \xrightarrow{\text{id}} \mathfrak{f}(\mathfrak{x}))$ ainsi que de deux projections $p : \mathfrak{X} \overleftarrow{\times}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{X}$ et $q : \mathfrak{X} \overleftarrow{\times}_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$.

Si l'on suppose maintenant que \mathfrak{X} (resp. \mathfrak{S}) est le topos étale associé à un schéma X (resp. S), et \mathfrak{f} induit par un morphisme de schémas $f : X \rightarrow S$, on montre que pour tout faisceau \mathcal{F} sur \mathfrak{X} , la fibre de $R\Psi_{\mathfrak{f}*} \mathcal{F}$ en un point $(\mathfrak{x}, \mathfrak{t})$ est isomorphe à $R\Gamma(X(\mathfrak{x}) \times_{S(\mathfrak{f}(\mathfrak{x}))} S(\mathfrak{t}), \mathcal{F})$.

Dorénavant, on confondra X avec le topos étale associé, afin d'alléger les notations.

Un anneau commutatif Λ étant donné, le foncteur « cycles proches » de f est le foncteur dérivé

$$R\Psi_{f*}^{\Lambda} : D^+(X, \Lambda) \rightarrow D^+(X \overleftarrow{\times}_S S, \Lambda).$$

On le notera généralement Ψ_f , l'anneau Λ étant sous-entendu.

Avant d'énoncer le théorème principal rappelons qu'une *modification* (resp. une *altération*) $S' \rightarrow S$ est un morphisme propre surjectif induisant un isomorphisme (resp. un morphisme fini) au-dessus d'un ouvert partout dense, tel que tout point maximal de S' s'envoie sur un point maximal de S . Enfin on rappelle que l'on abrège « quasi-compact et quasi-séparé » en *cohérent*.

A.1.1. THÉORÈME. Soient S un schéma cohérent n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles (par exemple un schéma noethérien), $f : X \rightarrow S$ un morphisme de présentation finie, n un entier inversible sur S et $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. Alors, le complexe $\Psi_f(\mathcal{K})$ n'a pas de cohomologie en grand degré et il existe une modification $S' \rightarrow S$ telle que l'on ait la propriété suivante : notant $f_{S'}$ (resp. $\mathcal{K}_{S'}$) le morphisme $f \times_S S' : X' \rightarrow S'$ (resp. le complexe $\mathcal{K}|_{X'}$), la formation de $\Psi_{f_{S'}} \mathcal{K}_{S'}$ commute à tous les changements de base $g : T \rightarrow S'$. Plus précisément, le morphisme de changement de base ([SGA 4] XII.4 et XVII.2.1)

$$(A.1.1.a) \quad c_{f, \mathcal{K}, T|S'} : \tilde{g}^*(\Psi_{f_{S'}} \mathcal{K}_{S'}) \rightarrow \Psi_{f_T} \mathcal{K}_T$$

associé au diagramme essentiellement commutatif de topos

$$\begin{array}{ccc}
X_{S'} & \xleftarrow{g} & X_T \\
\downarrow \psi_{f_{S'}} & & \downarrow \psi_{f_T} \\
X_{S'} \times_{S'} S' & \xleftarrow{\bar{g}} & X_T \times_T T
\end{array}$$

est un isomorphisme.

Nous verrons dans la seconde partie que l'on peut améliorer cet énoncé (comparaison entre la cohomologie des *tubes* et des *fibres* de Milnor (A.6.1) ; constructibilité (A.7.1)).

Insistons sur le fait que le S -schéma S' dépend de \mathcal{K} .

La démonstration se fait par une triple récurrence sur la dimension de S (que l'on peut supposer finie comme expliqué plus bas), un indice de troncation, et la dimension maximale des fibres de f . On procède par réduction au cas des courbes semi-stables et des faisceaux constants. L'entier n étant choisi une fois pour toutes, on écrira souvent Λ pour $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Le morphisme $f : X \rightarrow S$ étant sous-entendu, pour chaque point (x, t) de $\tilde{X} \times_S S$, c'est-à-dire la donnée un point géométrique x de X et une généralisation géométrique t du point géométrique image de x dans S , on désignera par $X_{x,t}$ le schéma produit fibré $X(x) \times_{S(f(x))} S(t)$; c'est le *tube de Milnor* (de f) en (x, t) .

La démonstration de A.1.1 occupe les trois sections suivantes. Le schéma de la démonstration est expliqué dans le paragraphe A.3.4, qui conclut les dévissages liminaires et détaille la récurrence.

Si m est un morphisme de topos, on écrira principalement (sauf en ¶A.11) m_* pour désigner l'image directe dérivée Rm_* . Enfin, suivant Nicolas Bourbaki, les expressions « inférieur (resp. supérieur) à » et « inférieur (resp. supérieur) ou égal à » sont synonymes.

A.2. Premières réductions

A.2.1. Passage à la limite. Soit S comme en A.1.1 (en particulier, S est quasi-compact) de sorte qu'il existe un recouvrement fini $(S_i)_{i \in I}$ de S par des ouverts affines. Procédant comme en [Michel RAYNAUD et GRUSON 1971], première partie, §5.3.3, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour S affine ; hypothèse que nous pouvons donc supposer satisfaite dans la suite du paragraphe.

Le morphisme f étant de présentation finie, il existe d'après [ÉGA IV₃, 8.9.1], un $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ -schéma affine de type fini S_0 , un morphisme de type fini $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$, un morphisme *dominant* $S \rightarrow S_0$ et un S -isomorphisme $X_0 \times_{S_0} S \simeq X$.

De même, on peut supposer que le complexe borné Λ -*constructible* \mathcal{K} est isomorphe à l'image inverse d'un tel complexe sur X_0 .

Supposons S irréductible, et $S'_0 \rightarrow S_0$ un modification de S_0 comme plus haut. Considérons le morphisme $S' \rightarrow S$ obtenu par changement de base ; c'est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert dense quasi-compact U de S . Soit \tilde{S} l'adhérence schématique dans S' de l'image inverse de U . (L'hypothèse de quasi-compacité est là pour assurer l'existence de l'adhérence schématique, cf. [ÉGA I, 9.5.10].) Le morphisme \tilde{S}/S est une modification (et en particulier

un isomorphisme sur un ouvert *partout dense*), de sorte que la démonstration du théorème se ramène bien au cas où S est affine et de type fini sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$. (Et donc en particulier, noethérien, excellent, affine et de dimension finie.)

Si S n'est pas irréductible, on considère le coproduit de ses composantes irréductibles pour se ramener au cas précédent. Plus exactement, si les S_i sont les composantes irréductibles de S , on choisit pour chaque i un sous-schéma ouvert non vide quasi-compact U_i de S qui ne rencontre pas les S_j pour $j \neq i$. Le coproduit de l'adhérence schématique des U_i est alors une modification de S .

A.2.2. Un résultat d'annulation. Le fait que le complexe $\Psi_f \mathcal{K}$, *a priori* dans $D^+(X \overleftarrow{\times}_S S, \Lambda)$, soit dans $D^b(X \overleftarrow{\times}_S S, \Lambda)$ résulte de la proposition suivante :

A.2.3. PROPOSITION. *Soient N un entier, S un schéma et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, dont les fibres sont de dimension inférieure à N . Si \mathcal{F} est un faisceau abélien de torsion sur X , pour tout point (x, t) de $X \overleftarrow{\times}_S S$,*

$$H^i \Psi_{f, (x,t)} \mathcal{F} \simeq H^i(X(x) \times_{S(f(x))} S(t), \mathcal{F}) = 0$$

dès que $i > 2N$.

Faute de référence, voici une démonstration, communiquée à l'auteur par O. Gabber, évitant ainsi d'avoir recours à une variante tronquée des énoncés principaux.

DÉMONSTRATION. La question étant locale au voisinage de chaque point de X , on peut supposer X affine et même quasi-fini sur le S -espace affine \mathbf{A}_S^N , avec S également affine. Appliquant le Main Theorem de Zariski et prolongeant le faisceau \mathcal{F} par zéro, on peut supposer X fini sur \mathbf{A}_S^N puis finalement X/S *projectif* à fibres de dimension inférieure à N . Soit (x, t) un couple de points géométriques comme dans l'énoncé; notons $s = f(x)$ et supposons pour simplifier les notations que le morphisme $S(s) \rightarrow S$ est un isomorphisme. Notons τ le morphisme essentiellement étale $X(x) \times_S S(t) \rightarrow X \times_S S(t)$. On a $R\Gamma(X(x) \times_S S(t), \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(X \times_S S(t), R\tau_* \mathcal{F})$. De plus, d'après le théorème de changement de base propre, $R\Gamma(X \times_S S(t), R\tau_* \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(X_t, (R\tau_* \mathcal{F})_{X_t})$. Comme X_t est de n -dimension cohomologique étale $\leq 2N$, il suffit de montrer que $H^i((R\tau_* \mathcal{F})_{X_t}) = 0$ pour $i > 0$. Cela signifie que pour tout point géométrique u de X_t , $(R^i \tau_* \mathcal{F})_u = 0$ pour $i > 0$ (on identifie u et son image par le morphisme $X_t \rightarrow X \times_S S(t)$). Cette fibre est isomorphe à $H^i(X(x) \times_X X(u), \mathcal{F})$; d'après [M. ARTIN 1971], 3.4, les composantes connexes de $X(x) \times_X X(u)$ sont strictement locales. Le résultat en découle. L'hypothèse de projectivité est là pour nous assurer que u et x sont contenus dans un même ouvert affine. \square

A.2.4. Des altérations aux modifications. Il suffit de montrer qu'il existe une *altération* $S' \rightarrow S$ telle que les conclusions de A.1.1 soient satisfaites. Cela résulte immédiatement des deux lemmes suivants.

A.2.5. LEMME. *Soit $S' \rightarrow S$ une altération entre schémas noethériens. Il existe deux modifications $\tilde{S} \rightarrow S'$, $S'' \rightarrow S$ et un morphisme fini surjectif $\tilde{S} \rightarrow S''$ tels que le carré*

$$\begin{array}{ccc} S' & \xleftarrow{\text{modif.}} & \tilde{S} \\ \downarrow \text{alt.} & & \downarrow \text{fini} \\ S & \xleftarrow{\text{modif.}} & S'' \end{array}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION. Pour S réduit, c'est un corollaire immédiat du théorème de platitude générique et de [Michel RAYNAUD et GRUSON 1971], I 5.2.2, compte tenu du fait qu'un morphisme propre, plat, génériquement fini est fini et que le transformé propre de S'/S via $S'' \rightarrow S$ domine S' .

Si S n'est pas réduit, on platifie comme ci-dessus le morphisme sur S_{red} par un éclatement $(S_{\text{red}})'' \rightarrow S_{\text{red}}$ d'Idéal \mathcal{I}_{red} . Si \mathcal{I} est un Idéal cohérent sur S qui étend \mathcal{I}_{red} , il suffit alors de définir S'' comme étant l'éclatement de centre \mathcal{I} . Le morphisme induit par functorialité entre les éclatements est une immersion fermée surjective de sorte que la finitude du transformé propre \tilde{S}/S'' résulte du fait analogue sur S_{red} . \square

L'auteur remercie O. Gabber de lui avoir fait cette remarque.

A.2.6. LEMME. *Sous les hypothèses A.1.1, s'il existe S'/S fini surjectif tel que la formation de $\Psi_{f_{S'}} \mathcal{K}'$ commute aux changements de base $T' \rightarrow S'$, alors la formation du complexe $\Psi_f \mathcal{K}$ commute à tous les changements de base $T \rightarrow S$.*

DÉMONSTRATION. Soient $T \rightarrow S$ un morphisme et (x_T, b_T) un point de $X_T \overleftarrow{\times}_T T$ s'envoyant sur le point (x, b) de $X \overleftarrow{\times}_S S$. Il s'agit de montrer que le morphisme canonique $\text{R}\Gamma(X_{x,b}, \mathcal{K}) \rightarrow \text{R}\Gamma(X_{x_T, b_T}, \mathcal{K})$ est un isomorphisme, sachant que cette propriété est vraie après changement de base par S'/S , fini surjectif. On peut supposer T et S strictement locaux, de points fermés les images de x et x_T . Pour chaque entier $q \geq 0$, notons $S^{(q)} = (S'/S)^{q+1}$ le produit fibré itéré (resp. $T^{(q)} = (T \times_S S'/T)^{q+1}$, $X^{(q)} = X \times_S S^{(q)}$, $X_T^{(q)} = X_T \times_T T^{(q)}$). Ils définissent naturellement des hyperrecouvrements propres[ⓐ] cosq_0 de S , T et des différents schémas au-dessus de ceux-ci. Le produit fibré $X_{x,b} \times_S S^{(q)}$ (resp. $X_{x_T, b_T} \times_T T^{(q)}$) se décompose en une somme disjointe $\coprod_{I_q} X_{x_i, b_j}^{(q)}$ (resp. $\coprod_{J_q} X_{x_T, b_T}^{(q)}$), où I_q (resp. J_q) est naturellement en bijection avec l'ensemble des points (x_i, b_j) de $X^{(q)} \overleftarrow{\times}_{S^{(q)}} S^{(q)}$ (resp. $X_T^{(q)} \overleftarrow{\times}_{T^{(q)}} T^{(q)}$) au-dessus de (x, b) (resp. (x_T, b_T)). L'ensemble I_q (resp. J_q) est donc canoniquement en bijection avec $\pi_0(S_b^{(q)})$ (resp. $\pi_0(T_{b_T}^{(q)})$), où les indices désignent ici les fibres des morphismes évidents. (Par exemple $S_b^{(q)}$ est le produit fibré $b \times_S S^{(q)}$, etc.) Ainsi, les suites spectrales de descente associées à $X_{x,b}$ et X_{x_T, b_T} se réécrivent :

[ⓐ] Rappelons brièvement (cf. [DELIGNE 1974b], ¶5) qu'un *hyperrecouvrement propre* d'un schéma S est un objet simplicial S_\bullet de la catégorie des S -schémas (c.-à-d. un foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Sch}_S$) tel que pour chaque entier $n \geq 0$, le morphisme canonique $S_{n+1} \rightarrow (\text{cosq}_n^S(S_\bullet))_{n+1}$ soit propre et surjectif.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^p(\coprod_{I_q} X_{x_i, b_j}^{(q)}, \mathcal{K}) & \Longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(X_{x, b}, \mathcal{K}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^p(\coprod_{J_q} X_{T_{x_{T_i}, b_{T_j}}}^{(q)}, \mathcal{K}) & \Longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(X_{T_{x_T, b_T}}, \mathcal{K})
\end{array}$$

Commençons par remarquer que pour chaque q , les ensembles I_q et J_q sont canoniquement en bijection. C'est un cas particulier du lemme suivant :

A.2.6.1. LEMME. *Soit*

$$\begin{array}{ccc}
T & \longleftarrow & T' \\
\downarrow & \square & \downarrow \\
S & \longleftarrow & S'
\end{array}$$

un carré cartésien avec $S' \rightarrow S$ fini. Alors, pour tout point géométrique t dans T d'image s , $\pi_0(T'_t) \simeq \pi_0(S'_s)$.

(Cela résulte par exemple du théorème de changement de base propre ensembliste pour le morphisme fini S'/S et le faisceau $\{0, 1\}$.)

Comme pour chaque q , les $S^{(q)}$ sont des S' -schémas, l'hypothèse entraîne que pour chaque choix de points de $X^{(q)} \times_{S^{(q)}} S^{(q)}$ et $X_T^{(q)} \times_{T^{(q)}} T^{(q)}$ se correspondant, la flèche verticale de gauche induite sur le facteur direct correspondant est un isomorphisme pour chaque p . \square

Il résulte de [A.2.6](#) que l'on peut supposer le schéma S intègre.

A.3. Réduction au cas « plurinodal »

Supposons S noethérien, intègre. Le problème étant local en haut, on peut supposer f affine puis projectif, donc propre, quitte à prolonger \mathcal{K} par zéro.

A.3.1. Avant d'énoncer le lemme de descente dont nous aurons besoin, introduisons une terminologie utile ici : on dira, $f : X \rightarrow S$, \mathcal{K} et $r \in \mathbf{Z}$ étant donnés, que la formation de $\Psi_f(\mathcal{K})$ r -commute aux changements de base si les cônes des morphismes ([A.1.1.a](#)) n'ont pas de cohomologie en degré inférieur à r , pour tous les morphismes $T \rightarrow S$. On dira qu'il en est ainsi *universellement*, si pour tout $S' \rightarrow S$, $\Psi_{f_{S'}}(\mathcal{K}_{X_{S'}})$ r -commute aux changements de base au sens précédent.

La nécessité d'introduire la variante « universelle » de l'énoncé naïf provient de la troncation : la r -commutation (non nécessairement universelle) entraîne *a priori* seulement la $(r-1)$ -commutation universelle.

A.3.1.1. LEMME. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, $\Lambda = \mathbf{Z}/n$ pour un entier non nul quelconque n et $r \geq -1$ un entier relatif. Supposons qu'il existe un S -hyperrecouvrement propre $X_\bullet \rightarrow X$, tel que la formation des cycles proches $\Psi_{X_i/S}(\Lambda)$ $(r-i)$ -commute (resp. commute universellement) aux changements de base, pour tout $i \in \{0, \dots, r+1\}$. Sous ces hypothèses, la formation de $\Psi_f(\Lambda)$ r -commute (resp. commute universellement) aux changements de base.*

(On dispose d'une variante évidente à coefficients de torsion non constants.)

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer la version non universelle. Soient $T \rightarrow S$ un morphisme et (a_T, b_T) un point de $T \times_T T$ s'envoyant sur (a_S, b_S) dans $S \times_S S$. Notons $i_{a_S}^X : X_{a_S} \hookrightarrow X_{S(a_S)}$ l'immersion fermée, $j_{b_S}^X : X_{S(b_S)} \rightarrow X_{S(a_S)}$ le morphisme induit par localisation étale en bas, et de la même façon les variantes pour X_\bullet . La commutation aux changements de base revient à démontrer que pour tout tel choix le cône du morphisme de changement de base (où l'on note j_* pour Rj_* , conformément à notre convention en usage)

$$i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X \Lambda|_{X_{a_T}} \rightarrow i_{a_T}^{X*} j_{b_T}^X \Lambda$$

n'a pas de cohomologie en degré inférieur à r . En effet, la fibre en x_T à gauche est isomorphe à $\Psi_f(\Lambda)_{(x_S, a_S)}$ si x_S est l'image de x_T dans X_{a_S} , tandis que celle de droite est isomorphe à $\Psi_{f_T}(\Lambda)_{(x_T, b_T)}$. Pour tout S -schéma Z , notons ε_Z l'hyperrecouvrement propre $\varepsilon \times_S Z$ de $X \times_S Z$. Par descente cohomologique les morphismes $\text{Id} \rightarrow \varepsilon_* \varepsilon^*$ sont des isomorphismes; compte tenu également du théorème de changement de base propre pour les ε , on dispose donc d'un isomorphisme canonique :

$$i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X \Lambda \simeq i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X (\varepsilon_{b_S} \varepsilon_{b_S}^* \Lambda) \simeq \varepsilon_{a_S} (i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X \Lambda).$$

Le même résultat étant valable sur T , on a un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} (i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X \Lambda)|_{X_{a_T}} & \longrightarrow & (\varepsilon_{a_S} (i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X \Lambda))|_{X_{a_T}} \simeq \varepsilon_{a_T} \left((i_{a_S}^{X*} j_{b_S}^X \Lambda)|_{X_{a_T}} \right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_{a_T}^{X*} j_{b_T}^X \Lambda & \longrightarrow & \varepsilon_{a_T} (i_{a_T}^{X*} j_{b_T}^X \Lambda) \end{array}$$

L'isomorphisme « en haut à droite » résulte une fois encore du théorème de changement de base propre et de la propriété de ε .

La conclusion résulte alors du lemme général suivant (appliqué au cône des morphismes de changements de base sur les schémas simpliciaux) :

A.3.1.2. LEMME. Soient $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ un topos simplicial augmenté, K_\bullet un complexe de faisceaux de Λ -modules sur X_\bullet concentré en degré supérieur ou égal à -1 et r un entier tel que $\tau_{\leq r-i}(K_\bullet|_{X_i}) = 0$ pour tout $i \in [0, r+1]$. Alors, le complexe de faisceaux $\tau_{\leq r} \varepsilon_* K_\bullet$ (sur X) est nul dans la catégorie dérivée.

DÉMONSTRATION. La suite spectrale ([ibid.], §5.2.7.1 et [SGA 4 Vbis], § 2.5])

$$E_1^{p,q} = H^q \varepsilon_{p*} (K_\bullet|_{X_p}) \Rightarrow H^{p+q}(\varepsilon_* K_\bullet),$$

nous ramène à montrer que si K' est un complexe de faisceaux sur X' tel que $\tau_{\leq n} K' = 0$ alors, pour tout morphisme de topos $e : X' \rightarrow X$, le tronqué $\tau_{\leq n} e_* K'$ est également nul. Ce dernier point est trivial. □

□

A.3.2. Ramenons nous maintenant au cas où le morphisme f est propre et *surjectif*. On a déjà vu que l'on peut supposer f propre et S intègre. Supposons donc $f : X \rightarrow S$ propre et notons F le fermé $f(X) \subset S$, que l'on suppose strict. Admettons l'existence d'une modification $F' \rightarrow F$ de F telle que la conclusion de [A.1.1](#) soit valable pour $f_F : X \rightarrow F$ et \mathcal{K} , après changement de base à $F' \rightarrow F$ (cela résultera de l'étude du cas où f est dominant). Il nous reste à définir une modification de la base S , partant de celle de son sous-schéma fermé F .

Nous allons appliquer le lemme suivant — dont l'énoncé et la démonstration (un peu plus bas) sont dus à O. Gabber — au morphisme composé $g : F' \rightarrow F \rightarrow S$.

A.3.2.1. LEMME. *Soit $g : F' \rightarrow S$ un morphisme propre de schémas noethériens réduits, et posons $F = g(F')$. Il existe un éclatement de centre rare $p : S' \rightarrow S$ et un F -schéma G s'envoyant par un morphisme fini et surjectif sur $p^{-1}(F) = F_{S'}$, et s'envoyant également dans F' .*

Soit $S' \rightarrow S$ comme dans le lemme. Montrons que $\Psi_{f_{S'}} \mathcal{K}$ commute aux changements de base $T \rightarrow S'$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_{F'} & \longleftarrow & X_G \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longleftarrow & f_{F'} & X_{S'} & \longleftarrow & f_G & X_T \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & F' & \longleftarrow & G & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \swarrow & f_{S'} & F_{S'} & \longleftarrow & \text{fini} & F_T \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F & \longleftarrow & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & S & \xleftarrow{p} & S' & \xleftarrow{} & T
 \end{array}$$

où les rectangles et les deux parallélogrammes verticaux sont cartésiens. La formation des cycles proches $\Psi_{f_{F'}} \mathcal{K}$ commute aux changements de base sur F' . On en déduit immédiatement qu'il en est de même pour la formation du complexe $\Psi_{f_G} \mathcal{K}$ relativement aux changements de base sur G . D'après le lemme [A.2.6](#), et puisque le morphisme $G \rightarrow F_{S'}$ est fini et surjectif, la formation de $\Psi_{f_{F_{S'}}} \mathcal{K}$ commute également aux changements de base sur $F_{S'}$, et donc en particulier à $F_T \rightarrow F_{S'}$.

Il nous suffit donc d'appliquer le lemme suivant à $f_{S'} :$

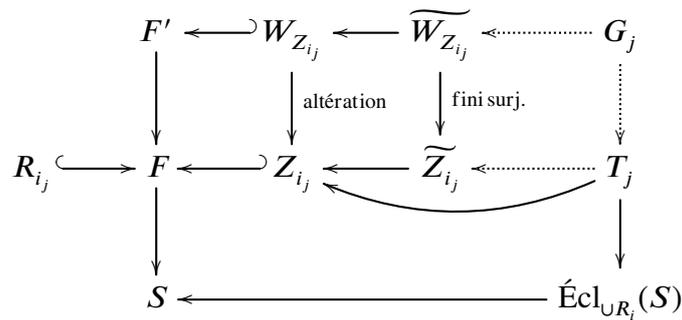
A.3.2.2. LEMME. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, d'image F , n un entier, $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X, \mathbf{Z}/n)$ et $r \in \mathbf{Z}$. Si la formation des cycles proches du couple $(X \rightarrow F, \mathcal{K})$ r -commute aux changements de base relativement à F , il en est de même pour le couple $(f : X \rightarrow S, \mathcal{K})$ relativement à S .*

La variante universelle est un corollaire du lemme.

DÉMONSTRATION. Soient T un S -schéma et (x_T, b_T) un point de $X_T \overset{\leftarrow}{\times}_T T$ d'image (x, b) dans $X \overset{\leftarrow}{\times}_S S$. Il s'agit de montrer que le cône du morphisme $\mathrm{R}\Gamma(X_{x,b}, \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_{T_{x_T, b_T}}, \mathcal{K})$ n'a pas de cohomologie en degré inférieur à r . Deux cas se présentent : soit b_T est localisé en l'ouvert complémentaire de $F_T := F \times_S T$, auquel cas les schémas $X_{x,b}$ et $X_{T_{x_T, b_T}}$ sont vides (et la flèche ci-dessous est un isomorphisme), soit b_T est localisé en F_T . Dans ce dernier cas, le morphisme $X_{F(x)} \times_{F(a)} F(b) \rightarrow X(x) \times_{S(a)} S(b)$ (resp. variante sur T) est un isomorphisme, de sorte que la conclusion résulte de l'hypothèse. (En effet, $X_F = X$ et $F \times_S S(a) = F(a)$ etc.) \square

Il nous reste donc à démontrer le lemme [A.3.2.1](#) pour conclure la démonstration de la réduction [A.3.2](#).

DÉMONSTRATION DU LEMME [A.3.2.1](#). Pour chaque sous-schéma fermé intègre Z du sous-schéma fermé F de S , il existe un sous-schéma fermé intègre W_Z de F' qui est une altération de Z . (Il suffit en effet de prendre l'adhérence d'un point fermé de la fibre de $F' \rightarrow F$ au-dessus du point générique de Z .) D'après [A.2.5](#), il existe un sous-schéma fermé strict R_Z de Z tel que si l'on note \widetilde{Z} et \widetilde{W}_Z les éclatés correspondants, le morphisme induit $\widetilde{W}_Z \rightarrow \widetilde{Z}$ devienne fini surjectif. Pour Z variable, les ensembles localement fermés $Z - R_Z$ recouvrent F . Le schéma F étant noethérien, donc compact pour la topologie constructible, il existe un nombre fini de Z_i, W_{Z_i} et R_{Z_i} tels que les $Z_i - R_{Z_i}$ recouvrent F . Soient maintenant, pour chaque tel indice i , S'_i l'éclatement de S de centre R_{Z_i} , et enfin S' l'éclatement de centre défini par le produit des Idéaux $\mathcal{J}_{R_{Z_i}}$, c'est-à-dire le « plus petit » éclatement dominant tous les S_i . Soient $(T_j)_j$ les composantes irréductibles de $F \times_S S'$. Pour chaque indice j , choisissons un indice i_j tel que le point générique de T_j s'envoie sur un point de $Z_{i_j} - R_{i_j}$. Le schéma T_j s'envoie sur le sous-schéma \widetilde{Z}_{i_j} de S'_{i_j} . Soit G_j le produit fibré $T_j \times_{\widetilde{Z}_{i_j}} \widetilde{W}_{Z_{i_j}}$; il s'envoie par un morphisme fini et surjectif sur T_j et s'envoie également dans F' . L'union disjointe $G := \coprod G_j$ répond donc à la question.



\square

A.3.2.3. REMARQUE. Les modifications de F provenant de S par restriction ne sont pas cofinales parmi les modifications de F . Il est donc nécessaire d'avoir recours à un morphisme intermédiaire (ici fini et surjectif) pour pallier cet inconvénient. Voici un exemple dû à János Kollár : soit $E \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ une courbe elliptique époincée et $F \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 = S$ le cône construit sur E . Soit $F' \rightarrow F$ l'éclatement du sommet du cône. La fibre exceptionnelle de $F' \rightarrow F$ est non

rationnellement connexe alors que les fibres de n'importe quel éclatement de $S' \rightarrow S$ le sont. En particulier, S'_F ne peut pas s'envoyer par un S -morphisme sur F' .

A.3.3. Suivant de près [A. J. DE JONG 1997], 5.8, nous dirons qu'un morphisme est *plurinodal* si c'est l'identité ou s'il est le composé de morphismes projectifs et plats dont les fibres géométriques sont des courbes connexes ayant au pire des singularités quadratiques ordinaires.

Par commodité, nous dirons également qu'un morphisme de schémas est *presque plurinodal* s'il est somme de morphismes plurinodaux et d'un morphisme non dominant.

A.3.3.1. PROPOSITION. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre entre schémas intègres excellents quasi-compacts. Il existe un schéma intègre S' , une altération $S' \rightarrow S$ et un S' -hyperrecouvrement propre $X'_\bullet \rightarrow X_{S'} := X \times_S S'$ tel que X'_0/S' soit presque plurinodal et de fibre générique de dimension égale à celle du morphisme initial X/S .*

En prenant le cosquelette $\text{cosq}_0^{S'}(X'_0/S')$, cela résulte du lemme suivant.

A.3.3.2. LEMME. *Sous les hypothèses de la proposition, quitte à altérer S , il existe une altération $X_0 \rightarrow X$ telle que X_0/S soit presque plurinodal.*

Remarquons que si X/S n'est pas surjectif, il n'y a rien à démontrer.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soient η_S le point générique de S et $\eta' \rightarrow \eta_S$ une extension finie telle que les composantes irréductibles $X_{i\eta'}$ ($i \in I$) de $X_{\eta'}$ soient géométriquement irréductibles. Considérons le normalisé S' de S dans η' ; le morphisme $S' \rightarrow S$ est fini surjectif. Pour $i \in I$, notons X'_i l'adhérence de $X_{i\eta'}$ dans $X_{S'}$ et posons

$$X' := \left(\coprod_{i \in I} X'_i \right) \coprod Y',$$

où Y' est la réunion des composantes irréductibles de $X_{S'}$ ne dominant pas S' . Le morphisme canonique $X' \rightarrow X_{S'}$ est fini surjectif et l'on a $(X'_i)_{\eta'} = X_{i\eta'}$. D'après [A. J. DE JONG 1997], 5.9, il existe, pour chaque $i \in I$, un diagramme *commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X'_i & \xleftarrow{\text{alt.}} & Z_i \\ \text{propre surj.} \downarrow & & \downarrow \text{plurinodal} \\ S' & \xleftarrow{\text{alt.}} & S''_i \end{array}$$

où S''_i et Z_i sont intègres. (Par exemple, pour X'_i/S' fini (surjectif), on peut prendre $Z_i/S''_i = \text{Id}_{S''_i}$.) On peut supposer les S''_i tous égaux à un même S' -schéma que nous noterons S'' . On déduit de ce diagramme un morphisme $Z_i \rightarrow X''_i := X'_i \times_{S'} S''$. Pour chaque i , soit X''_{i0} l'unique composante irréductible de X''_i dominant le schéma S'' et Y''_i la réunion de celles ne le dominant pas. Le morphisme $Z_i \rightarrow X''_i$ se factorise à travers l'immersion fermée $X''_{i0} \hookrightarrow X''_i$ en un morphisme génériquement fini dominant. Finalement, le morphisme canonique $\tilde{Z}_i := Y''_i \coprod Z_i \rightarrow X''_i$ est une altération de sorte que $X_0 := \left(\coprod_{i \in I} \tilde{Z}_i \right) \coprod (Y' \times_{S'} S'')$ répond à la question (au-dessus de S''). \square

A.3.3.3. REMARQUE. Il serait intéressant et, comme l'a observé le rapporteur, non évident que l'on puisse supposer les X'_i/S' pour $i > 0$ de dimension relative inférieure à celle du morphisme de départ f : cela permettrait d'éviter une récurrence indésirée à venir (cf. l'introduction du paramètre auxiliaire r ci-dessous). À cette fin, on pourrait peut-être utiliser des techniques d'hypperrésolutions cubiques ([GUILLÉN et collab. 1988]) qui ont rappelés-le l'avantage, dans le cas classique de la théorie de Hodge, de faire intervenir des schémas (en nombre fini) de dimensions de plus en plus petites (et donc inférieures à celle du schéma de départ).

A.3.4. La (triple) récurrence. On va montrer par récurrence *lexicographique* sur les triplets d'entiers relatifs $t = (\delta \geq 0, r \geq -2, d \geq 0)$ l'énoncé $\mathbf{cb}(t) = \mathbf{cb}(\delta, r, d)$ suivant :

Pour tout schéma noethérien excellent S de dimension inférieure à δ , tout morphisme $f : X \rightarrow S$ de type fini de fibres de dimension inférieure à d , et tout complexe \mathcal{K} sur X de Λ -modules à cohomologie bornée, constructible, et concentrée en degrés positifs, il existe une altération $S' \rightarrow S$ telle que la formation des cycles proches de $(f_{S'}, \mathcal{K}|_{X_{S'}})$ r -commute universellement aux changements de base $T \rightarrow S'$.

Pour f comme plus haut, on notera d_f la dimension maximale de ses fibres.

D'après [A.2.1](#), la démonstration de [A.1.1](#) se ramène au cas où S est de type fini sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$; joint à [A.2.3](#), on en déduit que [A.1.1](#) est un corollaire de, donc équivalent à, la conjonction des $\mathbf{cb}(t)$ pour $t \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}_{\geq -2} \times \mathbf{N}$.

Nous aurons aussi à considérer la variante plus faible $\mathbf{cbpnc}(\delta, r, d)$ suivante (cas des morphismes **plurinodaux** et des coefficients constants) :

Pour tout schéma intègre noethérien excellent S de dimension inférieure à δ , et tout morphisme plurinodal $f : X \rightarrow S$ de dimension relative inférieure à d , il existe une altération $S' \rightarrow S$ telle que $(f_{S'}, \Lambda)$ r -commute universellement aux changements de base $T \rightarrow S'$.

Dans un premier temps, nous allons vérifier l'implication suivante :

$$(\star) \mathbf{cb}(\delta, r - 1, *) + \mathbf{cb}(\delta - 1, r, *) + \mathbf{cbpnc}(\delta, r, d) \Rightarrow \mathbf{cb}(\delta, r, d),$$

où l'étoile $*$ signifie « pour toute valeur du paramètre ».

Dans la section suivante ([¶4](#)), nous montrerons :

$$(\star\star) \mathbf{cb}(\delta, r, d - 1) \Rightarrow \mathbf{cbpnc}(\delta, r, d);$$

on aura alors démontré que la conjonction des $\mathbf{cb}(t' < t)$ entraîne $\mathbf{cb}(t)$.

On initialise la récurrence en observant que $\mathbf{cb}(*, -2, *)$ (et en particulier $\mathbf{cb}(0, -2, 0)$, qui est la borne inférieure de l'ensemble totalement ordonné $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}_{\geq -2} \times \mathbf{N}$) est vrai : les complexes étant concentrés en degrés positifs, la (-2) -commutation est automatique.

Ceci étant, considérons maintenant $t = (\delta, r, d)$ avec $\delta \geq 0$ et $r \geq -1$, (f, \mathcal{K}) comme dans \mathbf{cb} , et établissons la récurrence annoncée (\star) . On peut supposer pour notre propos que le complexe \mathcal{K} est un faisceau constructible, que nous noterons \mathcal{F} , placé en degré nul. Rappelons que le problème étant local, on peut supposer f affine, et prolonger \mathcal{F} par zéro afin de se

ramener au cas où f est *propre*. Le faisceau \mathcal{F} étant constructible, il existe une famille finie $(p_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de morphismes finis et de faisceaux constants constructibles C_i sur les schémas X_i telle que \mathcal{F} s'injecte dans le faisceau constructible $\bigoplus_{i \in I} p_{i*} C_i =: \mathcal{F}'$. Il résulte alors du lemme du serpent que la conclusion de $\mathbf{cb}(t)$ pour (f, \mathcal{F}) , notée $\mathbf{cb}(t, f, \mathcal{F})$, découle de $\mathbf{cb}(t, f, \mathcal{F}')$ et de $\mathbf{cb}(\delta, r-1, d)$ appliqué au conoyau (constructible) de l'injection précédente^②.

Pour tout point (x, t) de $X \times_S \mathcal{S}$, tout morphisme fini $p : X' \rightarrow X$, et tout faisceau C sur X' , on a

$$\mathrm{R}\Gamma(X_{x,t}, p_* C) = \prod_{x'_a \mapsto x} \mathrm{R}\Gamma(X'_{x'_a,t}, C),$$

et ce universellement sur \mathcal{S} , puisque la formation de l'image directe $p_* C$ commute aux changements de base.

Il en résulte qu'il suffit de démontrer les $\mathbf{cb}(t, f \circ p_i, C_i)$ (la notation est licite car $d_{f \circ p_i} \leq d_f$) pour chaque $i \in I$.

Enfin, quitte à remplacer les divers X_i , et \mathcal{S} , par des schémas finis au-dessus de ceux-ci (cf. D.8 et A.2.6), ce qui n'augmente ni δ ni d et laisse f propre, on peut finalement supposer X et \mathcal{S} intègres (en plus d'être noethérien, excellents), f propre et $\mathcal{F} = \Lambda$. Dans ce cas, il résulte de A.3.1.1 et de A.3.3.1, que $\mathbf{cb}(t, f, \Lambda)$ se déduit de $\mathbf{cbpnc}(t)$ (contributions des composantes dominantes du morphisme X'_0/S' de *loc. cit.*), de $\mathbf{cb}(\delta, r-1, *)$ (contribution des X'_i/S' , $i > 0$) et enfin, en vertu de A.3.2, de $\mathbf{cb}(\delta-1, r, *)$ (contribution des composantes non dominantes de X'_0/S'). La fin de la démonstration par récurrence (★★) fait l'objet de la section suivante.

A.4. Le cas plurinodal

Dans cette section on déduit $\mathbf{cbpnc}(\delta, r, d)$ de $\mathbf{cb}(\delta, r, d-1)$. Remarquons que la validité de $\mathbf{cbpnc}(\delta, r, 0)$ est tautologique : le morphisme est l'identité^③.

A.4.1. Supposons donc f plurinodal de dimension relative $d \geq 1$, et \mathcal{S} de dimension δ . Par définition même, on peut factoriser f en

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow h \text{ courbe relative} \\ Y \\ \downarrow g \\ S \end{array} \quad \begin{array}{l} \curvearrowleft f \end{array}$$

②. Cette même méthode permettrait d'éviter le recours aux hyperrecouvrements, que nous avons préféré pour des commodités d'exposition.

③. Bien que cela ne nous soit pas utile, remarquons que l'on pourrait aussi démontrer, indépendamment de la récurrence, les énoncés $\mathbf{cb}(0, *, *)$, en faisant appel à (une variante pour les tubes de) [Th. *finitude*, 2.13], qui affirme que pour \mathcal{S} ponctuel, le morphisme f est universellement localement acyclique relativement à tout objet \mathcal{X} de $D_c^b(X, \Lambda)$.

où h est une courbe relative semi-stable et g est plurinodal de dimension relative $d - 1$ ^④. Le complexe $h_*\Lambda$ appartient à $\text{Ob } D_c^{[0,2]}(Y, \Lambda)$. D'après l'hypothèse de récurrence $\mathbf{cb}(\delta, r, d - 1)$, il existe une altération $S' \rightarrow S$ telle que $\Psi_{g_{S'}}(h_*\Lambda)$ commute universellement aux changements de base au sens r -tronqué. Pour simplifier les notations, supposons $S' = S$.

Soient $T \rightarrow S$ un morphisme, et (a_T, b_T) un point de $\widetilde{T \times_T T}$ d'image (a, b) dans $\widetilde{S \times_S S}$; notons $K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$ un cône du morphisme $\Psi_{a, b}(\Lambda)|_{X_{a_T}} \rightarrow \Psi_{a_T, b_T}(\Lambda)$. Comme h est propre, l'image directe $h_{a_T*}(K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda))$ (sur Y_{a_T}) est isomorphe au cône $K_{a_T, b_T}^{g, T}(h_*\Lambda)$ du morphisme relatif à $(g, h_*\Lambda)$. Cette image directe n'a donc pas de cohomologie en degré inférieur à r et il en est ainsi après tout changement de base. On veut en déduire qu'il en est de même de $K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$; il suffit pour cela de savoir que le support du complexe tronqué en question est fini sur Y_{a_T} . Nous allons montrer que c'est le cas, éventuellement après une modification $S' \rightarrow S$.

A.4.2. LEMME. *Sous les hypothèses précédentes, si $\Psi_g(\Lambda)$ commute au changement de base $T \rightarrow S$, alors, pour tout point géométrique x_T de X_{a_T} localisé au-dessus d'un point de lissité de h , la fibre $K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)_{x_T}$ est nulle.*

On dispose également d'une variante évidente tronquée (resp. tronquée, universelle).

Cette variante du lemme permet de conclure car, quitte à modifier S une fois de plus, on peut supposer, par hypothèse de récurrence, que $\tau_{\leq r} K^{g, T}(\Lambda)$ est nul pour tout T/S (et ce, universellement). Dans ce cas, pour tout choix de points (a_T, b_T) le support de $\tau_{\leq r} K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$ est inclus dans l'image inverse de $\text{Sing}(h)$ sur X_{a_T} , qui est fini sur Y_{a_T} . Comme $h_{a_T*} K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda) = K_{a_T, b_T}^{g, T}(h_*\Lambda)$, on en conclut, en utilisant l'isomorphisme $\tau_{\leq r}(h_*\tau_{\leq r}K) \simeq \tau_{\leq r}(h_*K)$, que $\tau_{\leq r} K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)$ est nul; ce qu'il fallait démontrer.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soit x_T comme dans l'énoncé; notons x_S son image dans X et y_S l'image de x_S dans Y . Par lissité du morphisme h en x_S , le morphisme entre les localisés, $X(x_S) \rightarrow Y(y_S)$ est *universellement* acyclique (pour les complexes bornés constructibles de Λ -modules sur Y). Ainsi, le morphisme canonique $\text{R}\Gamma(Y(y_S) \times_{S(a)} S(b), \Lambda) \rightarrow \text{R}\Gamma(X(x_S) \times_{S(a)} S(b), \Lambda)$ est un isomorphisme; il en est de même sur T . Finalement, les fibres des cônes des flèches de changement de base sont isomorphes et l'on obtient :

$$K_{a_T, b_T}^{f, T}(\Lambda)_{x_T} \simeq K_{a_T, b_T}^{g, T}(\Lambda)_{y_T} = 0.$$

Les variantes se démontrent de même. (Ce lemme est plus suggestivement un corollaire de la formule : $h^*\Psi = \Psi h^*$ pour h lisse.) \square

Ceci achève la démonstration du théorème.

A.4.3. REMARQUE. Le théorème [A.1.1](#) permet de retrouver la proposition 4.2.4 de [HUBER 1996] évoquée dans l'introduction. La raison principale en est qu'une modification d'un schéma valuatif S possède une section (cf. par ex. [ÉGA II, 7.3.1]) si bien que l'on a commutation aux changements de base sur S . Notons à ce propos que la démonstration de Roland Huber,

^④. Le fait que g soit plurinodal n'est pas utilisé dans la démonstration : on se contente (par récurrence) de l'hypothèse sur sa dimension relative.

comme celle de P. Deligne^⑤, n'entraîne pas *a priori* la commutation aux changements de base $T \rightarrow S$ généraux mais seulement ceux où T est un schéma valuatif (dominant S). (Leurs résultats démontrent cependant l'injectivité des morphismes de changements de base pour chaque groupe de cohomologie $H^i\Psi$.)

A.4.4. REMARQUE. Comme l'observe O. Gabber, la conclusion du théorème **A.1.1** vaut également si f est seulement supposé de type fini mais que l'espace topologique sous-jacent à S est noethérien. Si S est affine — cas auquel on s'est ramené en **A.2.1** —, cela résulte du fait que X_{red} est aussi le schéma réduit associé à un S -schéma de présentation finie. (Rappelons que l'espace topologique sous-jacent à $S = \text{Spec}(A)$ est noethérien si et seulement si le radical de tout idéal I de A est égal au radical d'un idéal de type fini ; on utilise alors le fait démontré dans [OHM et PENDLETON 1968] que si X est affine de type fini sur un tel S , l'espace topologique sous-jacent à X est également noethérien.)

A.4.5. Terminons par une question de FUJIWARA Kazuhiro :

Soit (f, \mathcal{K}) comme en **A.1.1**, universellement localement acyclique au-dessus d'un ouvert U de S . Peut-on choisir la modification $S' \rightarrow S$ de loc. cit. de sorte qu'elle soit un isomorphisme au-dessus de U ?

A.5. Le cas des singularités isolées

Dans cette section, on donne une autre démonstration de **cbpnc**($\delta, r, 1$) (cf. §**A.3.4**) indépendante de la récurrence, et qui a surtout l'avantage de montrer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une modification. Plus généralement, la proposition ci-dessous — connue de P. Deligne (au langage près) depuis la fin des années 1970 — traite le cas particulier important des singularités isolées.

A.5.1. PROPOSITION. *Soient $f : X \rightarrow S$ un morphisme séparé de type fini, n un entier inversible sur S et $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X, \mathbf{Z}/n)$ tel que le lieu de non locale acyclicité universelle de (f, \mathcal{K}) ^⑥ soit quasi-fini sur S . Alors, la formation des cycles proches commute aux changements de base $S' \rightarrow S$.*

Pour la commodité du lecteur, nous reprenons l'argument maintenant classique de globalisation par compactification bête de P. Deligne (cf. [**Th. finitude**]), tel qu'expliqué dans [LAUMON 1981, 4.1.2].

DÉMONSTRATION. On peut supposer S et S' strictement locaux. Soit i (resp. i') l'inclusion de la fibre spéciale $X_s \rightarrow X$ (resp. $X_{s'} \rightarrow X'$). De même on définit le morphisme j (resp. j'), $j : X_s \rightarrow X$ (resp. $j' : X_{s'} \rightarrow X'$).

^⑤. La démonstration de [**Th. finitude**, 3.7] contient un trou, observé par FU Lei et corrigé dans [DELIGNE 1999].

^⑥. C'est ici par définition le complémentaire du plus grand ouvert de X sur lequel (f, \mathcal{K}) soit universellement *localement acyclique*, au sens de [**Th. finitude**, 2.12].

Une variante sans doute plus naturelle est de considérer l'ensemble de points où f satisfait ce critère ; toutefois, comme le remarque le rapporteur, il n'est pas évident *a priori* (et quoiqu'il en soit inconnu de l'auteur) que cet ensemble soit constructible.

$X_{S(t)} \hookrightarrow X$; notons $\Psi_{s,t}$ (resp. $\Psi_{s',t'}$) le foncteur i^*Rj_* (resp. $i'^*Rj'_*$) ; il s'agit d'un foncteur cycles proches « tranche par tranche ». On dispose d'une variante évanescence évidente, notée $\Phi_{s,t}$, rendue fonctorielle si on le souhaite en travaillant dans la catégorie dérivée filtrée adéquate.

Soit g le morphisme $X_{s'} \rightarrow X_s$. On a une flèche de changement de base

$$g^*\Psi_{s,t}\mathcal{K} \rightarrow \Psi_{s',t'}\mathcal{K}'$$

et de même pour les cycles évanescents. Remarquons qu'il suffit de démontrer l'isomorphisme pour ces derniers. À cette fin, on démontre le résultat *a priori* plus fort suivant :

Soit x' un point fermé de $X_{s'}$, d'image x , tel que x soit un point isolé de la fibre en s du lieu de non local acyclicité universelle de (X, \mathcal{K}, f) . Alors la flèche de changement de base précédente est un isomorphisme dans un voisinage de x' .

Sous cette forme assouplie, l'énoncé est local au voisinage de x , si bien que l'on peut supposer f propre. La cohomologie des $\Phi_{s,t}(\mathcal{K})$ (resp. $\Phi_{s',t'}(\mathcal{K}')$) est, au voisinage de x (resp. x'), concentré en ce point. Par propriété de f , si l'on applique le foncteur $R\Gamma(X_s, -)$ au triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}|_{X_s} & \xrightarrow{\quad} & \Psi_{s,t}(\mathcal{K}|_{X_{S(t)}}) , \\ & \searrow^{+1} & \swarrow \\ & \Phi_{s,t}(\mathcal{K}|_{X(s)}) & \end{array}$$

on obtient le triangle distingué :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(X_s, \mathcal{K}) & \xrightarrow{\quad} & R\Gamma(X_{s'}, \mathcal{K}) . \\ & \searrow^{+1} & \swarrow \\ & R\Gamma(X_s, \Phi_{s,t}\mathcal{K}) & \end{array}$$

On a un morphisme évident entre ce triangle et son analogue sur S' ; à nouveau par changement de base propre (invariance de la cohomologie par changement de base séparablement clos) les sommets des arêtes horizontales sont isomorphes. Finalement, le morphisme canonique

$$R\Gamma(X_s, \Phi_{s,t}\mathcal{K}) \rightarrow R\Gamma(X_{s'}, \Phi_{s',t'}\mathcal{K}')$$

est un isomorphisme.

Or, par hypothèse $(\Phi_{s,t}\mathcal{K})_x$ (resp. $(\Phi_{s',t'}\mathcal{K}')_{x'}$) est facteur direct de $R\Gamma(X_s, \Phi_{s,t}\mathcal{K})$ (resp. $R\Gamma(X_{s'}, \Phi_{s',t'}\mathcal{K}')$), et ces deux facteurs se correspondent.

L'isomorphisme désiré en découle. □

Terminons cette partie par un complément.

A.6. Calcul des fibres

Étant donné un morphisme $f : X \rightarrow S$ et un faisceau \mathcal{F} sur X , on considère aussi classiquement (cf. [Th. finitude, 2.11]) la cohomologie des fibres de Milnor $X(x) \times_{S(s)} t$ à valeur dans \mathcal{F} en plus de celle des tubes $X(x) \times_{S(s)} S(t)$, considérée dans la première partie. Il résulte immédiatement du théorème A.1.1 qu'après modification de la base, elles sont canoniquement isomorphes. En fait on peut démontrer un résultat plus précis :

A.6.1. THÉORÈME. *Soient $f : X \rightarrow S$ et \mathcal{K} comme en A.1.1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une modification $S'_N \rightarrow S$ de S telle que pour tout S'_N -schéma T , et tout point géométrique x_T de X_T , le couple $(f_{T_{x_T}}, \mathcal{K}|_{X_T})$ soit cohomologiquement propre en degré $\leq N$.*

En particulier, après modification de la base, la cohomologie des tubes de Milnor s'envoie isomorphiquement sur la cohomologie des fibres de Milnor : pour tout point (x_T, b_T) de $X_T \times_T T$, d'image (a_T, b_T) dans $T \times_T T$, le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} T(b_T), \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} b_T, \mathcal{K})$$

est un isomorphisme.

(Comme expliqué ci-dessus, le second point n'est mis que pour mémoire.) Rappelons que la propriété cohomologique en degré $\leq N$ signifie que la formation de l'image directe tronquée $\tau_{\leq N}(\mathrm{R}f_{T_{x_T^*}} \mathcal{K})$ commute aux changements de base $Z \rightarrow T(s_T)$, où s_T est l'image du point géométrique x_T par f_T et $f_{T_{x_T}}$ le morphisme induit entre les localisés stricts. On conjecture (cf. remarque ci-dessous) que la variante non tronquée du théorème est également vraie. Les arguments étant les mêmes que ceux présentés dans les sections précédentes, nous nous contentons d'une esquisse de démonstration.

DÉMONSTRATION. Le « en particulier » vient du fait que ni $\mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} T(b_T), \mathcal{K})$, ni $\mathrm{R}\Gamma(X_T(x_T) \times_{T(a_T)} b_T, \mathcal{K})$ n'ont de cohomologie en degré supérieur à deux fois un majorant strict de la dimension des fibres de f . (On utilise A.2.3 et, en passant à la limite, la dimension cohomologique des schémas de type fini sur $\mathrm{Spec} \kappa(b_T)$.)

Soient $f : X \rightarrow S$ donné, s un point géométrique de S , et enfin Z un $S(s)$ -schéma strictement local de point fermé z (on notera également z le point géométrique correspondant de $S(s)$). On veut montrer que, quitte à modifier S , pour tout point géométrique x de X_s , le morphisme

$$\mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(s)} S(z), \mathcal{K}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(s)} Z, \mathcal{K})$$

associé au diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(x) & & \\ \downarrow f_x & & \\ S(s) & \longleftarrow & Z \longleftarrow z \end{array}$$

a un cône acyclique en degré $\leq N$. On veut également qu'il en soit de même pour (f_T, \mathcal{K}) où T est un S -schéma quelconque. Comme $X(x)$ s'identifie à $X_{S(s)}(x)$, le morphisme précédent

est la fibre en x du morphisme de complexes sur X_s :

$$(\star \star \star) i_s^{X*} j_{S,z*}^X \mathcal{K} \rightarrow i_s^{X*} j_{Z*}^X \mathcal{K},$$

où les morphismes de schémas sont définis ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} X_s & \xrightarrow{i_s^X} & X_{S(s)} & \xleftarrow{j_{S,z}^X} & X_{S(z)} \\ & & \uparrow j_Z^X & \nearrow & \\ & & X_{S(s)} \times_{S(s)} Z & & \end{array}$$

Sous cette forme, l'énoncé est susceptible de pouvoir bénéficier des méthodes globales utilisées précédemment. Plus précisément : les réductions au cas propre, faisceau constant, ainsi que les résultats de D.8 – suite spectrale de descente – et A.2.6 – descente finie – (en particulier les réductions au cas X, S intègres) se transposent immédiatement au présent cadre. Quant à A.3.2.2, il résulte du fait que pour $f : X \rightarrow S$ comme en *loc. cit.*, si l'on considère le diagramme de carrés cartésiens, pour s localisé en F :

$$\begin{array}{ccccc} & & X(x) & \longleftarrow & X(x) \times_{S(s)} Z \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X & \longleftarrow & X_{S(s)} & \xrightarrow{g_x} & X_Z & \xrightarrow{g_{Z,x}} \\ & & \downarrow g & \swarrow f_x & \downarrow & \searrow f_{Z,x} & \downarrow & \downarrow \\ f & & F & \longleftarrow & F_{S(s)} & \xrightarrow{\pi_F} & F_Z & \\ & & \downarrow k & & \downarrow k_s & & \downarrow k_Z & \\ & & S & \longleftarrow & S(s) & \xrightarrow{\pi} & Z & \end{array}$$

on a d'une part $f_{x*} = k_{s*} g_{x*}$ (et la variante sur Z) et d'autre part le théorème de changement de base propre trivial : $\pi^* k_{s*} \simeq i_{Z*} \pi_F^*$. Ainsi, la propriété cohomologique (locale, tronquée) pour (g, \mathcal{K}) entraîne le résultat analogue pour (f, \mathcal{K}) .

Il en résulte que la récurrence exposée en A.3.4 se transpose pourvu que l'on puisse déduire, comme en ¶A.4, la variante plurinodale de l'hypothèse de récurrence. Le dévissage sur la dimension dans le cas plurinodal résulte des deux observations suivantes, où l'on note $K_{f,Z}(\mathcal{K})$ un cône de $(\star \star \star)$.

- $K_{f,Z}$ commute aux images directes propres : pour $f = X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} S$ composé de morphismes propres, et Z comme plus haut, $h_{s*} K_{f,Z}(\mathcal{K})$ est isomorphe à $K_{g,Z}(h_* \mathcal{K})$: c'est un corollaire du théorème de changement de base propre. (Ce fait est également nécessaire pour établir l'analogue de A.3.1.1)
- Dans la situation de A.4.1, si x est un point géométrique de X en lequel h est lisse, et que l'on pose $y = h(x)$, $s = f(x)$, pour Z comme ci-dessus, la fibre $K_{g,Z}(\Lambda)_y$ s'envoie isomorphiquement sur $K_{f,Z}(\Lambda)_x$.

Les détails restants, et plus particulièrement les versions tronquées, ne présentent pas de difficulté et sont laissés au lecteur. □

A.6.2. REMARQUES. On devrait disposer, *après modification de la base*, d'un analogue de la proposition [A.2.3](#) pour les complexes $\mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(s)} Z, \mathcal{K})$. Alternativement, il est vraisemblable, comme le suggère O. Gabber, que l'énoncé de propriété cohomologique se ramène au cas où Z est le spectre d'un anneau de valuation dont le corps des fractions est algébriquement clos ; sous cette hypothèse, O. Gabber sait démontrer le résultat d'annulation requis. Cela permettrait donc d'éviter le recours à des énoncés tronqués.

Enfin, remarquons qu'il aurait été possible de donner une démonstration uniforme du théorème [A.1.1](#) et du théorème précédent mais l'axiomatisation qu'elle requiert ne semble pas de nature à éclaircir l'argument.

A.6.3. Soient S un schéma noethérien, a un point géométrique de S et b une généralisation géométrique de a . Il existe un trait $T_{a,b}$ strictement local, un morphisme $T_{a,b} \rightarrow S(a)$ et un point générique géométrique b' de $T_{a,b}$ au-dessus de b (cf. [ÉGA II, 7.1.7]). Ainsi, on peut compléter le théorème précédent, de la façon suivante : sous les hypothèses de [A.1.1](#), quitte à modifier la base S , chaque fibre des cycles proches $\Psi_f(\mathcal{K})$ est isomorphe à la fibre d'un complexe de cycles proches usuels. Plus précisément, étant donné (x, b) , d'image (a, b) dans $S \overleftarrow{\times}_S S$, il existe un morphisme de source un trait, $T_{a,b} \rightarrow S$, et un point géométrique \tilde{x} de $X_{T_{a,b}}$ au-dessus de x , tels que l'on ait des isomorphismes :

$$\Psi_f(\mathcal{K})_{(x,b)} \simeq \mathrm{R}\Gamma(X(x) \times_{S(a)} S(b), \mathcal{K}) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X_{T_{a,b}}(\tilde{x}) \times_{T_{a,b}} b', \mathcal{K}) \simeq \Psi_{f_{T_{a,b}}}^{\mathrm{usuel}}(\mathcal{K})_{\tilde{x}},$$

où $\Psi_{f_{T_{a,b}}}^{\mathrm{usuel}}(\mathcal{K})$ le complexe des cycles proches défini par A. Grothendieck dans [SGA 7 I].

Cela découle de [A.1.1](#).

Constructibilité

A.7. Énoncés

Il résulte de [A.6.3](#) et du théorème de constructibilité de P. Deligne ([Th. finitude, 3.2]), qu'après modification de la base, les fibres des cycles proches sont finies, et qu'ils sont même constructibles sur chaque fibre, c'est-à-dire une fois restreints à $X_s \overleftarrow{\times}_{S(s)} t$, où (s, t) est un point de $S \overleftarrow{\times}_S S$. On a en fait un résultat plus précis :

A.7.1. THÉORÈME. Soient $f : X \rightarrow S$ et \mathcal{K} comme en [A.1.1](#). Quitte à modifier S , on peut supposer que pour tout entier naturel i , les faisceaux $H^i(\Psi_f \mathcal{K})$ sont constructibles sur $X \overleftarrow{\times}_S S$, c'est-à-dire qu'il existe des partitions finies de X et S en des parties constructibles localement fermées, $X = \bigcup X_\alpha$ et $S = \bigcup S_\beta$, telles que chaque $H^i(\Psi_f \mathcal{K})$ soit localement constant fini sur les sous-topos $X_\alpha \overleftarrow{\times}_S S_\beta$ de $X \overleftarrow{\times}_S S$.

A.7.2. COROLLAIRE. Soient $f : X \rightarrow S$ et \mathcal{K} comme en [A.1.1](#). Il existe une modification $S' \rightarrow S$ telle que pour tout S' -schéma T , et tout point géométrique x_T de X_T , d'image a_T dans T , le complexe $f_{T_{x_T^*}} \mathcal{K}$ soit constructible sur $T(a_T)$.

A.7.3. REMARQUE. Il résulte de [SGA 4 XVII, 5.2.11] et [A.2.3](#) que le foncteur Ψ_f préserve la propriété d'être de Tor-dimension finie. Joint à [A.7.1](#), cela entraîne, pour un f comme dans

loc. cit. et un nombre premier ℓ inversible, qu'après modification de la base, les complexes $\Psi_f(\mathbf{Z}/\ell^{n+1})$ sont dans $D_{ctf}(X\overleftarrow{\times}_S \mathbf{S}, \mathbf{Z}/\ell^{n+1})$ pour tout $n \geq 0$.

Comme précédemment, on se ramène au cas où S est noethérien de dimension finie, excellent et intègre. On procède par récurrence sur $\dim(S)$ et $\dim(X/S)$ (et un indice de troncation). La démonstration se fait en deux étapes : passage du cas plurinodal au cas général puis démonstration de la constructibilité dans le cas plurinodal (et des coefficients constants). Avant cela, commençons par quelques propriétés de ces topos et des faisceaux constructibles sur iceux, en suivant les suggestions du rapporteur^⑦.

A.8. Conditions de finitude dans les topos $X\overleftarrow{\times}_Y Z$

A.8.1. Cohérence ; rappels. Remarquons tout d'abord que la définition donnée dans [A.7.1](#) garde un sens pour les faisceaux d'ensembles ou de Λ -modules sur des topos de la forme $E = X\overleftarrow{\times}_Y Z$, où X, Y et Z sont des schémas cohérents. Comme dans [LAUMON 1983], on définit un site pour le topos E , dont les objets sont les triplets $(U_X/V_Y \setminus W_Z)$ où U_X, V_Y, W_Z sont étales séparés de type fini sur X, Y, Z .

Un tel objet définit naturellement un faisceau d'ensembles, qui est constructible. En effet, si X' est un sous-schéma de X (resp. Z' un sous-schéma de Z) tel que la restriction de U_X à X' (resp. de W_Z à Z' , resp. l'image inverse de V_Y sur Z') soit *finie* étale, la restriction du faisceau représenté par $U_X/V_Y \setminus W_Z$ au sous-topos $X'\overleftarrow{\times}_Y Z'$ est localement fini constant.

On peut également étendre au présent cadre la proposition [SGA 4 IX, 2.7], affirmant que de tels faisceaux sont des générateurs de la catégorie des faisceaux constructibles (avec une variante pour les Λ -modules). Lors de la démonstration du théorème [A.7.1](#), une caractérisation plus maniable des faisceaux constructibles sera utile ; dans le cas de topos raisonnables, il s'agit des objets de *présentation finie* (c.-à-d. les objets PF tels que $\text{Hom}(\text{PF}, -)$ commute aux colimites filtrantes), voire également des objets *noethériens*. Ces questions, dans le cas des topos comme E , font l'objet du reste du paragraphe.

Commençons par remarquer que le topos E est *cohérent* [SGA 4 VI, 2.3], car le site de définition introduit ci-dessus satisfait aux conditions de la proposition 2.1 de *loc. cit.* et possède un objet final.

De plus, un faisceau constructible d'ensembles \mathcal{F} sur E est nécessairement un objet cohérent de E (au sens de [SGA 4 VI, 1.13], c'est-à-dire ici encore quasi-compact et quasi-séparé (cf. *loc. cit.*)). Cela résulte d'une part du fait qu'un objet localement fini constant d'un topos cohérent est cohérent et d'autre part du fait que si l'on a un morphisme cohérent $p : E' \rightarrow E$ de topos cohérents et si p est conservatif, alors pour tout objet \mathcal{F} de E , \mathcal{F} est cohérent si et seulement si $p^*\mathcal{F}$ l'est. (On applique le deuxième point au topos E' somme disjointe (finie) des sous-topos de E sur lesquels le faisceau \mathcal{F} est localement fini constant et p le morphisme canonique correspondant.) On en déduit que tout objet de E est colimite filtrante d'objets cohérents, si bien que le topos E est *parfait*, au sens de [SGA 4 VI, 2.9.1]. Les notions topologiques de constructibilité, cohérence et de présentation finie (*loc. cit.* 1.9.3, 1.24) coïncident ici.

⑦. L'auteur reste bien sûr seul responsable des erreurs qui pourraient se trouver dans ce texte.

Il reste à vérifier que les objets constructibles sont également noethériens.

A.8.2. Localisation. Rappelons qu'en vertu d'un théorème de P. Deligne, nos topos, qui sont localement cohérents, ont suffisamment de points (*loc. cit.*, 9.0). Étant donné un point p d'un topos T , on peut former le topos *localisé en p* , la 2-limite $\lim_{U \ni p} T_U$, où U parcourt les voisinages ouverts de p . C'est un topos *local* au sens de [SGA 4 VI, 8.4] : le foncteur section globale est un foncteur fibre, de *centre* p , noté T_p (« localisation de T en p »). Remarquons que le topos $T \overleftarrow{\times}_T T$ joue le rôle de localisation universelle : on a un diagramme 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} T_p & \longrightarrow & T \overleftarrow{\times}_T T \\ \downarrow & \square & \downarrow \text{pr}_1 \\ p & \longrightarrow & T \end{array}$$

A.8.3. Quelques lemmes.

A.8.3.1. LEMME. Soient $X \rightarrow T \leftarrow T' \leftarrow S$ des morphismes de schémas avec $T' \rightarrow T$ entier. Posons $X' = X \times_T T'$. Le morphisme $p : E' = X' \overleftarrow{\times}_{T'} S \rightarrow X \overleftarrow{\times}_T S = E$ est une équivalence de topos.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que les foncteurs p_* et p^* sont quasi-inverses l'un de l'autre. Compte tenu du fait que les topos considérés ont suffisamment de points, cela va résulter du fait que les flèches d'adjonctions sont des isomorphismes sur les fibres. Or, tout point (x, s) de E se relève uniquement en un point (x', s) de E' et si E est local centré en (x, s) , E' est également local et centré en (x', s) . Le résultat en découle. \square

L'ensemble des classes d'isomorphismes de points d'un topos E comme plus haut peut-être ordonné par la relation d'ordre : $p \leq q$ si et seulement si il existe un morphisme $q \rightarrow p$ (c.-à-d. p est une spécialisation de q). (On remarquera que tout endomorphisme d'un point est un automorphisme donc cette relation est bien antisymétrique.)

A.8.3.2. LEMME. Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme de schémas noethériens avec f de type fini ou bien S excellent. Alors :

- (i) L'ensemble des classes d'isomorphismes de points de $E = X \overleftarrow{\times}_S S$ a un nombre fini d'éléments maximaux,
- (ii) Toute classe d'isomorphisme est majorée par un élément maximal.

DÉMONSTRATION. Tout point de E est spécialisation d'un point au-dessus d'un point générique d'une composante irréductible de S . Le schéma S étant noethérien, il suffit donc de considérer le cas de $E' = X \overleftarrow{\times}_S s$ où s est un schéma ponctuel de S . Soit S' la normalisation de l'adhérence de s dans S et X' le produit fibré $X \times_S S'$. D'après le lemme précédent, E' s'identifie à $X' \overleftarrow{\times}_{S'} s$. Chaque point de X' est dominé par une unique classe d'isomorphisme de points de E' ; en effet, si t est un point de S' , s' et t' des points topologiques au-dessus de s et t , le groupe $\text{Aut}(s')$ agit transitivement sur $\text{Hom}(s', t')$. La relation d'ordre sur les points de E' se déduit de celle des générations au sens classique (Zariski) sur X' . Il suffit donc de

montrer que le schéma X' n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Si f est de type fini, on utilise le fait, démontré dans [HEINZER 1973], que la normalisation d'un anneau intègre noethérien a un spectre noethérien. Dans le cas où S est excellent on conclut plus simplement par le fait que la normalisation est finie sur la base.

Comme il résulte de la démonstration, le second énoncé est même valable sans hypothèses. \square

A.8.3.3. LEMME. *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a :*

- (i) *Tout sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible,*
- (ii) *Tout faisceau constructible sur E est noethérien.*

DÉMONSTRATION. Commençons pas démontrer qu'une suite croissante de sous-faisceaux constructibles (\mathcal{F}_n) d'un faisceau constructible \mathcal{F} sur E est stationnaire. Par récurrence noethérienne, on peut supposer que la conclusion est valide pour $X' \rightarrow S'$ où X' et S' sont des sous-schémas fermés de X, S , avec (X', S') différent de (X, S) . Il suffit de montrer qu'elle est stationnaire au-dessus d'un sous-topos $E' = U_X \overleftarrow{X}_S V_S$ pour des ouverts denses $U_X \hookrightarrow X$ et $V_S \hookrightarrow S$. Il existe un entier N tel que pour chaque point maximal p , les suites \mathcal{F}_{n_p} sont constantes pour $n \geq N$. Si l'on prend U_X et V_S tels que \mathcal{F}_N et \mathcal{F} soient localement constants sur E' , cela entraîne les isomorphismes $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_N$ sur E pour $n \geq N$. Prouvons 1). Soit \mathcal{G} est un sous-faisceau d'un faisceau constructible \mathcal{F} . D'une part il est colimite filtrante de faisceaux constructibles, et d'autre part, l'image d'un morphisme de faisceaux constructibles est constructible ; le faisceau \mathcal{G} est donc également réunion d'un ensemble filtrant croissant de sous-faisceaux *constructibles* de \mathcal{F} . D'après ce qui précède cet ensemble a un élément maximal et \mathcal{G} est donc constructible. Le second point en résulte immédiatement (par exemple en l'appliquant à la « limite » d'une hypothétique suite strictement croissante). \square

A.9. Démonstration du théorème A.7.1

A.9.1. Réduction au cas pluri-nodal. Commençons par un lemme général, qui trouverait certainement sa place plus haut.

A.9.1.1. LEMME. *Soient $h : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre S -schémas et $\overline{\mathcal{F}}$ un faisceau de torsion sur $X \overleftarrow{X}_S S$. Si (y, t) est un point de $Y \overleftarrow{Y}_S S$, il existe un morphisme canonique de topos $\varphi_{y,t} : X_y \rightarrow X \overleftarrow{X}_S S$, « $x \mapsto (x, t)$ », tel que la fibre de $R\overline{h}_* \overline{\mathcal{F}}$ en (y, t) soit canoniquement isomorphe à $R\Gamma(X_y, \varphi_{y,t}^* \overline{\mathcal{F}})$.*

DÉMONSTRATION. Soit (y, t) comme dans l'énoncé et notons s l'image de y dans S . Quitte à remplacer S par $S(s)$ on peut supposer S strictement local. De même, on peut supposer $Y(y) = Y$. La fibre de $R\overline{h}_* \overline{\mathcal{F}}$ en (y, t) s'identifie naturellement à $R\Gamma(X \overleftarrow{X}_S S(t), \overline{\mathcal{F}})$. Notons π_t le morphisme $X \overleftarrow{X}_S S(t) \rightarrow X$; le théorème de changement de base propre permet de réécrire $R\Gamma(X \overleftarrow{X}_S S(t), \overline{\mathcal{F}}) \simeq R\Gamma(X, R\pi_{t,*} \overline{\mathcal{F}})$ comme

$$R\Gamma(X_y, i_y^* R\pi_{t,*} \overline{\mathcal{F}}),$$

où i_y est l'immersion fermée de la fibre spéciale $X_y \hookrightarrow X$. Remarquons maintenant qu'il existe un morphisme de topos $\varphi_{y,t}$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \overleftarrow{\times}_S \mathcal{S}(t) & & \\ \pi_t \downarrow & \swarrow \varphi_{y,t} & \\ X & \xleftarrow{i_y} & X_y \end{array}$$

au-dessus du morphisme $s = \text{Ens} \rightarrow \overleftarrow{S} \overleftarrow{\times}_S \mathcal{S}(t)$, $s \mapsto (s, t)$. Le point clef – indiqué à l'auteur par O. Gabber –, et dont le lemme résulte immédiatement, est que le morphisme canonique $i_y^* \mathbb{R}\pi_{t*} \rightarrow \varphi_{y,t}^*$ est un isomorphisme. En passant aux fibres, il nous suffit de montrer que si x est un point géométrique de X_y , le morphisme canonique $\text{R}\Gamma(X(x) \overleftarrow{\times}_S \mathcal{S}(t), \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{(x,t)}$ est un isomorphisme. Cela résulte du fait que le topos $X(x) \overleftarrow{\times}_S \mathcal{S}(t)$ est un topos local, de centre (x, t) . \square

Ce lemme entraîne en particulier que la formation des images directes par un morphisme propre « fléché » commute aux changements de base $S' \rightarrow S$ et que si \mathcal{F} est un faisceau sur X , on a un isomorphisme $p^* h_* \mathcal{F} \simeq \overleftarrow{h}_* p^* \mathcal{F}$ (où les p sont les premières projections des topos fléchés vers les topos usuels).

A.9.1.2. PROPOSITION. *Soient S un schéma noethérien, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre entre S -schémas de type fini et $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ un faisceau de Λ -modules constructible sur $X \overleftarrow{\times}_S S$. Alors, l'image directe $\text{R}\overleftarrow{f}_* \overleftarrow{\mathcal{F}}$ est constructible sur $Y \overleftarrow{\times}_S S$.*

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire, tout comme dans le cas classique (auquel nous nous ramenons), que la torsion de $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ soit d'ordre inversible sur S .

DÉMONSTRATION. Pour tout objet \mathcal{U} du site définissant $X \overleftarrow{\times}_S S$ introduit en [A.8.1](#), notons $\Lambda_{\mathcal{U}/X \overleftarrow{\times}_S S}$ (ou plus simplement $\Lambda_{\mathcal{U}}$) le faisceau associé à $\Lambda[\text{Hom}(-, \mathcal{U})]$ sur $X \overleftarrow{\times}_S S$. Le faisceau Λ -constructible, donc noethérien, $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ est isomorphe à un quotient des sommes directes finies de tels faisceaux (cf. par ex. [\[SGA 4 IX, 2.7\]](#)). Prenant une résolution à gauche de $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ par des sommes directes de faisceaux de la forme $\Lambda_{\mathcal{U}}$ et considérant la première suite spectrale, on se ramène à démontrer la proposition dans le cas particulier d'un faisceau $\overleftarrow{\mathcal{F}}$ de la forme $\Lambda_{\mathcal{U}}$. (On utilise implicitement le fait que la catégorie des faisceaux constructibles est stable par (co)noyaux et extensions.)

Remarquons qu'il suffit de démontrer le théorème après un changement de base fini et surjectif $S' \rightarrow S$ (cf. lemme [A.9.1.4](#)). Or, \mathcal{U} comme ci-dessus est la forme $U_X/V_S \setminus U_S$, il existe un tel morphisme $S' \rightarrow S$ tel que l'image inverse de \mathcal{U} sur $X_{S'} \overleftarrow{\times}_{S'} S'$ soit un coproduit d'ouverts de la forme $U_{X'}/V_{S'} \setminus U_{S'}$, où maintenant $V_{S'}$ et $U_{S'}$ sont des ouverts de Zariski de S' . Plus précisément on a :

A.9.1.3. LEMME. *Soit $f : U \rightarrow S$ un morphisme séparé étale entre schémas cohérents. Il existe un morphisme fini surjectif $S' \rightarrow S$ tel que l'image inverse de U sur S' soit un coproduit d'ouverts de Zariski.*

DÉMONSTRATION. Par le Main Theorem de Zariski, on peut factoriser f en une immersion ouverte suivie d'un morphisme fini $f : U \hookrightarrow T \rightarrow S$. Quitte à rajouter à T le complémentaire de l'image de f , on peut supposer $T \rightarrow S$ également surjectif. Soit W le sous-schéma ouvert de S au-dessus duquel le cardinal des fibres géométriques de f est maximal, égal à m . Le morphisme f est fini sur W et si $m > 0$, on peut supposer $U = T$ sur W . L'image inverse de U sur T se décompose ; on conclut alors en itérant ce procédé et avec m de plus en plus petit. \square

Pour simplifier les notations supposons dorénavant $S' = S$. Pour des ouverts \mathcal{U} comme ci-dessus, il est évident que la constructibilité de $R\tilde{f}_*(\Lambda_{\mathcal{U}})$ résulte de la constructibilité de $R\tilde{f}_*\Lambda_{U_X/S \setminus S}$ sur $Y_{\tilde{X}_S}S$. Si l'on note pr_1 la projection $X \times_S S$, on a un isomorphisme canonique

$$\Lambda_{(U_X/S \setminus S)/(X \times_S S)} \simeq \text{pr}_1^* \Lambda_{U_X/X}$$

où $U_X/S \setminus S$ est l'image inverse sur $X \times_S S$ de l'ouvert U_X de X .

Le faisceau $\Lambda_{U_X/X}$ étant constructible sur X il est isomorphe à sous-faisceau d'un produit de faisceaux $\pi_* C$ où $\pi : X' \rightarrow X$ est un morphisme fini et C un Λ -module constant constructible. Il nous reste donc à montrer que $R\tilde{f}_*(\text{pr}_1^* \pi_* C)$ est constructible sur $Y_{\tilde{X}_S}S$. D'après l'assertion placée avant [A.9.1.2](#), ce dernier est isomorphe à $R\tilde{f}'_* \Lambda$, où f' est le composé $X' \rightarrow X \rightarrow Y$, lui-même isomorphe à $\text{pr}_1^* Rf'_* \Lambda$. D'après le théorème de constructibilité classique, $Rf'_* \Lambda$ est constructible sur Y , ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

A.9.1.4. LEMME. *Soit $(f, \tilde{\mathcal{F}})$ comme dans la proposition précédente et supposons qu'il existe un morphisme fini surjectif $S' \rightarrow S$ tel que $R\tilde{f}_{S'}^* \tilde{\mathcal{F}}_{S'}$ soit constructible (sur $Y_{S'} \tilde{X}_{S'} S'$). Alors, $R\tilde{f}_* \tilde{\mathcal{F}}$ est constructible (sur $Y_{\tilde{X}_S}S$).*

Compte tenu de la commutation aux changements de base des images directes fléchées par un morphisme propre, ce lemme résulte à son tour du lemme :

A.9.1.5. LEMME. *Soient $S' \rightarrow S$ un morphisme propre surjectif, X un S -schéma, et X' son image inverse sur S' . Considérons $p : E' = X' \times_{S'} S' \rightarrow X \times_S S = E$. Alors, si $\tilde{\mathcal{F}}$ est un faisceau sur E tel que $p^* \tilde{\mathcal{F}}$ soit constructible sur E' , le faisceau $\tilde{\mathcal{F}}$ est également constructible.*

DÉMONSTRATION. On remarque que tout point de E peut se relever en un point de E' si bien que le morphisme p est conservatif. Il est aussi cohérent, comme on le voit sur les sites de définition. On utilise alors le fait, énoncé dans le dernier paragraphe de [A.8.1](#), que la cohérence (équivalente à la constructibilité) se teste après image inverse par un morphisme cohérent conservatif. \square

A.9.2. Dévissages. Pour démontrer [A.7.1](#), on peut d'après [A.1.1](#) et [A.2.1](#) supposer S de type fini sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ et enfin le morphisme f de *loc. cit.* propre. Compte tenu de [A.2.3](#) (dimension cohomologique), il nous suffit de montrer par récurrence sur $t = (\delta, r, d)$ l'énoncé **constr.**(t) suivant :

Pour tout morphisme propre $f : X \rightarrow S$ entre schémas de type fini sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$, avec $\dim(S) \leq \delta$ et $d_f \leq d$, et tout complexe \mathcal{K} de faisceaux sur X à cohomologie

bornée, constructible, et concentrée en degrés positifs, il existe une altération $S' \rightarrow S$ telle que $\tau_{\leq r} \Psi_{f_S}, \mathcal{K}$ soit constructible.

Cet énoncé est tautologiquement vrai pour $r = -2$; c'est ce fait qui initialise la récurrence.

Comme en [A.3.4](#), on se ramène (en utilisant [A.9.1.2](#) pour un morphisme *fini*), au cas des coefficients constants. Du lemme précédent ([A.9.1.5](#)), on déduit que si la formation des cycles évanescents commute aux changements de base (ce qui est loisible d'après [A.1.1](#)), la constructibilité (resp. constructibilité tronquée) devient un problème *local* pour la topologie (dite « topologie h ») engendrée par les morphismes propres, surjectifs et les recouvrements ouverts de Zariski. Cela nous permet en particulier, comme en [A.2.6](#), de supposer le schéma de base S intègre.

Enfin, la suite spectrale de descente cohomologique et une nouvelle application de [A.9.1.2](#) nous ramènent (voir les détails ci-dessous) au cas où X est intègre et, finalement, aux cas plurinodal ou non dominant. Ce dernier résulte de l'hypothèse de récurrence grâce à [A.3.2.1](#), tandis que le cas plurinodal fait l'objet du paragraphe suivant.

Plus précisément : si $\varepsilon : X_\bullet \rightarrow X$ est un hyperrecouvrement propre de X comme dans [A.3.3.1](#) et $\bar{\varepsilon}$ est le morphisme de topos induit par ε entre le topos simplicial associé aux $X_i \bar{\times}_S S$ (noté $X_\bullet \bar{\times}_S S$) et $X \bar{\times}_S S$, on a un isomorphisme canonique entre $\Psi_{X/S}(\Lambda)$ et $\bar{\varepsilon}_* \Psi_{X_\bullet/S}(\Lambda)$. Les constituants de $\Psi_{X_\bullet/S}(\Lambda)$ ne sont autres que les $\Psi_{X_i/S}(\Lambda)$ ($i \geq 0$). La conclusion résulte maintenant du fait que chaque $\tau_{\leq r-i} \Psi_{X_i/S}(\Lambda)$ est constructible — hypothèse satisfaite si $i > 0$ (par récurrence) et pour $i = 0$ (cas plurinodal, traité plus bas, ou non surjectif (par récurrence)) — et par la suite spectrale, comme en [A.3.1](#), du fait que $\tau_{\leq r-i} \bar{\varepsilon}_{i*}(K) \xleftarrow{\sim} \tau_{\leq r-i} \bar{\varepsilon}_{i*} \tau_{\leq r-i}(K)$, ce dernier complexe étant constructible sur $X \bar{\times}_S S$ si $\tau_{\leq r-i}(K)$ l'est sur $X_i \bar{\times}_S S$ d'après [A.9.1.2](#).

A.9.3. Le cas plurinodal et des coefficients constants ; fin de la démonstration de [A.7.1](#). Comme en [¶A.4](#), on va déduire la constructibilité de $\tau_{\leq r} \Psi_f \Lambda$, où f est plurinodal, de l'hypothèse de récurrence (c'est-à-dire des **constr.**(t'), où $t' < (\delta_S, r, d_f)$).

Si f est l'identité, c'est-à-dire si $d_f = 0$, le résultat est trivial : $\Psi_{\text{Id}}(\Lambda) = \Lambda$ [Ⓢ].

Supposons donc $d_f \geq 1$ et factorisons le morphisme plurinodal f comme en [A.4.1](#). Notons $Z \xrightarrow{i} X$ le lieu singulier fermé de h , $X^0 \xrightarrow{j} X$ l'ouvert complémentaire, π le morphisme fini $Z \rightarrow Y$ et enfin h^0 le morphisme lisse $X^0 \rightarrow Y$. On a un triangle distingué

$$\tilde{j}_! \Psi_{X^0/S}(\Lambda) \rightarrow \Psi_{X/S}(\Lambda) \rightarrow \tilde{i}_* (\tilde{i}^* \Psi_{X/S}(\Lambda)) \xrightarrow{+1},$$

et une suite exacte (où l'on note Ψ^i pour $H^i \Psi$, $i \in \mathbf{Z}$) :

$$0 \rightarrow \tilde{j}_! \Psi_{X^0/S}^r \Lambda \rightarrow \Psi_{X/S}^r \Lambda \rightarrow \tilde{i}_* \tilde{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda \rightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence sur la dimension relative, nous pouvons supposer que le r -tronqué de $\tilde{j}_! \Psi_{X^0/S}(\Lambda)$ est constructible, car, par locale acyclicité des morphismes lisses, $\Psi_{X^0/S} \Lambda \xleftarrow{\sim} \overline{h^0}^* \Psi_{Y/S} \Lambda$. Il nous rester alors à vérifier que $\tilde{i}^* \Psi_{X/S}^r(\Lambda)$ est constructible — du moins après changement de base —. (Dorénavant, nous omettrons cette précaution oratoire.) En appliquant le foncteur h_* , on obtient la suite exacte longue de cohomologie :

Ⓢ. Plus généralement, $\Psi_{\text{Id}}(\mathcal{K}) = p_2^* \mathcal{K}$, où p_2 est la seconde projection $\bar{S} \rightarrow S$.

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^0 \bar{h}_* \bar{j}_! \Psi_{X_0/S}^r \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^0 \bar{h}_* \Psi_{X/S}^r \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^0 \bar{h}_* \bar{i}_* \bar{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda = \bar{\pi}_* (\bar{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda) \rightarrow \mathbb{R}^1 \bar{h}_* \bar{j}_! \Psi_{X_0/S}^r \Lambda \rightarrow \dots$$

Comme $\bar{j}_! \Psi_{X_0/S}^r \Lambda$ est constructible, il en est de même des premiers et derniers termes (A.9.1.2). Par finitude de π , la constructibilité de $\bar{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda$ résulte de celle de $\bar{\pi}_* (\bar{i}^* \Psi_{X/S}^r \Lambda)$. On en tire qu'il nous suffit de montrer que le second terme, $\mathbb{R}^0 \bar{h}_* \Psi_{X/S}^r \Lambda$ est constructible. Du lemme ci-dessous, appliqué à $K = \Psi_{X/S} \Lambda$, il résulte qu'il suffit de s'assurer de la constructibilité de $\Psi_{Y/S}^r (h_* \Lambda) = H^r \bar{h}_* \Psi_{X/S} \Lambda$ et de $\tau_{\leq r-1} \Psi_{X/S} \Lambda$ (connue par hypothèse de récurrence sur r). Or on sait que le complexe $h_* \Lambda$ de faisceaux sur Y est constructible. D'après l'hypothèse de récurrence, le faisceau $\Psi_{Y/S}^r (h_* \Lambda)$ est bien constructible, ce qui conclut la démonstration du théorème A.7.1.

A.9.3.1. LEMME. Soient $K \in \text{Ob } D^+(X \times_S S, \Lambda)$ et $r \in \mathbf{Z}$. Supposons $\tau_{\leq r-1} K$ constructible sur $X \times_S S$ et $H^r \bar{h}_* K$ constructible sur $Y \times_S S$. Alors le faisceau $\mathbb{R}^0 \bar{h}_* H^r K$ est constructible sur $Y \times_S S$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $\tau_{\leq r} K \rightarrow K$ est un isomorphisme. Appliquant le foncteur \bar{h}_* au triangle distingué

$$\tau_{\leq r-1} K \rightarrow K = \tau_{\leq r} K \rightarrow H^r K[-r] \xrightarrow{+1}$$

on obtient (en passant à la cohomologie de degré r) la suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H^r \bar{h}_* K \rightarrow H^0 \bar{h}_* H^r K \rightarrow H^{r+1} \bar{h}_* \tau_{\leq r-1} K \rightarrow \dots$$

Les hypothèses du lemme nous affirment que le premier terme est constructible ainsi que le troisième compte tenu de la propriété de h . \square

A.10. Un exemple

Soient k un corps séparablement clos, S l'hensélisé du plan \mathbf{A}_k^2 en l'origine o et K son corps des fractions. Notons $e : X = \text{Écl}_o S \rightarrow S$ l'éclatement du point fermé. Nous allons montrer que pour $n \geq 2$ et $\Lambda = \mathbf{Z}/n$, le complexe des cycles proches $\Psi_e \Lambda$ n'est pas constructible et que sa formation ne commute pas aux changements de base. (Si l'entier n est inversible sur k , le premier point entraîne le second compte tenu de A.7.1.)

Pour chaque D image inverse sur S d'une droite du plan passant par l'origine, notons η_D son point générique, $\bar{\eta}_D$ un point générique géométrique et enfin o_D le point de X correspondant, localisé sur le diviseur exceptionnel. Calculons, pour D, D' deux droites comme ci-dessus,

$$(\Psi_e \Lambda)_{(o_{D'}, \bar{\eta}_D)} = \text{R}\Gamma(X(o_{D'}) \times_S S(\bar{\eta}_D), \Lambda).$$

La mise en défaut de la commutation aux changements de base quelconques se voit déjà en comparant la cohomologie des tubes de Milnor aux fibres de Milnor : pour $D \neq D'$, le schéma non vide $X(o_{D'}) \times_S S(\bar{\eta}_D)$ n'a pas la même cohomologie que le schéma vide $X(o_{D'}) \times_S \bar{\eta}_D$.

La restriction de e à $S(\bar{\eta}_D)$ étant un isomorphisme, le tube de Milnor $X(o_{D'}) \times_S S(\bar{\eta}_D)$ est isomorphe à $X(o_{D'}) \times_X X(\bar{\eta}_D)$, où $\bar{\eta}_D$ est ici le point géométrique de X au-dessus du point $\bar{\eta}_D$

de S . Il résulte de [M. ARTIN 1971] (cf. A.2.3) que ce joint n'a de cohomologie qu'en degré nul ; on va montrer que l'ensemble de ses composantes connexes est infini. Soient x un point géométrique quelconque de X n'appartenant pas aux transformés propres de deux droites D_1, D_2 et $f \in K^\times$ une fonction dont le diviseur est $D_1 - D_2$. Si ℓ est un nombre premier inversible dans k , f est une puissance ℓ -ième dans le corps des fractions $K(x)$ de l'hensélisé strict $X(x)$ mais pas dans K . En particulier, pour tout x , il existe une \mathbf{Z}_ℓ -extension L de K contenue dans $K(x)$. Ainsi, pour tout couple de points géométriques x, y de X , l'ensemble des composantes connexes de la fibre générique de $X(x) \times_X X(y)$ se surjecte sur $\pi_0(\text{Spec}(L \otimes_K L)) \simeq \mathbf{Z}_\ell$. L'anneau de $X(x) \times_X X(y)$ étant intégralement clos dans son anneau total des fractions, il a même ensemble d'idempotents que sa fibre générique. Finalement $\pi_0(X(x) \times_X X(y))$ est infini, ce qui proscrit la constructibilité.

Vérifions maintenant qu'après modification tout rentre dans l'ordre. Localement, la première projection

$$e' := \text{Écl}_o \mathbf{A}_k^2 \times_{\mathbf{A}_k^2} \text{Écl}_o \mathbf{A}_k^2 \rightarrow \text{Écl}_o \mathbf{A}_k^2$$

est de la forme $\mathbf{A}_k^1 \times_k f$, où f est la projection

$$\text{Spec}(k[X, T]/(TX)) \rightarrow \text{Spec}(k[X]).$$

En particulier, le but du morphisme f est régulier de dimension 1, ce qui entraîne la commutation aux changements de base et la constructibilité de $\Psi_f \Lambda$ et finalement les mêmes propriétés pour e' . Ainsi, l'éclatement tue l'éclatement.

A.11. Conjugaison des cycles évanescents à la manière de S. Lefschetz.

A.11.1. Soient $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme de schémas, $\bar{f} : \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$ le morphisme induit, p_1, p_2 respectivement les première et seconde projections $\mathcal{S} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \rightrightarrows \mathcal{S}$, ℓ un nombre premier inversible sur S , et enfin $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^v \mathbf{Z}$, avec $v \geq 1$. La flèche d'adjonction $p_2^* \mathbf{R}f_* \Lambda \rightarrow \mathbf{R}\bar{f}_*(\Psi_f \Lambda)$ associée au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\Psi_f} & \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \\ \downarrow f & \Psi_{\text{Id}_{\mathcal{S}}} & \downarrow \bar{f} \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S} \\ & & \leftarrow p_2 \end{array}$$

est un isomorphisme car d'une part $\mathbf{R}\bar{f}_*(\Psi_f \Lambda) = \mathbf{R}\Psi_{\text{Id}_{\mathcal{S}}} \mathbf{R}f_* \Lambda$ et d'autre part on a l'égalité $p_2^* = \Psi_{\text{Id}_{\mathcal{S}}}$, que l'on vérifie fibre par fibre. On a de plus un morphisme relevant les restrictions de $\mathcal{S}(s)$ à $\mathcal{S}(t)$ entre complexes de faisceaux sur $\mathcal{S} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$, $p_1^* \mathbf{R}f_* \Lambda \rightarrow p_2^* \mathbf{R}f_* \Lambda$ dont la fibre en un point $t \rightsquigarrow s$ s'identifie, pour f propre, au morphisme de spécialisation $\text{R}\Gamma(\mathcal{X}_s, \Lambda) \rightarrow \text{R}\Gamma(\mathcal{X}_t, \Lambda)$. Tout cône de ce morphisme est isomorphe à $\mathbf{R}\bar{f}_*(\Phi_f \Lambda)$. (Le lecteur se convaincra aisément du fait que le morphisme $p_1^* \mathbf{R}f_* \Lambda \rightarrow p_2^* \mathbf{R}f_* \Lambda$ s'obtient en appliquant le foncteur $\mathbf{R}\bar{f}_*$ aux deux premiers termes du triangle distingué sur $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S} : \Lambda \rightarrow \Psi_f(\Lambda) \rightarrow \Phi_f(\Lambda) \xrightarrow{+1}$.)

A.11.2. Soit maintenant X une sous-variété projective lisse connexe de dimension $n + 1$ d'un espace projectif \mathbf{P} sur un corps algébriquement clos. Nous reprenons les notations et la terminologie de [DELIGNE 1980], §4.2.3. Soit $D \subset \mathbf{P}^\vee$ un pinceau de Lefschetz (non nécessairement *transverse*) et $S = D \cap X^\vee$ le schéma des points s de la droite projective D qui correspondent à des fibres $X \cap H_s$ singulières. Soient t un point générique géométrique de $D - S$, et s un point géométrique de S .

Pour chaque chemin c entre t et un point générique géométrique de $D(s)$, on définit un cycle évanescent $\pm\delta_c \in H^n(X_t, \Lambda)([\frac{n}{2}])$. Dorénavant nous nous autoriserons à omettre les twists à la Tate.

Comme suggéré dans *loc. cit.*, le formalisme des cycles évanescents sur une base quelconque permet de mieux comprendre la conjugaison des cycles évanescents (au signe près) sous l'action du groupe $\pi_1(D - S, t)$, y compris dans le cas exceptionnel ($p = 2$, dimension des sections hyperplanes paire) « sauvage » et/ou des coefficients de torsion.

Notons X_{bon}^\vee le lieu de X^\vee correspondant à une unique singularité quadratique ordinaire ([SGA 7 XVII, 3.2]), et supposons que X^\vee soit une hypersurface. Rappelons que dans le cas non exceptionnel, X_{bon}^\vee est soit vide soit le lieu lisse X_{lisse}^\vee de X^\vee (*loc. cit.* 3.5). Dans le cas exceptionnel, cet ouvert est contenu dans X_{lisse}^\vee mais l'inclusion peut être stricte. Soit \mathcal{X} la « variété d'incidence » des points (x, H) avec $X \ni x \in H$ et f le morphisme propre $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}^\vee$, $(x, H) \mapsto H$. Considérons l'anneau de coefficients $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^i\mathbf{Z}$, où ℓ est un nombre premier inversible sur k et $i \in \mathbf{N} - \{0\}$. Les résultats qui suivent sont donc, même dans le cas non exceptionnel, légèrement plus forts que ceux de [SGA 7 XVIII] (\mathbf{Q}_ℓ -coefficients).

D'après la théorie de Lefschetz locale, la restriction du faisceau constructible $\varphi_f^n \Lambda := H^n R\bar{f}_* \Phi_f \Lambda$ au sous-topos $\bar{U} := X_{\text{bon}}^\vee \overleftarrow{\times}_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee)$ est localement constante de rang 1 ; les fibres ont un générateur canonique au signe près, compatible avec les flèches de spécialisations (la démonstration, qui généralise celle de [SGA 7 XV, 2.2], est laissée au lecteur). De même, $p_2^* Rf_* \Lambda =: (Rf_* \Lambda)_{\text{gén.}}$ est localement constant sur \bar{U} , de fibre la cohomologie d'une section hyperplane lisse. Le noyau \mathcal{K} du morphisme $(R^n f_* \Lambda)_{\text{gén.}} \rightarrow \varphi_f^n \Lambda$ est donc lisse (sur \bar{U}) ; sa fibre en un point $t \rightsquigarrow s$ est isomorphe à l'orthogonal de $\pm\delta_s^t$ dans $H^n(X \cap H_t, \Lambda)$. C'est aussi l'image de $p_1^* R^n f_* \Lambda =: (R^n f_* \Lambda)_{\text{spé.}}$ dans $(R^n f_* \Lambda)_{\text{gén.}}$. L'accouplement parfait $R^n f_* \Lambda \otimes R^n f_* \Lambda \rightarrow \Lambda$ sur $\mathbf{P}^\vee - X^\vee$ induit un tel accouplement sur $(R^n f_* \Lambda)_{\text{gén.}}$ par image inverse sur \bar{U} . Notons Ev l'orthogonal pour cet accouplement du sous-faisceau \mathcal{K} précédent ; c'est un faisceau lisse de rang 0 ou 1 sur \bar{U} , dont la fibre en $t \rightsquigarrow s$ est canoniquement engendrée par $\pm\delta_s^t$. Comme le schéma X_{bon}^\vee est connexe, le topos \bar{U} est « connexe par arcs » : on peut relier deux points par une chaîne finie de spécialisation/générisation de points. Soient maintenant deux points s_1 et s_2 de S et t une générisation géométrique commune dans D . Par connexité, il existe un chemin, c'est-à-dire un isomorphisme de foncteurs fibres, $\bar{g} \in \pi_1(X_{\text{bon}}^\vee \overleftarrow{\times}_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee); (s_1, t), (s_2, t))$ envoyant $\pm\delta_{s_1}^t \in \text{Ev}_{(s_1, t)}$ sur $\pm\delta_{s_2}^t \in \text{Ev}_{(s_2, t)}$. Ces éléments sont naturellement dans $H^n(X_t, \Lambda)$; sur ce groupe, l'action de $\pi_1(X_{\text{bon}}^\vee \overleftarrow{\times}_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee); (s_1, t), (s_2, t))$ se factorise à travers $\pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee, t)$ par la seconde projection, donc l'image $g \in \pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee, t)$ de \bar{g} conjugue $\pm\delta_{s_1}^t$ à $\pm\delta_{s_2}^t$. La conjugaison des cycles évanescents sous l'action de $\pi_1(D - S)$ résultera alors du fait que la

représentation $\rho : \pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee, u) \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{R}^n f_* \Lambda)_u)$ associée à $\mathbb{R}^n f_* \Lambda$ a même image que le morphisme composé $\rho \circ (\pi_1(D - S) \rightarrow \pi_1(\mathbf{P}^\vee - X^\vee))$. Dans le cas modéré cela résulte de la surjectivité de $\pi_1^{\text{mod.}}(D - S) \rightarrow \pi_1^{\text{mod.}}(\mathbf{P}^\vee - X^\vee)$ (cf. *loc. cit.*); cela suffit donc pour conclure dans ce cas (c.-à-d. $p \neq 2$ ou n impair)[Ⓞ].

Nous présentons ici une démonstration de l'égalité de ces groupes de monodromie, due à O. Gabber[Ⓞ] qui permet donc de traiter le cas général. Il s'agit de montrer que si $Y \rightarrow \mathbf{P}^\vee - X^\vee$ est le revêtement galoisien correspondant à $\text{Im}(\rho)$, le schéma $Y \times_{\mathbf{P}^\vee} D$ est connexe. Nous allons, par un théorème de Bertini, nous ramener au cas où D est la droite générique après avoir convenablement compactifié la situation.

A.11.3. PROPOSITION. *Soient $S = \text{Spec}(A)$ un schéma strictement local de point fermé s , X un S -schéma plat, de présentation finie dont la fibre spéciale est purement de dimension paire n et présente une singularité quadratique ordinaire en x telle que $\kappa(x)/\kappa(s)$ soit radicielle. Il existe une forme quadratique non dégénérée $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} X_i X_j$ à coefficients dans A et $b, c \in A$ tels que l'hensélisé $X(x)$ de X en x soit S -isomorphe à l'hensélisé de*

$$S[X_0, X_1, \dots, X_n]/(X_0^2 + b \cdot X_0 + c + \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} X_i X_j)$$

en le point au-dessus de s dont les n dernières coordonnées sont nulles. De plus, la S -classe d'isomorphisme de $S[X_0]/(X_0^2 + b \cdot X_0 + c)$ est indépendante des choix.

DÉMONSTRATION. Seul le dernier point est à vérifier; le premier se trouve dans [SGA 7 XV, 1.3.2] (dont la démonstration est valable sous réserve que S soit strictement hensélien ou encore $\kappa(x)/\kappa(s)$ triviale)[Ⓞ]. Nous ne vérifions cette proposition que dans le cas (plus délicat) où la caractéristique résiduelle est égale à 2; nous l'appliquerons dans ce cas uniquement. Comme la forme quadratique $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} X_i X_j$ est non dégénérée, le lieu singulier relatif est défini par l'idéal $(2X_0 + b, X_1, \dots, X_n)$. Ainsi, si l'on a une autre description de $X(x)$ décrite avec des variables \star' , on a l'égalité $(2X_0 + b, X_1, \dots, X_n) = (2X'_0 + b', X'_1, \dots, X'_n)$.

Il en résulte qu'il existe des éléments $(u_{i,j})$ de A tels que

$$X'_i = \left(\sum_1^n u_{i,j} X_j \right) + v_i \cdot (2X_0 + b).$$

La matrice $(u_{i,j})$ est inversible car dans la fibre spéciale (X_1, \dots, X_n) et (X'_1, \dots, X'_n) sont des systèmes minimaux de générateurs de l'idéal du lieu singulier relatif et $2X_0 + b$ s'annule sur la fibre spéciale ($2 = 0$ et $b^2 - 4c = 0$). Finalement,

$$(X'_1, \dots, X'_n) = (X_1 - h_1 \cdot (2X_0 + b), \dots, X_n - h_n \cdot (2X_0 + b))$$

[Ⓞ]. Remarquons qu'en caractéristique positive, le morphisme $\pi_1(D - D \cap H) \rightarrow \pi_1(\mathbf{P} - H)$ n'est jamais surjectif si $D \neq \mathbf{P}$ et H est une hypersurface. Par la théorie d'Artin-Schreier, il suffit de montrer – par réduction au cas des surfaces – que si $d \geq 1$, $f \in \Gamma(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(d))$ et $D := V(x_0) \subsetneq V(f) =: H$, il existe une fonction g sur $\mathbf{P}^2 - H$, nulle sur D , qui n'est pas de la forme $h^p - h$ pour $h \in \Gamma(\mathbf{P}^2 - H, \mathcal{O})$. On remarque alors que $g = \frac{x_0^d}{f}$ convient.

[Ⓞ]. Lettre à l'auteur, 14 mars 2005.

[Ⓞ]. D'après O. Gabber, le $\text{Spec}(\mathbb{F}_2(b))$ -schéma défini par l'équation $X_0^2 + b + X_0(X_1^2 + X_1 X_2 + X_2^2)$ est un contre-exemple à *loc. cit.*

pour certains h_i . Ainsi, $A[X'_0]/(X_0'^2 + b'X'_0 + c') \simeq \mathcal{O}(X(x))/(X'_1, \dots, X'_n)$ est isomorphe à

$$\mathcal{O}(\mathbf{A}_S^{n+1}(x))/(X_i - \tilde{h}_i \cdot (2X_0 + b) \ (1 \leq i \leq n), X_0^2 + bX_0 + c + \varphi \cdot (2X_0 + b)^2)$$

pour certains (\tilde{h}_i) et φ dans $\mathcal{O}(\mathbf{A}_S^{n+1}(x))$. En quotientant par les n premières équations, on obtient l'anneau local hensélien B de la droite affine \mathbf{A}_S^1 de coordonnée X_0 au point correspondant à x . On achève la démonstration en remarquant que si ψ est une solution de $\varphi = \psi + \psi^2$, et que l'on pose $Y_0 = X_0 + \psi \cdot (2X_0 + b)$, on a l'égalité $Y_0^2 + bY_0 + c = X_0^2 + bX_0 + c + \varphi \cdot (2X_0 + b)^2$. \square

La proposition précédente se reformule de la façon suivante. Soit $\Omega = \mathbf{P}^\vee - (X^\vee - X_{\text{bon}}^\vee)$ et considérons le faisceau étale associé au préfaisceau

$$U/\Omega \rightsquigarrow \{\text{ensemble des classes d'isomorphisme de morphismes finis, plats de rang 2, } U' \rightarrow U \text{ étales hors de } X^\vee\}.$$

La correspondance $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{P}^\vee$ définit une section de ce faisceau sur Ω . La lissité de \mathcal{X} entraîne la lissité des schémas U'/U correspondant à ces revêtements doubles. De même, si D définit un pinceau de Lefschetz, la partie correspondante de \mathcal{X} est un éclatement lisse de la variété X si bien que $U' \times_{\mathbf{P}^\vee} D$ est également lisse. Appliquons la formule de Picard-Lefschetz en le point générique de X_{bon}^\vee . En dimension relative paire, elle s'écrit

$$\sigma(x) - x = \pm \frac{\varepsilon(\sigma) - 1}{2} \langle x, \delta \rangle \delta,$$

où le caractère ε d'ordre 2 est précisément tué par le revêtement introduit plus haut. Ainsi, pour U' comme ci-dessus et compte tenu de la pureté du lieu de ramification, l'image inverse du faisceau $\mathbb{R}^n f_* \Lambda$ sur $U' \times_{\mathbf{P}^\vee} (\mathbf{P}^\vee - X^\vee)$ se prolonge en un faisceau lisse sur U' . De plus, pour tout point géométrique t de X_{bon}^\vee , la restriction de la représentation ρ à $\pi_1(\mathbf{P}^\vee(t) - X^\vee(t))$ est non triviale (car $\langle \delta, \delta \rangle = \pm 2$) si bien que si \bar{Y} est la normalisation de \mathbf{P}^\vee dans Y , le schéma $\bar{Y} \times_{\mathbf{P}^\vee} \mathbf{P}^\vee(t)$ est une union disjointe de copies des revêtements doubles distingués de $\mathbf{P}^\vee(t)$. (En effet, il est étale sur $\mathbf{P}^\vee(t) - X^\vee(t)$, non trivial et trivialisé par $\mathbf{P}^\vee(t)'$.) Cela montre en particulier qu'au-dessus de Ω , le schéma \bar{Y} est lisse et, de façon semblable, que pour chaque pinceau de Lefschetz D , le schéma $\bar{Y} \times_{\mathbf{P}^\vee} D$ est lisse. Ces schémas forment une famille propre et lisse sur l'ouvert de $\text{Gr}(1, \mathbf{P}^\vee)$ correspondant aux pincesaux de Lefschetz. La fibre générique est donc géométriquement connexe par le théorème de Bertini ([JOUANOLOU 1983], I 6.10(3)) et il en est donc ainsi de chaque fibre.

A.11.4. Remarques finales. Dans [SGA 7 XV], P. Deligne démontre la formule de Picard-Lefschetz en dimension relative impaire en utilisant un théorème de comparaison avec la théorie transcendante. Récemment, L. Illusie en a donné une démonstration algébrique ([ILLUSIE 2002b]). Il serait cependant intéressant de disposer d'un théorème de comparaison (après modification) — dont le sens exact reste encore à préciser — entre la cohomologie étale des fibres de Milnor (à coefficients constants) et la cohomologie de Betti des fibres de Milnor classiques, définies au moyen de petites boules de rayons « ε, η » dans le cas où $X \rightarrow S$ est un morphisme de variétés algébriques complexes. Le cas des singularités isolées devrait résulter d'un argument local-global. (L'auteur doit à P. Deligne l'observation que le cas général semble inconnu et à L. Illusie la référence à l'article [ILLUSIE, K. KATO et NAKAYAMA 2005])

Enfin, motivé par les succès de la théorie des faisceaux pervers sur un \mathcal{S} -schéma, avec \mathcal{S} de dimension 0 ou 1, il serait naturel d'étudier un tel formalisme dans le présent cadre (\mathcal{S} général) : perversité des cycles proches, dualité.

Sur la p -dimension des corps

avec Ofer GABBER

B.1. Introduction

Soient k un corps et p un nombre premier. Rappelons la définition de la p -dimension de k ([SERRE 1994], [K. KATO 1982]).

Si $p \neq \text{car. } k$, on appelle p -dimension de k et l'on note $\text{cd}_p(k)$, la p -dimension cohomologique du groupe profini $G_k := \text{Gal}(k^{\text{sép}}/k)$, où $k^{\text{sép}}$ est une clôture séparable de k (cf. [SERRE 1994]). C'est le plus petit entier naturel d (ou l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que pour tout G_k -module discret M de p -torsion et tout $n > d$, les groupes $H^n(G_k, M)$ soient nuls.

Si $p = \text{car. } k$, la définition fait intervenir des invariants différentiels. Pour tout schéma X et tout entier $i \in \mathbb{N}$, notons $\underline{\Omega}_X^i := \bigwedge^i \underline{\Omega}_{X/\mathbb{Z}}^1$ le \mathcal{O}_X -module des i -formes différentielles absolues et $\underline{\Omega}_{X,\log}^i$ le sous-faisceau étale abélien des formes différentielles *logarithmiques*, c'est-à-dire localement engendré par les sections de la forme $\text{dlog}(x_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(x_i)$, pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^\times$. On pose alors $H_p^i(k) := H_{\text{ét}}^i(k, \underline{\Omega}_{k,\log}^{i-1}[-(i-1)]) = H_{\text{ét}}^1(k, \underline{\Omega}_{k,\log}^{i-1})$; c'est un analogue du groupe de cohomologie $H_{\text{ét}}^i(k, \mu_p^{\otimes i-1})$ en caractéristique différente de p . Dans cet article, Ω_k^i désigne le *groupe* des sections globales sur k du *faisceau* $\underline{\Omega}_k^i$. Rappelons que le rang du k -module Ω_k^1 est égal au p -rang de k , c'est-à-dire au cardinal d'une p -base (absolue) de k (cf. [ÉGA IV₁, chap. 0, §21.1]); s'il est fini c'est également l'entier naturel r pour lequel $[k : k^p] = p^r$.

B.1.1. DÉFINITION (Kazuya Katô, [K. KATO 1982], §0). *La p -dimension d'un corps k de caractéristique $p > 0$ est le plus petit entier naturel d (ou l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que $\Omega_k^{d+1} = 0$ et $H_p^{d+1}(k') = 0$ pour toute extension finie k'/k . On la note $\text{dim}_p(k)$.*

Notons que l'on a les deux inégalités suivantes dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$:

$$\text{(triv.)} \quad p\text{-rang}(k) \leq \text{dim}_p(k) \leq p\text{-rang}(k) + 1.$$

(Dans cette formule, $p\text{-rang}(k)$ est remplacé par le symbole $+\infty$ si le p -rang est un cardinal infini.)

L'objet de cet article est de démontrer le résultat suivant, conjecturé par K. Katô :

B.1.2. THÉORÈME. *Soit A un anneau local hensélien excellent, intègre de dimension d . Soient k son corps résiduel, de caractéristique $p > 0$, et K son corps des fractions. Alors, on a l'égalité*

$$\text{dim}_p(K) = \text{dim}(A) + \text{dim}_p(k).$$

Dans *op. cit.*, ce théorème est démontré par K. Katô dans le cas particulier essentiel où A est un anneau de valuation discrète complet (cf. **B.2.3.1**). Son théorème est une généralisation

d'un théorème de S. Lang ([SERRE 1994], chap. II, §3.3 et §4.3) au cas d'un corps résiduel non algébriquement clos. La nécessité de prendre en compte le p -rang dans le cas d'un corps résiduel non nécessairement parfait avait été conjecturée par M. Artin dans [SGA 4 X, 2.2]. La démonstration de K. Katô utilise la K -théorie de Milnor, qui permet en caractéristique mixte, par l'intermédiaire des symboles cohomologiques, différentiels, et du théorème de Bass-Tate ([BASS et TATE 1973], I 4.3), de faire le pont entre la cohomologie galoisienne du corps des fractions et les formes différentielles absolue sur le corps résiduel.

Le cas de la dimension deux est également établi par K. Katô, en caractéristique mixte (et dans le cas d'un corps résiduel algébriquement clos), dans [Sh. SAITO 1986], §5. Sa démonstration, K -théorique, repose sur le théorème de Merkurjev-Suslin ainsi que sur la résolution des singularités des surfaces.

Notons que si A est un anneau strictement local excellent, intègre, de corps des fractions K , et ℓ un nombre premier *inversible dans A* , on a

$$\dim_{\ell} K = \dim A,$$

comme conjecturé par M. Artin dans [SGA 4 X, 3.1]. On a en effet $\dim_{\ell} K \geq \dim A$ ([SGA 4 X, 2.4]); par ailleurs, le premier auteur a récemment démontré que pour tout $f \in A$, on a $\text{cd}_{\ell}(\text{Spec}(A[f^{-1}])) \leq \dim A$ ([GABBER 2005b], §8) et donc $\dim_{\ell} K \leq \dim A$ par passage à la limite.

Donnons brièvement quelques indications sur la méthode utilisée ici, qui suit de près la technique d'algébrisation introduite par le premier auteur dans [GABBER 2005a] et *op. cit.* (voir également [MATSUMI 2002], théorème 2.2). Utilisant le théorème d'approximation de Popescu, on se ramène au cas d'un anneau local complet noethérien. En égale caractéristique, on utilise alors le théorème de Cohen-Gabber ([GABBER 2005a], 8.1), dont la démonstration est rappelée en appendice (cf. B.7.1), qui précise le théorème de structure de Cohen et permet, grâce au théorème d'algébrisation d'Elkik, de faire de cet anneau le complété d'un anneau local hensélien essentiellement de type fini et de dimension relative un sur un anneau local complet de dimension un de moins. Les prémices d'une telle idée se trouvent déjà dans l'exposé de M. Artin [SGA 4 XIX, §1 & §6]. En caractéristique mixte, dans le cas où p est ramifié dans A , on utilise le théorème de Epp, ainsi que le théorème B.1.2 ci-dessus en égale caractéristique, pour pouvoir algébriser nos données. Dans les deux cas, on procède par récurrence sur la dimension de l'anneau, en utilisant le théorème de Katô (dimension un) et, en caractéristique mixte, un théorème de comparaison hensélien/formel dû à K. Fujiwara et au premier auteur.

Le plan de l'article est le suivant : après quelques rappels et compléments sur la p -dimension (§B.2), on commence par minorer la p -dimension du corps des fractions (§B.3). La démonstration est très semblable à celle de K. Katô en dimension deux. Majorer la p -dimension est plus difficile. On commence par le cas d'égale caractéristique (§B.4), qui nous permet de traiter ensuite le cas d'inégale caractéristique (§B.5). En inégale caractéristique, le théorème principal est généralisé (§B.6) au cas d'un ouvert affine de $\text{Spec}(A[p^{-1}])$. Enfin, dans

un appendice (§B.7), on rappelle la démonstration du théorème de Cohen-Gabber mentionné ci-dessus.

Le second auteur souhaite remercier chaleureusement Luc Illusie pour ses nombreuses remarques, ainsi que Takeshi Saitô et l'université de Tôkyô pour leur chaleureux accueil durant le premier semestre 2006-2007. Les auteurs sont également grandement reconnaissants envers le rapporteur pour ses questions et commentaires.

B.2. p -dimension : rappels et compléments

Dans cette section on réunit divers lemmes (dont certains ne sont mis que pour mémoire) qui seront utiles aux cours des dévissages qui vont suivre (réduction au cas normal, resp. complet) ainsi que l'énoncé du théorème de Katô et d'un corollaire important.

B.2.1. p -rang.

B.2.1.1. LEMME. *Soit k'/k une extension finie de corps de caractéristique $p > 0$. Alors, le p -rang de k est égal au p -rang de k' .*

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de la suite exacte [ÉGA IV₁, chap. 0, 20.6.1.1]

$$0 \rightarrow Y_{k'/k} \rightarrow \Omega_k^1 \otimes_k k' \rightarrow \Omega_{k'}^1 \rightarrow \Omega_{k'/k}^1 \rightarrow 0,$$

où les termes extrêmes sont de *dimension finie* sur k' et satisfont à l'égalité de Cartier [ÉGA IV₁, chap. 0, 21.7.1]

$$\text{rang}_{k'} \Omega_{k'/k}^1 - \text{rang}_{k'} Y_{k'/k} = \text{deg. tr}_k k' = 0.$$

□

B.2.1.2. LEMME. *Soit K un corps valué de caractéristique $p > 0$, de complété \widehat{K} . Si $[K : K^p]$ est fini, on a l'inégalité :*

$$[K : K^p] \geq [\widehat{K} : \widehat{K}^p].$$

DÉMONSTRATION. Soient v' la valuation de K , v sa restriction à K^p et notons $\widehat{K}_{v'} = \widehat{K}$ (resp. $\widehat{K}_{v'}^p = \widehat{K}^p$) le complété de K (resp. K^p). Le morphisme canonique $\widehat{K}^p \rightarrow \widehat{K}$ induit un isomorphisme $\widehat{K}^p \simeq \widehat{K}^p$. Puisque l'on peut supposer la valuation v' non triviale, il résulte de [Bourbaki AC, VI §8 n°2 prop. 2] que le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \widehat{K} \\ \text{Frob} \uparrow & & \uparrow \text{Frob} \\ K & \longrightarrow & \widehat{K} \end{array}$$

induit une *surjection* $\widehat{K} \otimes_{K, \text{Frob}} K \rightarrow \widehat{K}$. Le résultat se déduit immédiatement. □

B.2.1.3. REMARQUE. Il se peut par contre que le p -rang de K soit dénombrable et celui de \widehat{K} indénombrable (cf. [BASTOS 1978], §3 pour un exemple où K est muni d'une valuation discrète de rang 1).

Réciproquement,

B.2.1.4. LEMME. *Soit A un anneau local hensélien excellent intègre de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K . Soient \hat{A} le complété de A et \hat{K} son corps des fractions. Alors,*

$$[K : K^p] \leq [\hat{K} : \hat{K}^p].$$

De plus, si $[K : K^p]$ est fini, c'est une égalité.

Rappelons que \hat{A} est intègre ([ÉGA IV₂, déf. 7.8.2] et [ÉGA IV₄, 18.9.2]).

DÉMONSTRATION. L'extension \hat{K}/K est séparable de sorte que le morphisme canonique $\hat{K} \otimes_K \Omega_K^1 \rightarrow \Omega_{\hat{K}}^1$ est une injection ([ÉGA IV₁, chap. 0, 20.6.3]). Vérifions la seconde assertion. Sous les hypothèses faites, la normalisation de A dans $K^{1/p}$ est finie sur A , de sorte que $\text{Frob} : A \rightarrow A$ est fini et que le morphisme $\hat{A} \otimes_{A, \text{Frob}} A \rightarrow \hat{A}$ est un isomorphisme (cf. p. ex. [ÉGA I, chap. 0, 7.3.3]; rappelons à cette occasion qu'un anneau excellent est noethérien). On en tire immédiatement que $\Omega_A^1 \otimes_A \hat{A} \rightarrow \Omega_{\hat{A}}^1$ est un isomorphisme. (Cela résulte du fait que $\Omega_A^1 = \Omega_{\text{Frob}: A \rightarrow A}^1$ et de même pour \hat{A} .)

□

B.2.1.5. LEMME. *Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$ possédant une p -base finie $\{b_i\}_{i \in I}$. Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\{b_i\}_{i \in I} \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ constitue une p -base de l'anneau $A[[x_1, \dots, x_n]]$.*

(Pour la définition de la notion de p -base dans un anneau, cf. [ÉGA IV₁, chap. 0, 21.1.9].)

DÉMONSTRATION. Il suffit de traiter le cas où $n = 1$. Pour $\theta : I \rightarrow [0, p-1]$, posons $b^\theta = \prod_{i \in I} b_i^{\theta(i)}$. La conclusion résulte des décompositions :

$$A[[X]] = \bigoplus_{i=0}^{p-1} A[[X^p]]X^i,$$

$$A = \bigoplus_{\theta \in [0, p-1]^I} A^p b^\theta,$$

et de la finitude de l'ensemble I .

□

Enfin, signalons le lemme suivant.

B.2.1.6. LEMME. *Soit A un anneau intègre ayant une p -base $\{b_i\}_{i \in I}$. Alors, les éléments b_i forment une p -base de $\text{Frac } A$.*

DÉMONSTRATION. C'est immédiat en chassant les dénominateurs par une puissance p -ième.

□

B.2.2. Les groupes $H_p^i(k)$.

B.2.2.1. PROPOSITION. Soient k un corps de caractéristique $p > 0$ et i un entier naturel. Le groupe $H_p^{i+1}(k) := H_{\text{ét}}^1(k, \underline{\Omega}_{k,\log}^i)$ est isomorphe au conoyau du morphisme

$$\wp = 1 - \gamma : \Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i/d\Omega_k^{i-1}$$

où 1 est la projection canonique $\Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i/d\Omega_k^{i-1}$ et γ est l'unique application additive p -linéaire $\Omega_k^i \rightarrow \Omega_k^i/d\Omega_k^{i-1}$ telle que

$$\gamma(\omega = \text{dlog}(y_1) \wedge \cdots \wedge \text{dlog}(y_i)) = [\omega].$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte de l'acyclicité des faisceaux quasi-cohérents et de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux étales en groupes abéliens sur $\text{Spec}(k)$ suivante :

$$0 \rightarrow \underline{\Omega}_{k,\log}^i \rightarrow \underline{\Omega}_k^i \xrightarrow{1-\gamma} \underline{\Omega}_k^i/d\underline{\Omega}_k^{i-1} \rightarrow 0.$$

L'exactitude à droite est évidente ; l'exactitude à gauche résulte (cf. p. ex. [COLLIOT-THÉLÈNE 1999], §1.4) de la suite exacte

$$0 \rightarrow \underline{\Omega}_{k,\log}^i \rightarrow \underline{\Omega}_{k,d=0}^i \xrightarrow{C-1} \underline{\Omega}_k^i \rightarrow 0,$$

où C est l'opérateur de Cartier sur les formes fermées (cf. [ILLUSIE 1979] chap. 0, §2.4 et [TSUJI 1996], 6.1.1.), et du morphisme de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & d\underline{\Omega}_k^{i-1} & \longrightarrow & \underline{\Omega}_{k,d=0}^i & \xrightarrow{C} & \underline{\Omega}_k^i & \longrightarrow & 0 \\ & & \text{Id} \downarrow & & C-1 \downarrow & & \downarrow 1-\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & d\underline{\Omega}_k^{i-1} & \longrightarrow & \underline{\Omega}_k^i & \xrightarrow{\text{can}} & \underline{\Omega}_k^i/d\underline{\Omega}_k^{i-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

□

B.2.2.2. Exemples. Pour tout corps k de caractéristique $p > 0$, on a $H_p^1(k) = k/\wp(k)$, où \wp est le morphisme d'Artin-Schreier usuel. En particulier, ce groupe est trivial si k est un corps séparablement clos. Si k est parfait (de façon équivalente : de p -rang nul), le quotient $H_p^2(k)$ de Ω_k^1 est donc nul. Il est élémentaire de vérifier dans ce cas que la p -torsion $\text{Br}(k)[p]$ du groupe de Brauer de k est également nulle. Plus généralement, on peut montrer que $H_p^2(k)$ s'identifie à $\text{Br}(k)[p]$ par l'intermédiaire de l'application envoyant la classe d'une forme différentielle $\omega = x \text{dlog}(y)$ ($x \in k$, $y \in k^\times$), sur la classe de l'algèbre centrale simple de rang p^2 définie par des générateurs X, Y liés par les relations $X^p - X = x$, $Y^p = y$ et $YXY^{-1} = X + 1$ (cf. p. ex. [GILLE et SZAMUELY 2006], prop. 9.2.5).

B.2.2.3. Trace. Rappelons maintenant brièvement que l'on peut définir une trace dans le présent contexte. La functorialité *covariante* en le corps est quant à elle élémentaire : pour tout morphisme $k \rightarrow k'$ de corps de caractéristique $p > 0$, et tout entier $n \geq 0$, il résulte immédiatement des définitions que l'on a un morphisme fonctoriel $H_p^n(k) \rightarrow H_p^n(k')$, déduit du morphisme naturel $\Omega_k^\bullet \rightarrow \Omega_{k'}^\bullet$ par passage au quotient.

Si k'/k est une extension finie étale de corps de caractéristique $p > 0$, la trace $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} : \Omega_{k'}^i \rightarrow \Omega_k^i$ (dédue du morphisme $\mathrm{Tr}_{k'/k} : k' \rightarrow k$ grâce à l'isomorphisme $k' \otimes_k \Omega_k^i \simeq \Omega_{k'}^i$) envoie $d\Omega_{k'}^{i-1}$ dans $d\Omega_k^{i-1}$ et induit un morphisme, noté $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\mathrm{H}}$, de $\mathrm{H}_p^{i+1}(k')$ dans $\mathrm{H}_p^{i+1}(k)$.

Si k'/k est finie non nécessairement étale, de caractéristique $p > 0$, une trace sur les modules de différentielles est construite par K. Katô à partir de la norme $\mathrm{N}_{k'/k}^K$ en K -théorie de Milnor (cf. [BLOCH et K. KATO 1986], p. 126 ; voir également [FUKAYA 2001], §2). Cette trace est caractérisée par les propriétés suivantes :

- (i) pour $i = 0$, c'est la trace usuelle ;
- (ii) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_i^M(k') & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \Omega_{k'}^i \\ \mathrm{N}_{k'/k}^{i,K} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \\ K_i^M(k) & \xrightarrow{\mathrm{dlog}} & \Omega_k^i \end{array}$$

(pour $i = 0$, $K_0 = \mathbb{Z}$ et la flèche verticale de gauche est la multiplication par le degré de l'extension) ;

- (iii) compatibilité avec $d : d(\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}(\omega)) = \mathrm{Tr}_{k'/k}^{i+1,\Omega}(d\omega)$ (pour $\omega \in \Omega_{k'}^i$) ;
- (iv) formule de projection : $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i+j,\Omega}(\omega \wedge \omega') = \mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}(\omega) \wedge \omega'$ si $\omega \in \Omega_{k'}^i$ et $\omega' \in \Omega_{k'}^j$;
- (v) compatibilité aux extensions de corps : $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \circ \mathrm{Tr}_{k''/k'}^{i,\Omega} = \mathrm{Tr}_{k''/k}^{i,\Omega}$ (pour $k \subset k' \subset k''$).

Si $k' = k(a)$, où $a^p = b \in k$, est une extension radicielle de k de degré p , il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus que l'on a $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{1,\Omega}(\mathrm{dlog}(a)) = \mathrm{dlog}(b)$, et de la formule de projection que l'on a, pour tout entier $i \geq 1$:

$$\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega} \left(\left(\sum_{j=0}^{p-1} c_j a^j \right) \mathrm{dlog}(a) \wedge \mathrm{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(b_{i-1}) \right) = c_0 \mathrm{dlog}(b) \wedge \mathrm{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(b_{i-1}),$$

où les c_j appartiennent à k et les b_j à k^\times .

On déduit de cette formule que la trace commute au morphisme $C^{-1} : \Omega^i \rightarrow \Omega^i/d\Omega^{i-1}$. Dans le cas radiciel de degré p cela résulte, par un simple calcul, du fait que pour chaque $0 < j < p$ et tous $c \in k$, $b, b_1, \dots, b_{i-1} \in k^\times$, on a $c^p b^{j-1} db \wedge \mathrm{dlog}(b') = d(c^p b^j \mathrm{dlog}(b')) \in d\Omega_k^{j-1}$, où l'on pose $\mathrm{dlog}(b') := \mathrm{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{dlog}(b_{i-1})$. Dans le cas étale, cela résulte de ce que $\mathrm{Tr}(a)^p = \mathrm{Tr}(a^p)$. Ainsi, la trace $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\Omega}$ induit par passage au quotient un morphisme trace $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{i,\mathrm{H}}$ sur les H_p^{i+1} . De plus, on constate que le morphisme induit est une *surjection* pour i égal au p -rang r de k .

B.2.2.4. REMARQUE. Dans le cas d'une extension finie purement inséparable k'/k , le morphisme $\mathrm{Tr}_{k'/k}^{r,\mathrm{H}}$, où r est le p -rang de k , est un *isomorphisme*. On se ramène par transitivité de la trace au cas où $k' = k^{1/p}$, auquel cas la trace coïncide avec l'opérateur de Cartier sur les formes de degré maximal. On peut également montrer que la trace $\Omega_{k',\log}^r \rightarrow \Omega_{k,\log}^r$ et la norme $K_r^M(k') \rightarrow K_r^M(k)$ sont des isomorphismes.

Le lemme immédiat suivant rend plus explicite la structure de $\mathrm{H}_p^{r+1}(k)$, où r est le p -rang d'un corps k , comme quotient de $\Omega_k^r \simeq k$.

B.2.2.5. LEMME. Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $r \geq 1$ un entier et b_1, \dots, b_r une p -base. Pour toute fonction $\theta : [1, r] \rightarrow [0, \dots, p-1]$, posons $b^\theta := b_1^{\theta(1)} \cdots b_r^{\theta(r)}$ et notons $k_{>0}$ le sous- k^p -espace vectoriel $\bigoplus_{\theta \neq 0} k^p b^\theta$ de k . L'isomorphisme $k \rightarrow \Omega_k^r$, défini par $\lambda \mapsto \lambda \operatorname{dlog}(b) := \lambda \operatorname{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \operatorname{dlog}(b_r)$ induit par passage au quotient un isomorphisme de \mathbf{F}_p -espaces vectoriels

$$k/(\wp(k) + k_{>0}) \simeq \mathbb{H}_p^{r+1}(k).$$

DÉMONSTRATION. Calculons l'image $d\Omega_k^{r-1} \subset \Omega_k^r = k \cdot \operatorname{dlog}(b) = \bigoplus_{\theta} (k^p \cdot b^\theta \operatorname{dlog}(b))$. Pour chaque θ, i , considérons l'élément

$$\omega_{\theta,i} := b^\theta \operatorname{dlog}(b_1) \wedge \cdots \wedge \operatorname{dlog}(b_{i-1}) \wedge \operatorname{dlog}(b_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \operatorname{dlog}(b_r)$$

de Ω_k^{r-1} . Ces formes engendrent Ω_k^{r-1} comme k^p -espace vectoriel. On a

$$d\omega_{\theta,i} = (-1)^{i+1} \theta(i) b^\theta \operatorname{dlog}(b) = ((-1)^{i+1} \theta(i))^p b^\theta \operatorname{dlog}(b).$$

Ainsi, faisant varier θ et i , on en déduit que

$$d\Omega_k^{r-1} = k_{>0} \cdot \operatorname{dlog}(b).$$

Le quotient $\Omega_k^r/d\Omega_k^{r-1}$ s'identifie donc à $k/k_{>0}$ par l'application $\lambda \bmod k_{>0} \mapsto \lambda \operatorname{dlog}(b) \bmod d\Omega_k^{r-1}$, et le morphisme $\wp : \Omega_k^r \rightarrow \Omega_k^r/d\Omega_k^{r-1}$ à $\lambda \mapsto \lambda - \lambda^p \bmod k_{>0}$. Ainsi, $\mathbb{H}_p^{r+1}(k)$ est isomorphe à

$$k/(k_{>0} + \wp(k)).$$

□

Voici maintenant un analogue du lemme [B.2.1.1](#).

B.2.2.6. LEMME. Soit K un corps muni d'une valuation discrète de rang 1, de caractéristique $p > 0$, de p -rang fini r . L'application canonique

$$\mathbb{H}_p^{r+1}(K) \rightarrow \mathbb{H}_p^{r+1}(\widehat{K})$$

est une surjection. En particulier, si $\mathbb{H}_p^{r+1}(K)$ est nul, il en est de même de $\mathbb{H}_p^{r+1}(\widehat{K})$.

DÉMONSTRATION. Rappelons que le p -rang de \widehat{K} est inférieur ou égal à r ([B.2.1.2](#)). Si l'inégalité est stricte, $\mathbb{H}_p^{r+1}(\widehat{K})$ est nul et il n'y a rien à démontrer. Supposons le donc égal à r . Le morphisme déduit de la functorialité covariante en le corps correspond, d'après le lemme [B.2.2.5](#) et sa démonstration, au morphisme canonique

$$K/(\wp(K) + K_{>0}) \rightarrow \widehat{K}/(\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0}),$$

où les choix de $K_{>0}$ et $\widehat{K}_{>0}$ se font relativement à une p -base commune. Il nous suffit donc de montrer que le morphisme composé

$$K \hookrightarrow \widehat{K} \twoheadrightarrow \widehat{K}/(\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0})$$

est une surjection. On va montrer plus précisément que le morphisme canonique $K \rightarrow \widehat{K}/\wp(\widehat{K})$ est une surjection. Soit $\lambda \in \widehat{K}$ et considérons $\lambda_0 \in K$ tel que $v(\lambda - \lambda_0) > 0$. D'après le lemme ci-dessous, il existe $\alpha \in \widehat{K}$ tel que $\lambda - \lambda_0 = \wp(\alpha)$. Ainsi, $\lambda \equiv \lambda_0$ modulo $\wp(\widehat{K})$. □

B.2.2.7. LEMME. *Pour tout anneau local A , complet de caractéristique $p > 0$, le morphisme $\wp : A \rightarrow A, a \mapsto a - a^p$, induit une surjection $\mathfrak{m}_A \rightarrow \mathfrak{m}_A$.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in A$; l'identité $a = \wp(a) + a^p$ entraîne par récurrence l'égalité

$$a = \wp(a + a^p + \cdots + a^{p^n}) + a^{p^{n+1}}$$

pour tout $n \geq 0$. Pour $a \in \mathfrak{m}_A$, la suite $(a + a^p + \cdots + a^{p^n})_{n \geq 0}$ converge dans A vers un élément $b \in \mathfrak{m}_A$; d'après l'égalité ci-dessus on a alors $a = \wp(b)$. \square

B.2.2.8. REMARQUE. La conclusion du lemme **B.2.2.6** est vraie pour tous les groupes H_p^{i+1} et pas seulement pour $i = r$. Il suffit pour cela de montrer que $\Omega_{\widehat{K}}^i$ est engendré comme groupe abélien par Ω_K^i et les formes $\alpha \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_i}{b_i}$, où $\alpha \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$ (l'idéal maximal de l'anneau des entiers) et les b_j sont dans \widehat{K}^\times . Étant donné une forme $\beta \frac{dx_1}{x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dx_i}{x_i}$, $\beta, x_j \in \widehat{K}^\times$, on peut trouver des $y_j \in K$ tels que $v(x_j - y_j) > v(x_j)$ et $v(x_j - y_j) + v(\beta) > v(x_j)$. Posons $\alpha_j := \frac{x_j}{y_j} - 1$, de sorte que $x_j = y_j(\alpha_j + 1)$ et donc (pour chaque j)

$$\frac{dx_j}{x_j} = \frac{dy_j}{y_j} + \frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1} \frac{d\alpha_j}{\alpha_j}.$$

L'hypothèse sur les valuations signifie que $\frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1}$ et $\beta \frac{\alpha_j}{\alpha_j + 1}$ appartiennent à $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\widehat{K}}}$. Cela nous permet de remplacer les x_j par les y_j ; on conclut en approchant β comme ci-dessus.

(Cette démonstration ne fait pas usage du lemme **B.2.2.5**.)

En toute dimension, on a le résultat d'*injectivité* suivant.

B.2.2.9. PROPOSITION. *Soit A un anneau local hensélien excellent intègre de corps des fractions K . Soient \widehat{A} son complété et \widehat{K} le corps des fractions de \widehat{A} . Supposons les p -rangs de K et \widehat{K} égaux à un entier r . Le morphisme canonique*

$$H_p^{r+1}(K) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{K})$$

est une injection.

La démonstration fait usage de la généralisation suivante du théorème d'approximation d'Artin (voir aussi [SWAN 1998]).

B.2.2.10. THÉORÈME (Dorin Popescu, [POPESCU 1986], théorème 1.3). *Soit A un anneau local excellent hensélien. Pour tout système fini d'équations polynomiales à coefficients dans A , l'ensemble des A -points est dense, pour la topologie \mathfrak{m}_A -adique, dans l'ensemble des \widehat{A} -points.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION **B.2.2.9**. Soit $\{b_1, \dots, b_r\}$ une p -base de K ; c'est également une p -base de \widehat{K} (**B.2.1.4**). Quitte à les multiplier par une puissance p -ième convenable, on peut supposer les b_i dans A . Soient $K_{>0}$ et $\widehat{K}_{>0}$ comme en **B.2.2.5**, relativement à cette p -base commune. Il nous faut montrer que si un élément $\lambda \in K$ appartient à $\wp(\widehat{K}) + \widehat{K}_{>0}$, il appartient également à $\wp(K) + K_{>0}$. Écrivons

$$\lambda = \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} - \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right)^p \right) + \sum_{\theta \neq 0} \left(\frac{\alpha_\theta}{\beta_\theta} \right)^p b^\theta,$$

où les α sont dans \widehat{A} , les β dans $\widehat{A} - \{0\}$, et θ est comme dans *loc. cit.* De façon équivalente, l'équation à coefficients dans A

$$\left(\prod_{\theta} Y_{\theta}\right)^p \lambda = \left(\prod_{\theta \neq 0} Y_{\theta}\right)^p \cdot (Y_0^{p-1} X_0 - X_0^p) + \sum_{\theta \neq 0} X_{\theta}^p \left(\prod_{\theta' \neq \theta} Y_{\theta'}\right)^p b^{\theta}$$

a pour solution

$$X_{\theta} = \alpha_{\theta}, Y_{\theta} = \beta_{\theta},$$

où l'indice 0 correspond à l'application nulle $[1, r] \rightarrow [0, p - 1]$.

D'après le théorème d'approximation ci-dessus, cette équation a également une solution dans A , dont les coordonnées Y peuvent être choisies non nulles par densité, de sorte que λ appartient bien à $\wp(K) + K_{>0}$. \square

B.2.2.11. REMARQUE. Du fait que l'on peut définir un opérateur de Cartier inverse $C^{-1} : \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A^i/d\Omega_A^{i-1}$ pour tout anneau A de caractéristique $p > 0$, on peut également déduire le résultat précédent (en tout degré) de l'énoncé **B.5.2.2** ci-dessous. Dans la démonstration de [KATZ 1970], théorème 7.2, est en effet construit un morphisme de l'algèbre (strictement graduée commutative) des formes différentielles sur l'anneau A vers l'algèbre de cohomologie de de Rham de l'anneau A , caractérisée par la propriété d'envoyer $a \in A$ sur a^p et $d(a)$ sur la classe de $a^{p-1}d(a)$.

B.2.2.12. COROLLAIRE. *Sous les hypothèses de B.2.1.4, on a l'inégalité*

$$\dim_p(K) \leq \dim_p(\widehat{K}),$$

où p est la caractéristique du corps K .

DÉMONSTRATION. Si $[K : K^p] < [\widehat{K} : \widehat{K}^p]$, il n'y a rien à démontrer d'après l'encadrement (triv.). On peut donc supposer les p -rangs finis, égaux à un entier r . Il faut montrer que si $H_p^{r+1}(K') \neq 0$ pour une extension finie K' de K , il existe une extension finie L/\widehat{K} telle que $H_p^{r+1}(L) \neq 0$. D'après la proposition précédente, il suffit de considérer le corps des fractions du complété du normalisé de A dans K' . \square

(D'après le théorème **B.1.2**, cette inégalité est en fait une égalité.)

Terminons par une propriété d'invariance, élémentaire mais cruciale, de la p -dimension.

B.2.2.13. LEMME. *Soient k un corps, k'/k une extension finie et p un nombre premier. Si $\dim_p(k)$ est fini, on a l'égalité*

$$\dim_p(k) = \dim_p(k').$$

DÉMONSTRATION. Si p est inversible sur k , c'est [SERRE 1994], chap. II, §4.1, prop. 10. Si $p = \text{car. } k$, on sait déjà (**B.2.1.1**) que les p -rangs sont égaux. Il en résulte que l'on a une inégalité : $\dim_p(k) \geq \dim_p(k')$. Supposons $r = p \text{ rang}(k)$ fini. Quitte à remplacer k par une extension finie et k' par une extension composée, on est ramené à montrer que si $H_p^{r+1}(k') = 0$, on a également $H_p^{r+1}(k) = 0$. Cela résulte de la surjectivité de la trace (**B.2.2.3**). \square

B.2.2.14. REMARQUE. Observons que l'on peut se contenter de la construction de la trace dans le cas particulièrement simple des extensions finies étales pour démontrer ce lemme. Cela résulte comme précédemment de la surjectivité de la trace en degré maximal pour une extension finie *étale* et du fait élémentaire que pour toute extension finie k'/k de corps de p -rangs finis, et toute extension finie K de k , il existe une extension finie étale K'/K , où K' est isomorphe en tant que corps à une extension finie de k' . (On se ramène au cas où k'/k est de la forme $k(a^{1/p})/k$ et où $K = k$. Le Frobenius $k' \rightarrow k$ fait de k une extension finie de k' , de sorte que $K' = K = k$ convient.)

B.2.3. Le théorème de Katô.

B.2.3.1. THÉORÈME (Kazuya Katô, [K. KATO 1982]). *Soit A un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K . On a l'égalité*

$$\dim_p(K) = 1 + \dim_p(k).$$

Rappelons que l'hypothèse d'excellence signifie ici que l'extension $\text{Frac } \widehat{A}/\text{Frac } A$ est séparable. Dans [ibid.], le théorème est démontré dans le cas particulier où A est complet. Le passage du cas complet au cas hensélien excellent se trouve dans [K. KATO et KUZUMAKI 1986], §3, théorème 1 (4). (Voir également §B.3.2, B.5.2 ci-dessous.)

Le lecteur pourra également consulter avec profit l'exposé de J.-L. Colliot-Thélène [COLLIOT-THÉLÈNE 1999] pour une démonstration du théorème ci-dessus dans le cas le plus difficile de la caractéristique mixte.

Voici maintenant un corollaire du théorème précédent, qui est l'analogue du (corollaire au) théorème de Tsen ([SERRE 1994], chapitre II, §3.3 et §4.2).

B.2.3.2. COROLLAIRE (Kazuya Katô et Takako Kuzumaki, [K. KATO et KUZUMAKI 1986]). *Soient K/k une extension de degré de transcendance N , et p un nombre premier. On a l'inégalité*

$$\dim_p(K) \leq N + \dim_p(k).$$

(La démonstration du corollaire se fait par réduction au cas bien connu de la caractéristique nulle.)

B.2.3.3. REMARQUE. Cette même méthode permet de déduire l'invariance de la p -dimension par extension finie du théorème de Katô.

Terminons cette section par une variante élémentaire mais explicite du théorème B.2.3.1.

B.2.3.4. PROPOSITION. *Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et de p -rang fini r . Le morphisme*

$$H_p^{r+1}(k) \rightarrow H_p^{r+2}(k((t)))$$

envoyant la classe de ω sur la classe de $\omega \wedge \text{dlog}(t)$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Soit $\{b_1, \dots, b_r\}$ une p -base du corps k ; il résulte de **B.2.1.5** et **B.2.1.6** que $\{b_1, \dots, b_r, t\}$ est une p -base de $k((t))$. Considérons $k_{>0}$ et $k((t))_{>0}$ comme en **B.2.2.5** relativement à ces p -bases et rappelons que $k((t))_{>0}$ est un sous $k((t))^p$ -espace vectoriel de $k((t))$. Le morphisme $\omega \mapsto \omega \wedge \text{dlog}(t)$ de l'énoncé correspond au morphisme canonique

$$k/(\wp(k) + k_{>0}) \xrightarrow{(\star)} k((t))/(\wp(k((t))) + k((t))_{>0})$$

(où \wp est le morphisme d'Artin-Schreier usuel) déduit de l'inclusion $k \hookrightarrow k((t))$ par passage au quotient.

Vérifions que (\star) est une surjection. Puisque tout élément de $k((t))$ de valuation strictement positive est dans l'image de \wp (cf. lemme **B.2.2.7** ci-dessus), il suffit de montrer que tout élément $a_{-n}t^{-n} + \dots + a_{-1}t^{-1} + a_0$ est congru modulo $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$ à un élément de $k \subset k((t))$. On peut supposer $a_0 = 0$. Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que pour chaque $a \in k$, l'élément at^{-n} appartient à $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$. Par construction, pour tout $a \in k$, tout $r \in \mathbf{Z}$ et tout $i \in [1, p-1]$, l'élément $(at^{pr}) \cdot t^i$ appartient à $k((t))_{>0}$ de sorte que le résultat est acquis pour n premier à p . Considérons maintenant le cas où n est un multiple de p , $n = rp$. Écrivons $a = a_0^p + a_{>0}$ où $a_0 \in k$ et $a_{>0} \in k_{>0}$. On peut alors décomposer at^{-rp} en :

$$\frac{a}{t^{rp}} = \left(\frac{a_0}{t^r}\right)^p + \frac{a_{>0}}{t^{rp}}.$$

Le second terme, $\frac{a_{>0}}{t^{rp}}$, appartient à $k((t))_{>0}$; le premier terme est égal à $\frac{a_0}{t^r} - \wp\left(\frac{a_0}{t^r}\right)$. L'entier r étant strictement inférieur à rp , on peut déduire de l'hypothèse de récurrence que $\left(\frac{a_0}{t^r}\right)^p$ appartient à $\wp(k((t))) + k((t))_{>0}$.

Vérifions maintenant que (\star) est une injection. Soit $a \in k$ tel que $a \in \wp(k((t))) + k((t))_{>0}$ et montrons qu'il appartient à $\wp(k) + k_{>0}$. Écrivons $a = \wp(b^- + b_0 + b^+) + b_{>0}$, où $b_0 \in k$, b^- (resp. b^+) est un polynôme en t^{-1} (resp. une série en t) sans terme constant, et $b_{>0} \in k((t))_{>0}$. Puisque $\wp(b^-)$ (resp. $\wp(b^+)$) est également un polynôme en t^{-1} (resp. une série en t), sans terme constant, et que $\wp(b_0)$ appartient à $\wp(k)$, il suffit de vérifier que le terme constant de $b_{>0}$ appartient à $k_{>0}$. Rappelons à cette fin que l'on a la décomposition

$$k((t))_{>0} = \left(\bigoplus_{i \in [1, p-1], \theta} k((t))^p b^\theta t^i \right) \oplus \left(\bigoplus_{\theta \neq 0} k((t))^p b^\theta \right),$$

où θ parcourt l'ensemble des fonctions $[1, r] \rightarrow [0, p-1]$. La première somme directe ne contribue pas au terme constant donc il suffit de vérifier que le terme constant d'un élément de $\bigoplus_{\theta \neq 0} k((t))^p b^\theta$ appartient à $k_{>0}$. C'est clair. □

B.3. Minoration de $\dim_p(K)$

Dans cette section, on démontre l'inégalité suivante, où A , K et k sont comme dans l'énoncé du théorème **B.1.2** :

$$\text{(B.3.0.a)} \quad \dim_p(K) \geq \dim(A) + \dim_p(k).$$

B.3.1. Soit A^\vee le normalisé de A dans son corps des fractions. L'anneau A étant excellent, il est également universellement japonais ([ÉGA IV₁, chap. 0, 23.1.1]), de sorte que A^\vee est fini sur A . Ce dernier étant hensélien et A^\vee étant intègre, l'anneau A^\vee est local. Il est également hensélien et excellent.

Soit k^\vee le corps résiduel de A^\vee ; c'est une extension finie de k de sorte que d'après B.2.2.13, il suffit de démontrer B.3.0.a dans le cas particulier où A est *normal*.

Nous allons démontrer B.3.0.a en procédant par récurrence sur la dimension de l'anneau A . Le cas de la dimension un est connu (B.2.3.1). Considérons donc A comme ci-dessus, normal excellent de dimension ≥ 2 et supposons B.3.0.a démontré pour les anneaux de dimension moindre.

Soient \mathfrak{p} un idéal premier de hauteur un tel que $p \in \mathfrak{p}$, B le localisé $A_{\mathfrak{p}}$, de corps des fractions K , \widehat{B} son complété et L le corps des fractions de \widehat{B} .

Deux cas se présentent.

B.3.2. Le cas d'inégale caractéristique (cf. [Sh. SAITO 1986], §5). Supposons K de caractéristique nulle. Puisque toute L -algèbre étale est induite par une K -algèbre étale ([SGA 4 X, 2.2.1]), le morphisme $G_L \rightarrow G_K$ est une *injection*. Compte tenu de la décroissance de la dimension cohomologique par passage à un sous-groupe fermé ([SERRE 1994], chap. I, §3.3, prop. 14), on a donc :

$$(\star\star) \dim_p(K) = \text{cd}_p(K) \geq \text{cd}_p(L) = \dim_p(L).$$

Le corps L étant le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète complet (donc hensélien, excellent), on a de plus l'égalité

$$\text{cd}_p(L) = \dim_p(L) = 1 + \dim_p(\kappa(B)),$$

où $\kappa(B)$ est le corps résiduel de B . Cela résulte du théorème B.2.3.1 (dans le cas particulier d'un anneau de valuation discrète complet). On achève la démonstration, par récurrence, en remarquant que $\kappa(B)$ est le corps des fractions de l'anneau local intègre hensélien excellent A/\mathfrak{p} , de dimension $\dim(A) - 1$.

B.3.2.1. REMARQUE. L'égalité $\text{cd}_p(L) = 1 + \text{cd}_p(\kappa(B))$ est également valable si $p \neq \text{car.}(\kappa(B))$. Cela résulte de [ibid.], chap. II, §4.3, prop. 12, jointe à l'exercice 3 si $\text{cd}_p(G_{\kappa(B)}) = +\infty$.

B.3.3. Le cas d'égle caractéristique. Procédant comme ci-dessus, il nous faut démontrer l'analogie de $(\star\star)$ pour la p -dimension.

B.3.3.1. LEMME. Soient K un corps muni d'une valuation discrète de rang 1, de caractéristique $p > 0$, et \widehat{K} son complété. L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\dim_p(K) \geq \dim_p(\widehat{K}).$$

DÉMONSTRATION. Si K et \widehat{K} n'ont pas le même p -rang, il n'y a rien à démontrer (cf. B.2.1.2 et (triv.)); supposons donc qu'ils sont égaux à un entier r et qu'il existe une extension finie L'/\widehat{K} telle que $H_p^{r+1}(L') \neq 0$. Il nous faut alors montrer qu'il existe une extension finie L/K telle que

$H_p^{r+1}(L) \neq 0$. Soit k' le corps résiduel de L' ; c'est une extension finie du corps résiduel k des corps discrètement valués K et \widehat{K} . Il existe donc une extension finie L'/K telle que $\widehat{\mathcal{O}_L}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_K} \widehat{\mathcal{O}_L} = k'$: on se ramène immédiatement au cas où k'/k est monogène, qui est bien connu (cf. p. ex. [SERRE 1968], chap. I, prop. 15 ; voir aussi [ÉGA III₁, chap. 0, 10.3.1-2]). En particulier, le complété \widehat{L} de L est (abstraitement) isomorphe à L' (tous deux isomorphes au corps des séries de Laurent $k'((t))$). D'après le lemme B.2.2.6, pour un tel corps L , le morphisme $H_p^{r+1}(L) \rightarrow H_p^{r+1}(\widehat{L}) \simeq H_p^{r+1}(L') \neq 0$ est une surjection. Ainsi, $H_p^{r+1}(L) \neq 0$, comme escompté. \square

B.3.4. REMARQUE. Bien que ce résultat ne soit pas utilisé par la suite, signalons que la minoration B.3.0.a est valable sans supposer que l'anneau local noethérien intègre A soit hensélien ou excellent, ni même que p soit la caractéristique résiduelle, à condition de remplacer \dim_p par la p -dimension virtuelle \dim_v des corps, c'est-à-dire la p -dimension d'extensions finies suffisamment grandes. (Rappelons que l'inégalité $\dim_p \neq \dim_v$ ne peut se produire que pour $p = 2$ et pour des corps formellement réels. De tels corps ne sont jamais isomorphes au corps des fractions d'un anneau intègre hensélien de corps résiduel de caractéristique $q > 0$. En effet, dans un tel anneau (hensélien), si $q \equiv 1 \pmod{4}$ (resp. $q \equiv 3 \pmod{4}$, $q = 2$), -1 est un carré (resp. une somme de deux carrés, de quatre carrés) et, *a fortiori*, dans son corps des fractions. Si $q = 2$, et A de caractéristique mixte, on remarquera en effet que d'une part 7 (comme tout autre entier positif) est une somme de quatre carrés et d'autre part que -7 (comme tout entier congru à 1 modulo 8) est un carré, de sorte que le quotient $-1 = \frac{7}{-7}$ est une somme de quatre carrés.) Esquissons la démonstration de B.3.0.a dans le cas plus général de cet alinéa. Si $\dim(A) > 0$, même si A n'est pas caténaire, il existe au moins un idéal premier \wp de hauteur un tel que A/\wp soit de dimension $\dim(A) - 1$. Si A est de caractéristique mixte $(0, p)$, on peut supposer que $p \in \wp$ car $\dim(A/p) = \dim(A) - 1$. D'après le théorème de Krull-Akizuki [Bourbaki AC, VII §2 n°5] la normalisation de A_\wp est un anneau de Dedekind semilocal dont les corps résiduels sont *finis* sur celui de A_\wp . On achève la démonstration comme ci-dessus car B.2.3.1 et B.3.2.1 sont vrais pour \dim_v et parce que \dim_v est invariant par extension finie. (Comparer avec [SGA 4 X, 2.4].)

B.4. Majoration de $\dim_p(K)$: le cas d'égle caractéristique

Dans cette section, on démontre par récurrence sur la dimension de l'anneau A l'inégalité suivante, où A , K et k sont comme dans B.1.2, et où l'on suppose de plus A de caractéristique $p > 0$:

$$(B.4.0.a) \quad \dim_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

Il résulte de B.3.1 et B.2.2.12 que l'on peut supposer A normal complet. (On utilise également le fait que le complété d'un anneau local excellent normal est normal ([ÉGA IV₂, 7.6.1]).)

Notons d la dimension de A , k son corps résiduel, r le p -rang de k , que l'on peut supposer fini, et K le corps des fractions de A . Commençons par un lemme élémentaire.

B.4.1. LEMME. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$p \operatorname{rang}(K) = d + r.$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème de structure de Cohen [ÉGA IV₁, chap. 0, 19.8.8 ii], il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que le morphisme $\operatorname{Spec}(A) \rightarrow \operatorname{Spec}(A_0)$ soit *fini*. D'après (B.2.1.1) ceci implique que $p \operatorname{rang} K = p \operatorname{rang} \operatorname{Frac}(A_0)$. D'après B.2.1.5, le terme de droite est égal à $d + r$. \square

Il nous faut donc montrer que si $\dim_p(k) = r$ (c'est-à-dire si $H_p^{r+1}(k') = 0$ pour toute extension finie k'/k), hypothèse que nous allons maintenant supposer satisfaite, on a également $H_p^{d+r+1}(K') = 0$ pour toute extension finie K'/K . Il suffit de montrer que $H_p^{d+r+1}(K) = 0$.

B.4.2. Supposons dorénavant $d > 0$ (sans quoi l'énoncé à démontrer est trivial), et posons $n = d + r$. Considérons un élément de Ω_K^n , que l'on écrit $\frac{\omega}{f}$, où $\omega \in \Omega_A^n/\text{torsion}$ et $f \in \mathfrak{m}_A - \{0\}$. D'après le théorème de structure de Cohen-Gabber (B.7.1), il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[x_1, \dots, x_d]]$ tel que le morphisme $\pi : \operatorname{Spec}(A) \rightarrow \operatorname{Spec}(A_0)$ soit fini et *génériquement étale*. Soit $f_0 = N_{X/X_0}(f) \in A_0$ la norme de l'élément f (cf. p. ex. [ÉGA II, 6.4]). L'élément f divise f_0 : cela résulte par exemple de la formule classique pour la norme [Bourbaki A, V §8 n°3 prop. 4] et du fait que A est normal. On peut donc supposer, et l'on supposera, que l'élément f appartient à A_0 . Considérons le fermé R de $X_0 := \operatorname{Spec}(A_0)$ au-dessus duquel le morphisme π est ramifié. Il existe un élément non nul $a \in A_0$ tel que R soit contenu dans le fermé $V(a)$. Enfin, quitte à remplacer a et f par af , on peut supposer $a = f$.

Rappelons le théorème de préparation, qui nous permettra de rendre le lieu de ramification fini, par projection, sur un schéma de dimension un de moins.

B.4.3. THÉORÈME (Théorème de préparation de Weierstraß, [Bourbaki AC, VII §3 n°7-8]).
Soient A un anneau local séparé complet d'idéal maximal \mathfrak{m} et d un entier naturel.

- (i) *Soit ρ un entier naturel et $f \in A[[\underline{X}, T]]$ ($\underline{X} = \{X_1, \dots, X_d\}$) une série entière ρ -régulière relativement à T , c'est-à-dire congrue à $(u \in A[[T]]^\times) \cdot T^\rho$ modulo $(\mathfrak{m}, \underline{X})$. Pour tout $g \in A[[\underline{X}, T]]$, il existe un unique couple $(q, r) \in A[[\underline{X}, T]] \times A[[\underline{X}]][[T]]$ tel que $g = qf + r$ et $\deg_T(r) < \rho$.*
- (ii) *Soit ρ un entier naturel. Si $f \in A[[\underline{X}, T]]$ est ρ -régulière relativement à T , il existe un unique polynôme $P = T^\rho + \sum_{i < \rho} p_i T^i$, où $p_i \in (\mathfrak{m}, \underline{X})A[[\underline{X}]]$, et une unité $u \in A[[\underline{X}, T]]^\times$ tels que $f = uP$.*
- (iii) *Soit $f \in A[[\underline{X}, T]]$ non nulle modulo \mathfrak{m} . Il existe un entier naturel ρ et un automorphisme $A[[T]]$ -linéaire c de $A[[\underline{X}, T]]$, tel que $c(X_i) = X_i + T^{N_i}$ ($N_i > 0$) et $c(f)$ soit ρ -régulier.*

Rappelons que si B est un anneau local complet noethérien, un polynôme $P \in B[X]$ est dit *distingué* s'il est de la forme $X^\rho + \sum_{i < \rho} b_i X^i$, où $b_i \in \mathfrak{m}_B$ et $\rho \geq 0$.

D'après (iii) et (ii) ci-dessus, quitte à changer de coordonnées, on peut supposer f égal à un polynôme *distingué* de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]][[x_d]]$. En particulier il appartient à l'anneau $\widetilde{A}_0 := k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$, hensélisé de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]][[x_d]]$ en l'origine.

B.4.4. LEMME. Soient B un anneau local complet noethérien et $P \in B[X]$ un polynôme distingué.

(i) Le complété (P) -adique de $B\{X\}$ s'identifie à $B[[X]]$.

(ii) La paire $(\text{Spec}(B\{X\}), V(P))$ est hensélienne.

DÉMONSTRATION. Vérifions (i). Soient N un entier naturel et $Q = P^N$. Il résulte de **B.4.3** (i), que l'anneau quotient $B[[X]]/(Q)$ est isomorphe comme B -module à $B[X]/(X^{\deg(Q)})$ et en particulier fini sur B . Par fidèle platitude de $B[[X]]$ sur $B\{X\}$, $B\{X\}/(Q)$ est naturellement un sous-anneau de $B[[X]]/(Q)$. Il est donc lui-aussi fini sur B , donc complet, et finalement isomorphe à $B[[X]]/(Q)$. Le séparé-complété (P) -adique de $B\{X\}$ est donc isomorphe à celui de $B[[X]]$; ce dernier est isomorphe à $B[[X]]$ puisque $\deg(P) > 0$.

Vérifions (ii). Rappelons ([GABBER 1992], déf. p. 59 et [CRÉPEAUX 1967], prop. 1) qu'une paire $(\text{Spec}(C), V(I))$ est dite *hensélienne* si pour tout polynôme $f \in C[T]$, toute racine *simple* de f dans C/I se relève en une racine dans C . (L'idéal I est alors nécessairement contenu dans le radical de Jacobson de C .) On laisse le soin au lecteur de vérifier que pour tout anneau local hensélien C et tout idéal $I \subset \mathfrak{m}_C$, la paire $(\text{Spec}(C), V(I))$ est hensélienne. On applique alors ce résultat à $C = B\{X\}$ et $I = (P)$. \square

Terminons ces rappels par l'énoncé du théorème d'algébrisation suivant.

B.4.5. THÉORÈME (Renée Elkik, [ELKIK 1973], théorème 5). Soient $(X = \text{Spec}(A), Y = V(I))$ une paire hensélienne avec A noethérien, et U le sous-schéma ouvert complémentaire de Y dans X . Notons $X_{\hat{Y}}$ le complété de X le long de Y , \hat{Y} le fermé correspondant à Y et \hat{U} son complémentaire dans $X_{\hat{Y}}$. Le foncteur $X' \mapsto X' \times_X X_{\hat{Y}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des X -schémas finis, étales sur U , et la catégorie des $X_{\hat{Y}}$ -schémas finis, étales sur \hat{U} .

Reprenons les notations en vigueur après le théorème **B.4.3**. Le fermé $V(f)$, contenant le lieu de ramification, étant défini par une équation polynomiale unitaire à coefficients dans $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$, il résulte du lemme **B.4.4** et du théorème **B.4.5** que l'on peut algébriser le morphisme $\pi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A_0)$. En d'autres termes, on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X = \text{Spec}(A) & \longrightarrow & \tilde{X} = \text{Spec}(\tilde{A}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{fini, gén. étale} \\ X_0 = \text{Spec}(A_0) & \longrightarrow & \tilde{X}_0 = \text{Spec}(\tilde{A}_0) \end{array}$$

où, rappelons-le, \tilde{A}_0 est $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]\{x_d\}$.

D'après le lemme **B.4.4**, appliqué à $B = k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$ et $P = f$, l'anneau complet A , fini sur A_0 , s'identifie au complété (f) -adique de \tilde{A} . On peut donc décomposer $\frac{\omega}{f} \in \Omega_K^n = \Omega_K^{d+r}$ en

$$\frac{\omega}{f} = \frac{\tilde{\omega}}{f} + \omega'$$

où $\tilde{\omega} \in \Omega_{\tilde{A}}^n/\text{torsion}$ et $\omega' \in f\Omega_{\tilde{A}}^n/\text{torsion} \subset \mathfrak{m}_A\Omega_{\tilde{A}}^n/\text{torsion}$.

Le corps des fractions \tilde{K} de \tilde{A} est de degré de transcendance un sur le corps des fractions L de $k[[x_1, \dots, x_{d-1}]]$. Par hypothèse de récurrence sur la dimension, et compte tenu du fait que l'on a supposé $\dim_p(k) = p \operatorname{rang}(k) = r$, on a

$$\dim_p(L) \leq (d-1) + \dim_p(k) = d-1+r.$$

Enfin, d'après le corollaire au théorème de Katô (B.2.3.2), on a

$$\dim_p(\tilde{K}) \leq \dim_p(L) + 1.$$

Finalement, $\dim_p(\tilde{K}) \leq d+r$. Ainsi, la classe de $\frac{\tilde{\omega}}{f}$ dans le quotient (B.2.2.1) $\mathbb{H}_p^{d+r+1}(\tilde{K})$ de $\Omega_{\tilde{K}}^{d+r}$ est nulle. *A fortiori* son image dans $\mathbb{H}_p^{d+r+1}(K)$ l'est également.

La forme ω' appartient à $\mathfrak{m}_A \Omega_A^n / \text{torsion} \subset \Omega_K^n$; elle peut donc s'écrire sous la forme $\sum_i f_i \omega_i$, où $f_i \in \mathfrak{m}_A$ et ω_i est une forme différentielle *logarithmique* dans Ω_K^{d+r} . Par définition de l'opérateur de Cartier inverse (B.2.2.1), et du fait que les f_i appartiennent à l'image du morphisme d'Artin-Schreier (B.2.2.7), l'image de ω' dans le quotient $\Omega_K^{d+r} / d\Omega_K^{d+r-1}$ appartient à l'image de \wp . La classe de ω' est donc nulle dans $\mathbb{H}_p^{d+r+1}(K)$. CQFD.

B.5. Majoration de $\dim_p(K)$: le cas d'inégale caractéristique

B.5.1. Dans cette section, on démontre l'inégalité ci-dessous par récurrence sur la dimension de l'anneau A , satisfaisant aux conditions de B.1.2 et supposé de caractéristique nulle.

$$(B.5.1.a) \quad \operatorname{cd}_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

Il résulte de B.3.1 que l'on peut supposer A normal.

B.5.2. Réduction au cas complet.

B.5.2.1. LEMME. *Soit A un anneau local hensélien excellent intègre de corps des fractions K . Soient \hat{A} son complété et \hat{K} son corps des fractions. Il existe un ensemble filtrant de sous- K -algèbres de type fini $(B_i)_{i \in I}$ de \hat{K} tel que $\hat{K} = \operatorname{colim} B_i$ et chaque morphisme $\operatorname{Spec}(B_i) \rightarrow \operatorname{Spec}(K)$ ait une section.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que pour toute sous- K -algèbre de type fini B de \hat{K} , le morphisme $\operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(K)$ a une section. L'inclusion K -linéaire $B \rightarrow \hat{K}$ correspond à un \hat{K} -point d'un système d'équations convenables f_1, \dots, f_r (définissant B sur K) que l'on peut supposer à coefficients dans A . Quitte à chasser comme en B.2.2.9 (démonstration) les dénominateurs, on peut appliquer le théorème de Popescu (B.2.2.10) pour obtenir un K -point, c'est-à-dire une section du morphisme $\operatorname{Spec}(B) \rightarrow \operatorname{Spec}(K)$. \square

B.5.2.2. COROLLAIRE. *Soient A comme en B.5.2.1 et $F : (A\text{-algèbres}) \rightarrow \operatorname{Ens}$ un foncteur localement de présentation finie (c'est-à-dire commutant aux colimites filtrantes). Le morphisme canonique $F(K) \rightarrow F(\hat{K})$ est une injection.*

Soient A comme dans **B.5.1** et M un G_K -module discret de p -torsion. Soit \mathcal{F} le faisceau étale sur $\text{Spec}(K)$ correspondant. On le prolonge par zéro en un faisceau abélien \mathcal{G} sur $\text{Spec}(A)$. D'après [SGA 4 VII, 5.8], pour tout entier i , le foncteur $B \mapsto H^i(\text{Spec}(B)_{\text{ét}}, \mathcal{G})$ de (A – algèbres) dans Ens est localement de présentation finie. Il résulte donc du lemme précédent que l'on a une *injection*

$$H^i(G_K, M) = H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathcal{G}) \hookrightarrow H^i(\text{Spec}(\widehat{K})_{\text{ét}}, \mathcal{G}) = H^i(G_{\widehat{K}}, M).$$

Ainsi, si $i > \text{cd}_p(\widehat{K})$, $H^i(G_K, M) = 0$; on a donc $\text{cd}_p(K) \leq \text{cd}_p(\widehat{K})$, ce qui nous permet de supposer dorénavant A *complet* et normal.

B.5.3. En plus des hypothèses en vigueur dans **B.5.1**, on suppose maintenant A *complet* et normal.

Pour pouvoir exploiter le théorème de structure de Cohen-Gabber (**B.7.1**), qui s'appuie sur une hypothèse de réduction, il faut préalablement utiliser le théorème suivant.

B.5.3.1. THÉORÈME (Helmut Epp, [EPP 1973], théorème 1.9 et §2). *Soit $T \rightarrow S$ un morphisme local dominant de traits, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Notons κ_S et κ_T leurs corps résiduels respectifs. Supposons S complet, κ_S parfait et le sous-corps parfait maximal de κ_T algébrique sur κ_S . Il existe une extension finie de traits $S' \rightarrow S$ telle que le produit fibré réduit normalisé*

$$T' := (T \times_S S')_{\text{red}}^{\vee}$$

ait une fibre spéciale réduite au-dessus de S' .

(Rappelons que l'on appelle *trait* le spectre d'un anneau de valuation discrète.)

B.5.3.2. REMARQUE. En caractéristique mixte, on vérifie immédiatement que le produit fibré $T \times_S S'$ est réduit.

B.5.3.3. Il est immédiat de vérifier que si $S' \rightarrow S$ est comme dans l'énoncé du théorème, pour tout morphisme dominant de traits $S'' \rightarrow S'$, le schéma $T' \times_{S'} S''$ est une union disjointe de traits, à fibre spéciale sur S'' réduite. Si l'on interprète la conclusion comme la lissité formelle du morphisme $T' \rightarrow S'$ ([ÉGA IV₁, chap. 0, 19.3.1 et 19.7.1]), l'observation précédente devient un cas particulier de la stabilité par changement de base de cette notion ([ÉGA IV₁, chap. 0, 19.3.5 (iii)]).

B.5.3.4. Commençons par vérifier que l'hypothèse sur les corps résiduels est satisfaite dans de nombreux cas. Nous dirons qu'une extension de corps K/k a la *propriété de Epp* si tout élément du sous-corps parfait maximal de K est algébrique séparable sur k . Le sous-corps parfait maximal de K n'est autre que $K^{p^\infty} := \bigcap_{n \geq 0} K^{p^n}$, où p est l'exposant caractéristique de K .

B.5.3.4.1. LEMME. *Pour tout corps K de caractéristique $p > 0$, on a, dans une clôture séparable $K^{\text{sép}}$ de K ,*

$$(K^{p^\infty})^{\text{sép}} = (K^{\text{sép}})^{p^\infty}.$$

DÉMONSTRATION. L'inclusion $(K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$ est évidente : K^{p^∞} est parfait donc toute extension algébrique, en particulier sa clôture séparable $(K^{p^\infty})^{\text{sép}}$, l'est également. Comme cette dernière est contenue dans $K^{\text{sép}}$, elle est également contenue dans son plus grand sous-corps parfait $(K^{\text{sép}})^{p^\infty}$.

Réciproquement, considérons $x \in (K^{\text{sép}})^{p^\infty}$, et notons, pour chaque entier $n \geq 0$, x_n sa racine p^n -ième dans $K^{\text{sép}}$ et f_n son polynôme minimal par rapport à K . Compte tenu d'une part de l'expression de f_n en fonction des polynômes symétriques en les conjugués galoisiens de x_n et d'autre part de l'injectivité et de l'additivité de l'élevation à la puissance p^n -ième, on a l'égalité $f_0 = f_n^{(p^n)}$, où $f_n^{(p^n)}$ est le polynôme obtenu à partir de f_n en élevant les coefficients à la puissance p^n -ième. Il en résulte que les coefficients du polynôme minimal f_0 de x appartiennent à K^{p^∞} . \square

B.5.3.4.2. PROPOSITION (Cf. [EPP 1973], §0.4).

Soit k un corps d'exposant caractéristique p .

- (i) Soient L/K et K/k ayant la propriété de Epp. Alors, L/k a la propriété de Epp.
- (ii) Toute extension finie de k a la propriété de Epp.
- (iii) Si $p > 1$, pour tout entier naturel d , l'extension $(\text{Frac } k[[x_1, \dots, x_d]])/k$ a la propriété de Epp.
- (iv) Si $p > 1$, pour toute inclusion $k \subset A$, où A est un anneau local complet noethérien intègre, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels, l'extension $(\text{Frac } A)/k$ a la propriété de Epp.

DÉMONSTRATION. Supposons immédiatement $p > 1$ sans quoi (i) et (ii) sont triviaux.

(i) Par hypothèse on a dans une clôture séparable de L l'inclusion $L^{p^\infty} \subset K^{\text{sép}}$. Comme le corps L^{p^∞} est parfait, on en déduit que $L^{p^\infty} \subset (K^{\text{sép}})^{p^\infty} = (K^{p^\infty})^{\text{sép}} \subset k^{\text{sép}}$, où l'égalité résulte du lemme précédent.

(ii) Toute extension étale a tautologiquement la propriété de Epp. D'après (i), il reste à considérer le cas d'une extension radicielle K/k . Si elle est de hauteur $\leq r$, on a $K^{p^r} \subset k$ et en particulier $K^{p^\infty} \subset k \subset k^{\text{sép}}$.

(iii) Soit $A = k[[x_1, \dots, x_d]]$ et K son corps des fractions. Montrons que $K^{p^\infty} = k^{p^\infty}$. Comme K est contenu dans $k((x_1, \dots, x_{d-1}))(x_d)$, on se ramène par récurrence au cas où $d = 1$. Tout élément non nul de $k((t))^{p^\infty}$ a une valuation infiniment p -divisible donc nulle, de sorte que $k((t))^{p^\infty} - \{0\}$ est contenu dans $k[[t]]^\times$ et finalement dans k^{p^∞} par un calcul immédiat.

(iv) Cela résulte des observations précédentes et du théorème de structure de Cohen. \square

B.5.3.5. Soit $k_0 = k^{p^\infty}$ le sous-corps parfait maximal du corps résiduel k de A et notons $W_0 = W(k_0)$ l'anneau des vecteurs de Witt correspondant. Il résulte du théorème de Cohen que l'on a un morphisme $X := \text{Spec}(A) \rightarrow S_0 := \text{Spec}(W_0)$ relevant l'inclusion $k_0 \hookrightarrow k$ ([ÉGA IV₁, chap. 0, 19.8.6]).

Pour tout point maximal \mathfrak{p} de la fibre spéciale $X_{\mathfrak{p}}$, l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{p}}$ a pour corps résiduel $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})$, où A/\mathfrak{p} est un anneau local complet intègre noethérien de corps résiduel

k . Par complétude, il existe une section $k \hookrightarrow A/\mathfrak{p}$ à la surjection canonique $A/\mathfrak{p} \twoheadrightarrow k$. D'après **B.5.3.4.2** (iv), l'extension $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k$ correspondante a la propriété de Epp. Puisqu'il en est de même de k/k_0 , il résulte de **B.5.3.4.2** (i) que l'extension $\text{Frac}(A/\mathfrak{p})/k_0$ a également la propriété de Epp. On peut donc appliquer pour chaque idéal \mathfrak{p} comme ci-dessus le théorème de Epp (**B.5.3.1**) à l'extension $A_{\mathfrak{p}}/W_0$: il existe une extension finie de traits $W_{0\mathfrak{p}}/W_0$ telle que $(A_{\mathfrak{p}} \otimes_{W_0} W_{0\mathfrak{p}})^\vee$ soit formellement lisse sur $W_{0\mathfrak{p}}$. Les idéaux \mathfrak{p} étant en nombre fini, il existe une extension finie de traits W'_0/W_0 , dominant les $W_{0\mathfrak{p}}$. D'après **B.5.3.3** et par commutation de la normalisation à la localisation, il existe donc un changement de base fini $S'_0 = \text{Spec}(W'_0) \rightarrow S_0$ tel que la fibre spéciale du produit fibré normalisé $X' := (X \times_{S_0} S'_0)^\vee = \text{Spec}(A')$ soit réduite en les points de X' s'envoyant sur un point \mathfrak{p} de X comme ci-dessus. D'après le théorème de Cohen-Seidenberg, l'ensemble de ces points de X' coïncide avec l'ensemble des points maximaux de la fibre spéciale de $X' \rightarrow S'_0$.

Le lemme suivant nous permet d'en déduire que cette fibre spéciale est réduite.

B.5.3.5.1. LEMME. *Soit X un schéma noethérien normal. Tout diviseur de Cartier effectif génériquement réduit est réduit.*

B.5.3.6. Notons k'_0 le corps résiduel de W'_0 , fini sur k_0 , ϖ' une uniformisante de W'_0 , et considérons une composante connexe $X'' = \text{Spec}(A'')$ de X' . Soit k'' son corps résiduel, fini sur k . L'inclusion $k'_0 \hookrightarrow k''$ déduite du morphisme $X'' \rightarrow S'_0$ est formellement lisse, car k'_0 est parfait, donc se relève d'après [ÉGA IV₁, chap. 0, 19.7. 1 et 2] en un morphisme *formellement lisse* $W'_0 \rightarrow I''$ où I'' est un anneau de valuation discrète complet. L'anneau A''/ϖ' étant réduit et équidimensionnel de dimension $d - 1$ de corps résiduel k'' , il existe d'après le théorème de Cohen-Gabber (**B.7.1**), un relèvement k'_0 -linéaire $k'' \hookrightarrow A''/\varpi'$ et des éléments x_1, \dots, x_{d-1} dans l'idéal maximal de A''/ϖ' tels que le morphisme induit $k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''/\varpi'$, envoyant l'indéterminée t_i sur x_i , soit fini, *génériquement étale* (c'est-à-dire : le morphisme $k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''/\varpi'$ induit un morphisme étale entre un ouvert dense de $\text{Spec}(A''/\varpi')$ et un ouvert de $\text{Spec}(k''[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$).

Par lissité formelle de $W'_0 \rightarrow I''$, le morphisme composé $I'' \rightarrow k'' \rightarrow A''/\varpi'$ se relève en un W'_0 -morphisme $I'' \rightarrow A''$. En relevant les x_i dans A'' , cela nous permet de construire un morphisme $A''_0 := I''[[t_1, \dots, t_{d-1}]] \rightarrow A''$, fini injectif (cf. p. ex. [ÉGA IV₁, chap. 0, 19.8.8 (démonstration)]), *étale* au-dessus du point générique de la fibre spéciale.

Notons K'' le corps des fractions de A'' . Par construction, il est fini sur K .

B.5.4. Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante :

B.5.4.1. PROPOSITION. *Les groupes de cohomologie $H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ sont nuls pour tout $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.*

Remarquons que le morphisme $A \rightarrow A''$ étant fini, $\dim(A) = \dim(A'')$ et $\dim_p(k) = \dim_p(k'')$ (**B.2.2.13**).

Soit i comme ci-dessus et considérons une classe $c \in H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$. Nous allons commencer par montrer que c s'étend à un grand ouvert.

B.5.4.2. LEMME. *Il existe un ouvert $U \subset X''$ contenant les points maximaux de la fibre spéciale et une classe $c_U \in H^i(U_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ s'envoyant sur c par restriction à $\text{Spec}(K'')$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soit \mathfrak{p} un point maximal de la fibre spéciale $\text{Spec}(A''/\varpi')$. L'anneau A'' étant normal, le localisé $A''_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. Soit $K''^h_{\mathfrak{p}}$ le corps des fractions de l'hensélisé de $A''_{\mathfrak{p}}$ et $c_{\mathfrak{p}}$ la restriction de c à $\text{Spec}(K''^h_{\mathfrak{p}})$. Il résulte du théorème de Katô (**B.2.3.1**) que l'on a $\text{cd}_p(K''^h_{\mathfrak{p}}) = 1 + \dim_p(\text{Frac}(A''/\mathfrak{p}))$. D'après **B.4.0.a**, appliqué à l'anneau intègre hensélien A''/\mathfrak{p} de corps résiduel k'' , on a donc $\text{cd}_p(K''^h_{\mathfrak{p}}) \leq \dim(A'') + \dim_p(k'') < i$, de sorte que $c_{\mathfrak{p}} = 0$. Joint au lemme ci-dessous, cela montre que la classe c appartient à l'image du morphisme de restriction $H^i(\text{Spec}(A''_{\mathfrak{p}})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$. Il existe donc, pour chaque \mathfrak{p} comme ci-dessus, un ouvert $U_{\mathfrak{p}}$ de X'' contenant \mathfrak{p} et une classe $C_{\mathfrak{p}}$ sur $U_{\mathfrak{p}}$ induisant c sur $\text{Spec}(K)$. Quitte à rétrécir ces ouverts, on peut utiliser inductivement la suite exacte de Mayer-Vietoris pour recoller ces $C_{\mathfrak{p}}$ en une classe C_U sur $U = \cup U_{\mathfrak{p}}$. \square

B.5.4.3. LEMME. *Soit A un anneau de valuation discrète de corps des fractions K . Considérons A^h son hensélisé, K^h le corps des fractions de A^h et $c \in H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$, où $(n, i) \in \mathbf{N}^2$. Si l'image de c dans $H^i(\text{Spec}(K^h)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$ est nulle, la classe c appartient à l'image du morphisme de restriction $H^i(\text{Spec}(A)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$.*

DÉMONSTRATION. Le morphisme $\text{Spec}(A^h) \rightarrow \text{Spec}(A)$ induisant un isomorphisme sur les localisations strictes et un isomorphisme au-dessus du point fermé s de $\text{Spec}(A)$, on voit facilement d'après [SGA 4 V, 6.4 et 6.5] et [SGA 4 VIII, 5.2] que le morphisme d'adjonction $R\Gamma_{\{s\}}(\text{Spec}(A)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \rightarrow R\Gamma_{\{s^h\}}(\text{Spec}(A^h)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n)$ (où s^h est le point fermé de $\text{Spec}(A^h)$) est un isomorphisme. Le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^i(\text{Spec}(A)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^i(\text{Spec}(K)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^{i+1}_{\{s\}}(\text{Spec}(A)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{isom.} \\ H^i(\text{Spec}(A^h)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^i(\text{Spec}(K^h)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^{i+1}_{\{s^h\}}(\text{Spec}(A^h)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n) \end{array}$$

permet alors de conclure. \square

Revenons à la démonstration de **B.5.4.1**. On peut supposer $d \geq 2$, sans quoi le résultat est déjà connu (**B.2.3.1**, pour $d = 1$). Notons $\pi : X'' = \text{Spec}(A'') \rightarrow X''_0 = \text{Spec}(A''_0)$ le morphisme considéré en **B.5.3.6**. Il est fini et *étale* au-dessus du complémentaire d'un fermé F_{π} de X''_0 ne contenant pas la fibre spéciale du morphisme $X''_0 \rightarrow S'_0 = \text{Spec}(W'_0)$. Notons F_c le fermé $\pi(X'' - U) \subset X''_0$, où U est comme en **B.5.4.2**, et posons $F := F_{\pi} \cup F_c$. Par hypothèse, F est contenu dans le lieu d'annulation d'une fonction non inversible $f \in A''_0$ telle que $f \notin (\varpi')$. Ainsi, d'après **B.4.3** (ii) et (i) (appliqué à l'anneau de coefficients I'' et $\mathfrak{m} = (\varpi')$), on peut supposer que f appartient à $I''[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$ et est *unitaire* en t_{d-1} , *distingué*.

Notons $\widetilde{A''_0} = I''[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$. D'après le lemme **B.4.4**, la paire $(\widetilde{A''_0}, (f))$ est hensélienne et le complété (f) -adique de $\widetilde{A''_0}$ est A''_0 . Le morphisme $\text{Spec}(A'') \rightarrow \text{Spec}(A''_0)$ étant fini,

étale au-dessus de $D(f) \hookrightarrow \text{Spec}(A_0'')$, il résulte du théorème d'Elkik **B.4.5** qu'il s'algèbrise. En d'autres termes, il existe un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X'' = \text{Spec}(A'') & \longrightarrow & \widetilde{X}'' = \text{Spec}(\widetilde{A}'') \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{fini, gén. étale} \\ X_0'' = \text{Spec}(A_0'') & \longrightarrow & \widetilde{X}_0'' = \text{Spec}(\widetilde{A}_0'') \end{array} .$$

La paire $(\widetilde{X}'', V(f))$ est hensélienne, car $(\widetilde{X}_0'', V(f))$ l'est, de sorte qu'il résulte du théorème de comparaison de Fujiwara-Gabber ([FUJIWARA 1995], 6.6.4) que le morphisme

$$H_{\text{ét}}^i(\widetilde{X}'' - V(f), \mathbf{Z}/p) \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X'' - V(f), \mathbf{Z}/p)$$

est un *isomorphisme*. Ainsi, la classe $c \in H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$, qui a été préalablement étendue à $X'' - V(f)$, provient, par restriction, d'un élément de $H_{\text{ét}}^i(\widetilde{X}'' - V(f), \mathbf{Z}/p)$. Soient \widetilde{K}'' le corps des fonctions rationnelles du schéma intègre \widetilde{X}'' et L le corps des fractions de l'anneau $I''[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$. L'extension \widetilde{K}''/L est de degré de transcendance un de sorte que $\text{cd}_p(\widetilde{K}'') \leq 1 + \text{cd}_p(L)$ (théorème de Grothendieck, cf. [SERRE 1994], chap. I, §4.2, prop. 11). D'après l'hypothèse de récurrence, on sait d'autre part que $\text{cd}_p(L) \leq (\dim(A'') - 1) + \dim_p(k'')$. Finalement, puisque $\dim(A) = \dim(A'')$ et $\dim_p(k) = \dim_p(k'')$, on a

$$\text{cd}_p(\widetilde{K}'') \leq \dim(A) + \dim_p(k).$$

La classe de cohomologie c , qui appartient à l'image de $H^i(\text{Spec}(\widetilde{K}'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H^i(\text{Spec}(K'')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ est nulle. (Rappelons que $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.)

Ceci achève la démonstration de la proposition **B.5.4.1**.

B.5.5. Soient K_0 (resp. K_0') le corps des fonctions de S_0 (resp. S_0'). Le corps K'' du paragraphe précédent étant l'un quelconque des facteurs de la K -algèbre réduite $K \otimes_{K_0} K_0'$, il résulte de **B.5.4.1** que les groupes de cohomologie $H^i(\text{Spec}(K \otimes_{K_0} K_0')_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ sont nuls pour $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.

B.5.5.1. COROLLAIRE. Soit $\overline{K_0}$ une clôture séparable de K_0 . Les groupes $H^i(\text{Spec}(K \otimes_{K_0} \overline{K_0})_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p)$ sont nuls pour $i > \dim(A) + \dim_p(k)$.

DÉMONSTRATION. Soit en effet \widetilde{W}/W_0' une extension finie. Il résulte immédiatement de **B.5.3.3**, et du lemme **B.5.3.5.1** et du critère de Serre que la fibre spéciale du morphisme $\text{Spec}(A' \otimes_{W_0'} \widetilde{W}) \rightarrow \text{Spec}(\widetilde{W})$ est réduite et le schéma $\text{Spec}(A' \otimes_{W_0'} \widetilde{W})$ normal, de corps résiduels en ses point fermés finis sur k . On peut donc procéder comme en **B.5.3.6** et **B.5.4** en remplaçant $\text{Spec}(A'')$ par une composante connexe de $\text{Spec}(A' \otimes_{W_0'} \widetilde{W})$. Ainsi, d'après **B.5.4.1**, on a

$$H^i(\text{Spec}(K \otimes_{K_0} \text{Frac}(\widetilde{W}))_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) = 0$$

pour tout $i > \dim(A) + \dim_p(k)$. On passe alors à la limite. \square

B.5.5.2. PROPOSITION. Soient A , K , k et p comme dans l'énoncé du théorème **B.1.2**. Supposons A normal, complet de caractéristique mixte. On a alors l'inégalité :

$$\text{cd}_p(K) \leq \dim(A) + \dim_p(k) + 2.$$

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

B.5.5.3. LEMME. Soient K un corps, N un entier naturel et p un nombre premier. Supposons que pour toute extension finie séparable L de K on ait $H^{N+1}(\text{Spec}(L)_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/p) = 0$. Alors, $\text{cd}_p(K) \leq N$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soient \bar{K} une clôture séparable de K et H un p -Sylow de $\text{Gal}(\bar{K}/K) =: G_K$. On a l'égalité $\text{cd}_p(G_K) = \text{cd}_p(H)$ ([SERRE 1994], chap. I, §3.3, cor. 1). Puisque que H est un p -groupe, on a $\text{cd}_p(H) \leq N$ si et seulement si $H^{N+1}(H, \mathbf{Z}/p) = 0$ (op. cit., §4, prop. 21). Or, le groupe $H^{N+1}(H, \mathbf{Z}/p) = H_{\text{ét}}^{N+1}(\bar{K}^H, \mathbf{Z}/p)$ est une colimite de groupes $H_{\text{ét}}^{N+1}(L, \mathbf{Z}/p)$ avec L/K finie étale. Sous nos hypothèses, les termes de cette colimite sont tous nuls de sorte que $\text{cd}_p(H) \leq N$ comme escompté. \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Rappelons que le corps K_0 est un corps local à corps résiduel parfait de sorte que $\text{cd}_p(K_0) \leq 2$ (op. cit., chap. II, 4.3). Cette observation, jointe au résultat d'annulation **B.5.5.1**, permet de déduire de la suite spectrale

$$E_2^{\alpha, \beta} = H^\alpha(G_{K_0}, H_{\text{ét}}^\beta(K \otimes_{K_0} \bar{K}_0, \mathbf{Z}/p)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{\alpha+\beta}(K, \mathbf{Z}/p)$$

l'annulation des groupes $H_{\text{ét}}^i(K, \mathbf{Z}/p)$ pour $i > \dim(A) + \dim_p(k) + 2$. Ceci étant également valable pour les extensions finies de K , on peut utiliser le lemme ci-dessus pour conclure. \square

B.5.6. Fin de la démonstration. Fixons d et r deux entiers naturels et considérons le plus petit entier naturel N tel que pour tout A comme en **B.5.5.2**, de dimension d et de corps résiduel de p -dimension r , on ait $\text{cd}_p(\text{Frac } A) \leq N$. On a vu ci-dessus qu'un tel entier N existe (et est inférieur ou égal à $d+r+2$). Si A est un anneau intègre tel que $\text{cd}_p(\text{Frac } A) = N$, il existe d'après le lemme **B.5.5.3** une extension finie L de $\text{Frac } A$ telle que $H_{\text{ét}}^N(L, \mathbf{Z}/p) \neq 0$. Quitte à normaliser A dans L , on peut donc supposer qu'il existe un anneau A comme ci-dessus, de corps des fractions K tel que $H_{\text{ét}}^N(K, \mathbf{Z}/p) \neq 0$. Supposons par l'absurde $N > d+r$. D'après les résultats des paragraphes **B.5.3.5**, **B.5.3.6** et la proposition **B.5.4.1**, il existe une extension finie L/K telle que $H_{\text{ét}}^N(L, \mathbf{Z}/p) = 0$. Ce groupe est isomorphe à $H_{\text{ét}}^N(K, \text{Ind}_K^L(\mathbf{Z}/p))$. La surjection canonique $\text{Ind}_K^L(\mathbf{Z}/p) \rightarrow \mathbf{Z}/p$ de modules galoisiens (donnée par la trace) induit ici, puisqu'il n'y a pas de cohomologie en degré $\geq N+1$, une surjection

$$0 = H_{\text{ét}}^N(L, \mathbf{Z}/p) \rightarrow H_{\text{ét}}^N(K, \mathbf{Z}/p)$$

sur les groupes de cohomologie. Contradiction.

B.6. Le cas d'un ouvert de $A[p^{-1}]$

Dans cette section, on démontre le théorème suivant.

B.6.1. THÉORÈME. *Soit A un anneau hensélien excellent intègre de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et de corps des fractions K de caractéristique nulle. Alors, pour tout ouvert non vide affine $U \subset \text{Spec}(A[p^{-1}])$, on a :*

$$\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}}) = \dim(A) + \dim_p(k).$$

Rappelons que pour tout topos T on note $\dim.\text{coh.}_p(T)$ le plus petit entier naturel d (ou l'infini si un tel entier n'existe pas) tel que $H^n(T, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau de p -torsion \mathcal{F} et tout entier $n > d$ (cf. [SGA 4 X, §1] et [SGA 4 IX, 1.1]).

On majore $\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}})$ au paragraphe B.6.3 en procédant comme plus haut. Pour minorer $\dim.\text{coh.}_p(U_{\text{ét}})$, on se ramène au cas où U est le point générique par une astuce de globalisation d'une classe de cohomologie après un revêtement ramifié de degré 2 (cf. B.6.2.1).

B.6.2. Minoration. Soient A, k et K comme en B.6.1 et considérons un entier $r > 0$ inférieur ou égal à $\dim(A) + \dim_p(k) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On peut supposer A normal car d'une part A est japonais et d'autre part, pour tout morphisme fini $A \rightarrow A'$, si $U' = U \otimes_A A'$, on a $\dim.\text{coh.}_p(U') \leq \dim.\text{coh.}_p(U)$. Soit ξ un point maximal de $V(p) \subset \text{Spec}(A)$. Notons K_ξ^h le corps des fractions de l'hensélisé de l'anneau de valuation discrète A_ξ . D'après le théorème de Katô B.2.3.1, $\dim_p(K_\xi^h) = 1 + \dim_p(\kappa(A_\xi))$, où $\kappa(A_\xi)$ est le corps résiduel de l'anneau de valuation discrète. C'est aussi le corps des fractions d'un anneau local hensélien intègre de dimension $\dim(A) - 1$ et de corps résiduel k . Utilisant le théorème B.1.2, on en tire $\dim_p(K_\xi^h) = 1 + (\dim(A) - 1 + \dim_p(k)) \geq r$. De l'égalité $\text{cd}_p(K_\xi^h) = \text{cd}_p(K_\xi^h(\mu_p))$ (cf. p. ex. [SERRE 1994], chap. II, §4.1, prop. 10' et B.3.4) et du lemme B.5.5.3, on déduit l'existence d'une extension finie K'/K_ξ^h telle que $\mu_p \subset K'$ et $H_{\text{ét}}^r(K', \mathbf{Z}/p) \neq 0$. L'extension (séparable) K'/K_ξ^h peut être définie par un polynôme irréductible unitaire à coefficients dans K_ξ^h . Par unicité de l'extension de la norme de K_ξ^h à sa clôture séparable, le lemme de Krasner est applicable et l'on peut donc approcher les coefficients de ce polynôme par des éléments de K de sorte que l'extension K'/K_ξ^h soit définie sur K . Quitte à remplacer A par sa normalisation dans cette extension, on peut donc supposer que $H_{\text{ét}}^r(K_\xi^h, \mu_p^{\otimes r}) \neq 0$ et $\mu_p \subset K_\xi^h$. D'après les résultats de K. Katô ([K. KATO 1982], th. 1 ou [COLLIOT-THÉLÈNE 1999], §4), ce groupe est engendré par les *symboles* ; en particulier, il existe des éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in (K_\xi^h)^\times$ tels que la classe

$$c = \chi_{\varphi_1} \cup \dots \cup \chi_{\varphi_r} \in H_{\text{ét}}^r(K_\xi^h, \mu_p^{\otimes r})$$

soit non nulle. Ci-dessus, χ_{φ_i} est l'image de φ_i par le composé $(K_\xi^h)^\times \rightarrow (K_\xi^h)^\times / (K_\xi^h)^{\times p} \rightarrow H_{\text{ét}}^1(K_\xi^h, \mu_p)$.

Remarquons que l'anneau A_ξ^h étant hensélien, il existe un entier $N > 0$ tel que

$$(\star) \quad 1 + \mathfrak{m}_\xi^N \subset (1 + \mathfrak{m}_\xi)^p$$

dans cet anneau. Il en résulte immédiatement que l'on peut approcher les φ_i par des éléments de K sans changer les χ_{φ_i} .

On va montrer dans la proposition suivante qu'il existe une classe de cohomologie dans $H_{\text{ét}}^r(\text{Spec}(A[p^{-1}]), \mathcal{F})$, où \mathcal{F} est un \mathbf{Z}/p -faisceau convenable, *non nulle en restriction au corps des*

fractions. La minoration désirée, pour tout ouvert non vide $U \hookrightarrow \text{Spec}(A[p^{-1}])$ (affine ou non), s'en déduit immédiatement.

B.6.2.1. PROPOSITION ([GABBER [automne 2006](#)]). *Soient A, ξ et c comme ci-dessus. Pour tout voisinage ouvert $W \subset \text{Spec}(A)$ de ξ , il existe un morphisme surjectif, fini et plat de rang 2, $\pi : U' \rightarrow U := \text{Spec}(A[p^{-1}])$, étale et décomposé sur $U_\xi^h := \text{Spec}(K_\xi^h)$, satisfaisant la propriété suivante : si l'on note j' l'immersion ouverte $(W \cap U)' := \pi^{-1}(W \cap U) \hookrightarrow U'$, il existe une classe $c' \in H_{\text{ét}}^r(U', j'_! \mu_p^{\otimes r})$ dont la restriction à*

$$U' \times_U U_\xi^h \simeq U_\xi^h \coprod U_\xi^h,$$

soit $(c, -c)$.

Rappelons que si $j_{UX} : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, on note $j_{UX!}$ le foncteur « prolongement par zéro » sur les faisceaux étales abéliens. On a un morphisme d'adjonction canonique $j_{UX!} j_{UX}^* \rightarrow \text{Id}$, induisant un isomorphisme en restriction sur U . Il en résulte immédiatement que si $W_0 \hookrightarrow W \hookrightarrow U$ est une chaîne d'immersions ouvertes, on a un morphisme canonique $j_{W_0 U!} j_{W_0 U}^* \rightarrow j_{W U!} j_{W U}^*$ induisant un isomorphisme sur W_0 . Cela permet d'observer que si la conclusion de la proposition est vraie sur un ouvert W_0 , elle l'est sur tout ouvert W comme dans l'énoncé le contenant.

Vérifions maintenant qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas particulier où $r = 1$. Quitte à rétrécir W – ce qui est loisible d'après ce qui précède – on peut supposer les fonctions φ_i inversibles sur $W \cap U$. Supposons la proposition démontrée pour $r = 1$ et appliquons-la à la classe $c_1 = \chi_{\varphi_1}$; on obtient donc une classe c'_1 sur un U' , comme dans l'énoncé. Le produit (cf. p. ex. [[Cycle](#), 1.2.4])

$$\begin{aligned} H_{\text{ét}}^1(U', j'_! \mu_p) \otimes H_{\text{ét}}^1((W \cap U)', \mu_p) \otimes \cdots \otimes H_{\text{ét}}^1((W \cap U)', \mu_p) &\rightarrow H_{\text{ét}}^r(U', j'_! \mu_p^{\otimes r}) \\ c'_1 \otimes \chi_{\varphi_2} \otimes \cdots \otimes \chi_{\varphi_r} &\mapsto c' \end{aligned}$$

fournit une classe c' comme désirée.

Supposons $W = \text{Spec}(A[h^{-1}])$. Quitte à diviser φ par une puissance de h^p , on peut supposer que φ^{-1} s'étend en une fonction ψ sur U , divisible par h^2 . Enfin, quitte à multiplier φ par une puissance convenable de p^p (inversible sur U), on peut également supposer $v_\xi(\varphi) \geq N$.

Considérons le revêtement U'_0 de U défini par l'équation :

$$f(X) := X^2 - (\psi + 2)X + 1 = 0.$$

Observons dès maintenant que la fonction X est inversible sur $\mathcal{O}_{U'_0}$. Le polynôme *unitaire* $g(X) := \varphi^2 f(\frac{X}{\varphi}) = X^2 - (1 + 2\varphi)X + \varphi^2$ (congru à $X(X - 1)$ modulo \mathfrak{m}_ξ) satisfait aux conditions $g(1) \in (\varphi)$ (resp. $g(\varphi^2) \in (\varphi^3)$) et $g'(1) \in A_\xi^\times$ (resp. $g'(\varphi^2) \in A_\xi^\times$); le polynôme f possède donc deux racines x et x' dans K_ξ^h telles que $x \equiv \varphi \pmod{(\varphi^2)}$ et $x' \equiv \varphi^{-1} \pmod{(1)}$. Il existe donc $a \in A_\xi^h$ tel que $x = \varphi(1 + a\varphi)$; par hypothèse sur φ et N , $(1 + a\varphi) \in K_\xi^{h \times p}$, de sorte que $\chi_x = \chi_\varphi$ dans $H_{\text{ét}}^1(K_\xi^h, \mu_p)$. Il en résulte immédiatement que $\chi_{x'} = -\chi_\varphi$. Soit U' le normalisé de U'_0 dans $U'_0[\frac{1}{h}]$; puisque par hypothèse h^2 divise ψ dans $\mathcal{O}_{U'_0}$, ainsi donc que son multiple $(X - 1)^2$, on a $h|X - 1$ dans $\mathcal{O}_{U'}$. La fonction X est donc une section sur U' du

faisceau $\mathbf{G}_{m_{U'}, V(h)} := \ker(\mathbf{G}_{m_{U'}} \rightarrow i_* \mathbf{G}_{m_{V(h)}})$, où l'on note i l'immersion fermée $V(h) \hookrightarrow U'$. Soit j' l'immersion ouverte complémentaire. Puisque p est inversible sur U' , on a une suite exacte

$$1 \rightarrow j'_! \mu_p \rightarrow \mathbf{G}_{m_{U'}, V(h)} \xrightarrow{f \mapsto f^p} \mathbf{G}_{m_{U'}, V(h)} \rightarrow 1.$$

qui étend la suite exacte usuelle de Kummer sur K_ξ^h . L'image de X par le morphisme cobord est une classe de cohomologie $c'' \in H_{\text{ét}}^1(U', j'_! \mu_p)$, induisant $(c, -c)$ en restriction à U_ξ^h . Compte tenu de l'égalité $H_{\text{ét}}^1(U', j'_! \mu_p) = H_{\text{ét}}^1(U'_0, j'_{0!} \mu_p)$, où j'_0 est l'immersion ouverte $U'_0[\frac{1}{h}] \hookrightarrow U'_0$, la classe de cohomologie c'' se descend en la classe c' sur U'_0 désirée.

B.6.3. Majoration. On procède par récurrence sur $\dim(A)$. Le cas de la dimension 1 est dû à K. Katô (théorème B.2.3.1). Soient U comme dans l'énoncé, $j : U \hookrightarrow X[p^{-1}]$ l'immersion ouverte et \mathcal{F} un faisceau étale de p -torsion sur U . D'après le théorème de Lefschetz pour les morphismes affines de type fini entre \mathbb{Q} -schémas excellents ([SGA 4 XIX, 6.1]), pour tout entier β , et tout point géométrique \bar{x} de $X[p^{-1}]$, on a $(\mathbf{R}^\beta j_* \mathcal{F})_{\bar{x}} = 0$ dès que $\beta > \dim X_{(\bar{x})}$. Il en résulte que pour tout entier α , et pour tout sous-faisceau constructible K_β de $\mathbf{R}^\beta j_* \mathcal{F}$, on a $H_{\text{ét}}^\alpha(X[p^{-1}], K_\beta) = H_{\text{ét}}^\alpha(X'[p^{-1}], K'_\beta)$, où X' est un fermé de X , de dimension inférieure ou égale à $\dim(A) - \beta$ et K'_β un faisceau de p -torsion sur celui-ci. Ainsi, si $\beta > 0$, l'hypothèse de récurrence sur la dimension entraîne la nullité de $H_{\text{ét}}^\alpha(X[p^{-1}], \mathbf{R}^\beta j_* \mathcal{F})$ pour $\alpha > (\dim(A) - \beta) + \dim_p(k)$. (Bien que cela ne soit pas utile, remarquons que l'on sait (*loc. cit.*, th. 5.1) que les faisceaux $\mathbf{R}^\beta j_* \mathcal{F}$ ci-dessus sont constructibles.) La suite spectrale associée à l'isomorphisme $R\Gamma(U, \mathcal{F}) = R\Gamma(X[p^{-1}], \mathbf{R}j_* \mathcal{F})$ nous ramène donc au cas où $U = X[p^{-1}]$. Enfin, la méthode de la trace ([SGA 4 IX, 5.6]) nous ramène à montrer l'annulation de $H_{\text{ét}}^n(\text{Spec}(A[p^{-1}]), \mathbb{Z}/p)$ pour $n > \dim(A) + \dim_p(k) =: N$, somme que nous supposons finie sans quoi l'énoncé est trivial. On peut également supposer A normal et complet, ce que nous ferons dorénavant.

Soit k_0 le sous-corps parfait maximal de k . D'après B.5.3.5, il existe une extension finie $W'/W(k_0)$ telle que le morphisme $\text{Spec}(A \otimes_{W(k_0)} W')^\vee \rightarrow \text{Spec}(W')$ ait une fibre spéciale réduite. Soit c'' une classe de cohomologie à coefficients constants \mathbb{Z}/p sur $A''[p^{-1}]$, où A'' est une composante connexe de $(A \otimes_{W(k_0)} W')^\vee$.

Comme dans §B.5.4, il résulte du théorème de Katô (B.2.3.1) qu'une telle classe s'étend à un ouvert U'' de $\text{Spec}(A'')$ contenant les points maximaux de la fibre spéciale. On peut bien entendu supposer $U'' \neq \text{Spec}(A'')$.

D'après les théorèmes de Cohen-Gabber et Elkik, on peut algébriser comme dans §B.5.4 l'anneau A'' en un anneau \widetilde{A}'' satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) l'ouvert U'' se descend à un ouvert \widetilde{U}'' de $\text{Spec}(\widetilde{A}'')$;
- (ii) le schéma $\text{Spec}(\widetilde{A}'')$ est l'hensélisé en un point fermé de la fibre spéciale d'une courbe relative sur un schéma local noethérien complet de dimension $\dim(A) - 1$;
- (iii) l'anneau A'' s'identifie au complété de \widetilde{A}'' le long d'un idéal définissant le complémentaire de \widetilde{U}'' . (Rappelons que l'on a supposé $U'' \neq \text{Spec}(A'')$.)

D'après le théorème de Fujiwara-Gabber ([FUJIWARA 1995], 6.6.4), pour tout entier i ,

$$H_{\text{ét}}^i(\widetilde{U}'', \mathbb{Z}/p) \simeq H_{\text{ét}}^i(U'', \mathbb{Z}/p).$$

En particulier, la classe de cohomologie c'' provient par image inverse d'une classe de cohomologie sur \widetilde{U}'' et finalement d'une classe \widetilde{c}'' sur $\widetilde{A}''[p^{-1}]$. Vérifions que $H_{\text{ét}}^i(\widetilde{A}''[p^{-1}], \mathbb{Z}/p) = 0$ pour $i > N$. Par passage à la limite, il suffit de montrer que l'on a $H_{\text{ét}}^i(B[p^{-1}], \mathbb{Z}/p) = 0$, si $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(C)$ est une courbe relative, où C est local noethérien complet de dimension $\dim(A) - 1$, et de corps résiduel k .

Il suffit de montrer que pour tout $\beta \geq 0$ et tout $i > N$, on a :

$$H_{\text{ét}}^{i-\beta}(C[p^{-1}], R^\beta f_* \mathbb{Z}/p) = 0.$$

Il résulte du théorème de Lefschetz affine que si $(R^\beta f_* \mathbb{Z}/p)_{(\overline{y})} \neq 0$ on a nécessairement l'inégalité $\beta - 1 \leq \dim \text{Spec}(C)_{(\overline{y})}$. En conséquence, le support du faisceau *constructible* $R^\beta f_* \mathbb{Z}/p$ est contenu dans un fermé de $\text{Spec}(C[p^{-1}])$, induit par un fermé de codimension au moins $\beta - 1$ dans $\text{Spec}(C)$. Comme précédemment (réduction au cas $U = \text{Spec}(A[p^{-1}])$), on en déduit grâce à l'hypothèse de récurrence sur la dimension que les groupes de cohomologie ci-dessus sont nuls pour $i > N$. (Remarquons que comme ci-dessus, on pourrait s'abstenir d'utiliser le théorème de constructibilité des images directes pour les morphismes de type fini entre \mathbb{Q} -schémas excellents.)

Ainsi la classe de cohomologie c'' est nulle, de même que les groupes de cohomologie $H_{\text{ét}}^i(\text{Spec}(A \otimes_{W(k_0)} W'[p^{-1}]), \mathbb{Z}/p)$ pour $i > N$. Ceci étant vrai pour chaque extension finie de W' , on a donc :

$$H_{\text{ét}}^i(A[p^{-1}] \otimes_{K_0} \overline{K_0}, \mathbb{Z}/p) = 0 \quad \forall i > N,$$

où l'on note $K_0 = \text{Frac } W(k_0)$.

Puisque $\text{cd}_p(K_0) \leq 2$, il s'en suit que pour tout $\mathbb{F}_p[G_{K_0}]$ -module V , et tout $i > N + 2$, on a $H_{\text{ét}}^i(A[p^{-1}], V) = 0$. Comme en §B.5.6, on observe que pour tout tel V , il existe une surjection $V' \twoheadrightarrow V$ où V' est une somme directe d'induites de représentations triviales de « petits » — c'est-à-dire contenus dans $G_{\text{Frac } W'}$ — sous-groupes ouverts. Pour un tel V' on connaît le résultat d'annulation pour $i > N$. L'annulation du H^i pour V se ramène donc à l'annulation du H^{i+1} pour $\ker(V' \twoheadrightarrow V)$. On obtient la majoration désirée en procédant ainsi une fois de plus.

B.7. Appendice : le théorème de structure de Cohen-Gabber

B.7.1. THÉORÈME ([GABBER 2005a], lemme 8.1). *Soit A un anneau local complet noethérien réduit, d'égale caractéristique $p > 0$, équidimensionnel de dimension d et de corps résiduel k . Il existe un sous-anneau A_0 de A , isomorphe à $k[[t_1, \dots, t_d]]$, tel que A soit fini sur A_0 , sans torsion et génériquement étale. De plus, on peut choisir un tel morphisme $A_0 \rightarrow A$ induisant un isomorphisme sur les corps résiduels.*

Ce résultat apparaît explicitement comme hypothèse (dans le cas intègre) dans [ÉGA IV₁, chap. 0, 21.9.5].

La démonstration du théorème, qui est une adaptation au cas non irréductible de [GABBER 2005a], occupe le reste de ce paragraphe. Nous supposons dans la suite $d > 0$, sans quoi l'énoncé est évident.

Dans les paragraphes **B.7.2** à **B.7.6**, nous allons montrer qu'il existe un corps de représentants κ de A tel que le A -module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ soit de rang générique égal à d sur chaque composante irréductible. En (**B.7.7**) nous verrons comment en déduire rapidement le théorème.

B.7.2. Soit $\{b_i\}_{i \in E}$ une p -base de $k = A/\mathfrak{m}_A$. Choisissons des relèvements arbitraires β_i des b_i dans A . Rappelons qu'il existe un unique corps de représentants $\kappa \subset A$ contenant les β_i et se surjectant sur k (cf. [**Bourbaki AC**, IX §2 n°3 th. 1 a)). Changer de corps de représentants revient donc à changer les β_i .

Fixons également un système de paramètres τ_1, \dots, τ_d de A ; nous ne le changerons qu'à la fin de la démonstration (**B.7.7**).

B.7.3. Pour toute partie finie $e \subset E$, posons $\kappa_e := \kappa^p(\beta_i, i \notin e) \subset \kappa$. Les trois propriétés suivantes sont évidentes :

pour toute partie finie $e \subset E$, $[\kappa : \kappa_e] < +\infty$,

pour toutes parties finies $e, e' \subset E$, $\kappa_{e \cup e'} \subset \kappa_e \cap \kappa_{e'}$,

$$\bigcap_{e \subset E} \kappa_e = \kappa^p.$$

B.7.4. Soient $\text{Spec}(\overline{A})$ une composante irréductible de $\text{Spec}(A)$, munie de la structure réduite, et $\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d$ les images des τ_i dans \overline{A} par la surjection canonique $A \twoheadrightarrow \overline{A}$.

Considérons le diagramme d'anneaux :

$$\begin{array}{ccccc} \kappa_e[[\overline{\tau}_1^p, \dots, \overline{\tau}_d^p]] & \longrightarrow & \kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]] & \longrightarrow & \overline{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_{\kappa, e} & \longrightarrow & L_\kappa & \longrightarrow & L \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques, et les flèches verticales les inclusions dans les corps de fractions respectifs. Les flèches horizontales sont injectives et correspondent à des morphismes finis. Pour la seconde, cela résulte du fait que le module \overline{A} est *quasi-fini* ([**ÉGA I**, chap. 0, 7.4.1]) sur $\kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$ donc de type fini car l'idéal $(\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d)\overline{A}$ est un idéal de définition ([**ÉGA I**, chap. 0, 7.4.4]). Enfin, les $\overline{\tau}_i$ sont analytiquement indépendants sur κ : le sous-anneau $\kappa[[\overline{\tau}_1, \dots, \overline{\tau}_d]]$ de \overline{A} est bien un anneau de séries formelles ([**ÉGA IV**₁, chap. 0, 16.3.10]).

Rappelons le lemme suivant.

B.7.4.1. LEMME ([**MATSUMURA 1989**], §30, lemme 6). *Soient K un corps de caractéristique $p > 0$ et $\{K_\alpha\}$ une famille non vide de sous-corps cofinis (c'est-à-dire tels que les $[K : K_\alpha]$ soit finis) satisfaisant les deux conditions suivantes : $\bigcap K_\alpha = K^p$ et, pour toute paire d'indices α, β , il existe un indice γ tel que $K_\gamma \subset K_\alpha \cap K_\beta$. Alors, pour toute extension finie L/K , il existe un indice $\alpha = \alpha_L$ tel que, pour tout sous-corps cofini $K' \subset K_{\alpha_L}$, on ait*

$$\text{rang}_L \Omega_{L/K'}^1 = \text{rang}_K \Omega_{K/K'}^1.$$

On a observé ci-dessus que la famille des $\kappa_e \subset \kappa$, $e \subset E$, satisfait aux hypothèses du lemme précédent. On vérifie immédiatement qu'il en est de même de la famille des sous-corps $L_{\kappa,e}$ de L_κ ; on a donc l'égalité

$$(B.7.4.a) \quad \text{rang}_L \Omega_{L/L_{\kappa,e}}^1 = \text{rang}_{L_\kappa} \Omega_{L_\kappa/L_{\kappa,e}}^1,$$

dès que l'ensemble fini e est suffisamment grand.

Posons $R_\kappa = \kappa[[\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_d]]$ et $R_{\kappa,e} = \kappa_e[[\bar{\tau}_1^p, \dots, \bar{\tau}_d^p]]$. Le terme de gauche de (B.7.4.a) est le rang générique du \bar{A} -module $\Omega_{\bar{A}/R_{\kappa,e}}^1$, c'est-à-dire le rang de son tensorisé avec L . Remarquons que d'après [ÉGA IV₁, chap. 0, 21.9.4], $\Omega_{\bar{A}/R_{\kappa,e}}^1$ s'identifie au module \bar{A} -module $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1$ de formes différentielles complété. Le terme de droite est quant à lui le rang du $R_{\kappa,e}$ -module libre $\Omega_{R_{\kappa,e}/R_\kappa}^1$. Ce dernier est égal à $d + \text{rang}_{R_\kappa} \Omega_{R_\kappa/\kappa_e}^1 = d + |e|$ (où $| - |$ désigne le cardinal d'un ensemble), de sorte que la formule B.7.4.a se réécrit :

$$(B.7.4.b) \quad \text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|.$$

B.7.5. La proposition suivante va nous permettre de modifier le corps des représentants de façon à pouvoir supposer e vide (de façon équivalente : $\kappa_e = \kappa$).

B.7.5.1. PROPOSITION. *Il existe une partie finie e de E et des éléments β'_i , pour $i \in e$, relevant les b_i tels que, pour chaque composante irréductible intègre $\text{Spec}(\bar{A})$ de $\text{Spec}(A)$, les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (i) $\text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e|$,
- (ii) *les images des $d\beta'_i$ dans $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$, où $L = \text{Frac}(\bar{A})$, sont L -linéairement indépendantes.*

L'égalité B.7.4.a (et donc B.7.4.b) étant valable, pour chaque composante irréductible, dès que e est suffisamment grand, on peut choisir un tel ensemble qui convient pour chacune d'entre elles. La propriété (i) en découle.

Pour démontrer la propriété (ii), nous utiliserons le lemme élémentaire suivant.

B.7.5.2. LEMME. *Soient \bar{A} et L comme ci-dessus. Pour tout idéal non nul I de \bar{A} , l'ensemble des $df \otimes_{\bar{A}} L$, pour $f \in I$, est une famille génératrice du L -espace vectoriel $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$.*

DÉMONSTRATION. Soient $f_0 \in I$ non nul, et $\omega_0 = df_0$. Pour tout $b \in \bar{A}$, $d(bf_0) = b\omega_0 + f_0db$. La famille des $d(bf_0) \otimes 1$ contient $\omega_0 \otimes 1$; d'après la formule précédente, le L -espace vectoriel qu'elle engendre contient donc les $db \otimes 1$ pour chaque $b \in \bar{A}$. \square

Soit $\{\wp_1, \dots, \wp_c\}$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A . Pour chaque $j \in \{1, \dots, c\}$, posons $A_j = A/\wp_j$ et $X_j = \text{Spec}(A_j)$ la composante irréductible intègre de $X = \text{Spec}(A)$ correspondante. Notons pour tous $i \in e$ et $j \in \{1, \dots, c\}$, $\beta_{i,j}$ l'image dans A_j de $\beta_i \in A$. (Rappelons que les β_i font partie d'une p -base de $\kappa \subset A$.) Nous allons démontrer par récurrence sur j ($0 \leq j \leq c$) qu'il existe des éléments $\{m_{i,j}\}$ dans \mathfrak{m}_A , pour $i \in e$, tels que les images des éléments $\beta_i + m_{i,j}$ dans chacun des anneaux A_1, \dots, A_j aient des différentielles linéairement indépendantes dans chacun des espaces vectoriels

$\Omega_{A_1/R_{\kappa,e}}^1 \otimes_{A_1} \text{Frac } A_1, \dots, \Omega_{A_j/R_{\kappa,e}}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$. Pour $j = 0$, cette condition est vide. Supposons l'assertion démontrée pour un $j \leq c - 1$ et montrons la pour $j + 1$. Quitte à remplacer β_i par $\beta_i + m_{i,j}$, on peut supposer que $m_{i,j} = 0$ pour tout $i \in e$. L'anneau A étant réduit, les \wp_α forment une décomposition primaire réduite de (0) , de sorte que l'idéal $\mathfrak{q}_j := \wp_1 \cap \dots \cap \wp_j$ ($= \text{Ker}(A \rightarrow A_1 \times \dots \times A_j)$) n'est pas contenu dans \wp_{j+1} . Si $j > 0$, notons I_{j+1} son image dans $\bar{A} = A_{j+1} (= A/\wp_{j+1})$; c'est un idéal non nul. Si $j = 0$, on considère $\mathfrak{m}_{\bar{A}}$. D'après (i), $\text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 = d + |e| \geq |e|$; d'autre part, la famille $d(I_{j+1})$ est génératrice dans $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$ (où $L = \text{Frac } \bar{A}$).

B.7.5.3. LEMME. Soient V un espace vectoriel de dimension au moins n , b_1, \dots, b_n des vecteurs de V et W une famille génératrice. Il existe une famille w_1, \dots, w_n d'éléments de $W \cup \{0\}$ tels que les $b_i + w_i$ soient linéairement indépendants.

DÉMONSTRATION. Par récurrence immédiate sur n . □

Il existe donc des éléments $m'_{i,j+1} \in I_{j+1}$, $i \in e$, tels que les différentielles des éléments $d((\beta_i \bmod \wp_{j+1}) + m'_{i,j+1})$, $i \in e$, soient linéairement indépendantes dans $\widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa_e}^1 \otimes_{\bar{A}} L$.

Relevons les $m'_{i,j+1}$ en des éléments $m_{i,j+1}$ de \mathfrak{q}_j si $j > 0$, ou de \mathfrak{m}_A si $j = 0$. Par construction, ils satisfont la propriété escomptée au cran $j + 1$.

B.7.6. Considérons le sous-corps $\kappa' := \kappa^p(\beta_i, i \notin e; \beta'_i, i \in e) = \kappa_e(\beta'_i, i \in e) \subset A$, où les β'_i ($i \in e$) sont comme en **B.7.5.1**. Il s'envoie isomorphiquement sur $k = A/\mathfrak{m}_A$ par réduction : son image contient k^p et les images des β_i ($i \notin e$), β'_i ($i \in e$), qui constituent une p -base de k . Des égalités **B.7.4.b** et de la propriété (ii) de **B.7.5.1**, on tire :

$$\text{rang}_{\bar{A}} \widehat{\Omega}_{\bar{A}/\kappa'}^1 = d,$$

pour toute composante irréductible intègre $\text{Spec}(\bar{A})$ de X . Par la suite, nous noterons encore κ ce nouveau corps de représentants.

B.7.7. Le A -module $\widehat{\Omega}_{A/\kappa}^1$ étant de rang générique d sur chaque composante irréductible, on montre en procédant comme précédemment, qu'il existe des éléments f_1, \dots, f_d de A tels que les $d(f_i \bmod \wp_\alpha) \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ forment une base de $\widehat{\Omega}_{A_j/\kappa}^1 \otimes_{A_j} \text{Frac } A_j$ pour chaque composante irréductible $\text{Spec}(A_j)$ de X . Quitte à les multiplier individuellement par une puissance p -ième d'un élément appartenant à $\mathfrak{m}_A - \bigcup \wp_j$, on peut les supposer dans \mathfrak{m}_A . Rappelons que l'on a choisi un système de paramètres τ_1, \dots, τ_d dans A , de sorte que le morphisme $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(k[[\tau_1, \dots, \tau_d]])$ soit fini.

Posons, pour $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$t_i := \tau_i^p(1 + f_i).$$

Soient A_0 le sous-anneau $\kappa[[t_1, \dots, t_d]]$ de A , $X_0 = \text{Spec}(A_0)$. Le morphisme $X \rightarrow X_0$ est fini : cela résulte du fait que les éléments $1 + f_i$ sont des unités de A . Vérifions qu'il est génériquement étale. L'anneau A étant noethérien complet, le A -module de type fini Ω_{A/A_0}^1 est

également complet et coïncide donc avec le module des formes différentielles complété $\widehat{\Omega}_{A/A_0}^1$. Les anneaux A_0 et A étant métrisables, et tout sous- A -module de $\widehat{\Omega}_{A/k}^1$ étant fermé, la suite

$$\widehat{\Omega}_{A_0/k}^1 \widehat{\otimes}_{A_0} A \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/k}^1 \rightarrow \widehat{\Omega}_{A/A_0}^1 = \Omega_{A/A_0}^1 \rightarrow 0$$

est *exacte* ([ÉGA IV₁, chap. 0, 20.7.17]). Il résulte de l'hypothèse sur les éléments f_i et de la formule

$$d(t_i) = \tau_i^p d f_i$$

qu'au-dessus de chaque point maximal de $X = \text{Spec}(A)$, la première flèche est surjective. On en déduit que le A -module Ω_{A/A_0}^1 est génériquement nul, CQFD.

Constructibilité et modération uniformes en cohomologie étale

Introduction

C.0.1. Soient S un schéma et $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre de présentation finie. D'après un théorème de finitude classique, dû à Michael Artin et Alexander Grothendieck ([SGA 4 XIV, 1.1]), pour tout faisceau constructible \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur X , les faisceaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules $R^i f_* \mathcal{F}$, obtenus par image directe, sont également *constructibles* : (lorsque S est cohérent, par exemple noëthérien) il existe une stratification \mathfrak{S} de S telle que les faisceaux $R^i f_* \mathcal{F}$ soient localement constants et de présentation finie sur les strates. (Ils sont également nuls pour $i \gg 0$ indépendamment de \mathcal{F} .)

À f fixé, il est naturel de s'interroger sur la dépendance de \mathfrak{S} en \mathcal{F} , notamment sous la forme suivante, qui n'est qu'un cas particulier des questions que l'on souhaite aborder ici :

Existe-t-il une stratification \mathfrak{S} qui convienne pour tous les faisceaux $R^i f_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où n parcourt les entiers inversibles sur S ?

(Notons que si l'entier n parcourt les puissances d'un même nombre premier ℓ , comme cela est naturel du point de vue de la cohomologie ℓ -adique, la réponse à la question précédente est trivialement « oui ».)

C.0.2. Si S est de type fini sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes, l'existence d'une telle stratification est bien connue en vertu du résultat analogue pour le morphisme d'espaces topologiques $X(\mathbb{C}) \rightarrow S(\mathbb{C})$ – cf. par exemple [BOREL et collab. 1984, V.10.16] ou [BEILINSON, BERNSTEIN et DELIGNE 1982, p. 153, premier paragraphe] – et du théorème de comparaison entre cohomologie de Betti et cohomologie étale de M. Artin et A. Grothendieck ([SGA 4 XVI, 4.1]).

C.0.3. Bien entendu, tant pour les applications que pour les démonstrations, il est utile de ne pas se restreindre à des faisceaux constants mais de considérer des faisceaux – et même des *complexes* – constructibles le long d'une stratification \mathfrak{X} de X (au sens évident rappelé en C.1.1.3). Cependant, en cohomologie étale, des phénomènes de ramification sauvage font que l'on ne peut s'attendre à ce que, donnés un morphisme propre $f : X \rightarrow S$ et \mathfrak{X} une stratification de X , il existe une stratification \mathfrak{S} de S telle que les images directes supérieures par f de faisceaux sur X constructibles le long de \mathfrak{X} soient constructibles le long de \mathfrak{S} . En effet, si par exemple ℓ est un nombre premier fixé, k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ divisant $\ell - 1$ et $\psi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$ un caractère non-trivial, les \mathbb{F}_ℓ -faisceaux d'Artin-Schreier $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L}_\psi((x - \lambda)y)$ sur $\mathbf{A}_{x/\mathbb{F}_p}^1 \times \mathbf{A}_{y/\mathbb{F}_p}^1$ sont lisses pour chaque $\lambda \in k$ mais les faisceaux image directe exceptionnelle $R^2 \text{pr}_{1!} \mathcal{L}_\lambda$ ne sont pas constructibles le long d'une

même stratification de $\mathbf{A}_{x/\mathbb{F}_p}^1$, indépendante de λ : le faisceau $R^2 \text{pr}_{1!} \mathcal{L}_\lambda$ est non nul et à support dans $\{\lambda\}$. (Voir [LAUMON 1987, 1.2.2.2] pour l’analogue ℓ -adique et [ORGOGOZO 2003a, p. 139–140] pour une discussion du même phénomène dans une autre perspective.) La flèche $R^2 \text{pr}_{1!} \mathcal{L}_\lambda \rightarrow R^2 \text{pr}_{1*} \mathcal{L}_\lambda$ d’oubli des supports étant un isomorphisme ([LAUMON 1987, 1.3.1.1]), on voit également que l’on ne dispose pas d’un analogue uniforme « naïf » du théorème [Th. finitude, 1.9 (ii)] de commutation au changement de base générique : en tout point au voisinage duquel $R^2 \text{pr}_{1*} \mathcal{L}_\lambda$ commute au changement de base, sa fibre est nécessairement nulle. Cependant, comme l’a démontré Luc Illusie — motivé par une question de Jean-Pierre Serre —, la situation est aussi bonne que possible si l’on considère des coefficients *constants* (voir [ILLUSIE 2010]).

La formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič ([SGA 5 X, 7.2]) montre également que l’on ne peut obtenir de bornes uniformes sur les nombres de Betti, comme celles rappelées au paragraphe suivant, sans hypothèse de modération.

C.0.4. Dans [KATZ et LAUMON 1985, §3] (voir aussi par exemple [FOUVRY et KATZ 2001, §2] et [KATZ 1990, §13]) sont établis des résultats intermédiaires entre l’énoncé topologique rappelé ci-dessus et des énoncés, à démontrer, tenant compte de la ramification sauvage. Nicholas Katz et Gérard Laumon établissent notamment le résultat suivant, sous l’hypothèse technique supplémentaire que S est de type fini sur un schéma noëthérien régulier de dimension inférieure ou égale à 1 ([KATZ et LAUMON 1985, 3.1.2]) : il existe un entier $N \geq 1$ et une stratification \mathfrak{S} de S tels que pour chaque nombre premier ℓ , chaque $\mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(X[1/N\ell], \mathbb{Q}_\ell)$ constructible le long de $\mathfrak{X}[1/N\ell]$, le complexe $Rf_{\star} \mathcal{K} \in \text{Ob } D_c^b(S[1/N\ell], \mathbb{Q}_\ell)$ est constructible le long de $\mathfrak{S}[1/N\ell]$. (« *Constructible le long de ...* » : voir C.1.1.3.) De plus, les auteurs majorent uniformément la taille des images directes : il existe une constante C telle que pour chaque $s \in S[1/N\ell]$ on ait l’inégalité

$$\|Rf_{!} \mathcal{K}\|(s) \leq C \cdot \sup_{x \in f^{-1}(s)} \|\mathcal{K}\|(x),$$

où $\|\mathcal{K}\|(x) := \sum_i \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(\mathcal{K})_{\bar{x}}$ pour un choix arbitraire de point géométrique \bar{x} au-dessus de $x \in X$.

Ce résultat s’appuie sur la résolution des singularités d’Hironaka et n’est intéressant que si la caractéristique générique de S est nulle. Cette hypothèse permet également, grâce au lemme d’Abhyankar relatif (cf. [ibid., §3.4.2] et [SGA 1 XIII, 5.5]), d’ignorer la ramification sauvage.

C.0.5. L’objectif de ce texte est de s’affranchir de ces restrictions : les « fibrations élémentaires » ([SGA 4 XI, §3]) utilisées dans [KATZ et LAUMON 1985] sont remplacées par des courbes nodales, dont l’ubiquité a été démontrée par Aise Johan de Jong ([A. J. DE JONG 1996 ; A. J. DE JONG 1997]). Armé de cet outil et familier des techniques de dévissages en cohomologie étale, on est confronté à la difficulté suivante : trouver un énoncé de stabilité de familles « (*uniformément*) constructibles et modérées ». On le doit à Ofer Gabber, dont la contribution à cet article ne s’arrête pas là. Un point clef est que « uniformément » doit être interprété *localement pour la topologie propre* — engendrée par la prétopologie dont les morphismes couvrants sont

les morphismes propres et surjectifs — (ou la topologie h), idée que l'on trouve déjà dans une lettre de Richard Pink à N. Katz ([PINK 1995]), pourtant antérieure aux travaux de A. J. de Jong. (L'insuffisance d'une localisation pour la topologie finie est expliquée en C.3.2.)

Les méthodes employées ici font que la plupart des résultats de cet article sont de démonstration plus simple dans le cas particuliers des schémas de type fini sur un anneau de Dedekind mais nous les énonçons pour des schémas quasi-excellents, quitte à en donner la démonstration en deux temps. Il est apparu que l'hypothèse d'excellence n'était pas toujours nécessaire, notamment pour le théorème d'uniformité propre ; pour ne pas retarder à nouveau la publication de ce texte, nous avons préféré nous contenter d'esquisser les modifications à apporter (voir par exemple C.3.5.5). Nous espérons que le lecteur nous pardonnera ce choix.

C.0.6. Signalons maintenant quelques limites de la méthode. Tout d'abord, on aimerait des résultats d'*indépendance* de ℓ , beaucoup plus forts, mais qui semblent malheureusement hors de portée : la descente cohomologique — utilisée de façon répétée — fait naturellement apparaître des différentielles dans la suite spectrale correspondante ; on ignore si elles sont « motiviques » (cf. [A. J. DE JONG 1996, introduction]). D'autre part, comme expliqué ci-dessus, on obtient notamment des majorations de nombres de Betti : peut-on calculer explicitement une borne et les nombres de Betti d'un schéma donné pour chaque ℓ donné ? Les techniques de cet article ne permettent pas de répondre à cette question (voir cependant [MADORE et ORGOGOZO 2015] pour le calcul des nombres de Betti). Enfin, nous ne considérons des situations sauvages que de façon superficielle : on se ramène immédiatement à des cas modérés pour lesquels les techniques classiques — voir par exemple [SGA 7 XIII, 2.1.9-11] — s'appliquent. Il serait intéressant de reprendre les résultats de cet article à la lumière des travaux plus récents sur la ramification sauvage (voir par exemple [K. KATO et T. SAITO 2013]).

C.0.7. Remerciements. C'est avec un grand plaisir que j'exprime mes sincères remerciements à Ahmed ABBES, Nick KATZ, Arthur OGUS, Joël RIOU, Jean-Pierre SERRE, ZHENG Weizhe (郑维喆) et tout particulièrement SAITO Takeshi (斎藤毅) pour avoir relevé une erreur dans une version antérieure de ce texte ainsi qu'Ofer GABBER et Luc ILLUSIE pour leur aide cruciale et leurs encouragements.

C.1. Définitions, sorites et préliminaires topologiques

C.1.1. Constructibilité.

C.1.1.1. Soit X un schéma noethérien. Une **stratification** de X est une partition finie (ensembliste) \mathfrak{X} en sous-schémas réduits localement fermés (non vides), appelés **strates**. Si pour toute strate S le bord $\partial S = \overline{S} - S$ est réunion de strates, on dit que \mathfrak{X} est une **bonne stratification**. Un **schéma stratifié** est un schéma muni d'une stratification. Enfin, une stratification \mathfrak{X} de X est **adaptée** à une partie $Z \subseteq X$ si chaque strate de \mathfrak{X} est contenue dans Z ou $X - Z$.

Faisons les observations suivantes :

(1) toute stratification se raffine en une bonne stratification ([Stacks, lemme 09Y5]).

Et dans le cas d'une *bonne* stratification :

(2) toute strate, étant localement fermée, est ouverte dans son adhérence ;

(3) tout strate S maximale pour la relation d'ordre partiel « $x \leq y$ si et seulement si $x \subseteq \bar{y}$ » est ouverte : $X \setminus S = \bigcup_{T \neq S} T = \bigcup_{T \neq S} \bar{T}$.

Si $f : Y \rightarrow X$ est un morphisme, on note \mathfrak{X}_Y ou $f^* \mathfrak{X}$ la stratification de Y déduite de \mathfrak{X} par image inverse (réduite) des strates.

C.1.1.2. MISE EN GARDE. Notons que l'image inverse d'une bonne stratification par un morphisme $f : Y \rightarrow X$ n'est pas nécessairement bonne : si S est une partie localement fermée, l'inclusion $\overline{f^{-1}(S)} \subseteq f^{-1}(\bar{S})$ peut être stricte. De même, si U est un ouvert d'un schéma noethérien X , il n'est en général pas vrai que la stratification $\{U, X \setminus U\}$ soit bonne.

Compte tenu de (1) ci-dessus, ces observations n'ont pas de conséquence fâcheuse.

C.1.1.3. Soient X un schéma et (X', \mathfrak{X}') un X -schéma stratifié noethérien. On dit qu'un faisceau étale sur X est **constructible le long de \mathfrak{X}'** (ou **\mathfrak{X}' -constructible**) si son image inverse sur X' est (ensemblément) constructible et localement constante sur chacune des strates de \mathfrak{X}' . Lorsque $X' = X$, on retrouve la définition de [KATZ et LAUMON 1985, §3.0].

Dans cet article on dira souvent « **lisse** » pour « localement constant (ensemblément) constructible » et, assez systématiquement, « faisceau » pour « faisceau étale ».

À des fins de dévissage, le résultat suivant — obtenu en utilisant (3) *supra*^① et procédant par récurrence — est particulièrement utile. (C'est principalement ce fait qui motive l'usage de *bonnes* stratifications.)

C.1.1.4. PROPOSITION ([SGA 4 IX, 2.5]). *Soient (X, \mathfrak{X}) un schéma noethérien stratifié et \mathcal{F} un faisceau abélien constructible le long de \mathfrak{X} . Si \mathfrak{X} est bonne, il existe une filtration finie sur \mathcal{F} de gradué isomorphe à une somme directe de faisceaux du type $i_* j_! \mathcal{L}$, où $j : S \hookrightarrow \bar{S}$ est l'immersion ouverte d'une strate de \mathfrak{X} dans son adhérence, i l'immersion fermée de \bar{S} dans X et \mathcal{L} est un faisceau abélien lisse sur S . De plus, il existe une telle filtration de longueur majorée par un entier ne dépendant que de \mathfrak{X} (et pas de \mathcal{F}).*

L'énoncé ci-dessus est une variante de celui de [SGA 4 IX], dans lequel on se donne une *partition* de X .

C.1.2. Unipotence.

C.1.2.1. Soient X un schéma et (X', \mathfrak{X}') un X -schéma stratifié noethérien. On dit qu'un faisceau étale abélien sur X est **unipotent le long de \mathfrak{X}'** (ou **\mathfrak{X}' -unipotent**) si ses tirés en arrière aux strates de \mathfrak{X}' sont extensions de faisceaux *constants*. Il est dit **localement unipotent le long de \mathfrak{X}'** (ou **\mathfrak{X}' -localement unipotent**) si pour tout hensélisé strict T de X' — ou de façon équivalente tout X' -schéma strictement local T —, son image inverse sur le schéma T

^①. Comme me l'ont signalé L. Illusie et Zheng W., l'énoncé peut être mis en défaut si la stratification n'est pas bonne.

est unipotent le long de \mathfrak{X}'_t . Par exemple, un faisceau lisse est localement unipotent (le long de toute stratification).

(À la formulation près, cette définition se trouve dans [PINK 1995]^②.)

C.1.2.2. Notons qu'un faisceau abélien constructible qui est localement unipotent le long de \mathfrak{X} est automatiquement constructible le long de \mathfrak{X} : une extension de faisceaux lisses est lisse ([SGA 4 IX, 2.1 (iii)]) et la lissité se teste sur les hensélisés stricts (cf. [SGA 4 IX, 2.13 (i)]).

C.1.2.3. Si \mathcal{L} est un faisceau lisse sur un ouvert dense U normal connexe d'un schéma X et \mathfrak{X} est une stratification adaptée à U , le faisceau constructible $j_! \mathcal{L}$ est localement unipotent le long de \mathfrak{X} si et seulement si il l'est le long de la stratification $\{U, X \setminus U\}$: sur un schéma normal, l'unipotence d'un faisceau lisse se teste en les points maximaux.

LEMME. *Soient X un schéma noethérien normal intègre de point générique η . Un faisceau étale abélien lisse sur X est unipotent, c'est-à-dire extension de faisceaux constants, si et seulement si sa restriction à η l'est.*

C.1.2.4. Soient G un groupe et \mathcal{F} un X -faisceau étale abélien muni d'une action de G , c'est-à-dire d'un morphisme $G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F})$. Nous dirons que \mathcal{F} est **G -unipotent** s'il existe une filtration finie croissante par des sous-faisceaux G -stables \mathcal{F}_i telle que G agisse *trivialement* sur les quotients $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$.

C.1.2.5. LEMME. *Un G -faisceau abélien constructible \mathcal{F} sur un schéma noethérien X est G -unipotent si et seulement si pour tout point géométrique $\bar{x} \rightarrow X$, la fibre $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ est G -unipotente.*

DÉMONSTRATION. La condition sur les fibres géométriques est évidemment nécessaire. Considérons la réciproque. Les deux conditions étant stables par extension, restriction à un ouvert (resp. fermé) et application des endofoncteurs $j_! j^!$ et $i_* i^*$, un dévissage immédiat nous ramène au cas particulier où \mathcal{F} est de la forme $j_! \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est un faisceau abélien lisse et j une immersion ouverte. Le prolongement par zéro préservant la G -unipotence, on peut supposer que \mathcal{F} est un faisceau lisse. En considérant la fibre en un point géométrique de X (que l'on peut supposer connexe), on est ramené à montrer que si M est un groupe abélien fini muni d'une action continue d'un groupe profini π et de l'action d'un groupe G commutant à l'action de π , le groupe M est G -unipotent en tant que π -module continu si et seulement si il l'est en tant que groupe abélien. Or, si $v \in M - \{0\}$ est un point fixe de G , le sous- π -module N de M engendré par v est muni d'une action triviale de G et la suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ permet de conclure par récurrence. \square

C.1.3. Modération.

C.1.3.1. Un faisceau \mathcal{F} sur un schéma noethérien X est dit **modéré** si pour tout hensélisé strict T de X — ou de façon équivalente tout X -schéma strictement local T —, de point fermé t , et tout point géométrique \bar{u} de T localisé en u , l'action de $\pi_1(u, \bar{u})$ sur la fibre $\mathcal{F}_{\bar{u}}$ en \bar{u} se factorise à travers un quotient d'ordre premier à l'exposant caractéristique du corps résiduel $\kappa(t)$.

^②. Je remercie L. Illusie de m'avoir communiqué cette lettre, après la rédaction des principaux résultats de cet article.

C.1.3.2. Cette définition, due à O. Gabber, satisfait les deux compatibilités suivantes :

- (1) un faisceau localement constant est modéré ;
- (2) un faisceau sur un trait est modéré au sens ci-dessus si et seulement si sa restriction au point générique est modérée au sens usuel ([SGA 1 XIII, 2.1.1]).

C.1.3.3. Un faisceau abélien de torsion inversible sur X et localement unipotent est modéré : pour tout p -groupe fini P et tout entier $n \perp p$ ^③, une extension de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[P]$ -modules triviaux est triviale.

C.1.4. Sorites. Soit X un schéma noethérien. La propriété, pour un faisceau abélien \mathcal{F} sur X , d'être constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long d'une stratification \mathfrak{X} est stable par :

C.1.4.1. raffinement de la stratification : $\mathfrak{X}' = \{X'_j\}$ raffine $\mathfrak{X} = \{X_i\}$ s'il existe pour chaque j un indice i tel que $X'_j \subseteq X_i$;

C.1.4.2. image inverse du faisceau et de la stratification ;

C.1.4.3. prolongement par zéro depuis un fermé : si \mathcal{F} est constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de \mathfrak{X} et $i : X \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée, le faisceau $i_*\mathcal{F}$ est constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de la stratification de \mathfrak{Y} déduite de \mathfrak{X} par ajout de la partie $Y \setminus X \subseteq Y$. Quitte à raffiner cette stratification $i_*\mathfrak{X}$, il existe une *bonne* stratification de Y , indépendante de \mathcal{F} , le long de laquelle le faisceau est constructible (resp. modéré, localement unipotent).

(Signalons que la stratification ci-dessus est bonne par exemple si X n'est nulle part dense dans Y .)

C.1.4.4. De plus, si l'on considère des faisceaux abéliens de torsion inversible sur X , on a également stabilité par *extension* du faisceau. C'est tautologique, sans l'hypothèse sur la torsion, pour l'unipotence locale. Cela résulte de la semi-simplicité de l'action des sous-groupes de Sylow pour la modération (cf. **C.1.3.3**).

C.1.4.5. REMARQUE. Signalons une fois pour toutes que la condition de modération est particulière en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir de stratification. Il nous a semblé préférable, ici et par la suite, de ne pas l'isoler pour autant des deux autres conditions (constructibilité et locale unipotence, *le long d'une stratification*). Prendre garde au fait que c'est la seule des trois propriétés qui soit stable par sous-quotient quelconque ; on a cependant le substitut ci-dessous.

C.1.4.6. Soit $k : Z \hookrightarrow X$ une immersion ouverte ou fermée. Si \mathcal{F} est un faisceau sur X constructible (resp. localement unipotent) le long d'une stratification \mathfrak{X} adaptée à Z (au sens de **C.1.1.1**), alors le sous-quotient $k_!k^*\mathcal{F}$ du faisceau \mathcal{F} est constructible (resp. localement unipotent) le long de \mathfrak{X} . (Amplification : dans **C.1.1.4**, le gradué est également constructible (resp. localement unipotent) le long de \mathfrak{X} .)

De plus, il existe pour toute stratification \mathfrak{X} une stratification la raffinant adaptée à Z : intersecter les strates avec Z et son complémentaire. Elle est bonne si \mathfrak{X} l'est.

^③. On utilise dans cet article la notation de Donald Knuth pour indiquer que deux nombres sont premiers entre eux.

Signalons également le fait suivant, de vérification immédiate.

C.1.4.7. Soient \mathfrak{X}_α des stratifications des composantes irréductibles X_α de X . Il existe une stratification \mathfrak{X} de X satisfaisant la propriété suivante : tout faisceau \mathcal{F} sur X dont les *restrictions* aux X_α sont constructibles (resp. modérées, localement unipotentes) le long de \mathfrak{X}_α est également constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de \mathfrak{X} . (Voir **C.1.5.4** pour une généralisation.)

C.1.4.8. Enfin, ces conditions sont locales pour la topologie de Zariski (et même étale) : si $U_i \rightarrow X$ est un recouvrement de X par des ouverts de Zariski, le faisceau \mathcal{F} est constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de la stratification \mathfrak{X} si et seulement si, pour chaque i , le faisceau $\mathcal{F}|_{U_i}$ l'est, le long de la stratification $\mathfrak{X}|_{U_i}$ de U_i .

C.1.4.9. MISE EN GARDE. Il n'est par contre pas vrai qu'un faisceau à la fois modéré sur un ouvert et sur son complémentaire est nécessairement modéré : il faut que le *prolongement par zéro* de l'ouvert à l'espace entier soit modéré. Plus précisément, si $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, $i : F \hookrightarrow X$ l'immersion fermée du complémentaire et \mathcal{F} un faisceau de torsion inversible sur X tel que $j_!j^*\mathcal{F}$ et $i_*i^*\mathcal{F}$ – ou, de façon équivalente, $i^*\mathcal{F}$ – soient modérés, alors \mathcal{F} est modéré : cela résulte de la suite exacte

$$0 \rightarrow j_!j^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F} \rightarrow 0.$$

(Notons que les supports des faisceaux étant disjoints, l'extension est modérée sans hypothèse sur les coefficients ; cf. **C.1.4.4.**) Même résultat dans le cas constructible (resp. *localement unipotent*) le long d'une stratification adaptée à U .

Signalons cependant que cette subtilité – qui aura son importance en **C.4.4** – n'apparaît pas dans le cas constructible (ou *globalement unipotent*) : si \mathcal{F} est un faisceau, U un ouvert de complémentaire F et \mathfrak{X} une stratification *adaptée à U* , alors \mathcal{F} est constructible (ou *globalement unipotent*) le long de \mathfrak{X} dès que $\mathcal{F}|_U$ et $\mathcal{F}|_F$ sont constructibles (resp. globalement unipotents) le long de \mathfrak{X}_U et \mathfrak{X}_F respectivement.

Pour référence ultérieure, signalons la variante suivante (dont on omettra avec raison la lecture).

C.1.4.10. Amplification. Soient $j : U \hookrightarrow X$ et $k : F^\circ \hookrightarrow F := X \setminus U$ deux immersions ouvertes et \mathfrak{X} une stratification de X adaptée à U et F° . Notons j' l'immersion ouverte de $U' := U \cup F^\circ$ dans X . Alors, si $j_!j^*\mathcal{F}$ est constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de \mathfrak{X} et $k_!k^*(\mathcal{F}|_F)$ est constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_F , alors le faisceau $j'_!j'^*\mathcal{F}$ est également constructible (resp. modéré, localement unipotent) le long de \mathfrak{X} .

C.1.5. Constructibilité, modération et unipotence uniformes. Soient X un schéma noëthérien, \mathbb{T} une topologie sur la catégorie des X -schémas de type fini et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de faisceaux étales abéliens sur X (ou plus généralement sur des ouverts U_λ de X ; voir **C.1.5.2**).

C.1.5.1. La famille \mathbb{F} est dite **constructible** (resp. **modérée**, **localement unipotente**) **pour la topologie** \mathbb{T} s'il existe une famille couvrante $(q_i : X_i \rightarrow X)_{i \in I}$ pour la topologie \mathbb{T} et des stratifications \mathfrak{X}_i des X_i telles que les faisceaux $q_i^* \mathcal{F}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, soient tous constructibles (resp. modérés, localement unipotents) le long des \mathfrak{X}_i (**C.1.1.3**). Si l'on souhaite être plus précis, on dit également les faisceaux \mathcal{F}_λ sont **modérés** (resp. **rendus localement unipotents**) **par les** q_i , \mathfrak{X}_i (ou simplement par les q_i). Pour insister sur le fait que l'on considère une *famille* de faisceaux et non un seul faisceau, on dira parfois que le famille est « *uniformément* » constructible (resp. modérée, localement unipotente).

Lorsque \mathbb{T} est la topologie grossière, on dit simplement qu'une famille est « constructible (resp. modérée, localement unipotente) *sur* X ».

Signalons que la définition précédente, et l'introduction du terme de « famille » de faisceaux, n'est qu'une commodité de langage dont on pourrait se passer (comparer avec [KATZ et LAUMON 1985, §3]).

C.1.5.2. Convention. Pour tout entier n , on note « $- \mapsto -[1/n]$ » le foncteur de changement de base de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ à $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. Par exemple, si X est un schéma, on note $X[1/n]$ le produit fibré $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. De même pour un morphisme de schémas ou une stratification par exemple. Si cela ne semble pas prêter à confusion, nous noterons parfois « $- \mapsto -^\dagger$ » ce foncteur, l'entier n étant alors sous-entendu.

Pour éviter certaines lourdeurs, nous omettrons parfois la mention de ces foncteurs. Par exemple, étant donné un schéma noëthérien X , on dira de manière abusive qu'une famille de faisceaux \mathcal{F}_λ de $\mathbb{Z}/n_\lambda \mathbb{Z}$ -modules sur $X[1/n_\lambda]$ est « constructible sur X » s'il existe une stratification \mathfrak{X} de X telle que les \mathcal{F}_λ soient constructibles le long de $\mathfrak{X}[1/n_\lambda]$.

C.1.5.3. Une famille est constructible (resp. modérée, localement unipotente) pour la topologie étale si et seulement si elle l'est pour la topologie grossière (c'est-à-dire sur X).

La proposition suivante — dont nous ne ferons pas usage dans cet article — limite sérieusement l'intérêt de la définition **C.1.5.1** dans le cas constructible. (Voir également **C.1.6.7** *infra* pour un énoncé de modération « automatique » pour une famille à un élément.) Elle renforce le résultat bien connu selon lequel un faisceau \mathcal{F} sur X est constructible si et seulement si son image inverse par un morphisme surjectif de présentation finie l'est ([SGA 4 IX, 2.8] ; voir aussi [ORGOGOZO 2006, §9.1, 10.5]).

C.1.5.4. PROPOSITION. Soient X un schéma noëthérien et (X', \mathfrak{X}') un X -schéma surjectif de type fini, stratifié. Il existe une stratification \mathfrak{X} de X telle que tout faisceau \mathcal{F} sur X constructible le long de \mathfrak{X}' soit constructible le long de \mathfrak{X} .

Une famille constructible localement pour les topologies considérées dans cette article (topologie h , topologie des altérations) est donc même constructible pour la topologie grossière.

DÉMONSTRATION. Supposons X irréductible pour simplifier (cf **C.1.4.7**). Il existe un ouvert $V \subseteq X'$ d'une strate de \mathfrak{X}' tel que $U := f(V)$ contienne le point générique de X . Quitte à rétrécir V , on peut supposer U ouvert et le faisceau constructible $\Pi := (V \rightarrow U)_* \underline{\mathbb{Z}}$ — où $\underline{\mathbb{Z}}$ est le faisceau constant de valeur $\{0, 1\}$ — lisse, de formation compatible au changement de base.

Montrons que sous ces hypothèses tout faisceau \mathcal{F} sur X lisse sur $V \subseteq X'$ est également lisse sur $U \subseteq X$; ceci permet de conclure par récurrence noethérienne. Le schéma U étant noethérien donc localement connexe par arcs ([SGA 4 IX, 2.12]), il suffit de vérifier que pour chaque morphisme $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x}$ de points géométriques de U , le morphisme de spécialisation $\mathcal{F}_{\bar{x}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{y}}$ est un isomorphisme ([SGA 4 IX, 2.13]). Par hypothèse sur le faisceau Π , les flèches $\pi_0(V_{\bar{y}}) \rightarrow \pi_0(V \times_U U_{(\bar{x})}) \leftarrow \pi_0(V_{\bar{x}})$ sont des isomorphismes de sorte que toute composante connexe W de $V \times_U U_{(\bar{x})}$ rencontre $V_{\bar{y}}$ et $V_{\bar{x}}$. Ainsi, le morphisme $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x}$ se relève dans W en une chaîne de spécialisations-générisations; la conclusion résulte alors de la lissité de \mathcal{F} sur W . \square

C.1.6. Un « lemme » d'Ofer Gabber.

C.1.6.1. Motivations. Comme signalé dans l'introduction, nous utiliserons principalement dans cet article la *topologie propre* ou – compte tenu du caractère Zariski (et même étale) local de nos conditions – la *topologie h*. (Voir aussi C.1.6.5 infra.) Les dévissages, de nature géométrique ou faisceautique (cf. C.1.1.4), et le formalisme des six opérations font jouer un rôle clef aux immersions fermées. Le résultat suivant de O. Gabber a pour conséquence que tout se passe dans cet article comme si *tout h-recouvrement d'un fermé est trace d'un h-recouvrement de l'espace ambiant*.

C.1.6.2. PROPOSITION (O. Gabber). *Soient X un schéma noethérien, $i : F \hookrightarrow X$ une immersion fermée et $f : F' \rightarrow F$ un morphisme fini (resp. propre) et surjectif. Il existe un morphisme fini surjectif (resp. une altération) $X' \rightarrow X$ tel que toute composante irréductible T de $F \times_X X'$, munie de la structure réduite, soit la source d'un F -morphisme vers F' .*

$$\begin{array}{ccccc}
 F' & \leftarrow & & & \\
 \downarrow & & & & \dashrightarrow \\
 F & \leftarrow & F_{X'} & \leftarrow & \coprod_{\alpha} T_{\alpha} \\
 \uparrow i & & \downarrow & & \\
 X & \leftarrow & X' & &
 \end{array}$$

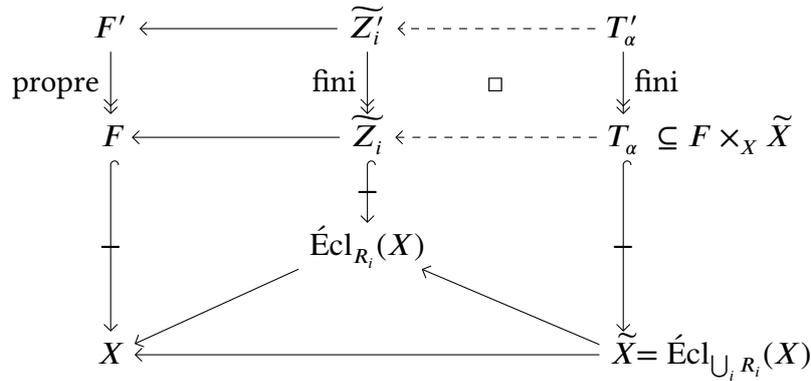
La suite de cette section C.1.6 est consacrée à la démonstration de cette proposition et quelques conséquences.

C.1.6.3. Cas propre. Il résulte de [ORGOGOZO 2006, lemme 4.3] (également dû à O. Gabber) que le cas propre se ramène au cas fini, traité ci-dessous. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons brièvement l'argument. Comme expliqué dans [ibid.], il résulte du théorème de platification par éclatement, qu'il existe pour tout sous-schéma fermé intègre Z de F un éclatement $\tilde{Z} \rightarrow Z$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 F' & \leftarrow & Z' & \leftarrow & \tilde{Z}' \\
 \text{propre} \downarrow & & \text{altération} \downarrow & & \downarrow \text{fini} \\
 F & \leftarrow & Z & \leftarrow & \tilde{Z} = \text{Écl}_R(Z) .
 \end{array}$$

Par compacité de F^{cons} , il existe un nombre fini de fermés intègres Z_i tels que F soit la réunion des ouverts $Z_i - R_i$, où R_i est le centre de l'éclatement $\tilde{Z}_i \rightarrow Z_i$.

Soit \tilde{X} l'éclatement dominant les éclatés de X le long des R_i et notons T_α les composantes irréductibles du produit fibré $F_{\tilde{X}} := F \times_X \tilde{X}$. Par construction, chaque T_α s'envoie sur un \tilde{Z}_i . Le schéma $T' = \coprod_\alpha T'_\alpha$, obtenu par changement de base comme dans le diagramme ci-dessous, est alors *fini surjectif* sur $F_{\tilde{X}}$ et il existe un F -morphisme de T' vers F' . Comme annoncé, ceci nous ramène au cas où le morphisme $F' \rightarrow F$ est *fini* (surjectif).

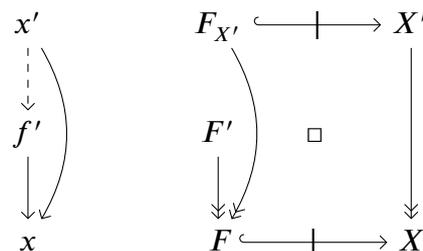


C.1.6.4. Cas fini. On commence par supposer X affine pour simplifier.

C.1.6.4.1. Rappelons ([Bourbaki A, VI, §6, n°5], [LOMBARDI et QUITTÉ 2011, III.§4, VII.§4] ; voir aussi [BHARGAVA et SATRIANO 2014, §6]) que si A est un anneau et $f \in A[t]$ est un polynôme unitaire, on peut définir l'**algèbre de décomposition universelle** $\text{Adu}_A(f)$ de f , quotient de l'anneau $A[y_i, 1 \leq i \leq \deg(f)]$ par les relations obtenues en imposant l'égalité $\prod_i (t - y_i) = f(t)$. Si P est une famille finie de polynôme unitaires, on note $\text{Adu}_A(P)$ le produit tensoriel des $\text{Adu}_A(f)$, pour $f \in P$, au-dessus de A . Lorsque $X = \text{Spec}(A)$, on note $\text{Sdu}_X(P)$ le **schéma de décomposition universel**, spectre de cette algèbre. Par construction, pour tout point x' de $\text{Sdu}_X(P)$ d'image x dans X , l'extension $\kappa(x')/\kappa(x)$ est finie quasi-galoisienne (=normale).

C.1.6.4.2. Lorsque dans C.1.6.2 le schéma X est affine, le morphisme fini $F' \rightarrow F$ correspond à un morphisme fini $\mathcal{O}(F') \rightarrow \mathcal{O}(F)$ de $\mathcal{O}(X)$ -algèbres. Choisissons arbitrairement des générateurs a_1, \dots, a_n de $\mathcal{O}(F')$ sur $\mathcal{O}(F)$ satisfaisant des équations unitaires $q_i \in Q \subseteq \mathcal{O}(F)[t]$, que l'on relève (arbitrairement) en des équations unitaires $p_i \in P \subseteq \mathcal{O}(X)[t]$. Soit $X' := \text{Sdu}_X(P)$ le schéma de décomposition universel associé ; le produit fibré $F_{X'} := F \times_X X'$ est alors $\text{Sdu}_F(Q)$.

Soit x' un point de X' d'image $x \in F$ dans X . Pour tout point f' de F' au-dessus de x , il existe par construction un x -morphisme $x' \rightarrow f'$.



Appliquant ceci aux points maximaux de $F_{X'}$, on observe que pour toute composante irréductible T_α de $F_{X'}$, il existe un F -morphisme de son point générique vers F' . Par construction également, ce morphisme s'étend, de façon *unique*, à la composante irréductible T_α tout entière (munie de la structure réduite). En effet, tout diagramme commutatif comme-ci dessous, où K, K' et K'' sont les corps des fractions d'anneaux intègres R, R' et R'' , se complète par un R -morphisme $R' \rightarrow R''$.

$$\begin{array}{ccccc}
 K'' & \longleftarrow & R'' & \longleftarrow & \text{Adu}_R(q_1, \dots, q_n) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 K' & \longleftarrow & R' & \xlongequal{\quad} & R[x_1, \dots, x_n], q_i(x_i) = 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 K & \longleftarrow & R & &
 \end{array}$$

C.1.6.4.3. Cas général : on ne suppose plus X affine, mais on se donne un recouvrement fini par des ouverts affines U_i . Posons $F_i := F \times_X U_i$.

Lorsque F_i est non vide, on considère un schéma de décomposition universel $U'_i \twoheadrightarrow U_i$ associé (non canoniquement) comme ci-dessus au diagramme $F'_i \twoheadrightarrow F_i \hookrightarrow U_i$ (où $F'_i := F' \times_F F_i$). Le morphisme $U'_i \rightarrow U_i$ s'étend en un morphisme fini $X'_i \twoheadrightarrow X$: considérer le coproduit de $X \setminus U_i$ avec une approximation de la normalisation de X dans U'_i , qui coïncide avec U'_i sur U_i . (Écrire la normalisation comme une limite de X -schémas finis.)

Lorsque $F_i = \emptyset$ (c'est-à-dire $F \cap U_i = \emptyset$), on pose $X'_i := X$.

Soit X' le produit fibré sur X des X'_i . La démonstration du paragraphe précédent s'applique *mutatis mutandis*, l'unicité susmentionnée des prolongements nous permettant de se restreindre aux schémas affines U_i .

C.1.6.5. La proposition **C.1.6.2**, dans le cas particulier où $F = X$, entraîne qu'une famille constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) pour la topologie h l'est aussi pour la topologie des altérations.

C.1.6.6. REMARQUE (O. Gabber). Bien que nous n'en ferons pas usage, observons que si une famille est « modérée » (ou rendue localement unipotente) par une altération, elle l'est aussi par une altération *génériquement étale*. Cela résulte de l'invariance du topos étale par homéomorphisme universel ([SGA 4 VIII, §1]) et du fait que toute altération $X' \rightarrow X$ se décompose en $X' \rightarrow X'' \rightarrow X$, où $X'' \rightarrow X$ est une altération *génériquement étale* et $X' \rightarrow X''$ est un morphisme fini radiciel. En effet, si $X' \rightarrow X$ est localement défini par une injection d'anneaux $A \hookrightarrow B$, avec A et B intègres, on peut factoriser cette injection en $A \hookrightarrow A[B^{p^n}] \hookrightarrow B$; cette construction se recolle et, pour n grand, l'extension $\text{Frac}(A[B^{p^n}]) / \text{Frac}(A)$ ainsi obtenue est étale (cf. p. ex. [Bourbaki A, V §7 n°7, cor. 2 (démonstration)]).

Terminons par une application, qui est une conséquence immédiate du lemme de Gabber précédent et de la possibilité de trivialisier un faisceau lisse par un morphisme fini étale.

C.1.6.7. PROPOSITION. *Tout faisceau constructible sur un schéma noëthérien est modéré par un morphisme fini surjectif.*

DÉMONSTRATION. Quitte à plonger le faisceau, \mathcal{F} , dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ pour un entier $n > 1$, on peut supposer le faisceau abélien. (On utilise le fait que $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ commute aux fibres.) Par passage à la limite — utiliser par exemple [THOMASON et TROBAUGH 1990, C.9] et [SGA 4 IX, 2.7.4] — et stabilité par image inverse, on peut supposer le schéma noëthérien *excellent*. Par dévissage (triangle $j_!j^* \rightarrow \text{Id} \rightarrow i_*i^* \xrightarrow{+1}$) et la proposition C.1.6.2, on se ramène par récurrence noëthérienne sur X au cas d'un faisceau de la forme $j_!\mathcal{L}$, où $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte d'image dense et \mathcal{L} est un faisceau lisse. Soit $U' \rightarrow U$ un revêtement étale trivialisant \mathcal{L} et considérons le normalisé $X' \rightarrow X$ de X dans U' . Le faisceau $(X' \rightarrow X)^*(j_!\mathcal{L})$ est modéré. \square

C.1.7. Extensions ponctuelles.

C.1.7.1. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de topos, $\{\mathcal{F}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ des faisceaux abéliens sur X et $N \geq 0$ un entier. On dit qu'un faisceau \mathcal{G} sur Y est **N -extension ponctuelle de sous-quotients des \mathcal{F}_λ** (resp. **relativement à f**) s'il existe pour chaque point y de Y une filtration à N crans de la fibre \mathcal{G}_y , dont les quotients successifs sont des sous-quotients de fibres des \mathcal{F}_λ en des points de X (resp. au-dessus de y).

C.1.7.2. Sorites. Les faits suivants sont de vérification immédiate.

- (i) Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, \mathcal{F} un faisceau abélien sur X , un morphisme $\pi : X' \rightarrow X$ et $f' : X' \rightarrow Y$ le composé $f \circ \pi$. Si un faisceau \mathcal{G} sur Y est N -extension ponctuelle de sous-quotients de $\mathcal{F}' := \pi^*\mathcal{F}$ relativement à f' , il est également N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} relativement à f .
- (ii) Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, $k : Z \hookrightarrow X$ une immersion, et \mathcal{F} un faisceau abélien sur Z . Un faisceau \mathcal{G} sur Y est N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} relativement au composé $g := f \circ k$ si et seulement si il est N -extension ponctuelle de $k_!\mathcal{F}$ relativement à f .
- (iii) Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, \mathcal{F} un faisceau sur X ,

$$\mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_2 \xrightarrow{+1}$$

un triangle distingué de complexes sur Y et q un entier. Si chaque $H^q(\mathcal{K}_\lambda)$, $\lambda \in \{1, 2\}$, est N_λ -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} relativement à f , le faisceau $H^q\mathcal{K}$ est $(N_1 + N_2)$ -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} relativement à f .

(On appliquera ceci au cas particulier où les deux complexes \mathcal{K}_λ sont obtenus par application du foncteur Rf_* à une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow 0$ de faisceaux sur X .)

- (iv) Soient $f : X \rightarrow Z = (g : Y \rightarrow Z) \circ (h : X \rightarrow Y)$ un morphisme, \mathcal{F} un faisceau sur X , \mathcal{G} un faisceau sur Y et \mathcal{H} un faisceau sur Z . Si \mathcal{G} est N_1 -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} (relativement à h) et \mathcal{H} est N_2 -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{G} (relativement à g), alors \mathcal{H} est $(N_1 \times N_2)$ -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} (relativement à f).

(On appliquera ceci au cas particulier où $\mathcal{G} := R^i h_* \mathcal{F}$ et $\mathcal{H} := R^j g_* \mathcal{E}$.)

(v) Soient

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

un carré commutatif avec g *surjectif* sur les points et \mathcal{F} (resp. \mathcal{G}) un faisceau abélien sur X (resp. Y). Pour tout entier $N \geq 0$, le faisceau \mathcal{G} est N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} relativement à f si et seulement si le faisceau $g^* \mathcal{G}$ est N -extension ponctuelle de sous-quotients de $g'^* \mathcal{F}'$ relativement à f' .

(On appliquera ceci au cas particulier d'un carré cartésien de morphismes munis de la topologie étale, f est un morphisme *propre*, $\mathcal{G} := R^q f_* \mathcal{F}$, et $g^* \mathcal{G} = R^q g'_* \mathcal{F}'$.)

C.2. Lemmes d'Abhyankar et courbes nodales

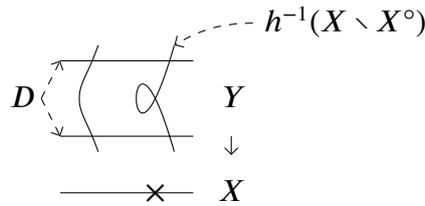
C.2.1. Paires toriques et courbes nodales : rappels.

C.2.1.1. Rappelons que si X est un schéma et $j : U \hookrightarrow X$ est un ouvert dense, la paire (X, U) est dite **torique** ([MOCHIZUKI 1999, 1.2]) ou **log-régulière** ([STG VI, 1.4]) si le schéma X muni de la log-structure^④ image directe $\mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_U^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ est **log-régulier** et U est l'ouvert de trivialité de cette log-structure. (Par définition, un log-schéma log-régulier est fin et saturé [fs].) Tout log-schéma (X, M_X) log-régulier est de ce type; cf. p. ex. [GABBER et RAMERO 2014, 10.5.53]. L'exemple typique d'une paire torique est constitué d'un schéma régulier X et du complémentaire U du support d'un diviseur à croisements normaux (resp. à croisements normaux strict). Une telle paire est dite **régulière** (resp. **strictement régulière**). Réciproquement, toute paire torique (X, U) avec X *régulier* est une paire régulière au sens précédent. Nous commettrons l'abus de notation suivant : si (X, U) est torique, on désignera également par (X, U) le *log-schéma* muni de la log-structure introduite ci-dessus.

C.2.1.2. Soit maintenant X un schéma noethérien. Rappelons qu'un X -schéma Y est une **courbe nodale** si le morphisme structural $h : Y \rightarrow X$ est projectif, plat, à fibres géométriques des courbes connexes ayant au pire des singularités quadratiques ordinaires. Nous dirons d'une courbe nodale $h : Y \rightarrow X$ qu'elle est **adaptée** à une paire (Y°, X°) , où Y° (resp. X°) est un ouvert dense de Y (resp. X) lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

- le morphisme h est lisse au-dessus de X° ;
- il existe un diviseur D étale sur X contenu dans le lieu lisse de f tel que $Y^\circ = h^{-1}(X^\circ) \cap (Y - D)$.

^④. Comme expliqué en [GABBER et RAMERO 2014, 7.2.12] cette log-structure sur X , muni de la topologie étale, n'est pas nécessairement fine.



Un lien avec la géométrie logarithmique est donné par la proposition bien connue suivante ([STG VI, 1.9], [MOCHIZUKI 1999, 4.2] ou [SAITO 2004, 1.12]).

C.2.1.3. PROPOSITION. *Soit $h : Y \rightarrow X$ une courbe nodale adaptée à une paire d'ouverts denses (Y°, X°) telle que (X, X°) soit torique. Alors le morphisme $(Y, Y^\circ) \rightarrow (X, X^\circ)$ est log-lisse et la paire (Y, Y°) est torique.*

(Voir aussi [C.2.3.6](#).)

C.2.2. Pureté.

C.2.2.1. Soient X un schéma régulier connexe, D un diviseur à croisements normaux et $U = X \setminus D$. Pour tout faisceau \mathcal{L} lisse sur $U = X \setminus D$, il est équivalent de demander que le prolongement par zéro $j_! \mathcal{L}$ soit modéré au sens de [C.1.3.1](#) ou bien que \mathcal{L} soit *modéré le long de D* au sens usuel (c'est-à-dire : pour tout point maximal d de D , l'inertie sauvage du corps discrètement valué $\text{Frac}(\mathcal{O}_{X,d})$ agit trivialement). Seule une implication est non triviale ; elle résulte immédiatement du lemme d'Abhyankar usuel ([SGA 1 XIII, 5.2]).

C.2.2.2. Considérons maintenant une variante logarithmique du critère de modération précédent s'appuyant sur un théorème de pureté logarithmique (Katô K., cf. p. ex. [MOCHIZUKI 1999, 3.3]). On ne suppose plus la paire (X, U) régulière mais seulement *torique*. La condition de modération en les points maximaux du diviseur D garde un sens, car X est normal ([KATO 1994, 4.1] ou [GABBER et RAMERO 2014, 10.5.29]). Si un faisceau abélien \mathcal{L} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules, lisse sur U , satisfait cette condition, il existe un revêtement étale $U' \rightarrow U$, modéré le long de D (au sens usuel, [ibid., 11.3.16], [ILLUSIE 1981, 2.6]) trivialisant \mathcal{L} . Soit X' le normalisé de X dans U' ; le morphisme $X' \rightarrow X$ est fini et surjectif. D'après [GABBER et RAMERO 2014, 11.3.43], la paire (X', U') est torique et le morphisme de log-schémas $(X', U') \rightarrow (X, U)$ est un revêtement log-étale, au sens de [ibid., 11.3.13]. Lorsque X est strictement local d'exposant caractéristique résiduel p , le groupe fondamental logarithmique de la paire (X, U) est abélien d'ordre profini premier à p ([ibid., 11.3.41]). Il en résulte formellement que le faisceau $j_! \mathcal{L}$ est modéré. Résumons ces observations sous la forme d'un lemme.

C.2.2.3. LEMME. *Soient (X, U) une paire torique, $j : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte et \mathcal{L} un faisceau abélien lisse sur U de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules ($n \geq 1$). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le prolongement par zéro $j_! \mathcal{L}$ est modéré (au sens de [C.1.3.1](#)) ;*
- (ii) *\mathcal{L} est modéré le long de D : pour tout point maximal d de D , l'inertie sauvage du corps discrètement valué $\text{Frac}(\mathcal{O}_{X,d})$ agit trivialement sur la fibre de \mathcal{L} en un point géométrique au-dessus de d .*
- (iii) *il existe un revêtement log-étale $(X', U') \rightarrow (X, U)$ tel que $\mathcal{L}_{|U'}$ soit trivial.*

C.2.2.4. REMARQUE. L'analogie de ce lemme pour l'unipotence est faux : il existe par exemple une paire torique (X, U) avec X strictement local de dimension 2 et un faisceau \mathcal{L} lisse sur U qui n'est pas unipotent (sur U) mais localement unipotent en les points maximaux de $X - U$. En effet, comme expliqué en [ibid., 11.3.52-55], on peut calculer le groupe fondamental du spectre épointé $X^* := X - \{x\}$ (pour X de dimension quelconque) et en particulier ([ibid., 11.3.57]) construire une paire comme ci-dessus telle que $\pi_1(X^*) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

C.2.3. Image directe : courbe nodale. Faute de référence adéquate, ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition suivante. (Signalons cependant que, dans le cas localement unipotent, cet énoncé et une esquisse de preuve – différente – figurent dans [PINK 1995].)

C.2.3.1. PROPOSITION. Soient X un schéma noëthérien, $h : Y \rightarrow X$ une courbe nodale adaptée à une paire d'ouverts denses (Y°, X°) , avec X° normal, et \mathcal{L} un faisceau lisse de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur Y° , où n est un entier inversible sur X , tel que $j_! \mathcal{L}$ soit modéré (resp. localement unipotent le long de la stratification $\mathfrak{Y} := \{Y^\circ, Y \setminus Y^\circ\}$ de Y), où j désigne l'immersion ouverte $Y^\circ \hookrightarrow Y$. Alors, les faisceaux $R^i h_*(j_! \mathcal{L})$ ($0 \leq i \leq 2$) sont constructibles et modérés (resp. localement unipotents) le long de la stratification $\mathfrak{X} := \{X^\circ, X \setminus X^\circ\}$ de X .

Nous traitons d'abord le cas où la paire (X, X°) est torique : cela est suffisant pour établir le théorème de constructibilité uniforme pour les morphismes propres dans le cas des schémas quasi-excellents. Le cas des schémas noëthériens généraux est ensuite esquissé.

Fixons un entier $i \in \{0, 1, 2\}$.

C.2.3.2. Constructibilité. Le faisceau $R^i h_*(j_! \mathcal{L})$ est nul sur le fermé $X \setminus X^\circ$: cela résulte du théorème de changement de base propre et du fait que l'ouvert Y° ne rencontre pas le fermé $h^{-1}(X \setminus X^\circ)$. Montrons maintenant que $R^i h_*(j_! \mathcal{L})$ est lisse sur l'ouvert X° . On peut supposer $X = X^\circ$. Le lemme bien connu ci-dessous et la propriété de h nous ramènent au cas où X est un trait hensélien, qui résulte de [SGA 7 XIII, 2.1.11].

(Le même argument se trouve dans [PINK 1995, théorème 4].)

LEMME. Soient X un schéma noëthérien, $(f : Y \rightarrow X, \mathcal{F})$ une paire cohomologiquement propre et $c \geq 0$ un entier tel que $\mathcal{H} := R^c f_* \mathcal{F}$ soit constructible. Alors, \mathcal{H} est lisse si et seulement si pour tout X -trait strictement hensélien T , le faisceau $R^c f_{T*} \mathcal{F}|_{Y_T}$ est lisse sur T .

DÉMONSTRATION. Par propriété cohomologique, il s'agit de montrer que le faisceau constructible \mathcal{H} est lisse si ses tirés en arrière sur tout X -trait strictement hensélien le sont. Or, d'après [SGA 4 IX, 2.13 (i)], il faut montrer que pour toute spécialisation $b \rightsquigarrow a$ de points géométriques de X , le morphisme $\mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}_b$ est un isomorphisme. D'après [ÉGA II, 7.1.9], il existe un morphisme local $T \rightarrow X_{(a)}$, induisant un isomorphisme sur les corps résiduels en les points fermés et envoyant le point générique de T sur (l'image de) b . Ceci suffit pour conclure. \square

C.2.3.3. Modération : cas où la paire (X, X°) est torique. Soit $\pi : (Y', Y'^\circ) \rightarrow (Y, Y^\circ)$ un revêtement log-étale tel que $\mathcal{L}|_{Y'^\circ} := \pi^* \mathcal{L}$ soit constant (C.2.2.3). La transitivité des images

directes et un dévissage classique (cf. par exemple [Th. finitude, A, 1.3.3]), reposant sur le fait que le prolongement par zéro du conoyau de la flèche $\mathcal{L} \hookrightarrow \pi^\circ_* \pi^{\circ*} \mathcal{L}$ est également modéré, nous ramènent à montrer que pour tout revêtement log-étale $\tau : (Y', Y'^\circ) \rightarrow (Y, Y^\circ)$, le faisceau $R^i(h \circ \tau)_*(j'_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est modéré. (On note j' le changement de base $j \times_Y Y'$.) D'après les résultats rappelés au paragraphe précédent, ce faisceau est le prolongement par zéro d'un faisceau lisse sur X° . Le lemme d'Abhyankar logarithmique (C.2.2.3), nous permet de supposer dans le cas torique que X est un *trait* strictement hensélien, dont nous notons η le point générique de sorte que $X^\circ = \{\eta\}$, sans quoi $X = X^\circ$ et il n'y a rien à démontrer. Soit $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η ; on veut montrer que l'action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur $H_c^i(Y_{\bar{\eta}}^\circ, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est modérée. Par lissité de $Y_{\bar{\eta}}^\circ$ sur η et dualité de Poincaré, il suffit de démontrer la modération de la cohomologie sans support (en degré cohomologique $2 - i$). Ceci est un cas particulier du résultat suivant ([ILLUSIE 2002a, 8.4.3]) :

Soient (W, \mathcal{M}_W) un log-schéma fin et saturé, propre et log-lisse sur (X, η) d'ouvert de trivialité W° contenu dans W_η , et n un entier inversible sur X . Alors l'action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur chaque $H^j(W_{\bar{\eta}}^\circ, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est modérée.

C.2.3.4. Unipotence : cas d'un trait. Commençons par le cas où X est un trait strictement hensélien et $X^\circ = \{\eta\}$. Notons s le point fermé de X et $\bar{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η . On veut montrer que l'action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur $H_c^i(Y_{\bar{\eta}}^\circ, \mathcal{L}) = H^i(Y_s, \Psi_h j_{\eta!} \mathcal{L})$ est unipotente. Il suffit de montrer que pour chaque α , l'action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur $\Psi_h^\alpha(j_{\eta!} \mathcal{L})$ est unipotente, c'est-à-dire (C.1.2.4) qu'il existe une filtration de ce faisceau à gradué muni de l'action triviale. D'après C.1.2.5, le problème est local (pour la topologie étale) sur Y_s (donc sur Y) et on peut alors supposer, par dévissage, que le faisceau localement unipotent \mathcal{L} est *constant*, de valeur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un entier n inversible sur X . Le triangle

$$\Psi_h(j_{\eta!} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \Psi_h(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \Psi_h(i_{\eta*} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = i_{s*} \Psi_{D/X}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow +1,$$

où i est l'immersion fermée du diviseur D dans Y (et l'égalité résulte de [SGA 7 XIII, 1.3.6.1]), nous ramène à démontrer l'unipotence des faisceaux $\Psi_h^\alpha(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Or, il est bien connu que l'action de l'inertie sur ces faisceaux est *triviale* (voir par exemple [ILLUSIE 2004, §3.3] et [SGA 7 I, 3.3]).

C.2.3.5. Unipotence : cas général. On procède par réduction au cas précédent. Le théorème de changement de base propre nous permet d'une part de supposer le schéma de base X strictement local intègre, de point fermé x et de point *générique* $\eta \in X^\circ$ — dont on note $\bar{\eta} \rightarrow \eta$ un point générique géométrique — et d'autre part d'exprimer la cohomologie $R\Gamma(Y_{\bar{\eta}}, j_! \mathcal{L})$ de la fibre générique géométrique comme la cohomologie $R\Gamma(Y_x, \Psi_{x, \bar{\eta}}(j_! \mathcal{L}))$ de la fibre spéciale Y_x à coefficients dans un complexe naturellement muni d'une action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$, calculant la cohomologie des fibres de Milnor :

$$\Psi_{x, \bar{\eta}} := (Y_x \hookrightarrow Y)^* R(Y_{\bar{\eta}} \rightarrow Y)_*.$$

(Sur la théorie de P. Deligne des cycles évanescents *en dimension* ≥ 1 , voir par exemple [LAUMON 1983].) D'après C.1.2.3 et la normalité de X° , il suffit de montrer que l'action du groupe de Galois $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur chaque $H_c^i(Y_{\bar{\eta}}^\circ, \mathcal{L})$ est unipotente. La description précédente et le

critère **C.1.2.5** nous ramènent à démontrer l'énoncé *local* suivant : pour tout entier $0 \leq \alpha \leq 2$ et tout point géométrique \bar{y} de Y localisé en $y \in (Y \setminus Y^\circ)_x$, l'action du groupe de Galois $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur le groupe de cohomologie $H^\alpha(\bar{V}, j_! \mathcal{L}) = \Psi_{x, \bar{\eta}}^\alpha(j_! \mathcal{L})_{\bar{y}}$ de la *fibre de Milnor* $\bar{V} := Y_{(\bar{y})} \times_X \bar{\eta}$ est *unipotente*. (Rappelons que j est l'immersion ouverte $Y^\circ \hookrightarrow Y$.) Par hypothèse, la restriction du faisceau \mathcal{L} à $V := Y_{(\bar{y})} \times_X \eta$ est unipotente ; par dévissage, on peut donc supposer le faisceau \mathcal{L} constant de valeur L . Le triangle $j_! L \rightarrow L \rightarrow i_* L \xrightarrow{+1}$ sur Y_η nous ramène à montrer que l'action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur $H^\alpha(\bar{V}, L)$ et $H^{\alpha-1}(\bar{V} \times_Y D, L)$ est unipotente, où D est le fermé de Y constitué des diviseurs horizontaux. Par locale acyclicité des morphismes lisses seul est à considérer le premier groupe, dans le cas particulier où y est un point singulier du morphisme h . Notons que le lieu singulier du morphisme h est fini sur la base : la proposition [ÉGA II, 7.1.7] nous permet comme dans le lemme ci-dessus (et [ORGOGOZO 2006, §7.1]) de supposer que X est un trait, par comparaison avec la théorie classique des cycles évanescents de Grothendieck. (On utilise ici un théorème de P. Deligne de commutation au changement de base, rappelé en [ibid., prop. 6.1].)

C.2.3.6. Modération : cas général (esquisse). Comme dans le paragraphe précédent, on se ramène à démontrer l'énoncé local suivant (pour X strictement local, de point fermé x) : pour tout point géométrique \bar{y} de Y localisé en $y \in (Y \setminus Y^\circ)_x$, l'action du groupe de Galois $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur les groupes de cohomologie $H^\alpha(\bar{V}, j_! \mathcal{L})$ de la *fibre de Milnor* $\bar{V} := Y_{(\bar{y})} \times_X \bar{\eta}$ est d'ordre premier à l'exposant caractéristique p de x . Nous traitons ici le cas où $Y \rightarrow X$ n'est pas lisse en y , l'autre cas étant semblable et plus élémentaire. D'après [F. KATO 2000, §2, p. 227]^⑤ (voir aussi [MOCHIZUKI 1995, §3]), le morphisme $h : Y \rightarrow X$ est sous-jacent à un morphisme *log-lisse saturé* $(Y, \mathcal{N}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$ entre log-schémas fins et saturés (fs) tel que le lieu de trivialité de (Y, \mathcal{N}) (resp. de (X, \mathcal{M})) contienne la fibre Y_η (resp. η). Notons V la fibre $Y_{(\bar{y})} \times_X \eta$, normale par [GABBER et RAMERO 2014, 10.7.17 (i)] ; la restriction à V du faisceau \mathcal{L} correspond à une représentation de $\pi_1(V)$, qui – par hypothèse de modération – se factorise à travers son plus grand quotient $\pi_1(V)_{\perp p}$ premier à p : le groupe fondamental du schéma V est un quotient du groupe de Galois du point générique v de V et l'action de ce dernier se factorise par hypothèse à travers un quotient premier à p . Les revêtements d'ordre premier à p de \bar{V} étant modérés, ils proviennent de la log-structure d'après le théorème [ibid., 11.4.39] d'acyclicité des morphismes log-lisses : il existe donc un morphisme Kummer-étale $(Y', \mathcal{N}') \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ tel que la restriction de \mathcal{L} à la fibre $V' = Y'_{(\bar{y})} \times_X \eta$ correspondante soit l'image inverse d'un faisceau sur η , de monodromie première à p . (On utilise ici le fait que le groupe fondamental de V est extension de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ par le groupe fondamental de \bar{V} .) Ceci nous ramène à démontrer la modération dans le cas particulier où \mathcal{L} est un faisceau *constant*. Par commutation des cycles proches aux changements de base dans ce cas (rappelée en **C.2.3.5** *supra*), on peut supposer que X est un *trait*, de corps des fractions $\kappa(\eta)$. La modération est connue dans ce cas (**C.2.3.3**).

⑤. Je remercie Arthur Ogus de m'avoir communiqué cette référence.

C.2.4. Image directe : immersion ouverte régulière. Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition suivante, dont on trouvera une variante en [GABBER et LOESER 1996, lemme 4.3.2], et notamment d'un complément sur la taille des images directes.

C.2.4.1. PROPOSITION. *Soient $j : X^\circ \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que la paire (X, X°) soit strictement régulière (C.2.1.1) et \mathcal{L} un faisceau lisse de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur X° , où n est un entier inversible sur X , tel que $j_! \mathcal{L}$ soit modéré (resp. localement unipotent le long de $\{X^\circ, X \setminus X^\circ\}$). Soit \mathfrak{D} la stratification de X définie par la fonction semi-continue supérieurement associant à un point le nombre de branches de $D := X \setminus X^\circ$ y passant. Alors, les faisceaux $R^c j_* \mathcal{L}$ ($c \in \mathbb{N}$) sont constructibles et modérés (resp. localement unipotents) le long de la stratification \mathfrak{D} .*

De plus :

- (i) si X est lisse sur un schéma S et $D = X \setminus X^\circ$ est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux relativement à S , la formation de $R^c j_* \mathcal{L}$ commute aux changements de bases $S' \rightarrow S$;
- (ii) si $k : X \hookrightarrow \bar{X}$ est une immersion ouverte et $k_! j_! \mathcal{L}$ modéré (resp. localement unipotent le long de la stratification $\{X^\circ, \bar{X} \setminus X^\circ\}$ de \bar{X}), le complexe $k_! Rj_* \mathcal{L}$ est à cohomologie modérée (resp. localement unipotente le long de la stratification définie par \mathfrak{D}), et le fermé $F = \bar{X} \setminus X$.

« Nombre de branches » : c'est le rang des fibres de $R^1 j_* \mathbb{F}_\ell$, pour ℓ inversible sur X , ou encore le rang de la log-structure naturellement associée à (X, X°) — de sorte que \mathfrak{D} est la stratification canonique ([STG VI, 1.5]) — : on choisit donc \mathfrak{D} de sorte que le théorème soit automatiquement vrai pour les faisceaux constants.

Traisons tout d'abord l'assertion principale dans le cas constructible modéré ; la commutation au changement de base (i) est établie en C.2.4.3 et le léger renforcement (ii) en C.2.4.4. Le cas unipotent, plus facile, est traité en C.2.4.5, directement sous la forme forte (ii).

C.2.4.2. Cas modéré. L'énoncé étant local pour la topologie étale, on peut supposer X strictement local. Le diviseur D est donc réunion transverse de diviseurs réguliers $D_i = \text{div}(t_i)$, où les t_1, \dots, t_b sont des éléments de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Comme dans [DELIGNE 1980, §1.7.8], posons $X_r := X[(t_i)^{1/r} : 1 \leq i \leq b]$ pour chaque entier $r \geq 1$. C'est un schéma régulier ([SGA 1 XIII, 4.1]) et $X_r^\circ := X^\circ \times_X X_r$ est le complémentaire d'un diviseur strictement à croisements normaux D_r . Notons π_r le morphisme fini $X_r \rightarrow X$, $\pi_r^\circ : X_r^\circ \rightarrow X^\circ$ le morphisme étale qui s'en déduit par restriction à l'ouvert X° et $j_r : X_r^\circ \hookrightarrow X_r$ l'immersion ouverte. L'hypothèse de modération assure que pour chaque \mathcal{L} comme dans l'énoncé il existe un entier r , premier à la caractéristique résiduelle de X , tel que $\mathcal{L}_r := \pi_r^* \mathcal{L}$ soit un faisceau constant sur X_r° , de fibre que nous notons L (droit).

$$\begin{array}{ccc} \underline{L} = \mathcal{L}_r & X_r^\circ & \xrightarrow{j_r} X_r \\ & \pi_r^\circ \downarrow & \square \\ \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L}' & X^\circ & \xrightarrow{j} X \\ & & \downarrow \pi_r \end{array}$$

Le morphisme d'adjonction $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' := \pi_{r,\star}^\circ \mathcal{L}_r$ étant injectif de conoyau lisse et modéré le long de D , il suffit — par récurrence sur le degré cohomologique — d'établir la proposition pour le faisceau \mathcal{L}' . (Comparer avec [Th. finitude, A, 1.3.3] et C.2.3.3.) Par transitivité des images directes, on a $Rj_{r,\star} \mathcal{L}' = \pi_{r,\star} Rj_{r,\star} \mathcal{L}_r$. Puisque l'image directe par π_r transforme un faisceau constructible modéré le long de \mathfrak{D}_r en un faisceau constructible modéré le long de \mathfrak{D} , il suffit de traiter le cas $r = 1$, c'est-à-dire \mathcal{L} constant. Cela résulte de la pureté cohomologique absolue, démontrée par O. Gabber (voir par exemple [STG XVI, 3.1.4]).

C.2.4.3. (i) : commutation au changement de base. La propriété cohomologique du morphisme fini $\pi_{r,\star}$ nous permet, comme dans le paragraphe précédent, de nous ramener au cas particulier où le faisceau \mathcal{L} est constant : on veut montrer que le faisceau $R^c j_{r,\star} L$ commute aux changements de base $S' \rightarrow S$ lorsque L est constant, fini, de torsion inversible sur S . Cela résulte de [Th. finitude, A, 1.3.3 (i)].

C.2.4.4. (ii) : étude à l'infini, cas modéré. On démontre maintenant l'énoncé C.2.4.1 (ii) dans le cas modéré, en « passant à la limite sur r ». (Cette présentation, plus élégante que l'originale, nous a été proposée par O. Gabber. [Ⓞ])

Fixons un entier $c \geq 0$. Le problème étant à nouveau local pour la topologie étale, on peut supposer \bar{X} strictement local, d'exposant caractéristique $p \geq 1$. Soit \bar{d} un point géométrique localisé en $d \in D := X \setminus X^\circ$, d'exposant caractéristique p_d divisant p . (L'énoncé à démontrer est trivial si on se place en un point de $\bar{X} \setminus X$ ou de X° .) On veut montrer que l'action du groupe de Galois $\pi_1(d, \bar{d})$ sur $H^c(X^\circ_{(\bar{d})}, \mathcal{L})$ — où $X^\circ_{(\bar{d})}$ est l'ouvert normal $X^\circ \times_X X_{(\bar{d})}$ de l'hensélisé strict en \bar{d} — se factorise à travers un quotient premier à p . Par pureté, les dévissages du paragraphe précédent montrent que ce groupe de cohomologie est isomorphe à $H^c(\pi_1^{\text{mod}}(X^\circ_{(\bar{d})}, \bar{\eta}), L)$, où L est la fibre de \mathcal{L} en un point générique géométrique $\bar{\eta}$ de $X^\circ_{(\bar{d})}$ localisé en un point η de $X^\circ_{(\bar{d})}$, et $\pi_1^{\text{mod}}(X^\circ_{(\bar{d})}, \bar{\eta})$ est (non canoniquement) isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^{(p_d)}(1)^b$, où b est le nombre de branches de D en \bar{d} . Le faisceau \mathcal{L} étant modéré sur \bar{X} , l'action du quotient $\pi_1(X^\circ_{(d)}, \bar{\eta})$ de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ sur L se fait à travers un quotient d'ordre premier à p . La conclusion résulte alors du lemme ci-dessous, appliqué à la suite exacte déduite de $1 \rightarrow \pi_1(X^\circ_{(\bar{d})}) \rightarrow \pi_1(X^\circ_{(d)}) \rightarrow \pi_1(d, \bar{d}) \rightarrow 1$ par le quotient caractéristique $\pi_1(X^\circ_{(\bar{d})}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\text{mod}}(X^\circ_{(\bar{d})}) = \pi_1(X^\circ_{(\bar{d})})/N$, où G est le groupe de Galois, A le groupe fondamental modéré $\pi_1^{\text{mod}}(X^\circ_{(\bar{d})})$ et enfin π le quotient $\pi_1(X^\circ_{(d)})/N$. Notons que les groupes d'inertie modérés en les points maximaux de D engendrent A et sont stables sous l'action naturelle de G car les branches sont définies sur l'hensélisé (non strict) $X^\circ_{(d)}$.

LEMME. Soient p un nombre premier, $n \perp p$ un entier, $1 \rightarrow A \rightarrow \pi \rightarrow G \rightarrow 1$ une suite exacte de groupes profinis et L un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -module fini muni d'une action continue de π se factorisant à travers un quotient premier à p . On suppose de plus le groupe A abélien et produit fini, comme G -module, de groupes procycliques sans torsion d'ordre premier à p . Alors, pour tout entier $c \geq 0$, l'action de G sur $H^c(A, L)$ se factorise à travers $G_{\perp p}$.

DÉMONSTRATION. La décomposition G -équivariante de A en produit, la suite spectrale de Hochschild-Serre et l'hypothèse $n \perp p$ — garantissant la stabilité par extension de la propriété

[Ⓞ]. Ci-dessous, comme ailleurs, l'auteur est bien sûr seul responsable des erreurs.

à démontrer — nous ramènent immédiatement au cas particulier où A est procyclique ; géométriquement, cela revient à supposer qu'il n'y a qu'une branche ($b = 1$ avec les notations précédentes). Pour un tel A , il est bien connu que la cohomologie de L est concentrée en degrés $\{0, 1\}$ et $H^0(A, L)$ (resp. $H^1(A, L(1))$) sont respectivement les invariants et coinvariants de $A \subset L$. (Voir par exemple [STG XVII, §1.2] pour une discussion de ces isomorphismes, indépendants du choix d'un progénérateur.) L'action de π sur L se factorisant par un quotient d'ordre premier à p , il en est de même de l'action de G sur ces sous-quotients. \square

C.2.4.5. (ii) : cas unipotent. Comme précédemment, on peut supposer \bar{X} strictement local et, par hypothèse, \mathcal{L} extension de faisceaux constants sur X° puis, par dévissage immédiat, constant et même isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ quitte à remplacer n par un diviseur. Il s'agit donc de montrer la locale unipotence des faisceaux $k_1 R^c j_* \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n inversible sur \bar{X} . Cela résulte immédiatement de la pureté cohomologique absolue [STG XVI, 3.1.4].

Ceci achève la démonstration de la proposition C.2.4.1. Nous souhaitons maintenant borner la taille des images directes par l'immersion ouverte j . (L'étude des fibres de $k_1 R j_*$ s'y ramène immédiatement.)

C.2.4.6. PROPOSITION. *Soit $c \geq 0$ un entier. Il existe une fonction $\varphi_c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour toute paire régulière et strictement locale (X, X°) , tout entier $n \geq 1$ inversible sur X et tout faisceau lisse \mathcal{L} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur X° constructible et modéré le long de $X \setminus X^\circ = \sum_{i=1}^b D_i$ le groupe de cohomologie $H^c(X^\circ, \mathcal{L})$ soit $\varphi_c(b)$ -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{L} , où b désigne le nombre de branches de $D := X \setminus X^\circ$.*

« extension ponctuelle » : cf. C.1.7.

DÉMONSTRATION. Reprenons les notations du paragraphe C.2.4.2. Soient r tel que $\pi_r^\circ \star \mathcal{L}$ soit constant, de fibre L , et $\mu_{r,X}$ le groupe cyclique d'ordre r des racines de l'unité d'ordre divisant r dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Le revêtement $X_r^\circ \rightarrow X^\circ$ étant galoisien de groupe $\mu_{r,X}^b$, le complexe $R\Gamma(X^\circ, \mathcal{L})$ se réécrit $R\Gamma(\mu_{r,X}^b, R\Gamma(X_r^\circ, L))$. Rappelons ([SERRE 1968, VIII.§4]) que si $G = \langle \sigma \rangle$ est un groupe cyclique et M un G -module, la cohomologie de G à valeurs dans M est représentée par le complexe périodique

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma - 1} M \xrightarrow{t} M \xrightarrow{\sigma - 1} M \xrightarrow{t} \dots$$

où $t = \sum_{g \in G} g$, et le premier M est placé en degré 0. Cette description, uniforme en r , nous ramène au cas particulier où $r = 1$, c'est-à-dire où \mathcal{L} est constant, que l'on peut alors supposer isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la conclusion résulte de la pureté : $H^c(X^\circ, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \bigwedge_c (\mathbb{Z}^b/n\mathbb{Z}^b)$.

Alternativement, on aurait pu passer à la limite sur r et utiliser la description de $H^c(A, L)$ faite en C.2.4.4. Ceci permet d'ailleurs d'établir immédiatement l'annulation $H^c(X^\circ, \mathcal{L}) = 0$ pour $c > b$. \square

C.3. Image directe par un morphisme propre

Nous allons montrer que la propriété d'une famille d'être constructible et modérée (resp. localement unipotente) pour la topologie des altérations est stable par image directe propre. Cette stabilité est mise en défaut si l'on considère la topologie finie au lieu de la topologie des altérations (voir C.3.2).

Ces résultats sont connus de longue date d'Ofar Gabber.

C.3.1. Énoncés.

C.3.1.1. THÉORÈME (d'uniformité propre). *Soient S un schéma noethérien quasi-excellent, $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre, $\alpha : X' \rightarrow X$ une altération et \mathfrak{X} une stratification de X' . Il existe une altération $\beta : S' \rightarrow S$ et une stratification \mathfrak{S} de S' telles que pour tout entier $n \geq 1$, tout $i \geq 0$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X[1/n]$ dont l'image inverse $\alpha[1/n]^* \mathcal{F}$ est constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) le long de $\mathfrak{X}[1/n]$ (au sens de C.1.1.3, C.1.3.1, C.1.2.1) alors chaque $\beta[1/n]^* R^i f[1/n]_* \mathcal{F}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de $\mathfrak{S}[1/n]$.*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} & & \mathfrak{X} \\
 X & \xleftarrow{\alpha} & X' \\
 \downarrow f & & \\
 S & \xleftarrow{\exists \beta} & S' \\
 & & \exists \mathfrak{S}
 \end{array}$$

De plus, il existe un entier N , dépendant uniquement du triplet $(f, \alpha, \mathfrak{X})$, tel que chaque $R^i f[1/n]_* \mathcal{F}$ comme ci-dessus soit N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} relativement à f (au sens de C.1.7).

C.3.1.2. Tout faisceau abélien constructible sur un schéma noethérien étant modéré par un morphisme fini surjectif (cf. C.1.6.7), on peut voir l'énoncé C.3.1.1 comme une amélioration du théorème classique de constructibilité des images directes par un morphisme propre ([SGA 4 XIV, 1.1]), du moins lorsque l'on suppose la base noethérienne quasi-excellente. (L'hypothèse d'excellence est d'ailleurs superflue ; voir C.3.5.5 pour une esquisse d'argument, dont les détails sont laissés au lecteur.)

Il est également naturel d'exprimer le théorème précédent sous forme « dérivée ».

C.3.1.3. Soient α, \mathfrak{X} comme ci-dessus et n inversible sur X . Notons $D_{\alpha, \mathfrak{X}}^{b \text{ mod}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ la sous-catégorie triangulée de $D_c^b(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des complexes à cohomologie constructible le long de \mathfrak{X} et modérée par α . Il existe β, \mathfrak{S} tels que $Rf_* : D_c^b(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow D_c^b(S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ induise un foncteur entre les sous-catégories $D_{\alpha, \mathfrak{X}}^{b \text{ mod}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\beta, \mathfrak{S}}^{b \text{ mod}}(S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. (Comparer avec [BEILINSON, BERNSTEIN et DELIGNE 1982, §2.2.10-17].) Soit maintenant $\underline{n} = (n_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers. Notons $D_{\alpha, \mathfrak{X}}^{b \text{ mod}}(X, \mathbb{Z}/\underline{n}\mathbb{Z})$ la catégorie triangulée produit $\prod_i D_{\alpha, \mathfrak{X}}^{b \text{ mod}}(X[1/n_i], \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$ et $D_c^{b \text{ mod}}(X, \mathbb{Z}/\underline{n}\mathbb{Z})_h$ la colimite sur (α, \mathfrak{X}) , des catégories triangulées $D_{\alpha, \mathfrak{X}}^{b \text{ mod}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme propre, le théorème ci-dessus affirme que les foncteurs $Rf_{\star} : D_c^b(X[1/n_i], \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}) \rightarrow D_c^b(S[1/n_i], \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$ induisent un foncteur

$$D_c^{b \text{ mod}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_h \rightarrow D_c^{b \text{ mod}}(S, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_h.$$

Mêmes énoncés pour les catégories $D_{\alpha, \mathbf{x}}^{b \text{ unip}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $D_c^{b \text{ unip}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_h$, définies de manière évidente.

Ces énoncés sont non triviaux même lorsque tous les n_i sont égaux : si l'on ne considère par exemple que des \mathbb{F}_ℓ -faisceaux dans le théorème **C.3.1.1** (pour un ℓ fixé), la conclusion ne résulte pas directement, pour I de cardinal > 1 , du théorème de constructibilité usuel et fixer un ℓ ne semble d'ailleurs pas simplifier la démonstration. Notons cependant que si les entiers n_i sont des puissances d'un même nombre premier ℓ , la généralité apportée par l'ensemble d'indices I est illusoire : un $\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}$ -faisceau constructible \mathcal{F} est muni d'une filtration $\mathcal{F}_\alpha := \ell^\alpha \mathcal{F}$ de gradués des \mathbb{F}_ℓ -faisceaux constructibles, lisses (resp. modérés, localement unipotents) si et seulement si il en est ainsi de \mathcal{F} . (Si \mathcal{F} est même plat, les gradués non nuls sont isomorphes à $\mathcal{F}/\ell\mathcal{F}$.)

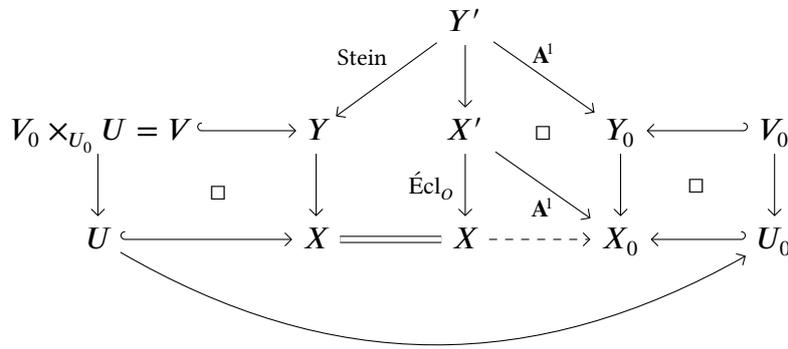
C.3.1.4. REMARQUE. Soient X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \geq 0$, D un diviseur à croisements normaux et U l'ouvert complémentaire. Il résulte du théorème précédent qu'il existe une constante $C_{X,D}$ telle que pour tout $\ell \neq p$ et tout \mathbb{F}_ℓ -faisceau lisse \mathcal{L} sur U , modéré le long de D , on ait $h_c^i(U, \mathcal{L}) \leq C_{X,D} \cdot \text{rang}(\mathcal{L})$. Comme l'a expliqué Claude Sabbah à l'auteur, on peut en donner la démonstration suivante lorsque k est le corps \mathbb{C} de nombres complexes. Soit T un voisinage tubulaire ouvert de $D(\mathbb{C})$ tel que l'inclusion du compact $K = X(\mathbb{C}) - T$ dans $U(\mathbb{C})$ soit une équivalence d'homotopie ; le groupe de cohomologie $H_{\text{Betti},c}^i(U(\mathbb{C}), \mathcal{L})$ est donc isomorphe à $H_{\text{Betti},c}^i(K, \mathcal{L})$. Par compacité, il existe un recouvrement fini V_i de K par des ouverts simplement connexes. Il en résulte que la cohomologie de $U(\mathbb{C})$ à valeurs dans \mathcal{L} est l'aboutissement d'une suite spectrale dont les objets de la première « page » ne dépendent que des V_i et du rang de \mathcal{L} . On conclut par le théorème de comparaison Betti-étale d'Artin-Grothendieck. Il serait sans doute intéressant d'adapter cet argument au cas d'un corps quelconque à l'aide d'un voisinage tubulaire adéquat.

C.3.2. Un exemple. L'objet de cette section est de montrer que l'image directe d'une famille de faisceaux constants constructibles (donc, *a fortiori*, constructible et modérée pour la topologie grossière) n'est pas nécessairement modérée pour la topologie finie. Il est pour cela nécessaire de considérer une base de dimension > 1 . On commence par rappeler une construction exprimant un groupe de monodromie locale, en dimension 2, comme un groupe de monodromie globale en dimension 1. (Ce résultat est bien connu ; cf. par exemple [K. KATO et T. SAITO 2013, 2.6.3.1].) On rappelle ensuite un résultat de Igusa garantissant l'existence de familles à un paramètre à grosse monodromie.

C.3.2.1. Soient k un corps algébriquement clos, U_0 un ouvert de $X_0 = \mathbf{P}_k^1$ et $X = \mathbf{A}_k^2$. On considère l'application rationnelle $X \dashrightarrow X_0$, $(u, v) \mapsto t = u/v$ et l'on note $U \subseteq X$ l'ouvert complémentaire des droites $u = \lambda v$ pour $\lambda \in X_0 - U_0$. Notons $O \in X$ l'origine, $X_{(O)}$ l'hensélisé (strict) et $U_{(O)}$ le produit fibré $X_{(O)} \times_X U$. Le morphisme $U \rightarrow U_0$ induit un morphisme entre les

groupes fondamentaux, de même que $U_{(O)} \rightarrow U$. Par composition, on en déduit un morphisme $\pi_1(U_{(O)}) \rightarrow \pi_1(U_0)$; nous allons voir que ce dernier morphisme est *surjectif*. (La surjectivité de $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(U_0)$ est quant à elle triviale, $U \rightarrow U_0$ ayant une section.)

Soit V_0 un revêtement fini étale connexe de U_0 ; on veut montrer que le produit fibré $V_0 \times_{U_0} U_{(O)}$ est également connexe. Notons Y_0 la normalisation de X_0 dans V_0 et Y celle de X dans l'image inverse $V := V_0 \times_{U_0} U$. Montrons que la fibre de $Y \rightarrow X$ au-dessus de l'origine O est connexe, c'est-à-dire est un point. Soit X' l'éclatement de X en l'origine; c'est un fibré en \mathbf{A}^1 sur X_0 . Il en est donc de même du produit fibré $Y' := X' \times_{X_0} Y_0$ sur Y_0 . De la normalité de Y' , donc de $\mathcal{O}(Y')$, et de l'égalité $Y'_U = V$, on tire que le morphisme $Y \rightarrow X$ est la factorisation de Stein du morphisme $Y' \rightarrow X$. La fibre de $Y' \rightarrow X$ au-dessus de l'origine étant Y_0 , donc connexe, il en est de même de celle de $Y \rightarrow X^\circ$.



C.3.2.2. Soient maintenant p un nombre premier impair, $k = \mathbb{F}_p$, $g \geq 1$ et $f \in k[x]$ un polynôme de degré $2g$ sans facteur carré. Notons U_0 l'ouvert $\text{Spec}(k[t][f(t)^{-1}])$ de \mathbf{A}_k^1 et $\pi_{U_0} : \mathcal{C} \rightarrow U_0$ la courbe projective lisse d'équation affine $y^2 = f(x)(t - x)$. Pour chaque nombre premier impair $\ell \neq p$, notons \mathcal{F}_ℓ le \mathbb{F}_ℓ -faisceau lisse $R^1\pi_{U_0,\star}\mathbb{F}_\ell$ sur U_0 . D'après [IGUSA 1959] lorsque $g = 1$ et [YU 1995] en général, le groupe de monodromie géométrique de \mathcal{F}_ℓ est tout le groupe symplectique $\text{Sp}(2g, \mathbb{F}_\ell)$. Rappelons rapidement un argument possible : le prolongement par zéro de \mathcal{F}_ℓ à \mathbf{A}_k^1 étant convolution additive de deux faisceaux de Kummer (quadratiques) explicites (voir [KATZ et SARNAK 1999, 10.1.17]), les résultats généraux de [KATZ 1988, chap. 8] entraînent que le faisceau \mathcal{F}_ℓ est « Fourier-irréductible » au sens d'*op. cit.* La conclusion résulte alors de la théorie de Picard-Lefschetz — la monodromie est engendrée par des transvections — et d'un théorème de théorie des groupes ([ZALESSKIÏ et SEREŽKIN 1976]). (Voir aussi [KATZ et SARNAK 1999, p. 293–300] ainsi que [DELIGNE 1974a, 5.11] pour des variantes ℓ -adiques.)

C.3.2.3. Soit U l'ouvert de $X = \mathbf{A}_k^2$ défini à partir de U_0 comme en C.3.2.1. On étend la courbe $\pi_U := \pi_{U_0} \times_{U_0} U$ en une courbe propre π_X au-dessus de X par normalisation, en voyant $\mathcal{C} \times_{U_0} U$ comme un revêtement double de \mathbf{P}_U^1 . Pour chaque $\ell \neq p$ impair, la monodromie locale en l'origine $O \in X$ du faisceau lisse $R^1\pi_{U,\star}\mathbb{F}_\ell$ sur U est, d'après les résultats des

⑦. L'auteur remercie Takeshi Saito de son aide dans la rédaction de cet argument.

deux paragraphes précédents, le groupe $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{F}_\ell)$. Rappelons[Ⓢ] que son cardinal est le produit $\ell^{g^2} \prod_1^g (\ell^{2i} - 1)$. Il en résulte que lorsqu’une puissance p^r de p divise $\ell - 1$ — ce qui se produit pour une infinité de nombres premiers ℓ — les p -Sylow de la monodromie locale en l’origine sont de cardinal au moins p^r .

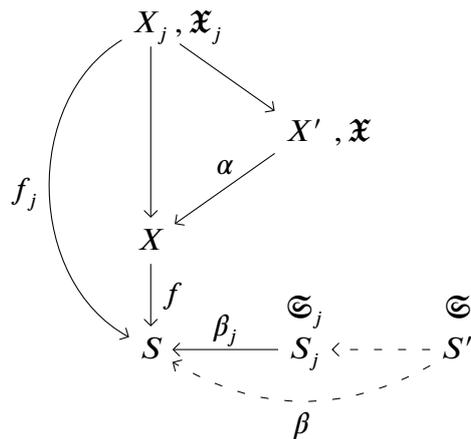
Ceci a pour conséquence qu’il n’existe pas de X -morphisme fini surjectif modérant simultanément tous les faisceaux $R^1 \pi_{X_\star} \mathbb{F}_\ell$, pour $\ell \neq p$ impair. Par contre, l’éclatement $X' \rightarrow X$ convient car chaque $R^1 \pi_{X'_0 \star} \mathbb{F}_\ell$ est modéré sur X_0 , de même que son tiré en arrière par $X' \rightarrow X_0$.

C.3.3. Premières réductions. Nous commençons la démonstration du théorème C.3.1.1 — dont nous reprenons les notations — par des réductions diverses. Le complément sur la majoration des fibres est traité en C.3.6.

C.3.3.1. Réduction au cas où $X' = X$. Nous vérifions ici que le théorème d’uniformité propre découle du cas particulier où l’altération $\alpha : X' \rightarrow X$ de la source est l’identité. Soit X_\bullet le cosquelette de α — c’est un hyperrecouvrement propre de X ([SGA 4 Vbis], [DELIGNE 1974b, 5.3.8]) — et notons \mathfrak{X}_j ($j \geq 0$) les stratifications déduites de \mathfrak{X} sur $X' = X_0$ par image inverse sur chaque X_j . Pour tout faisceau \mathcal{F} sur $X[1/n]$ comme dans l’énoncé, on a $Rf[1/n]_\star \mathcal{F} = Rf_\bullet[1/n]_\star \mathcal{F}_\bullet$, où f_\bullet est le morphisme $X_\bullet \rightarrow S$ et \mathcal{F}_\bullet le tiré en arrière de \mathcal{F} sur (le topos total du schéma simplicial) $X_\bullet[1/n]$.

Si \mathcal{F} est constructible et localement unipotent le long de $\mathfrak{X}[1/n]$, il en est de même de chaque \mathcal{F}_j le long des $\mathfrak{X}_j[1/n]$ (C.1.4). De même, si \mathcal{F} est modéré par $\alpha[1/n]$, chaque faisceau \mathcal{F}_j sur $X_j[1/n]$ est modéré.

Soit d un majorant de la dimension des fibres de f . Supposons que pour chaque $j \leq 2d$, le théorème soit démontré pour le morphisme propre $f_j : X_j \rightarrow S$, l’altération identité et la stratification \mathfrak{X}_j de X_j . Notons β_j , \mathfrak{S}_j et N_j respectivement les altérations de S , stratifications et entiers associés.



Par stabilité par image inverse des propriétés considérées on peut supposer les morphismes β_j tous égaux à un même morphisme $\beta : S' \rightarrow S$. (L’ensemble partiellement ordonné des altérations de S est filtrant [à droite].) Quitte à raffiner les stratifications \mathfrak{S}_j , on peut également

[Ⓢ]. Voir par exemple [E. ARTIN 1957, chap. III], ou [SERRE 2007, 6.5.1] et [STEINBERG 1968, §9, th. 25] pour des résultats plus généraux.

supposer qu'elles sont toutes égales à une même stratification \mathfrak{S} de S' . (Même argument.)
 D'après la suite spectrale de descente ([*ibid.*, 5.2.7.1], [SGA 4 Vbis, 3.3.3])

$$E_1^{ji} = R^i f_j[1/n]_* \mathcal{F}_j \Rightarrow R^{i+j} f[1/n]_* \mathcal{F}$$

chaque $R^k f[1/n]_* \mathcal{F}$ est extension itérée de sous-quotients des $R^i f_j[1/n]_* \mathcal{F}_j$ pour $i + j = k$ et, par hypothèse, nul pour $k > 2d$. La constructibilité et locale unipotence (resp. modération) le long de \mathfrak{S} des images directes par f d'un faisceau comme dans l'énoncé sont alors conséquence de l'hypothèse sur (β, \mathfrak{S}) relativement aux f_j et de la stabilité par extension de ces propriétés.

C.3.3.2. Réduction au cas où la base S est intègre. Les réductions au cas connexe et réduit sont immédiates. On peut également supposer S intègre car le coproduit de ses composantes irréductibles en est une altération.

C.3.3.3. Réduction au cas où les faisceaux sont le prolongement par zéro de faisceaux lisses sur une même strate dense. Soient $n \geq 1$ un entier et \mathcal{F} un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X^\dagger := X[1/n]$ (notation de C.1.5.2). Si \mathcal{F} est constructible le long de la stratification \mathfrak{X}^\dagger — que l'on peut supposer bonne, quitte à la raffiner —, il est d'après C.1.1.4 extension successive de faisceaux $i_*^\dagger j_!^\dagger \mathcal{L}$, où :

- j est l'immersion ouverte d'une strate W de \mathfrak{X} dans son adhérence $Y := \overline{W}$;
- i est l'immersion fermée de Y dans X ;
- \mathcal{L} est un faisceau abélien lisse de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur W^\dagger .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{L} & & & & \mathcal{F} \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 W & \xrightarrow{j} & Y = \overline{W} & \xrightarrow{i} & X \\
 & & \searrow & & \downarrow f \\
 & & & & S \\
 & & g := f \circ i & &
 \end{array}$$

Les faisceaux $i_*^\dagger j_!^\dagger \mathcal{L}$ sont constructibles (resp. modérés, localement unipotents) le long de \mathfrak{X}^\dagger .

Réciproquement, la stabilité par extension de ces mêmes propriétés et la suite exacte longue de cohomologie associée à une extension de faisceaux nous ramènent à démontrer le théorème pour les faisceaux $\mathcal{F} = i_*^\dagger j_!^\dagger \mathcal{L}$ comme ci-dessus. Par finitude du nombre de strates et la propriété des altérations d'être filtrantes à droite (cf. C.3.3.1), on peut supposer les immersions i et j fixées. Posons $\mathfrak{Y} := i^* \mathfrak{X}$, la stratification déduite de \mathfrak{X} par restriction au fermé Y , et $g := f \circ i : Y \rightarrow S$ le morphisme composé. Le faisceau $j_!^\dagger \mathcal{L} = i_*^\dagger i_*^\dagger j_!^\dagger \mathcal{L}$ étant modéré (resp. localement unipotent) le long de \mathfrak{Y}^\dagger si $i_*^\dagger j_!^\dagger \mathcal{L}$ l'est le long de \mathfrak{X}^\dagger , il résulte de la formule $Rg_*^\dagger(j_!^\dagger \mathcal{L}) = Rf_*^\dagger(i_*^\dagger j_!^\dagger \mathcal{L})$, que l'on peut faire l'hypothèse supplémentaire que $Y = X$, c'est-à-dire que \mathcal{F} est de la forme $j_!^\dagger \mathcal{L}$.

C.3.4. Énoncé de la récurrence noëthérienne.

C.3.4.1. Pour chaque triplet (S, ρ, d) , où S est un schéma noëthérien quasi-excellent intègre ou vide et $\rho \geq -1, d \geq -1$ sont des entiers, on considère les deux énoncés suivants :

$\text{Mod}(S, \rho, d)$: pour toute altération intègre T de S , tout T -schéma propre $f : Y \rightarrow T$ de fibre générique de dimension au plus d et toute stratification \mathfrak{Y} de Y , il existe une altération $\beta : T' \rightarrow T$, une stratification \mathfrak{Z} de T et un entier N tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $Y[1/n]$ constructible le long de $\mathfrak{Y}[1/n]$ et modéré, chaque image directe $R^k f[1/n]_* \mathcal{F}$ est, pour $k \leq \rho$, constructible le long de $\mathfrak{Z}[1/n]$, modérée par $\beta[1/n]$ et N -extension ponctuelle de \mathcal{F} relativement à $f[1/n]$;

et

$\text{Unip}(S, \rho, d)$: pour toute altération intègre T de S , tout T -schéma propre $f : Y \rightarrow T$ de fibre générique de dimension au plus d et toute stratification \mathfrak{Y} de Y , il existe une altération $\beta : T' \rightarrow T$ et une stratification \mathfrak{Z} de T' telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $Y[1/n]$ constructible et localement unipotent le long de $\mathfrak{Y}[1/n]$, chaque image directe $R^k f[1/n]_* \mathcal{F}$ est, pour $k \leq \rho$, constructible et localement unipotente le long de $\mathfrak{Z}[1/n]$.

$$\begin{array}{ccc}
 & Y \mathfrak{Y} & \\
 & \downarrow f & \\
 S & \xleftarrow{\text{altération}} T & \xleftarrow{\exists \beta} \dots \dots T'
 \end{array}$$

Commençons par quelques remarques sur ces énoncés.

C.3.4.2. Le premier énoncé (Mod) affirme l'existence d'une stratification de T et non de T' : cela revient au même d'après le résultat de descente de stratification C.1.5.4. Dans Unip, le complément sur les extensions ponctuelles n'est pas inclus ; d'après l'observation C.1.3.3, cela résulte du cas modéré.

Si T est une altération intègre d'un schéma S comme ci-dessus, les propriétés $\text{Mod}(T, \rho, d)$ et $\text{Mod}(S, \rho, d)$ sont équivalentes ; de même pour la variante (localement) unipotente : on démontre une propriété de l'espace de Zariski-Riemann.

Enfin, notons que ces énoncés sont trivialement vrais pour $S = \emptyset$ ou $\rho = -1$; ce n'est pas le cas pour $d = -1$ (morphisme non dominant).

C.3.4.3. Fixons (S, ρ, d) et précisons la différence entre l'énoncé $\text{Mod}(S, \rho, d)$ ci-dessus et l'énoncé analogue où l'on considère plus généralement des faisceaux \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules constructibles modérés le long d'une stratification non pas de Y mais d'une (même) altération $\alpha : Y' \rightarrow Y$. La formule de descente cohomologique $Rf_*^\dagger \mathcal{F} = Rf_*^\dagger \mathcal{F}$, où la source de f_* est le 0-cosquelette de α , ramène (comme en C.3.3.1) cet énoncé *a priori* plus général à la conjonction de $\text{Mod}(S, \rho, d)$ et de $\text{Mod}(S, \rho - 1, *)$ c'est-à-dire des $\text{Mod}(S, \rho - 1, d')$ pour $d' \geq -1$.

Même résultat pour Unip, *mutatis mutandis*.

C.3.4.4. Nous allons démontrer le théorème C.3.1.1 par récurrence noethérienne en considérant la relation bien fondée (=noethérienne) $<$ sur les triplets (S, ρ, d) lexicographiquement déduite des relations d'ordre usuelles sur les entiers ρ et d et de la relation binaire : $S' < S$ si et seulement si S' est (isomorphe à) un fermé strict d'une altération intègre de S .

Notons tout de suite qu'il résulte du « lemme de Gabber » (C.1.6.2) que la propriété Mod ou Unip d'un triplet $(S, \rho, -1)$ est conséquence de cette même propriété pour les triplets $(* \prec S, \rho, *)$.

LEMME. *La relation $S' \prec S$ précédente est bien fondée : il n'existe pas de suite infinie (S_n) de schémas noëthériens intègres telle que S_{n+1} soit un fermé strict d'une altération S'_n de S_n .*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & S_{n+1} & \hookrightarrow & S'_n & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & S_n & & \\
 & & & & \downarrow & \cdots & \\
 & & & & & S_1 & \hookrightarrow & S'_1 \\
 & & & & & \downarrow & & \\
 \overline{\{\tau\}} = F_N & \subseteq & \cdots & \subseteq & F_{n+1} & \subseteq & F_n & \subseteq & S_0 := S
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe une suite infinie $\cdots \rightarrow S_{n+1} \hookrightarrow S'_n \rightarrow S_n \hookrightarrow \cdots$ ($n \geq 0$), où chaque $S'_n \rightarrow S_n$ est une altération et chaque $S_{n+1} \hookrightarrow S'_n$ est une immersion fermée stricte. Les images F_n des S_n dans $S := S_0$ forment une suite décroissante, donc stationnaire, de fermés de S . Il existe donc un entier N tel que les points génériques des schémas S_n , pour $n \geq N$, soient tous d'image un même point $\tau \in S$. Pour chaque tel n , la restriction de $S'_n \rightarrow S_n$ (resp. $S_{n+1} \hookrightarrow S'_n$) aux fibres au-dessus de τ est encore une altération (resp. une immersion fermée stricte). Ceci nous ramène au cas particulier où les S_n sont des schémas algébriques sur un corps, auquel cas la conclusion résulte des inégalités $\dim(S_{n+1}) < \dim(S_n) < +\infty$ pour chaque $n \geq 0$. \square

C.3.4.5. Il résulte des dévissages précédents (§C.3.3) et de la nullité des $R^i f_*$ pour i grand que la conjonction des énoncés Mod(S, ρ, d) et Unip(S, ρ, d) pour S noëthérien intègre quasi-excellent, $\rho \geq -1$ et $d \geq -1$ entraîne le théorème d'uniformité propre C.3.1.1. La fin de cette section C.3 est donc consacrée à la démonstration par récurrence de ces énoncés. À cet effet, on fixe un schéma noëthérien S , des entiers $\rho \geq -1, d \geq -1$ — que l'on peut supposer ≥ 0 par récurrence et le lemme de Gabber — et l'on considère une altération intègre T de S , un morphisme propre (dominant) $f : Y \rightarrow T$ de fibre générique de dimension au plus d et une stratification \mathfrak{Y} de Y . D'après C.3.3.3 (démonstration), on peut supposer que chaque faisceau test \mathcal{F} des énoncés Mod(S, ρ, d) et Unip(S, ρ, d) est le prolongement par zéro d'un faisceau lisse de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur la strate ouverte dense $Y^\circ[1/n]$ de $\mathfrak{Y}[1/n]$, pour un entier $n \geq 1$ (dépendant du faisceau).

C.3.5. Réduction au cas des courbes.

C.3.5.1. *Morphismes plurinodaux ([A. J. DE JONG 1997, 5.8]) : définitions et ubiquité.* Soit $f : Y \rightarrow T$ un morphisme entre schémas intègres et soit Y° (resp. T°) un ouvert dense de Y (resp. T). On dit que f est **plurinodal adapté** à (Y°, T°) s'il existe :

– une factorisation

$$f = (f_d : Y_d \rightarrow Y_{d-1}) \circ \cdots \circ (f_1 : Y_1 \rightarrow Y_0),$$

où $Y_0 = T$ et $Y_d = Y$, $d \in \mathbb{N}$;

– des ouverts denses $Y_i^\circ \subseteq Y_i$, où $Y_0^\circ = T^\circ$ et $Y_d^\circ = Y^\circ$,

tels que chaque f_i soit une courbe nodale adaptée à $(Y_i^\circ, Y_{i-1}^\circ)$ au sens de [C.2.1.2](#).

Un morphisme $f : Y \rightarrow T$ est **plurinodal** (resp. **plurinodal adapté** à un ouvert dense Y° de Y) s'il existe des ouverts denses Y° et T° (resp. un ouvert dense T°) de sorte que f soit adapté à (Y°, T°) .

Un morphisme non nécessairement dominant $f : Y \rightarrow T$ est dit **presque plurinodal** (resp. **presque plurinodal adapté à un ouvert dense Y° de Y**) s'il est *somme* de morphismes plurinodaux entre schémas intègres et d'un morphisme non dominant (resp. et si pour chaque composante connexe Z de Y dominant T , le morphisme composé $Z \rightarrow T$ est plurinodal adapté à $Z^\circ := Y^\circ \cap Z$).

L'ubiquité de ces morphismes est assurée par le théorème suivant ([\[ibid., corollaire 5.10\]](#)).

THÉORÈME (de Jong). *Soient $f : Y \rightarrow T$ un morphisme propre, où T est un schéma intègre noëthérien quasi-excellent, et Y° un ouvert dense de Y . Il existe une altération $T' \rightarrow T$ et un hyperrecouvrement propre $Y' \rightarrow Y \times_T T'$ tel que $Y'_0 \rightarrow T'$ soit presque plurinodal adapté à un ouvert $Y'_0{}^\circ$ contenu dans $Y'_0 := Y^\circ \times_Y Y'_0$.*

(L'énoncé original est légèrement différent ; voir [\[ORGOGOZO 2006, §4.3\]](#) si nécessaire pour une discussion.)

Comme expliqué en [\[A. J. DE JONG 1997, 5.16\]](#), l'hypothèse d'excellence n'est pas nécessaire : on peut s'en affranchir par passage à la limite.

C.3.5.2. Reprenons les notations et hypothèses de la fin du paragraphe [C.3.4.5](#) et montrons que l'on peut supposer le morphisme $f : Y \rightarrow T$ plurinodal adapté à la strate dense. On peut supposer que l'altération $T' \rightarrow T$ du théorème précédent est l'identité car l'énoncé que l'on souhaite démontrer est local en bas pour la topologie des altérations ; il est même local en haut pour cette topologie, de façon compatible à la récurrence, cf. [C.3.4.3](#). La descente cohomologique (cf. [C.3.3.1](#)) et l'hypothèse de récurrence pour les triplets $(S, \rho - 1, *)$ nous permettent alors de supposer de plus le morphisme f *presque* plurinodal : $f = f_+ \amalg f_-$, où f_+ est plurinodal adapté à un ouvert $Y^{\circ\circ}$ de la strate dense $Y^\circ \subseteq Y$ et f_- est un morphisme propre non surjectif, d'image $F \subseteq T$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence pour les triplets $(F, \rho, *)$ – avec $F < S$ – et du lemme de Gabber [C.1.6.2](#) que l'on peut supposer $f = f_+$.

Notons respectivement j° et $j^{\circ\circ}$ les immersions ouvertes de Y° et $Y^{\circ\circ}$ dans Y , et fixons un entier $n \geq 1$. Pour tout faisceau test $\mathcal{F} = j_{\dagger}^{\circ\circ} \mathcal{L}^\circ$, où \mathcal{L}° est un faisceau lisse de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $Y^{\circ\circ}$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow j^{\circ\circ\dagger} \mathcal{L}^{\circ\circ} \rightarrow j_{\dagger}^{\circ\circ} \mathcal{L}^\circ \rightarrow \overline{\mathcal{L}} \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}^{\circ\circ} := \mathcal{L}^{\circ}|_{Y^{\circ\circ\dagger}}$, et le conoyau $\overline{\mathcal{L}}$ est un faisceau constructible à support dans le fermé strict $Z^{\dagger} := (Y - Y^{\circ\circ})^{\dagger}$ de Y . Pour \mathcal{L}° variable — mais astreint aux conditions déduites de celles sur \mathcal{F} comme ci-dessus —, les $\overline{\mathcal{L}}$ forment une famille (uniformément) constructible (quitte à raffiner \mathfrak{Y}); modérée (resp. localement unipotente) si la famille des faisceaux $j_{\dagger}^{\circ\circ}\mathcal{L}^{\circ}$ l'est : cela résulte de la stabilité par quotient (cf. C.1.4). La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte précédente et la stabilité par extension, maintes fois utilisée, nous ramènent à considérer des faisceaux test de la forme $j_{\dagger}^{\circ\circ}\mathcal{L}^{\circ\circ}$ ou bien $\overline{\mathcal{L}}$. Dans ce dernier cas, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour le triplet $(S, \rho, d-1)$ car la dimension de la fibre générique de Z sur T est strictement inférieure à celle de Y . (On rappelle que l'on a supposé $d \geq 0$, c'est-à-dire f dominant.)

Comme annoncé, on peut donc supposer — quitte à raffiner \mathfrak{Y} à nouveau — que l'on a l'égalité $Y^{\circ\circ} = Y^{\circ}$, c'est-à-dire que le morphisme f est plurinodal adapté à une strate dense Y° de \mathfrak{Y} . On peut également supposer Y intègre.

C.3.5.3. Sous les hypothèses en vigueur, on peut factoriser le morphisme $f : Y \rightarrow T$ en $f = g \circ h$, où $h : (Y, Y^{\circ}) \rightarrow (X, X^{\circ})$ est une courbe nodale adaptée et $g : (X, X^{\circ}) \rightarrow (T, T^{\circ})$ est un morphisme plurinodal adapté.

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 & \downarrow h & \\
 f & X & \\
 & \downarrow g & \\
 & T &
 \end{array}$$

D'après le théorème de résolution par altération des singularités des schémas quasi-excellents d'O. Gabber (voir [STG VII, 1.1] et [STG II, 3.2.1]), il existe des diagrammes commutatifs indicés par i

$$\begin{array}{ccc}
 T & \longleftarrow & T' \text{ régulier} \\
 \uparrow \text{ altération} & & \uparrow \\
 \tilde{T} & \longleftarrow \circ \longrightarrow & T'_i
 \end{array}$$

où \tilde{T} est une même altération de T , les T'_i forment un recouvrement fini de Zariski de \tilde{T} , et la paire $(T', T'^{\circ} := T' \times_T T^{\circ})$ est régulière (C.2.1). D'après C.2.3.1, appliqué au morphisme $h' := h \times_T T' : Y' \rightarrow X'$ et aux ouverts $Y'^{\circ} := Y^{\circ} \times_T T'$, $X'^{\circ} := X^{\circ} \times_T T'$, pour chaque $k \in \{0, 1, 2\}$ la famille des $R^k h'_{\star}(\mathcal{F}')$ est constructible et modérée (resp. localement unipotente) sur X' , lorsque \mathcal{F} parcourt les faisceaux test du type considéré : prolongement par zéro d'un faisceau lisse, modéré (resp. localement unipotent). (Notons que par hypothèse sur g et d'après la proposition C.2.1.3 la paire (X', X'°) est torique.)

$$\begin{array}{ccccc}
 T & \xleftarrow{g} & X & \xleftarrow{h} & Y \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 T' & \xleftarrow{\quad} & X' & \xleftarrow{h'} & Y' \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 T'_i & \xleftarrow{\quad} & X'_i & \xleftarrow{h'_i} & Y'_i \\
 \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft & & \downarrow \circlearrowleft \\
 \tilde{T} & \xleftarrow{\quad} & \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{h}} & \tilde{Y}
 \end{array}$$

Par stabilité par image inverse et théorème de changement de base propre, il en est de même des $R^k h_{i\star}^\dagger(\mathcal{F}'_i)$. Enfin, la propriété d’une famille d’être constructible et modérée (resp. localement unipotente) étant Zariski locale, on a constructibilité et modération (resp. locale unipotence) des $R^k \tilde{h}_\star^\dagger(\tilde{\mathcal{F}})$.

Quitte à remplacer T par \tilde{T} , on peut donc supposer la famille des $R^k h_\star^\dagger \mathcal{F}$ constructible et modérée (resp. localement unipotente) *sur* X . (Notons que cela est plus fort que de supposer le résultat après altération de X .) La formule $Rf_\star = Rg_\star \circ Rh_\star$ (et ses variantes au-dessus des ouverts $T^\dagger = T[1/n]$) nous permet, via la suite spectrale associée, d’utiliser l’hypothèse de récurrence pour le triplet $(S, \rho, d - 1)$: la dimension de la fibre générique de g est strictement inférieure à celle de f .

Ceci achève la démonstration du théorème C.3.1.1, excepté le complément sur la majoration des fibres : on a montré que les énoncés pour les triplets $(S, \rho, d - 1)$, $(S, \rho, -1, *)$, $(* < S, \rho, *)$ entraînent l’énoncé correspondant de modération ou locale unipotence pour le triplet (S, ρ, d) . On peut donc conclure par récurrence grâce au lemme du paragraphe C.3.4.4. Initialisation : on rappelle que les énoncés sont trivialement vrais pour $S = \emptyset$ ou $\rho = -1$ et que l’énoncé pour un triplet $(S', \rho', -1)$ est également conséquence des $(* < S', \rho', *)$.

C.3.5.4. Notons que la démonstration du théorème C.3.1.1 donne plus : pour tout changement de base lisse $R \rightarrow S$, la paire $(\beta : S' \twoheadrightarrow S, \mathfrak{S}) \times_S R$ — obtenue en prenant l’image inverse des données obtenues par la démonstration que nous avons suivie — convient pour le triplet $(f, \alpha, \mathfrak{X}) \times_S R$. Ceci résulte de la récurrence et du fait que si (T, T°) est une paire régulière et $Q \rightarrow T$ lisse, la paire $(Q, Q^\circ := T^\circ \times_T Q)$ est encore régulière.

C.3.5.5. Mieux : la proposition C.2.3.1 sous la forme la plus générale, dont la démonstration a été seulement esquissée en C.2.3.6 dans le cas d’une base non nécessairement torique, permet d’établir le théorème d’uniformité propre dans le cas où S est seulement noëthérien (et pas nécessairement quasi-excellent), et ce de façon compatible à *tout* changement de base (et pas seulement aux changements de base lisses). Ce raffinement sur les changements de base autorisés nous permet par descente des objets (morphismes, faisceaux, et stratifications) de supposer la base de type fini sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ donc en particulier excellente. Par normalisation (finie), on peut également la supposer normale. Les dévissages précédents s’appliquent sans changement et nous ramènent à la proposition susmentionnée pour les courbes nodales, sans utiliser le théorème de résolution par altération des singularités d’O. Gabber mais seulement le

théorème de A. J. de Jong. (La récurrence [C.3.5.3](#) devient alors significativement plus simple : il s'agit seulement d'une récurrence sur la dimension relative dans le cas plurinodal.)

C.3.6. Majoration des fibres. Signalons rapidement en quoi la méthode suivie entraîne le complément, énoncé en [C.3.1.1](#), sur la « majoration » uniforme des fibres des images directes propres.

C.3.6.1. Réduction au cas $\alpha = \text{Id}$ (\leftrightarrow [C.3.3.1](#)) : observer que si chaque $R^i f_{j\star}^\dagger \mathcal{F}_j$ est N_j -extension ponctuelle de \mathcal{F}_j relativement à f_j^\dagger , le faisceau $R^k f_{\star}^\dagger \mathcal{F}$ est N -extension ponctuelle de \mathcal{F} relativement à f^\dagger pour $N := (k + 1) \times \max_{0 \leq j \leq 2d+1} N_j$.

C.3.6.2. Réduction au cas $\mathcal{F} = j_1^\dagger \mathcal{L}$ (\leftrightarrow [C.3.3.3](#), [C.3.4.5](#)) : d'une part, d'après [C.1.1.4](#), on a une borne *a priori* sur la longueur d'une filtration à gradués des prolongements par zéro de lisses et, d'autre part, la réduction au cas d'une strate ouverte est licite d'après [C.1.7.2](#) (ii).

C.3.6.3. Réduction au cas plurinodal (\leftrightarrow [C.3.5.2](#)) : utiliser (la récurrence et) la stabilité par extension, [C.1.7.2](#) (iii).

C.3.6.4. Réduction au cas nodal (\leftrightarrow [C.3.5.3](#)) : la propriété à démontrer est Zariski locale sur la source, stable par changement de base d'après [C.1.7.2](#) (v), et compatible à la factorisation $f = g \circ h$ au sens de [C.1.7.2](#) (iv).

C.3.6.5. Il reste à montrer que sous les hypothèses de la proposition [C.2.3.1](#), les faisceaux $R^i h_{\star}(j_1 \mathcal{L})$ ($0 \leq i \leq 2$) sont N -extensions ponctuelles de sous-quotients de \mathcal{L} pour un entier N ne dépendant que du morphisme $h : Y \rightarrow X$ et de l'immersion ouverte $j : Y^\circ \hookrightarrow Y$. Il suffit pour cela de vérifier que si U est un ouvert d'une courbe projective lisse connexe C sur un corps algébriquement clos, et \mathcal{L} abélien lisse (de torsion inversible sur C) et modéré sur U , les groupes $H_c^i(U, \mathcal{L})$ sont N -extensions ponctuelles de sous-quotients de \mathcal{L} pour un entier N ne dépendant que du *genre* de C et du cardinal de $C - U$, qui varient l'un comme l'autre de façon constructible en famille. C'est évident pour $i = 0$, également vrai pour $i = 2$ par dualité et conséquence de la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič [[SGA 5 X](#), 7.1] pour $i = 1$. (Noter que l'on utilise cette formule dans le cas *modéré*, bien plus élémentaire ; cf. [[OGG 1962](#), prop. 6, p. 199] ou [[ŠAFAREVIČ 1961](#), th. 3, p. 337].)

C.4. Image directe par une immersion ouverte

C.4.1. Énoncé et stratégie. Le but de cette section est d'établir le théorème suivant.

C.4.1.1. THÉORÈME. Soient X un schéma noëthérien quasi-excellent et $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte. La propriété d'une famille \mathbb{F} de faisceaux sur X d'être constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) pour la topologie des altérations est préservée par le foncteur $Rj_{\star} j^*$.

En d'autres termes, et plus précisément, pour tout entier $c \geq -1$, toute altération $\alpha : X_1 \rightarrow X$ et toute stratification \mathfrak{X}_1 de X_1 , il existe une altération $\beta : X_2 \rightarrow X$ et une stratification \mathfrak{X}_2 de X_2 telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X^\dagger = X[1/n]$ constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_1^\dagger alors $R^c j_{\star}^\dagger j^{\dagger*} \mathcal{F}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_2^\dagger .

De plus :

- (a) il existe un entier N , dépendant uniquement du quadruplet $(j, \alpha, \mathfrak{X}_1, c)$, tel que chaque $R^c j_{\star}^{\dagger} j^{\dagger \star} \mathcal{F}$ comme ci-dessus soit N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} au sens de [C.1.7](#) ;
- (b) si X est de type fini sur un schéma S , il existe un ouvert dense S° de S tel que la formation de chaque $R^c j_{\star}^{\dagger} j^{\dagger \star} \mathcal{F}$ comme ci-dessus commute aux changements de base $S' \rightarrow S^{\circ}$.

C.4.1.2. REMARQUES.

- (i) Si X est de dimension finie, il résulte de [\[STG XVIII_B, 1.1\]](#) qu'il existe un entier C tel que les $R^c j_{\star}^{\dagger} j^{\dagger \star} \mathcal{F}$ comme ci-dessus soient nuls pour chaque $c \geq C$. On peut donc trouver des données β, \mathfrak{X}_2 et N qui conviennent pour tout c . Il est vraisemblable qu'en adaptant la méthode de [\[STG XV\]](#), on puisse s'affranchir de cette hypothèse supplémentaire sur X . (Un point de départ possible est l'observation que [\[STG XV, 2.1.7\]](#) est valable plus généralement pour des coefficients lisses modérés.)
- (ii) *A priori*, même si $\alpha = \text{Id}$, on ne peut pas nécessairement prendre $\beta = \text{Id}$.

C.4.1.3. Stratégie. On procède par récurrence sur l'entier c . La première des deux méthodes d'O. Gabber, exposée en [\[STG XIII, §2\]](#), s'adapte sans difficulté particulière si ce n'est qu'il nous faut établir un analogue du théorème de constructibilité générique [\[Th. finitude, 1.9 \(i\)\]](#) de P. Deligne sous une forme légèrement renforcée. (Voir la mise en garde [C.1.4.9](#), et [C.4.5 infra](#) pour l'énoncé précis.)

C.4.2. Dévissages.

C.4.2.1. Pour alléger l'exposition, on ne fera en général pas mention des entiers $n \geq 1$, et on omet les foncteurs $-[1/n] = -^{\dagger}$: on note j pour $j^{\dagger} = j[1/n]$, etc., et Λ pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Rappelons que l'on procède par récurrence sur le degré cohomologique $\leq c$, où c est un entier ≥ -1 , en s'autorisant à changer X . Le cas $c = -1$ est tautologiquement vrai.

C.4.2.2. (Réduction au cas $X_1 = X$.) Cela résulte du théorème d'uniformité propre [\(C.3.1.1\)](#) et de la descente cohomologique, sous la forme $Rj_{\star} j^{\star} = R\varepsilon_{\star} Rj_{\star} j^{\star}$, où $\varepsilon : X_{\bullet} \rightarrow X$ est le 0-cosquelette de l'altération $\alpha : X_1 \rightarrow X$ et $j_{\bullet} : U_{\bullet} \hookrightarrow X_{\bullet}$ est le morphisme déduit de j par changement de base $X_{\bullet} \rightarrow X$ (cf. [C.3.3.1](#)),

Ce même argument nous permet de supposer que X est un coproduit fini de schémas intègres et, finalement, que X est intègre (cf. [C.3.3.2](#)).

C.4.2.3. (Réduction au cas où les faisceaux sont des prolongements par zéro de faisceaux lisses sur la strate ouverte $V \in \mathfrak{X}_1$ de X .) Elle est entièrement semblable à la réduction effectuée en [C.3.3.3](#), une fois constaté que si $i : F \hookrightarrow X$ est une immersion fermée, on a $Rj_{\star} j^{\star} \circ i_{\star} = i_{\star} \circ R(j \times_X i)_{\star} (j \times_X i)^{\star}$.

C.4.2.4. (Réduction au cas où la strate ouverte V est contenue dans U .) D'après la réduction précédente, on peut supposer le faisceau \mathcal{F} de la forme $h_! \mathcal{L}$ où h est l'immersion ouverte de la strate ouverte V dans X et \mathcal{L} est un faisceau lisse sur V de Λ -modules. Notons U° l'ouvert $V \cap U$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{L} & & \\
 \downarrow & \xrightarrow{h} & X \\
 \uparrow & \square & \uparrow j \\
 U^\circ & \xrightarrow{h^\circ} & U \\
 \mathcal{L}^\circ := \mathcal{L}|_{U^\circ} & &
 \end{array}$$

Le complexe $Rj_*j^*(h_!\mathcal{L}) = Rj_*(h^\circ_!\mathcal{L}^\circ)$ se réécrit $Rj_*j^*(j_!h^\circ_!\mathcal{L}^\circ)$. Quitte à raffiner la stratification, le sous-faisceau $j_!h^\circ_!\mathcal{L}^\circ$ de $h_!\mathcal{L}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_1 ; on peut donc supposer $V \subseteq U$, c'est-à-dire $V = U^\circ$.

C.4.2.5. (Réduction au cas où $j^*\mathcal{F}$ est lisse, c'est-à-dire $V = U$.) Sous l'hypothèse précédente, le morphisme h se factorise à travers j selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{L} & & h^\circ_!\mathcal{L} = j^*\mathcal{F} & & \mathcal{F} = h_!\mathcal{L} \\
 & & \xrightarrow{h^\circ} & & \xrightarrow{j} \\
 V = U^\circ & \xrightarrow{h^\circ} & U & \xrightarrow{j} & X \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & h & &
 \end{array}$$

On veut montrer que, sous nos hypothèses, les faisceaux $R^c j_*(h^\circ_!\mathcal{L})$ sont uniformément constructibles et modérés (resp. constructibles et localement unipotents) pour la topologie des altérations. Soient F le fermé $U - U^\circ$ de U , $i : F \hookrightarrow U$ l'immersion fermée et considérons l'adhérence \bar{F} de F dans X , $j_F : F \hookrightarrow \bar{F}$ l'immersion ouverte correspondante et enfin \bar{i} l'immersion fermée de \bar{F} dans X .

$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{i} & U \\
 \downarrow j_F & \searrow \bar{i}j_F = ji & \downarrow j \\
 \bar{F} & \xrightarrow{\bar{i}} & X
 \end{array}$$

Le triangle distingué

$$Rj_*(h^\circ_!\mathcal{L}) \longrightarrow Rh_*\mathcal{L} \longrightarrow Rj_*i_*i^*j^*Rh_*\mathcal{L} = \bar{i}_*Rj_{F*}j_F^*(\bar{i}^*Rh_*\mathcal{L}) \xrightarrow{+1}$$

(dédduit par application de Rj_* au triangle $h^\circ_!h^{\circ*} \rightarrow \text{Id} \rightarrow i_*i^*$ évalué en $Rh^\circ_*\mathcal{L} = j^*Rh_*\mathcal{L}$) nous ramène à montrer l'uniformité (resp. la commutation générique aux changements de base) en degré c du second terme et en degré $c - 1$ du troisième. Par récurrence sur c , il suffit étudier le seul terme central : on peut donc dorénavant supposer que $j = h$, c'est-à-dire que $j^*\mathcal{F}$ est égal au faisceau \mathcal{L} , lisse sur $U^\circ = U$.

C.4.3. Cas d'un « bon » schéma. Dans le cas particulier, souvent suffisant en pratique, où X est de type fini sur un corps ou un schéma de Dedekind, la démonstration du théorème **C.4.1.1** est immédiate à partir de ce qui précède, et ne fait donc pas appel aux résultats génériques des paragraphes suivants. (On ne considère pas les compléments dans l'esquisse qui suit et renvoyons le lecteur à la démonstration donnée dans le cas général.)

En effet, d'après [A. J. DE JONG 1996, 4.1 et 8.2], il existe *pour un tel* X un hyperrecouvrement *propre* $X_\bullet \rightarrow X$ tel que la paire (X_\bullet, U_\bullet) soit régulière, étage par étage. La descente cohomologique et le théorème d'uniformité dans le cas propre nous permettent donc de supposer la paire (X, U) régulière. Or, il résulte de C.2.4.1 que $Rj_\star \mathcal{L}$ est à cohomologie uniformément constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) sur X . (Noter qu'il n'est pas nécessaire d'avoir recouru à une altération du but.)

C.4.4. Cas général : réduction à l'uniformité générique. Traitons maintenant le cas modéré, sans supposer le schéma X de type fini sur un corps ou un schéma de Dedekind. Le cas localement unipotent est semblable et laissé au lecteur ; la majoration des fibres sera brièvement traitée ci-après (C.4.5.7). Quant à la propriété cohomologique générique, elle résulte immédiatement du théorème de changement de base propre et de C.4.5.3 (ii).

Une récurrence noethérienne sur (les fermés de) X , le lemme de Gabber C.1.6.2 et l'observation C.1.4.10 appliquée aux faisceaux $\mathcal{K} := R^c j_\star \mathcal{L}$ (pour \mathcal{L} lisse sur U comme précédemment) nous ramènent à montrer que si $i : F \hookrightarrow X$ est un fermé contenu dans $X \setminus U$, il existe une immersion ouverte $k : F^\circ \hookrightarrow F$ d'image dense, une altération $a : F' \rightarrow F$ et enfin une stratification \mathfrak{F} de F telles que les faisceaux $k_! k^\star(\mathcal{K}|_F)$ soient constructibles et modérés le long de \mathfrak{F} . D'après le théorème de résolution des singularités d'O. Gabber ([STG VII, 1.1]), il existe un hyperrecouvrement $\varepsilon_X : X_\bullet \rightarrow X$ pour la topologie h tel qu'à chaque étage n , le schéma X_n soit régulier, $F_n := F \times_X X_n$ un diviseur à croisements normaux strict et $U_n := U \times_X X_n$ le complémentaire d'un tel diviseur. D'après la formule d'hyper-changement de base ([STG XII_A, 2.2.5],[STG XII_B]) d'O. Gabber, le morphisme

$$i^\star Rj_\star \mathcal{L} \simeq R\varepsilon_{F^\star}(i^\star Rj_{\star} \mathcal{L}_\bullet)$$

est un isomorphisme. Les morphismes $\varepsilon_{F,n} : F_n \rightarrow F$ n'étant pas nécessairement propres, on ne peut appliquer directement le théorème d'uniformité propre. Cependant, la proposition C.4.5.1 ci-dessous, appliquée pour n variable aux morphismes $f := \varepsilon_{F,n}$ (dans le cas particulier $S = Y$), nous ramène à démontrer le fait suivant, lorsque $X' = X_n$, $F' = F_n$, et $U' = U_n$.

LEMME. *Soient*

$$\begin{array}{ccccccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' & \xleftarrow{i'} & F' & \xleftarrow{k'} & \bar{F}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\ U & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{i} & F & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{propre} \\ \swarrow \end{array}$$

un diagramme commutatif à carrés cartésiens et traits pleins, où :

- X' est régulier, séparé de type fini sur X ;
- F' est un diviseur à croisements normaux strict ;
- U' est le complémentaire d'un tel diviseur.

Alors, il existe une F -compactification $k' : F' \hookrightarrow \bar{F}'$ de F' telle que pour tout faisceau lisse \mathcal{L} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur U tel que $j_! \mathcal{L}$ soit modéré (resp. localement unipotents) et $n \geq 1$ inversible

sur X , les faisceaux $k'_! i'^* \mathbb{R}^{c'} j'_* \mathcal{L}$, pour $c' \leq c$, sont modérés et constructibles (resp. localement unipotents) le long d'une stratification de \overline{F}' .

DÉMONSTRATION DU LEMME. Il suffit de considérer une compactification de $X' \rightarrow X$ – à l'infini de laquelle le faisceau $j'_! \mathcal{L}$ est automatiquement modéré car $j_! \mathcal{L}$ l'est sur X – et la compactification induite de F' par changement de base $F \hookrightarrow X$. La conclusion résulte de [C.2.4.1](#) (ii). \square

C.4.5. Énoncés génériques. Le but de ce paragraphe est d'établir la proposition suivante et d'achever ainsi la démonstration de [C.4.1.1](#) (excepté le (a), traité ultérieurement). Pour alléger les énoncés, on fixe l'entier c et le schéma noethérien quasi-excellent S .

C.4.5.1. PROPOSITION. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini entre S -schémas de type fini et $j : X \hookrightarrow \overline{X}$ une Y -compactification de f . Alors, si \mathbb{F} est une famille sur X telle que $j_! \mathbb{F}$ soit constructible modérée (resp. localement unipotente) sur \overline{X} , il existe une immersion ouverte dominante $k_S : S^\circ \hookrightarrow S$ telle que $k_{Y!} \mathbb{R}^c f^\circ \mathbb{F}$ soit constructible modérée (resp. localement unipotente) pour la topologie des altérations sur S , où $f^\circ := f \times_S S^\circ$ et $k_Y := k \times_S Y$.

Plus précisément, pour toute stratification \mathfrak{X} de \overline{X} , il existe une altération $\beta : Y' \rightarrow Y$ et une stratification \mathfrak{Y} de Y' telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X^\dagger = X[1/n]$ tel que $j_!^\dagger \mathcal{F}$ soit constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}^\dagger alors chaque $\beta^{+\dagger} k_{Y!}^\dagger \mathbb{R}^c f^\circ \mathcal{F}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{Y}^\dagger . (On note abusivement \mathcal{F} pour sa restriction à $X^{\circ\dagger}$.)

De plus, la formation de $\mathbb{R}^c f^\circ \mathcal{F}$ commute aux changements de base $S' \rightarrow S^\circ$.

C.4.5.2. REMARQUES.

- (a) L'énoncé ne dit pas que si \mathbb{F} est une famille constructible modérée (resp. localement unipotente) sur X , il existe une immersion ouverte dominante $Y^\circ \hookrightarrow Y$ provenant de S telle que $\mathbb{R} f^\circ \mathbb{F}$ soit constructible modérée (resp. localement unipotente) sur S° : on fait une hypothèse à l'infini (relativement à Y). (Voir [C.0.3](#) pour un contre-exemple à un tel énoncé.)
- (b) Insistons sur le fait que cet énoncé est un corollaire du théorème [C.4.1.1](#), d'après lequel on peut prendre $S^\circ = S$ (c'est-à-dire $k = \text{Id}$).

En particulier :

C.4.5.3. COROLLAIRE. Soient X un S -schéma de type fini et $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte. Pour toute stratification \mathfrak{X}_1 de X , il existe une altération $\beta : X_2 \rightarrow X$, une stratification \mathfrak{X}_2 de X_2 et une immersion ouverte dominante $k_S : S^\circ \hookrightarrow S$ telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X^\dagger = X[1/n]$ constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_1^\dagger alors :

- (i) chaque $k_{X!}^\dagger k_X^{+\dagger} \mathbb{R}^c j_!^\dagger \mathcal{F}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_2^\dagger , où k_X est l'immersion ouverte $k_S \times_S X$;
- (ii) la formation de chaque $\mathbb{R}^c j_!^\dagger \mathcal{F}$ commute aux changements de base $S' \rightarrow S^\circ$.

C.4.5.4. Montrons que, réciproquement, le cas particulier d'une immersion ouverte entraîne la proposition **C.4.5.1**, dont nous reprenons les notations. Soit $k_S : S^\circ \hookrightarrow S$ une immersion ouverte comme en **C.4.5.3** associée à l'immersion ouverte $j : X \hookrightarrow \bar{X}$. Par changement de base, on obtient la moitié droite du diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & k_X & & \\
 & & & & \circ & & \\
 & & & & \curvearrowright & & \\
 X & \xleftarrow{j} & \bar{X} & \xleftarrow{k_{\bar{X}}} & \bar{X}^\circ & \xleftarrow{j^\circ} & X^\circ \\
 & \searrow f & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{f}^\circ & \swarrow f^\circ & \\
 & & Y & \xleftarrow{k_Y} & Y^\circ & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & S & \xleftarrow{k_S} & S^\circ & &
 \end{array}$$

On s'intéresse au foncteur $k_{Y!} f^\circ_* k_X^*$ (où l'on omet les R). Compte tenu des isomorphismes $f^\circ_* = \bar{f}^\circ_* j^\circ_*$ (transitivité), $k_{Y!} \bar{f}^\circ_* = \bar{f}_* k_{\bar{X}!}$ (propreté de \bar{f}) et $k_{\bar{X}!} j^\circ_* = j^\circ_* k_X^*$ (changement de base trivial), on a donc

$$k_{Y!} f^\circ_* k_X^* = \bar{f}_* \circ k_{\bar{X}!} k_{\bar{X}}^* \circ j^\circ_*.$$

La conclusion résulte aussitôt de l'hypothèse sur $k_{\bar{X}!} k_{\bar{X}}^* j^\circ_*$ et du théorème d'uniformité propre (**C.3.1.1**).

La commutation aux changements de base de $f^\circ_* = \bar{f}^\circ_* j^\circ_*$ résulte du théorème de changement de base propre pour \bar{f}° et de la propreté cohomologique de j° (relativement aux faisceaux considérés).

La suite de ce **C.4.5** est donc consacrée à la démonstration du corollaire **C.4.5.3**.

C.4.5.5. Dévissages.

Mutatis mutandis, les réductions suivant **C.4.2.2** s'appliquent dans ce cadre générique. Pour la dernière, au cas du prolongement par zéro d'un faisceau lisse sur la strate dense, on utilise l'hypothèse de récurrence selon laquelle l'énoncé **C.4.1.1** est vrai pour l'entier $c - 1$.

(On aurait pu faire intervenir dans l'énoncé du corollaire une altération $\alpha : X_1 \rightarrow X$ non nécessairement identité ; la réduction au cas $\alpha = \text{Id}$ aurait alors été possible par commutation de $k_! k^*$ aux images directes propres.)

C.4.5.6.

C.4.5.6.1. Démontrons **C.4.5.3**, dans le cas particulier — suffisant d'après ce qui précède — où les faisceaux test \mathcal{F} sont de la forme $j_! \mathcal{L}$, avec \mathcal{L} lisse sur U (ou plus précisément U^\dagger). Nous allons faire un usage *relatif* de [A. J. DE JONG 1996] nous permettant — à l'instar de [ILLUSIE 2010, §3] et [ORGOGOZO 2003a, §2] — de supposer que U est génériquement le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux (relatif) dans un S -schéma lisse, comme nous allons maintenant l'expliquer. Commençons par observer que le problème étant local sur X et S , on peut supposer le morphisme de type fini $X \rightarrow S$ séparé, et $S = \text{Spec}(A)$ intègre, de point générique $\eta = \text{Spec}(K)$. Comme expliqué dans les deux références ci-dessus, on contourne

la difficulté due au fait que K n'est pas parfait par passage à la limite. Soit la perfection « générique » T de S : si $\text{car.}(K) = p > 0$, c'est le spectre de la \mathbb{F}_p -algèbre $A^{\text{parf}} = \text{colim}_{a \rightarrow a^p} A$ parfaite[Ⓞ], ainsi que ses localisés ; sinon, $T := S$. Les constructions géométriques (en nombre fini) suivantes, *a priori* faites sur T pour pouvoir appliquer le théorème de résolution des singularités de A. J. de Jong ([A. J. DE JONG 1996, 4.1-2]) au-dessus de son point générique parfait, se descendent à un schéma $S' = \text{Spec}(B)$ universellement homéomorphe à S . Un tel morphisme est innocent ; on peut donc supposer abusivement que $S = T$ (et en particulier $K = K^{\text{parf}}$) pour simplifier les notations.

C.4.5.6.2. La technique de [ILLUSIE 2010] et [ORGOGOZO 2003a] conduit pour chaque entier N à un « bon » hyperrecouvrement propre (tronqué) $X_{\bullet, \leq N}^\circ \rightarrow X^\circ := X \times_S S^\circ$ au-dessus d'un ouvert dense S° de S . « Bon » signifie ici : lisse sur S° , étage par étage, et tel que les $U_n^\circ := U \times_X X_n^\circ$ soient complémentaires d'un diviseur à croisements normaux strict relativement à S° . On souhaite ici un hyperrecouvrement propre $X_{\bullet, \leq N} \rightarrow X$ induisant sur un ouvert dense S° un hyperrecouvrement du type précédent. Commençons par énoncer un lemme, conséquence immédiate du théorème [A. J. DE JONG 1996, 4.1] susmentionné.

LEMME. *Soit le diagramme cartésien à traits pleins ci-dessous.*

$$\begin{array}{ccccc}
 W_\eta & \hookrightarrow & Z_\eta & \dashrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 V_\eta & \hookrightarrow & Y_\eta & \longrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 U_\eta & \hookrightarrow & X_\eta & \longrightarrow & X \longleftarrow U \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \eta & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

Il existe un morphisme propre et surjectif $Z \rightarrow Y$ induisant les carrés cartésiens supérieurs tel que Z_η soit lisse sur η et que l'ouvert $W_\eta \subseteq Z_\eta$ en soit le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux strict.

(Prendre pour Z une Y -compactification d'une résolution de Y_η adaptée à l'ouvert V_η .)

Les techniques classiques de construction d'hyperrecouvrements — voir aussi [GILLET et SOULÉ 2009, §2.4] pour un problème semblable — nous permettent de déduire de ce lemme une construction étage par étage d'un hyperrecouvrement *propre* tronqué $X_{\bullet, \leq N} \rightarrow X$ tel que les paires (X_n, U_n) soient génériquement régulières : $X_{\bullet, \leq n}$ étant construit, on pose $Y := \text{cosq}(X_{\bullet, \leq n})_{n+1}$ et X_{n+1} est alors le Y -schéma propre Z fourni par le lemme. La lissité au-dessus de η des schémas X_n et des branches des diviseurs $X_n \setminus U_n$ ainsi construits pour $n \leq N$ s'étend à un ouvert dense S° de S .

C.4.5.6.3. En omettant les troncations, on a donc un diagramme commutatif à carrés cartésiens

[Ⓞ]. Mais pas nécessairement noëthérienne.

$$\begin{array}{ccccccc}
 U^\circ & \xrightarrow{j^\circ} & X^\circ & \xrightarrow{k_{X^\circ}} & X & \xleftarrow{j} & U \\
 \downarrow & & \downarrow \varepsilon^\circ & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\
 U^\circ & \xrightarrow{\quad} & X^\circ & \xrightarrow{k_X} & X & \xleftarrow{j} & U \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \\
 & & S^\circ & \xrightarrow{\quad} & S & &
 \end{array}$$

Par descente cohomologique, on peut réécrire le foncteur étudié :

$$k_{X!}k_X^* \circ j_*j^* = \varepsilon_* \circ k_{X!}k_X^* \circ j_*j^* \circ \varepsilon^* = \varepsilon_* \circ k_{X!}j^{\circ,*} \circ (U \rightarrow X)^*.$$

Or, il résulte de **C.2.4.1** (ii) que pour \mathcal{L} lisse sur U tel que $j_!\mathcal{L}$ soit modéré (resp. localement unipotent), les faisceaux $k_{X_n!}R^c j^{\circ,*}\mathcal{L}^\circ$ le sont également. L'énoncé **C.4.5.3** (i) résulte alors du théorème d'uniformité propre pour les ε_n , $n \leq c < N$. Enfin, la propriété cohomologique des j°_n relativement à S° ayant été établie en **C.2.4.1** (cf. **C.2.4.3**), l'énoncé **C.4.5.3** (ii) résulte du théorème de changement de base propre (pour les ε°_n).

C.4.5.7. Majoration des fibres. Pour établir **C.4.1.1** (a), la démonstration précédente nous ramène sans difficulté à la proposition **C.2.4.6**, déjà établie et à l'énoncé dans le cas propre. Dans le cas « absolu », passant par les énoncés génériques, on procède à nouveau par récurrence sur les fermés de $X \setminus U$; la mise en garde **C.1.4.9** sur la nécessité de considérer des prolongements par zéro n'a par contre trivialement pas lieu d'être.

C.5. Six opérations

C.5.1. Image directe par un morphisme non nécessairement propre. Le théorème suivant résulte immédiatement, par composition, des énoncés **C.3.1.1** (cas d'un morphisme propre) et **C.4.1.1** (cas d'une immersion ouverte).

THÉORÈME. Soient S un schéma noëthérien quasi-excellent, $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini, $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ une S -compactification de X et \mathbb{F} une famille de faisceaux sur X telle que la famille $j_!\mathbb{F}$ soit constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) pour la topologie des altérations. Alors, la famille des complexes $Rf_*\mathbb{F}$ sur S est constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) pour la topologie des altérations.

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{X} & \xrightarrow{\quad} & \bar{X}' \\
 & & \downarrow \alpha \\
 X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\
 \downarrow f & \swarrow \bar{f} & \\
 S & \xleftarrow{\exists \beta} & S' \\
 & & \cong
 \end{array}$$

En d'autres termes, et plus précisément, pour tout entier $c \geq 0$, toute altération $\alpha : \overline{X}' \rightarrow \overline{X}$ et toute stratification $\overline{\mathfrak{X}}$ de \overline{X}' , il existe une altération $\beta : S' \rightarrow S$ et une stratification \mathfrak{S} de S' telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X^\dagger = X[1/n]$ tel que $\alpha^\dagger j_!^\dagger \mathcal{F}$ soit constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotent) le long de $\overline{\mathfrak{X}}^\dagger$ alors chaque $\beta^\dagger j_*^\dagger \mathcal{F}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{S}^\dagger .

De plus, il existe un entier N et un ouvert dense $S^\circ \subseteq S$, dépendant uniquement du quadruplet $(f, \alpha, \overline{\mathfrak{X}}, c)$, tels que chaque $R^c f_*^\dagger \mathcal{F}$ comme ci-dessus

- (i) soit N -extension ponctuelle de sous-quotients de \mathcal{F} ;
- (ii) commute aux changements de base $T \rightarrow S^\circ$.

REMARQUES.

- (a) L'hypothèse d'excellence est ici essentielle.
- (b) Pour la dépendance en c , voir [C.4.1.2](#) (i).
- (c) On dit pas que $R^c f_*^\dagger \mathcal{F}$ est N -extension ponctuelle de \mathcal{F} relativement à f (au sens de [C.1.7](#)) : c'est trivialement faux lorsque $f = j \neq \text{Id}$ par exemple.

C.5.2. Autres opérations.

C.5.2.1. Nous avons établi un résultat de stabilité par f_* , en faisant une hypothèse — dont on ne peut totalement s'affranchir — sur le comportement des faisceaux à l'infini d'une même compactification.

C.5.2.2. Cette même hypothèse rend tautologique la stabilité par $f_!$ à partir du théorème d'uniformité propre.

Considérons maintenant brièvement les 4 des 6-opérations restantes.

C.5.2.3. La stabilité par f^* est tautologique.

C.5.2.4. Comme expliqué en [BEILINSON, BERNSTEIN et DELIGNE 1982, p. 151] ou [Th. [finitude](#), 1.5], la stabilité par $f^!$ se ramène à la stabilité par $Rj_* j^*$, déjà établie : le théorème ci-dessous résulte des faits suivants :

- la propriété à démontrer est locale pour la topologie de Zariski (en haut et en bas) ;
- un morphisme affine est lissifiable ;
- si $S' \rightarrow S$ est une altération, il en est de même de $\mathbb{A}_{S'}^d \rightarrow \mathbb{A}_S^d$;
- dualité de Poincaré et innocuité de la torsion à la Tate ;
- existence d'un triangle distingué $i_* i^! \rightarrow \text{Id} \rightarrow j_* j^* \xrightarrow{+1}$.

THÉORÈME. Soient S un schéma noëthérien quasi-excellent et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. La propriété d'une famille \mathbb{F} de faisceaux (sur S) d'être constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotente) pour la topologie des altérations est préservée par le foncteur $f^!$.

En d'autres termes, et plus précisément, pour tout entier $c \geq 0$, toute altération $\alpha : S' \rightarrow S$ et toute stratification \mathfrak{S} de S' , il existe une altération $\beta : X' \rightarrow X$ et une stratification \mathfrak{X} de X' telles que pour tout entier $n \geq 1$ et tout faisceau \mathcal{F} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $S^\dagger = S[1/n]$ tel que

$\alpha^{\dagger*} \mathcal{F}$ soit constructible et modérée (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{S}^{\dagger} , chaque $\beta^{\dagger*} \mathcal{R}^c f^{\dagger!} \mathcal{F}$ est constructible et modéré (resp. constructible et localement unipotent) le long de \mathfrak{X}^{\dagger} .

$$\begin{array}{ccc} & & \exists \mathfrak{X} \\ & \exists \beta & \\ X & \longleftarrow & X' \\ \downarrow f & & \\ \mathcal{F} & \longleftarrow \alpha & S' \\ & & \mathfrak{S} \end{array}$$

C.5.2.5. Stabilité par $\otimes^{\mathbb{L}}$. On souhaite montrer que si (X, \mathfrak{X}) est un schéma noethérien stratifié alors pour tout $n \geq 1$ et toute paire $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{Ob } D_{\mathfrak{X}}^{-\text{mod}}(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (variante évidente de la notation introduite en **C.3.1.3**) le produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathcal{B}$ appartient également à $D_{\mathfrak{X}}^{-\text{mod}}(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\textcircled{0}}$ et de même pour les complexes à cohomologie localement unipotente le long de \mathfrak{X} .

Par dévissage des complexes, on peut supposer que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des faisceaux placés en degré nul. Par dévissage (**C.1.1.4**) des faisceaux constructibles le long de \mathfrak{X} — ou plutôt $\mathfrak{X}^{\dagger} = \mathfrak{X}[1/n]$ mais nous ignorons cette subtilité pour simplifier les notations —, de l'entier n (voir par exemple [Th. finitude, A, 2.2 b]) ou [STG XVII, 7.4.6] pour un raffinement), et grâce à la formule de projection triviale (pour une immersion ouverte ou fermée), on se ramène à l'étude des produits tensoriels $j_!(\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathcal{M})$, où \mathcal{L}, \mathcal{M} sont des faisceaux lisses de \mathbb{F}_{ℓ} -espaces vectoriels sur une même strate ouverte dense $U \subseteq X = X[1/\ell]$. (Cette réduction n'utilise pas le théorème d'uniformité propre pour une immersion fermée — c'est-à-dire essentiellement le lemme de Gabber — car il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une altération.)

Comme d'autre part $\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathcal{M} = (\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_{\ell}) \otimes_{\mathbb{F}_{\ell}}^{\mathbb{L}} \mathcal{M}$ est représenté (pour $r > 1$) par le complexe (concentré en degrés ≤ 0)

$$[\dots \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathcal{M} \xrightarrow{0} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathcal{M} \xrightarrow{0} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathcal{M} \xrightarrow{0} \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathcal{M}],$$

il suffit d'observer que si $j_! \mathcal{L}$ et $j_! \mathcal{M}$ sont modérés (resp. localement unipotents le long d'une stratification \mathfrak{X}), il en est de même de $j_!(\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathcal{M})$.

C.5.2.6. Stabilité par \mathbf{RHom} . On suppose X de dimension finie, pour éviter d'avoir *a priori* besoin de tronquer (cf. **C.4.1.2**). Soient $\alpha : X_1 \rightarrow X$ une altération et \mathfrak{X}_1 une stratification de X_1 . On veut montrer qu'il existe une altération $\beta : X_2 \rightarrow X$ et une stratification \mathfrak{X}_2 de X_2 telles que pour chaque n , le foncteur $\mathbf{RHom} : D(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\text{op}} \times D(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow D(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ induise un foncteur

$$D_{\alpha, \mathfrak{X}_1}^{-\text{mod}}(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\text{op}} \times D_{\alpha, \mathfrak{X}_1}^{+\text{mod}}(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\beta, \mathfrak{X}_2}^{+\text{mod}}(X[1/n], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

$\textcircled{0}$. On ne peut, bien sûr, se limiter aux catégories dérivées bornées : si $r > 1$, le complexe $\mathbb{F}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \mathbb{F}_{\ell}$ est dans $D^-(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ mais pas $D^b(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$.

On procède à nouveau comme dans [BEILINSON, BERNSTEIN et DELIGNE 1982, 6.1.2, p. 151]. (Voir aussi [Th. finitude, A, 1.6], [SGA 5 I, §3.3] ou [STG XVII, §7.6].) La formule

$$Rf_* \mathbf{RHom}(A, f^! B) = \mathbf{RHom}(f_! A, B)$$

pour une immersion f nous ramène par dévissages et stabilité par Rj_* (C.4.1.1) – nécessitant peut-être de grossir X_1 et raffiner \mathfrak{X}_1 – à montrer que si \mathcal{L} est un faisceau lisse sur un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ tel que $j_! \mathcal{L}$ soit modéré (resp. localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_1 , et \mathcal{G} est également constructible et modéré (resp. localement unipotent) le long de \mathfrak{X}_1 , alors il en est de même des faisceaux $j_! \text{Ext}^i(\mathcal{L}, j^* \mathcal{G})$ ($i \geq 0$). Or, sous l'hypothèse faite sur \mathcal{L} , il existe un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

avec $X' \rightarrow X$ fini surjectif, $U' \rightarrow U$ fini étale tel que $\mathcal{L}_{|U'}$ soit trivial et si \mathcal{H} est un faisceau sur $U_1 := U \times_X X_1$, la constructibilité et modération (resp. locale unipotence) de $j'_{!1} \mathcal{H}'_1$ (sur $X'_1 := X_1 \times_X X'$) le long de \mathfrak{X}'_1 entraîne la constructibilité et modération (resp. locale unipotence) de $j_{!1} \mathcal{H}_1$ le long de \mathfrak{X}_1 . (Dans le cas unipotent, on utilise le fait que si un groupe G agit sur un \mathbb{F}_ℓ -module M de sorte que la restriction à $H \triangleleft G$ soit unipotente alors l'action de G est également unipotente si le quotient G/H est un ℓ -groupe.[Ⓜ]) Écrivant \mathcal{L} comme un quotient de $(U' \rightarrow U)_* (U' \rightarrow U)^* \mathcal{L}$ et utilisant la formule d'adjonction rappelée ci-dessus (pour f le morphisme étale $U' \rightarrow U$), ceci nous ramène au cas particulier où \mathcal{L} est même trivial, puis par résolution projective au cas $\mathcal{L} = \Lambda$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à utiliser le fait que $\mathbf{RHom}_\Lambda(\Lambda, j^* \mathcal{G}) = j^* \mathcal{G}$.

C.6. Applications

C.6.1. Représentations ℓ -adiques. Dans [BÖCKLE, GAJDA et S. PETERSEN 2015], les auteurs démontrent une conjecture de *presque indépendance* des représentations ℓ -adiques associées à un schéma algébrique, due à J.-P. Serre en caractéristique nulle ([SERRE 2013, §3.2]). Un des ingrédients de leur démonstration est le fait suivant ([BÖCKLE, GAJDA et S. PETERSEN 2015, 6.3, 7.4]), que les auteurs démontrent par réduction au cas des courbes (à la Wiesend) et en utilisant [DELIGNE 1973, 9.8] :

PROPOSITION. *Soit k un corps parfait, K/k une extension de type finie et X_K un K -schéma algébrique. Il existe une extension finie étale L/K , un k -schéma propre et lisse T de corps des fractions L et un diviseur à croisements normaux D dans T tels que pour chaque nombre premier ℓ inversible sur k ,*

[Ⓜ]. En effet, $\text{Fix}(H \subset M) \neq 0$ est stable par G donc muni d'une action du ℓ -groupe fini G/H . Une telle action a un point fixe non trivial.

- (i) l'action du groupe de Galois G_L sur $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ se factorise à travers le groupe fondamental modéré $\pi_1^{\text{mod}}(T, D)$;
- (ii) pour chaque point maximal d de D , l'action sur $H^*(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ du groupe d'inertie correspondant soit unipotente.

C'est également un corollaire immédiat de nos résultats.

DÉMONSTRATION. Par déploiement, il existe un k -schéma de type fini U de corps des fractions K , et un morphisme de type fini $X \rightarrow U$ de fibré générique X_K . Soit S une k -compactification de U et notons $f : X \rightarrow S$ le morphisme composé. D'après C.5.1, il existe une altération $\beta : T \rightarrow S$ et une stratification \mathfrak{Z} de T telle que les faisceaux $\beta^* R^i f_* \mathbb{Q}_\ell$, pour $\ell \neq \text{car.}(k)$ et $i \in \mathbb{N}$, soient constructibles, modérés et localement unipotents le long de \mathfrak{Z} . Quitte à rétrécir U , on peut supposer ces faisceaux lisses sur cet ouvert et que $V := \beta^{-1}(W)$ est la strate ouverte dense de T . Comme remarqué en C.1.6.6, on peut supposer l'altération β génériquement étale. D'après [A. J. DE JONG 1996, 4.1], on peut également supposer le morphisme $T \rightarrow \text{Spec}(k)$ lisse et l'ouvert V être le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux D . \square

REMARQUE. Le résultat de P. Deligne ([BERTHELOT 1997, 6.3.2]) d'indépendance de ℓ dans le théorème de monodromie de Grothendieck est également un corollaire immédiat de C.5.1, du moins pour un trait excellent. Pour des précisions numériques dans cette direction, voir [UMEZAKI 2012].

C.6.2. Lien avec la torsion. Soient k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$ et X un schéma projectif et lisse sur k . Pour chaque nombre premier ℓ différent de p et chaque entier $i \geq 0$ les \mathbb{Z}_ℓ -modules $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) := \lim_n H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ sont de type fini ([SGA 5 VI, 2.2]). D'après [GABBER 1983, théorème], ils sont sans torsion pour presque tout ℓ . Si $p = 1$, cela résulte du théorème de comparaison Betti-étale d'Artin-Grothendieck ([SGA 4 XI, 4.4]); si $p > 1$, un ingrédient clef de sa démonstration est le *théorème du pgcd* ([DELIGNE 1980, §4.5]).

L'objet de ce paragraphe est d'expliquer une approche alternative — qui nous a été communiquée par N. Katz — au théorème susmentionné d'O. Gabber (C.6.2.2). Signalons cependant qu'elle repose aussi, quoique indirectement, sur le théorème du pgcd.

C.6.2.1. Soient \mathfrak{Q} un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers différents de p ([TG, I.§4]), $\mathfrak{m}_{\mathfrak{Q}} = \{a = (a_\ell), \{\ell : a_\ell = 0\} \in \mathfrak{Q}\} \in \mathfrak{Q}$ l'idéal maximal de l'anneau $A = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{F}_\ell$ associé et $\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}} = A/\mathfrak{m}_{\mathfrak{Q}}$ son corps résiduel, de caractéristique nulle. Supposons k algébrique sur un corps fini — c'est le cas crucial — et admettons un instant (voir C.6.2.3) que le foncteur $X \mapsto H^*(X, \mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}) := (\prod_{\ell \neq p} H^*(X, \mathbb{F}_\ell)) \otimes_A \mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}$ définisse une *cohomologie de Weil* ([KLEIMAN 1968, §1.2]); pour notre propos, finitude, dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz faible pour les sections hyperplanes lisses et interprétation cohomologique de la fonction ζ suffisent. Comme démontré dans [KATZ et MESSING 1974, II, corollaire 1], il résulte alors de [DELIGNE 1980] que l'on a pour chaque $i \geq 0$ l'égalité

$$\dim_{\mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}} H^i(X, \mathbb{F}_{\mathfrak{Q}}) = b^i(X),$$

où $b^i(X)$ est le i -ème nombre de Betti de X , nombre que l'on lit par exemple sur la fonction zêta d'un « modèle » de X sur un corps fini. Le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ étant un ultraproduct des $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ sa dimension est la limite, suivant l'ultrafiltre \mathfrak{L} , de la fonction $\ell \mapsto h^i(X, \mathbb{F}_\ell) := \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$, bornée d'après le théorème d'uniformité propre **C.3.1.1**. (Voir aussi *infra* pour un argument plus direct dans ce cas particulier.) En symboles :

$$\lim_{\ell, \mathfrak{L}} h^i(X, \mathbb{F}_\ell) = b^i(X).$$

Le résultat précédent étant vrai *pour tout ultrafiltre non principal* \mathfrak{L} , on en déduit l'égalité $h^i(X, \mathbb{F}_\ell) = b^i(X)$ pour tous les ℓ sauf au plus un nombre fini d'entre eux. D'autre part, on a l'égalité

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) = b^i(X)$$

pour tout $\ell \neq p$, de sorte que l'on a finalement $h^i(X, \mathbb{F}_\ell) = h^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ pour presque tout ℓ . La suite exacte des coefficients universels,

$$0 \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{F}_\ell \rightarrow H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_\ell)[\ell] \rightarrow 0,$$

permet alors de conclure, c'est-à-dire de retrouver le théorème d'O. Gabber sur l'absence de torsion pour presque tout ℓ . (L'injectivité de $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{F}_\ell \rightarrow H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ suffirait.)

C.6.2.2. THÉORÈME (O. Gabber ; J. Suh). *Soit X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos. Alors pour presque tout nombre premier ℓ , les groupes $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion.*

Le cas projectif est bien connu ([GABBER 1983, théorème]); comme l'ont indépendamment observé O. Gabber et J. Suh ([SUH 2012, §1]), le cas propre s'y ramène.

DÉMONSTRATION (ESQUISSE).

Cas projectif. Comme expliqué ci-dessus, cela résulte immédiatement des théorèmes de Katz-Messing et d'uniformité, ce dernier sous la forme faible présentée dans le paragraphe **C.6.2.4** ci-dessous.

Réduction du cas propre au cas projectif. D'après [A. J. DE JONG 1996, 4.1], il existe une altération génériquement étale $a : X' \rightarrow X$ de degré d avec X' projectif et lisse sur le corps de base. Fixons un entier n inversible sur X et notons $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le morphisme a est d'intersection complète car X et X' sont réguliers; on peut donc construire un morphisme $\Lambda \rightarrow a^! \Lambda$ dans la catégorie dérivée positive des faisceaux de Λ -modules, défini par la classe de Gysin ([STG XVI, 2.5.11]). Il induit par adjonction un morphisme $a_* a^* \Lambda = a_! a^* \Lambda \rightarrow \Lambda$ et le composé $\Lambda \rightarrow a_* a^* \Lambda \rightarrow \Lambda$ est la multiplication par le degré d : comme expliqué en [STG XVI, 3.5.9, démonstration], on se ramène par restriction à un ouvert dense au cas particulier élémentaire où a est fini étale.

Passant à la limite sur $n = \ell^r$, on en déduit qu'il existe pour chaque ℓ un morphisme trace $Ra_* \mathbb{Z}_\ell \rightarrow \mathbb{Z}_\ell$ tel que les morphismes composés

$$H^i(X, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^i(X, Ra_* \mathbb{Z}_\ell) = H^i(X', \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$$

coïncident avec la multiplication par d pour chaque i . En particulier, si $H^i(X', \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion et $\ell \nmid d$, il en est de même de $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$. Ceci nous ramène au cas projectif. \square

D'après [MADORE et ORGOGOZO 2015, 0.8], on peut en principe vérifier si un ℓ donné est exceptionnel. Il serait intéressant de savoir borner a priori leur nombre.

C.6.2.3. Vérifions maintenant brièvement que la « cohomologie modulo \mathfrak{L} », $H^*(-, \mathbb{F}_{\mathfrak{L}})$, est une cohomologie de Weil. Ceci est expliqué par Ivan Tomašić dans [TOMAŠIĆ 2004]; on constate que le seul point ne résultant pas immédiatement des énoncés classiques sur la cohomologie modulo ℓ est la finitude de ces espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_{\mathfrak{L}}$. Dans [ibid., 3.2 (i), démonstration], ceci est présenté comme un *corollaire* du théorème d'O. Gabber, ce qui rendrait l'argument précédent circulaire. Cependant, notre théorème C.3.1.1 en donne une démonstration indépendante.

C.6.2.4. Signalons qu'il n'est pas difficile de majorer uniformément en ℓ les nombres de Betti (avec ou sans support) d'un schéma algébrique sur un corps algébriquement clos k (sans utiliser le théorème sur l'absence de torsion), par des arguments proches de ceux de [KATZ 2001]. (Comparer également avec [ILLUSIE 2010, §1].)

Esquissons un argument.

- (i) On souhaite montrer que si X est un k -schéma *propre*, il existe une constante C_X telle que pour tout nombre premier $\ell \neq p$ et tout \mathbb{F}_ℓ -faisceau lisse \mathcal{L} sur X , on ait $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(X, \mathcal{L}) \leq C_X \cdot \text{rang}(\mathcal{L})$.

On se ramène par [A. J. DE JONG 1996] et descente cohomologique au cas projectif lisse et on procède ensuite par récurrence. La dualité de Poincaré et le théorème de Lefschetz nous ramènent, par l'hypothèse de récurrence, à l'étude de la cohomologie en degré médian. Ou, de façon équivalente, à la majoration uniforme des caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(X, \mathcal{L})$.

- (ii) On montre alors que si X un k -schéma projectif et lisse, il existe une constante C'_X telle que $|\chi(X, \mathcal{L})| \leq C'_X \cdot \text{rang}(\mathcal{L})$ pour tout nombre premier $\ell \neq p$ et tout \mathbb{F}_ℓ -faisceau lisse \mathcal{L} .

On procède à nouveau par récurrence sur $\dim(X)$. Pour une courbe, c'est un corollaire de l'égalité $\chi(X, \mathcal{L}) = \text{rang}(\mathcal{L}) \cdot \chi(X)$. En général, considérons un diagramme $\mathbf{P}_k^1 \leftarrow X' \rightarrow X$ où $X' \rightarrow X$ est birationnel et $X' \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ est un pinceau de Lefschetz. Par récurrence, il suffit de démontrer le résultat pour X' car si F est un fermé de X , on a $\chi(X, \mathcal{L}) = \chi_c(U, \mathcal{L}) + \chi(F, \mathcal{L})$ et de même pour X' . On peut donc supposer $X = X'$. D'après la formule de Grothendieck-Ogg-Šafarevič sur \mathbf{P}_k^1 et l'égalité $\chi(X, \mathcal{L}) = \chi(\mathbf{P}_k^1, Rf_* \mathcal{L})$, il suffit de démontrer que les $R^i f_* \mathcal{L}$ sont modérés (Picard-Lefschetz), de rangs génériques uniformément bornés par une fonction linéaire en le rang (récurrence) et qu'il en est de même du rang $h^i(X_t, \mathcal{L})$ des fibres en les points singuliers $t \in \mathbf{P}_k^1$. Ceci résulte du fait que l'écart avec le rang générique est contrôlé par les cycles évanescents (de nature locale) : les fibres des $\Psi_f^i(\mathbb{F}_\ell)$ sont de rang au plus 1 et $\mathcal{L} \simeq \mathbb{F}_\ell'$ sur les hensélisés stricts.

(iii) Montrons maintenant que si X un k -schéma algébrique, il existe une constante C_X'' telle que pour tout nombre premier $\ell \neq p$ et tout entier i on ait

$$\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \leq C_X'',$$

où $? \in \{\emptyset, c\}$.

Par altération et descente cohomologique, on peut supposer que X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans un schéma lisse. Le cas de la cohomologie à support compact d'un tel X se ramène, par récurrence sur la dimension, au cas propre et lisse déjà traité. Le cas de la cohomologie usuelle d'un schéma lisse se ramène au cas précédent par dualité de Poincaré.

C.6.2.5. REMARQUE. Signalons que par comparaison à la caractéristique nulle le théorème d'uniformité propre — sous la forme déjà établie dans [KATZ et LAUMON 1985] — entraîne également des résultats d'indépendance de ℓ en grande caractéristique. À titre d'exemple, voici un énoncé dont on trouvera une autre démonstration dans [BRÜNJES et SERPÉ 2008, 3.4].

PROPOSITION. *Soient n et d des entiers. Il existe une constante $C_{n,d}$ telle que pour tout corps algébriquement clos k de caractéristique $p > C_{n,d}$ et toute hypersurface H de degré d de \mathbf{P}_k^n , on ait l'égalité des nombres de Betti $b_i(H, \mathbb{Q}_\ell) = b_i(H, \mathbb{Q}_{\ell'})$ pour tout entier i et toute paire de nombres premiers ℓ et ℓ' distincts de p .*

Il serait intéressant de savoir si l'on peut, ne serait-ce qu'en principe, calculer une telle constante $C_{n,d}$.

Calculabilité de la cohomologie étale modulo ℓ

avec David MADORE

Introduction

L'objet principal de ce texte est de démontrer le théorème suivant, ainsi que la variante relative **D.0.9**.

D.0.1. THÉORÈME. *Il existe un algorithme calculant la cohomologie étale $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ à coefficients dans \mathbb{F}_ℓ d'un schéma algébrique X sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de ℓ , ainsi que l'application $H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{F}_\ell)$ déduite par functorialité d'un morphisme $Y \rightarrow X$.*

Bien entendu, il faut préciser l'énoncé et notamment ce qu'on entend par « calculer » : nous rappelons dans la partie **II** les faits essentiels dont nous aurons besoin sur les corps calculables et la calculabilité des opérations algébriques. Calculer le groupe $H^i(X, \mathbb{F}_\ell)$ signifie notamment en calculer la dimension, en fonction de i, ℓ et des équations de X , et calculer l'application $H^i(X, \mathbb{F}_\ell) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{F}_\ell)$ signifie en calculer la matrice dans une base déterminée par l'algorithme. (Voir **D.0.4** ci-dessous et ¶**D.9.1.2-D.9.1.3** pour des précisions.)

L'énoncé précédent répond notamment à la question posée en [POONEN, TESTA et LUIJK 2015, hypothèse 7.4] et également considérée dans [EDIXHOVEN et COUVEIGNES 2011, chap. 1 et chap. 15, p. 401], où l'accent est mis sur la dépendance du temps d'exécution en ℓ .

En caractéristique nulle ce résultat est déjà connu : voir par exemple [C. SIMPSON 2008, corollaire 2.5] ou [POONEN, TESTA et LUIJK 2015, §7.2], qui calcule aussi l'action galoisienne lorsque le schéma X est obtenu par extension des scalaires d'un corps de caractéristique nulle à une clôture algébrique. Pour une discussion du problème de la calculabilité des groupes d'homotopie ou d'homologie en topologie algébrique, voir par exemple [SERGERAERT 1994].

D.0.2. Rappelons ([DELIGNE 1980, 5.2.2]) brièvement une définition à la Čech de ces groupes de cohomologie étale. Soit X une variété algébrique sur un corps algébriquement clos dénombrable de caractéristique $p \neq \ell$ (par exemple $\overline{\mathbb{F}_p}$). Il existe un système projectif, indexé par les entiers naturels α , de recouvrements étales $X_\alpha \rightrightarrows X$, cofinal au sens suivant : pour tout $U \rightrightarrows X$ étale, il existe une factorisation d'un $X_\alpha \rightrightarrows X$ à travers U . Notons $X_{\alpha\bullet}$ le cosquelette du morphisme $X_\alpha \rightarrow X$ c'est-à-dire le schéma simplicial $X_{\alpha n} := X_\alpha \times_X \cdots \times_X X_\alpha$ ($n + 1$ facteurs). La cohomologie de Čech $\check{H}^i(X_{\alpha\bullet}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est, par définition, celle de l'ensemble simplicial $\pi_0(X_{\alpha\bullet})$. (Pour tout ensemble simplicial, on peut considérer le $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -module cosimplicial naturellement associé puis le complexe dont les dérivations sont les sommes alternées

des faces (cf. [SGA 4 V, § 1.0 et § 2.3], [MILNE 1980, III, § 2]). Si X est quasi-projective, il résulte de [M. ARTIN 1971, corollaire 4.2] que le groupe $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est isomorphe à la colimite des $\check{H}^i(X_{\alpha}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Le problème auquel on est immédiatement confronté est que, donnés k , les $X_{\alpha} \rightarrow X$ et ℓ , il n'est *a priori* pas évident de calculer deux entiers $\alpha \leq \beta$ tels que $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{Im}(\check{H}^i(X_{\alpha}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^i(X_{\beta}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ (ces entiers existent car le système inductif $\check{H}^i(X_{\alpha}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ de groupes abéliens finis, ayant une colimite finie, est « essentiellement constant » au sens de la section D.5 ; voir notamment D.5.1).

D.0.3. Stratégie. Inspirés par des travaux de Michael Artin ([SGA 4 XI]) et Gerd Faltings ([FALTINGS 1988, § 2]), nous nous ramenons au cas où l'on peut se restreindre dans la description précédente à des *revêtements étales* $X_{\alpha} \rightarrow X$ galoisiens de groupe un ℓ -groupe. Nous montrons alors que le système inductif $\check{H}^i(X_{\alpha}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ – il s'agit maintenant de cohomologie de ℓ -groupes – est « explicitement » essentiellement constant. La technique utilisée pour résoudre (ou plutôt ignorer) les divers problèmes d'extension que l'on rencontre est semblable à celle de [SCHÖN 1991, chap. I-II] (également connue, indépendamment de [ibid.], de Ofer Gabber). La réduction à des espaces « $K(\pi, 1)$ » n'est possible que localement pour la topologie de la descente cohomologique universelle : si X n'est pas lisse, on utilise un théorème de résolution des singularités de A. Johan de Jong. (En particulier, la *topologie des altérations* est suffisamment fine pour notre propos.)

Les ingrédients essentiels de la démonstration, présentés en §D.1–D.8, sont résumés en §D.10 qui récapitule l'algorithme de calcul des nombres de Betti.

D.0.4. Cette approche permet également de résoudre le problème posé à la fin de D.0.2. On montre en effet que l'on peut obtenir pour chaque i des cocycles (hyper-Čech) pour une base de $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ et, pour tout autre hyperrecouvrement $X_{\bullet} \rightarrow X$ pour la topologie des altérations, le moyen de développer l'image dans cette base d'un cocycle (hyper-Čech) par le morphisme $\check{H}^i(X_{\bullet}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ (voir D.8.3). Comme nous le fait remarquer Pierre Deligne, il n'est pas difficile d'en déduire un calcul de $R\Gamma(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ (voir D.8.4).

D.0.5. REMARQUE. Dans l'énoncé du théorème D.0.1, le schéma X est supposé décrit explicitement, c'est-à-dire par des équations le définissant (ou définissant un atlas d'ouverts affines : cf. §D.16 pour les détails). Il est donc tentant de se demander quelles constructions naturelles, par exemple solutions de problèmes universels, peuvent être ainsi décrites explicitement par des équations. Cette question fait l'objet d'une vaste littérature ; signalons simplement ici les articles [ANDERSON 2002] (jacobienne ; voir aussi [MUMFORD 1975]) et [HAIMAN et STURMFELS 2004] (schéma de Hilbert). Bien entendu, nous utiliserons d'autres résultats de ce type au cours de la démonstration ; cf. par exemple ¶D.15.5, où l'on « calcule » la normalisation.

Signalons maintenant quelques améliorations du théorème D.0.1. D'autres améliorations et compléments, ainsi que quelques questions, figurent dans la section D.11.

D.0.6. Notons tout d'abord que la cas de la cohomologie à support compact, et plus généralement de la cohomologie relative (c'est-à-dire modulo un fermé), en résulte formellement ; cf. ¶ **D.11.2**. Nous avons énoncé **D.0.1** avec des coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ pour plus de simplicité, mais nous traiterons plus généralement le cas de la cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ (ou même à valeurs dans un faisceau constructible sur un tel anneau ; voir **D.0.9** *infra*).

D.0.7. Stratifications. En analysant plus précisément le formalisme de calculabilité sur les éléments d'un corps arbitraire, comme nous le présentons dans un texte complémentaire au présent article ([MADORE et ORGOGOZO 2014] ; ou cf. [BÜRGISSER, CLAUSEN et SHOKROLLAHI 1997, prop. 4.27]), il n'est guère difficile de montrer que les résultats énoncés ci-dessus, interprétés dans un modèle de calcul différent où ils restent encore valables, entraînent automatiquement la calculabilité de stratifications associées aux objets calculés. Plus exactement, on peut montrer les affirmations suivantes, où ℓ est un nombre premier *fixé*, inversible sur les schémas considérés :

- si les équations de X comportent des indéterminées, on peut calculer les équations des parties constructibles de l'espace (affine) de ces indéterminées correspondant à une stratification par la dimension : autrement dit, donnés ℓ et n et un morphisme de type fini $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}_k^r$ (où k est un corps algébriquement clos calculable, cf. **D.12.0.1**), on peut calculer une partition de \mathbb{A}_k^r en un nombre fini de parties constructibles sur chacune desquelles $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ (où X désigne une fibre en un point géométrique de la partie) a un type d'isomorphisme^① donné, qu'on peut calculer ; il en va de même, par exemple, du type de $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(Y, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ (pour un morphisme $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ sur \mathbb{A}_k^r) ;
- si X est un schéma de type fini sur un ouvert de $\text{Spec } \mathbb{Z}$, on peut calculer, en fonction de ℓ et n (et de la description de X), un p_0 tel que le type de $H^i(X_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ ne dépende pas de p lorsque $p \geq p_0$, où X_p désigne une fibre géométrique au-dessus de p ; il en va de même du type de $H^i(X_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(Y_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$;
- variante de l'affirmation précédente : donné un morphisme de type fini $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]}^r$, on peut calculer une partition de $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]}^r$ en un nombre fini de parties constructibles sur chacune desquelles $H^i(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$ a un type d'isomorphisme fixé, où X désigne une fibre en un point géométrique de la partie.

Notons que l'*existence* d'une stratification (resp. d'un nombre premier p_0) comme ci-dessus est conséquence des résultats généraux de constructibilité et commutation aux changements de base. Les démonstrations de [ORGOGOZO 2017] (resp. [KATZ et LAUMON 1985, théorème 3.3.2]), de nature géométrique, devraient fournir une stratification (resp. un nombre premier p_0) explicite qui convienne pour *chaque* nombre premier ℓ inversible sur les schémas considérés.

^①. Par « type d'isomorphisme » d'un ℓ -groupe abélien fini V , nous entendons ici bien sûr des $d_1 \leq \dots \leq d_s$, tels que $V \simeq (\mathbb{Z}/\ell^{d_1}\mathbb{Z}) \times \dots \times (\mathbb{Z}/\ell^{d_s}\mathbb{Z})$; et par type d'isomorphisme d'un morphisme entre deux tels groupes, la donnée d'une matrice à équivalence près.

Comme observé par Olivier Wittenberg ([POONEN, TESTA et LUIJK 2015, prop. 8.3]), le théorème **D.0.1** (étendu au cas des coefficients $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$) a le corollaire suivant.

D.0.8. COROLLAIRE. *Il existe un algorithme calculant la structure de la partie de torsion du groupe de cohomologie ℓ -adique $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$ d'une variété propre et lisse X sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de ℓ .*

(Le rang des $H^i(X, \mathbb{Z}_\ell)$ se calcule, dans le cas d'une variété sur un corps fini, en comptant les points de celles-ci et en utilisant une borne a priori, et dans le cas général en se ramenant au cas des corps finis : cf. [ibid.].) Notons par contre, que hormis dans le cas propre et lisse, permettant d'utiliser des arguments de poids, on ne sait malheureusement rien dire de la cohomologie ℓ -adique (cf. **D.11.5**).

On déduira du théorème **D.0.1** le résultat suivant (voir **D.11.4**).

D.0.9. THÉORÈME. *Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme de schémas algébriques sur un corps algébriquement clos k . Pour tout faisceau abélien \mathcal{F} constructible sur X , de torsion inversible sur k , et tout entier $i \geq 0$, on peut explicitement calculer le faisceau $R^i f_* \mathcal{F}$, fonctoriellement en \mathcal{F} .*

Il en résulte formellement que l'on peut calculer $R^i f_* \mathcal{F}$: appliquer le théorème à une compactification de f et au prolongement par zéro correspondant de \mathcal{F} .

(Idéalement, on aimerait plutôt déduire **D.0.1** du théorème **D.0.9**, démontré par dévissage.)

D.0.10. Remarques sur la notion d'algorithme. La « calculabilité » dans le titre de cet article, et le mot « algorithme calculant » dans l'énoncé du théorème **D.0.1** doivent se comprendre au sens (standard) de Church-Turing, c'est-à-dire le fait que les fonctions annoncées soient (générales) récursives, autrement dit calculables par un ordinateur idéalisé, par exemple une machine de Turing ou une machine à registres : cf. [ODIFREDDI 1989, définition I.1.7 et théorèmes I.4.3 et I.7.9]. Voir **D.12.0.1** sur la manière dont la machine doit manipuler les éléments du corps de base.

Soulignons que le fait de travailler avec des fonctions générales récursives nous permet d'effectuer des « recherches non bornées » (ce qu'on appelle aussi utiliser l'« opérateur μ de Kleene ») : si pour chaque m il existe n vérifiant une certaine propriété $\mathbf{P}(m, n)$ elle-même calculable, alors la fonction $\mu_n \mathbf{P}$ qui à m associe le plus petit n vérifiant $\mathbf{P}(m, n)$ est calculable (l'idée étant qu'on parcourt les n jusqu'à en trouver un qui vérifie la propriété recherchée).

Nous utiliserons notamment librement ce résultat pour construire des objets géométriques : dès lors qu'un théorème garantit l'existence d'un objet géométrique (schéma, morphisme de schémas, ...) possédant une propriété *algorithmiquement testable*, on peut calculer algorithmiquement un tel objet, simplement en énumérant toutes les équations possibles pour les objets géométriques en question et en testant la propriété souhaitée jusqu'à en trouver un qui vérifie la condition voulue (cf. **D.12.7** pour plus de détails).

Pour une discussion sur la question de savoir dans quelle mesure on pourrait se passer de ce procédé, et si les fonctions dont on affirme la calculabilité seraient en fait *primitivement* récursives, voir ¶**D.11.6** plus bas.

D.0.11. Leitfaden. Des efforts ont été faits pour rendre la lecture des deux parties largement indépendante chacune de l'autre. L'ordre logique est de commencer par la partie II, mais le lecteur prêt à admettre la calculabilité des opérations classiques de la géométrie algébrique (ainsi que la représentation algorithmique des objets) pourra se contenter de lire la partie I. Inversement, la partie II peut servir de présentation autonome de certains résultats de géométrie algébrique effective.

Par ailleurs, le lecteur souhaitant démontrer les affirmations énoncées en D.0.7 doit commencer par la lecture du texte complémentaire [MADORE et ORGOGOZO 2014], et ensuite interpréter la notion de calculabilité utilisée tout au long du présent article comme faisant référence à la notion universelle introduite dans ce complément.

Nous remercions chaleureusement Ofer GABBER auquel nous sommes redevables de plusieurs arguments importants et pour ses suggestions particulièrement utiles. À divers titres nous remercions également Pierre DELIGNE, Luc ILLUSIE, Jean LANNES, Grégoire LECERF, Henri LOMBARDI, Ronald VAN LUIJK, Jean-Pierre SERRE, Lenny TAEMLAN, et Olivier WITTENBERG. Le second auteur sait également gré à Ahmed ABBES et Weizhe ZHENG (郑维喆) de leurs invitations, respectivement à l'IHÉS et au centre Morningside (晨兴数学中心).

I. Cohomologie étale

D.1. $K(\pi, 1)$ pro- ℓ

Les résultats de cette section, essentiellement dus à Ofer Gabber^②, permettent d'établir une variante (D.1.4.7) de [FRIEDLANDER 1982, théorème 11.7] (dont l'énoncé est rappelé en D.1.3.3). Ceux qui préfèrent admettre les résultats de cette section pourront se contenter de lire les définitions D.1.3.1 à D.1.3.4 et D.1.4.4, ainsi que les propositions D.1.4.7 et D.1.4.12. Il est fort probable que les hypothèses noethériennes faites dans cette section sur les schémas puissent être remplacées par des hypothèses de finitude plus faibles (cohérence, ouverture des composantes connexes).

D.1.1. Champs ℓ -monodromiques : définitions.

D.1.1.1. Soit \mathcal{C} un champ en groupoïdes sur un schéma localement noethérien S , muni de la topologie étale ([GIRAUD 1971, II.1.2.1.3]). Rappelons que l'on note $\pi_0(\mathcal{C})$ le faisceau associé au préfaisceau

$$U/S \mapsto \{\text{classes d'isomorphie d'objets de } \mathcal{C}(U)\}$$

— c'est aussi le faisceau des *sous-gerbes maximales* (=strictement pleines; [ibid., III.2.1.3]) de \mathcal{C} — et, pour chaque section locale $c_U \in \text{Ob } \mathcal{C}(U)$, où U/S est un ouvert étale, $\pi_1(\mathcal{C}, c_U)$ le faisceau en groupes $\underline{\text{Aut}}(c_U)$ sur U . Le champ \mathcal{C} est dit **constructible** si le faisceau $\pi_0(\mathcal{C})$ et les divers $\pi_1(\mathcal{C}, c)$ sont constructibles. Dans [SGA 1 XIII, §0], un tel champ est dit 1-constructible. (Comparer avec [GIRAUD 1971, VII.2.2.1] et [ORGOGOZO 2003b, §2].)

^②. Les auteurs sont bien entendu seuls responsables des éventuelles imprécisions ou erreurs dans l'exposition.

D.1.1.2. Un **lien** sur S est une section cartésienne (sur S) du champ associé au préchamp des faisceaux de groupes à *automorphisme intérieur près* ([GIRAUD 1971, IV.1.1]); un tel objet peut être représenté par un triplet constitué d'un recouvrement étale S' de S , d'un faisceau en groupes G' sur S' et d'un isomorphisme extérieur $\varphi \in \text{Isom ex}(p_1^*G', p_2^*G')$, où $p_1, p_2 : S' \times_S S' \rightrightarrows S'$ sont les deux projections, satisfaisant la condition de cocycle usuelle ([DELIGNE et collab. 1982, II, appendice]).

D.1.1.3. À tout champ localement connexe-non vide (**gerbe**) \mathcal{G} sur S , est associé un lien \mathcal{L} ; si $c_{S'} \in \text{Ob } \mathcal{G}(S')$ pour S' couvrant S , on peut prendre $G' = \pi_1(\mathcal{G}, c_{S'})$ dans la description précédente : le lien « est » le faisceau des groupes d'automorphismes de sections locales, à conjugaison près. On dit que \mathcal{G} est **lié** par le lien \mathcal{L} ou encore que \mathcal{G} est une \mathcal{L} -gerbe.

Si \mathcal{G} est le champ $\mathbf{B}G$ des toseurs sous un S -faisceau en groupes G , son lien est celui naturellement associé à G , représenté par le triplet ($S' = S, G' = G, \varphi = \text{Id}$). Le faisceau des automorphismes de ce lien est le faisceau des automorphismes *extérieurs* de G et l'ensemble des classes d'isomorphie de liens *localement* représentés par le S -schéma en groupes G est naturellement isomorphe à $H^1(S, \text{Aut ex}(G))$.

D.1.1.4. Soit \mathcal{L} un lien sur S . L'ensemble $H^2(S, \mathcal{L})$ des classes d'équivalences de gerbes liées par \mathcal{L} est naturellement muni d'une action libre et transitive du groupe de cohomologie $H^2(S, Z(\mathcal{L}))$, où $Z(\mathcal{L})$ désigne le **centre** du lien \mathcal{L} . (Voir [ibid., loc. cit.] et [GIRAUD 1971, IV, 1.5.3, 3.1.1 et 3.3.3].)

D.1.1.5. DÉFINITION. Soit ℓ un nombre premier. Un objet sur S du type suivant est dit **ℓ -monodromique** s'il satisfait l'une des conditions suivantes.

- un faisceau d'ensembles F : s'il est localement constant, constructible, et si pour tout point géométrique s de S , le groupe de monodromie, image de $\pi_1(S, s)$ dans $\text{Aut}(F_s)$, est un ℓ -groupe ;
- un faisceau de groupes G : s'il est ℓ -monodromique en tant que faisceau d'ensembles et si ses fibres sont des ℓ -groupes (finis) ;
- un lien \mathcal{L} : s'il est localement représenté par un ℓ -groupe fini (constant) G et si, sur chaque composante connexe, le $\text{Aut ex}(G)$ -torseur $\text{Isom}_{\text{liens}}(\mathcal{L}, \text{lien}(G))$ est ℓ -monodromique, où $\text{lien}(G)$ désigne (abusivement) le lien du champ des G -torseurs ;
- un champ \mathcal{C} : si le faisceau d'ensembles $\pi_0(\mathcal{C})$ est ℓ -monodromique et si, sur le revêtement correspondant de S , les sous-gerbes maximales sont à liens ℓ -monodromiques.

Nous dirons également qu'un morphisme Y/X est un **ℓ -revêtement** s'il est fini étale galoisien d'ordre une puissance de ℓ .

D.1.1.6. Mise en garde. Un faisceau ℓ -monodromique provient par image inverse du topos $S_{\ell\text{ét}}$ considéré en **D.1.4.3** mais il n'en est pas de nécessairement de même d'un champ ℓ -monodromique quelconque ; cela reflète le fait qu'une classe dans $H^2(S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ n'est pas nécessairement tuée par un revêtement galoisien d'ordre une puissance de ℓ (cf. **D.1.1.4**).

D.1.1.7. REMARQUE. Les faisceaux ℓ -monodromiques sont également utilisés en [ORGOGOZO 2003b, 4.6], où l'on démontre la locale constance générique du type d'homotopie étale pro- ℓ des fibres d'un morphisme de type fini.

D.1.2. Champs ℓ -monodromiques : sorites.

D.1.2.1. Un faisceau abélien extension (resp. un sous-quotient) de faisceaux abéliens ℓ -monodromiques est également ℓ -monodromique. La lissité (locale constance et constructibilité) résulte de [SGA 4 IX, 2.1(ii) et 2.6(ii)]. Que la monodromie d'une extension soit un ℓ -groupe est conséquence immédiate du fait qu'un élément unipotent de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ est de ℓ -torsion, c'est-à-dire annulé par une puissance de ℓ .

Réciproquement, tout faisceau abélien ℓ -monodromique est extension successive du faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

D.1.2.2. Un faisceau en groupes G est ℓ -monodromique si et seulement si son lien est ℓ -monodromique. (Cette dernière propriété est tautologiquement équivalente au fait que la gerbe $\mathbf{B}G$ des G -torseurs soit ℓ -monodromique.) Pour vérifier ce fait, on peut supposer S connexe, et en choisir un point géométrique s . Les deux derniers termes de la suite exacte

$$1 \rightarrow G_s/Z(G_s) \rightarrow \mathrm{Aut}(G_s) \rightarrow \mathrm{Aut} \, \mathrm{ex}(G_s) \rightarrow 1$$

reçoivent le groupe $\pi_1(S, s)$. Le noyau $G_s/Z(G_s)$ étant un ℓ -groupe, l'image de $\pi_1(S, s)$ dans $\mathrm{Aut}(G_s)$ est un ℓ -groupe si et seulement si l'image de $\pi_1(S, s)$ dans $\mathrm{Aut} \, \mathrm{ex}(G_s)$ l'est.

D.1.2.3. Gerbe quotient. Par **sous-groupe normal** d'une gerbe \mathcal{G} sur S nous entendons la donnée pour chaque section locale $\sigma \in \mathrm{Ob} \, \mathcal{G}(U)$ d'un sous-faisceau en groupes distingués $N_\sigma \trianglelefteq \underline{\mathrm{Aut}}(\sigma) = \pi_1(\mathcal{G}, \sigma)$ et ceci de façon compatible aux restrictions et aux isomorphismes entre sections locales. La **gerbe quotient** de \mathcal{G} par $N = (N_\sigma)_\sigma$ est, par définition, le champ associé à la catégorie fibrée \mathcal{G}' ayant mêmes objets que \mathcal{G} mais dont les homomorphismes sont les faisceaux quotients $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{G}'}(\sigma, \tau) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{G}}(\sigma, \tau)/N_\sigma$. On la note \mathcal{G}/N . Le morphisme $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/N$ est conservatif et couvrant, c'est-à-dire localement surjectif sur les objets et les flèches.

Cette construction s'applique en particulier aux centres $Z_\sigma = Z(\underline{\mathrm{Aut}}(\sigma))$ des faisceaux d'automorphismes locaux. Ici, Z_σ ne « dépend pas » du choix de la section locale et se descend donc à S : il existe un faisceau en groupes abéliens Z et, pour chaque section locale $\sigma \in \mathrm{Ob} \, \mathcal{G}(U)$, un isomorphisme $Z(U) \xrightarrow{\simeq} Z_\sigma$ commutant aux restrictions et aux isomorphismes entre sections locales. Lorsque \mathcal{G} est une gerbe des G -torseurs, où G est un faisceau en groupes, la gerbe quotient ainsi obtenue est équivalente à celle des G' -torseurs, où G' est le quotient de G par son centre.

Si σ est une section globale de la gerbe quotient \mathcal{G}/Z , la gerbe $\mathcal{K}(\sigma)$ des relèvements de σ à \mathcal{G} ([GIRAUD 1971, IV.2.5.1, 2.5.4]) est naturellement une Z -gerbe (cf. [ibid., 2.5.6.(ii)]). Rappelons que $\mathcal{K}(\sigma)$ est triviale si et seulement si la section σ se relève à \mathcal{G} .

D.1.2.4. LEMME. Soit $\iota : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme fidèle entre gerbes constructibles localement constantes sur un schéma localement noëthérien S . Si \mathcal{G} est ℓ -monodromique, il en est de même de \mathcal{K} .

DÉMONSTRATION. Supposons \mathcal{S} connexe, comme il est loisible de le faire, et choisissons en un point géométrique s . Pour chaque section locale h de \mathcal{H} , le morphisme ι induit une injection $\underline{\text{Aut}}_{\mathcal{H}}(h) \hookrightarrow \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{G}}(\iota h)$. Il en résulte que, localement, le morphisme lien(ι) : lien(\mathcal{H}) \rightarrow lien(\mathcal{G}) est représenté par une injection de groupes finis $H \subseteq G$ et que l'action du groupe fondamental $\pi_1(\mathcal{S}, s)$ sur les liens de \mathcal{H} et \mathcal{G} se factorise à travers le morphisme horizontal ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{Aut ex}(H) \\
 & \nearrow & \uparrow \\
 \pi_1(\mathcal{S}, s) & \longrightarrow & \text{Aut}(H \subseteq G)/(H/Z(G) \cap H) \\
 & \searrow & \downarrow (\dagger) \\
 & & \text{Aut ex}(G)
 \end{array}$$

où $\text{Aut}(H \subseteq G)$ désigne le groupe des automorphismes de G préservant globalement H . Bien entendu, G étant un ℓ -groupe, il en est de même de H . Notons d'autre part que le noyau de la flèche (\dagger) est un ℓ -groupe : c'est un quotient du normalisateur de H dans G . Il en résulte que l'image du morphisme horizontal est un ℓ -groupe, car \mathcal{G} est supposé ℓ -monodromique. Partant, il en est de même de l'image du morphisme $\pi_1(\mathcal{S}, s) \rightarrow \text{Aut ex}(H)$. CQFD. \square

D.1.2.5. LEMME. Soient ℓ un nombre premier, G un ℓ -groupe fini et \mathcal{G} une gerbe ℓ -monodromique sur un topos \mathcal{S} , localement isomorphe à BG . Si $H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$, alors la gerbe \mathcal{G} est triviale : elle a une section globale.

En d'autres termes, \mathcal{G} est une gerbe de torsseurs sous un faisceau en groupes, localement isomorphe à G .

DÉMONSTRATION. Soit \mathcal{G}' la gerbe quotient de \mathcal{G} par son centre Z (cf. D.1.2.3). Cette gerbe est localement isomorphe à BG' , où G' est le quotient de G par son centre (non trivial, à moins que G ne le soit). Par récurrence sur l'ordre du groupe, elle a une section globale. La Z -gerbe \mathcal{K} de ses relèvements à \mathcal{G} (cf. loc. cit.) a une classe dans $H^2(\mathcal{S}, Z)$ (D.1.1.4), nécessairement nulle par hypothèse (utiliser D.1.2.1). Il en résulte que la gerbe \mathcal{K} est triviale et, par conséquent, que la section globale de \mathcal{G}' considérée se relève à la gerbe \mathcal{G} , qui est donc également triviale. \square

D.1.3. Courbes et polycourbes ℓ -élémentaires. Rappelons les définitions [SGA 4 XI, 3.1-2].

D.1.3.1. On appelle **courbe élémentaire** sur \mathcal{S} un morphisme de schémas $f : X \rightarrow \mathcal{S}$ qui peut être plongé dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{j} & \bar{X} & \xleftarrow{i} & D \\
 & \searrow f & \downarrow \bar{f} & \swarrow g & \\
 & & \mathcal{S} & &
 \end{array}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) j est une immersion ouverte et $X = \bar{X} - D$;
- (ii) \bar{f} est une courbe (relative) projective lisse, à fibres géométriquement connexes ;
- (iii) g est un revêtement étale à fibres non vides.

Donnés un morphisme projectif \bar{f} et une immersion fermée i , les conditions (i)-(iii) sont algorithmiquement testables : pour la lissité de \bar{f} et g , utiliser [D.17.2](#) ; pour la connexité géométrique (resp. non vacuité) des fibres de \bar{f} (resp. de g), on peut supposer que S est un corps en localisant en ses points maximaux (calculables par [D.15.2](#)), car le faisceau $\bar{f}_* \underline{\omega}$ (resp. $g_* \underline{\omega}$) est lisse, et utiliser [D.16.6](#).

(Notons que si S est *normal* intègre – comme il serait loisible de le supposer pour notre propos –, on pourrait également utiliser la connexité géométrique des fibres d'un morphisme propre $Y \rightarrow S$ dont la fibre générique est géométriquement connexe.)

D.1.3.2. On appelle **polycourbe élémentaire** sur S un morphisme de schémas $X \rightarrow S$ admettant une factorisation en courbes élémentaires. (Lorsque cela ne semble pas prêter à confusion, on s'autorise à confondre X avec le morphisme $X \rightarrow S$.) Notre terminologie, inspirée des courbes et polycourbes *hyperboliques* de [MOCHIZUKI 1999], nous semble plus explicite que les « fibrations élémentaires » et « bons voisinages » de [SGA 4 XI]. (Voir aussi [GROTHENDIECK 197?, IV.20 ou V.5 (« Sections hyperplanes et projections coniques ») § 13 (« Morphismes élémentaires et théorème de M. Artin »)], où un tel morphisme est dit « polycourbe élémentaire ».)

D.1.3.3. Soient X un schéma algébrique sur un corps parfait infini k et x un point fermé en lequel $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ est *lisse*. D'après [SGA 4 XI, 3.3], il existe un voisinage ouvert de Zariski U de x qui est une polycourbe élémentaire sur k . (Si $k = \mathbb{C}$, l'espace topologique $U(\mathbb{C})$ est un $K(\pi, 1)$ et toute classe de cohomologie en degré > 0 est tuée par un revêtement fini étale $U' \rightarrow U$ ([SGA 4 XI, 4.6]).) On a le raffinement suivant ([FRIEDLANDER 1982, théorème 11.7]) : il existe un voisinage *étale* de x qui est un « $K(\pi, 1)$ pro- ℓ » (au sens expliqué en ¶[D.1.4](#)), où π est un pro- ℓ -groupe extension itérée de pro- ℓ -groupes libres de type fini. Dans cette section et la suivante, on donne une démonstration alternative de ce résultat, amélioré par la possibilité d'utiliser le théorème de résolution des singularités de A. J. de Jong.

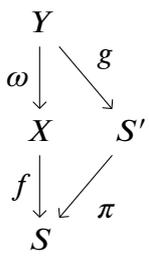
D.1.3.4. Soit ℓ un nombre premier. Une courbe élémentaire $f : X \rightarrow S$ est dite **ℓ -élémentaire** si le faisceau $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est ℓ -monodromique ([D.1.1.5](#)). Lorsque ℓ est inversible sur les schémas considérés, ce qui est systématiquement le cas dans cet article, les faisceaux $R^i f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ sont automatiquement localement constants constructibles, de formation commutant aux changements de base (cf. [SGA 1 XIII, 2.9] pour $i \leq 1$, et [Th. finitude, A, 1.3.3] pour $i \geq 0$ arbitraire) ; l'hypothèse précédente porte donc sur la *monodromie* de $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$: si S est connexe et \bar{s} en est un point géométrique, on demande que l'image de $\pi_1(S, \bar{s})$ dans $\text{GL}(H^1(X_{\bar{s}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$ soit un ℓ -groupe. Une *polycourbe* f est dite ℓ -élémentaire si elle admet une factorisation en courbes qui sont ℓ -élémentaires ; nous déduirons de la proposition [D.1.3.7](#) ci-dessous que $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est alors ℓ -monodromique.

Avant d'énoncer la proposition principale de cette section, commençons par deux lemmes.

D.1.3.5. LEMME. Soient X/S une courbe élémentaire (resp. ℓ -élémentaire), ℓ un nombre premier inversible sur S et Y/X un ℓ -revêtement connexe. Alors, le morphisme $Y \rightarrow S$ se factorise à travers un ℓ -revêtement $S' \rightarrow S$ en une courbe élémentaire (resp. ℓ -élémentaire) $Y \rightarrow S'$.

DÉMONSTRATION. Commençons par l'énoncé non respé. Soit \bar{X}/S une compactification comme en **D.1.3.1**. Par modération et le lemme d'Abhyankar relatif ([SGA 1 XIII, 5.5]), il existe — localement sur \bar{X} pour la topologie étale — un prolongement de Y/X en un morphisme de Kummer généralisé relativement à $D \subseteq \bar{X}$ ([GROTHENDIECK et MURRE 1971, 1.3.9.c]). Celui-ci est unique à isomorphisme unique près et sa source est lisse sur S . Si, en coordonnées locales, $D = V(t)$ et $Y \rightarrow X$ est $t = f(y)$, le diviseur E d'équation f/f' est étale sur S . (Si $f(y) = y^n$, avec n inversible sur S , le diviseur E est d'équation y , comme attendu.)^③ Par unicité (forte), on peut recoller ces morphismes construits étale-localement en un morphisme fini et plat $\bar{Y} \rightarrow \bar{X}$, prolongeant $Y \rightarrow X$, tel que $\bar{Y} \rightarrow S$ soit une courbe propre et lisse et $E = \bar{Y} - Y$ soit un diviseur fini étale sur S , à fibres non vides. (Cf. par exemple [STG, IX.2.1] pour une approche log-géométrique, lorsque S est un schéma régulier, cas suffisant dans cet article.) Les fibres de $\bar{Y} \rightarrow S$ ne sont pas nécessairement géométriquement connexes mais sa factorisation de Stein répond à la question. (Rappelons que d'après [ÉGA III₂, 7.8.10], la factorisation de Stein d'un morphisme propre et réduit est un revêtement étale.)

Montrons maintenant que si $f : X \rightarrow S$ est ℓ -élémentaire, il en est de même de $g : Y \rightarrow S'$. L'égalité $\pi_* R^1 g_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = R^1 (f\omega)_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, où π (resp. ω) est le ℓ -revêtement $S' \rightarrow S$ (resp. $Y \rightarrow X$) nous ramène à montrer que le faisceau $R^1 (f\omega)_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est ℓ -monodromique car un faisceau \mathcal{L} sur S' est ℓ -monodromique si $\pi_* \mathcal{L}$ l'est. (Utiliser la surjectivité de la coüinité $\pi^* \pi_* \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$.) Enfin, le faisceau $\omega_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ étant abélien ℓ -monodromique, il est extension successive du faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ et, par conséquent, son image directe par $R^1 f_*$ est extension successive de sous-quotients du faisceau $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, qui est ℓ -monodromique par hypothèse. □



D.1.3.6. LEMME. Soient $X \rightarrow S$ une courbe élémentaire, ℓ un nombre premier inversible sur S et \mathcal{C} un champ en groupoïdes sur X . Si S est strictement local et si \mathcal{C} est ℓ -monodromique, il existe un ℓ -revêtement étale $X' \rightarrow X$ tel que $\mathcal{C}' = (X' \rightarrow X)^* \mathcal{C}$ soit isomorphe à un coproduit (fini) de champs de toseurs sous des ℓ -groupes finis.

Ceci nous permettra de ramener — étale-localement sur S — l'étude des champs ℓ -monodromiques à celle des champs de toseurs sous un ℓ -groupe fini.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme précédent (**D.1.3.5**) et l'hypothèse sur le champ \mathcal{C} , on peut supposer $\pi_0(\mathcal{C})$ constant. Quitte à remplacer \mathcal{C} par une sous-gerbe maximale, on peut supposer que c'est une gerbe. Il suffit de montrer qu'elle a une section : elle sera alors isomorphe à une gerbe ℓ -monodromique de toseurs et l'on pourra conclure par **D.1.2.2**. L'existence d'une section résulte de **D.1.2.5** et du fait que, par modération et commutation aux

^③. Notons que si S est réduit, ce qui est suffisant pour nos applications, cela revient à prendre l'image inverse réduite de D .

changements de base, les groupes $H^2(X', \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ sont nuls pour tout ℓ -revêtement X' de X . (Rappelons que S est *strictement local*.) \square

D.1.3.7. PROPOSITION. *Soient S un schéma localement noethérien sur lequel un nombre premier ℓ est inversible et $f : X \rightarrow S$ une courbe ℓ -élémentaire. Alors, pour tout champ ℓ -monodromique \mathcal{C} sur X , le champ image directe $f_*\mathcal{C}$ est également ℓ -monodromique. De plus, la formation de cette image directe commute aux changements de base $S' \rightarrow S$.*

DÉMONSTRATION. La commutation aux changements de base et la lissité reviennent à montrer que si S est strictement local de point fermé s et $\bar{\eta}$ est un point générique géométrique, les morphismes $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X_s)$ et $\mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X_{\bar{\eta}})$ sont des équivalences. Par descente (finie étale) et les deux lemmes précédents (**D.1.3.5**, **D.1.3.6**), on se ramène au cas particulier où \mathcal{C} est une gerbe de toseurs sous un ℓ -groupe fini : cela résulte alors des théorèmes bien connus de spécialisation du groupe fondamental (modéré). La constructibilité de l'image directe est également déjà connue ([SGA 1 XIII, §2]) et résulte d'ailleurs de la démonstration ci-dessous.

Commençons par montrer que pour tout champ \mathcal{C} comme dans l'énoncé, le faisceau $\pi_0(f_*\mathcal{C})$ est ℓ -monodromique en traitant tout d'abord le cas d'un *faisceau* (c'est-à-dire d'un champ en catégories discrètes). Par passage à la limite, il suffit de montrer que si S est un schéma (non nécessairement noethérien) n'admettant pas de revêtement connexe d'ordre ℓ (c'est-à-dire : le topos $S_{\text{ét}}$ défini en **D.1.4.3** est *local*) et s est un point géométrique de S , alors le morphisme $\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X \times_S S_{(s)}) \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X)$ est *surjectif*. (Voir par exemple [SZAMUELY 2009, chap. 5] pour une théorie du groupe fondamental pour les schémas non nécessairement localement noethériens.) Comme il s'agit de pro- ℓ groupes, cela est équivalent à montrer que la flèche induite par application du foncteur $H^1(\cdot, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ à $X \times_S S_{(s)} \rightarrow X$ est injective (cf. [SERRE 1994, I, §4.2, prop. 23]). Or, on a la suite exacte (Leray)

$$0 \rightarrow H^1(S, f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}),$$

où : $f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ (par connexité des fibres géométriques), $H^1(S, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0$ (par hypothèse sur S), et $R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est constant sur S (par hypothèse sur f) de sorte que $H^0(S, R^1f_*\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = H^1(X \times_S S_{(s)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Supposons maintenant que \mathcal{C} est un champ ℓ -monodromique quelconque et montrons que $\pi_0(f_*\mathcal{C})$ est ℓ -monodromique. D'après ce qui précède, on peut supposer — quitte à remplacer S par un ℓ -revêtement — le faisceau $f_*\pi_0(\mathcal{C})$ *constant* puis que le champ \mathcal{C} est une *gerbe* (ℓ -monodromique), notée \mathcal{G} dorénavant. Soit \mathcal{G}' son quotient par le centre Z de \mathcal{G} (**D.1.2.3**) et posons $\mathcal{L} := \pi_0(f_*\mathcal{G})$ et $\mathcal{L}' := \pi_0(f_*\mathcal{G}')$. Le faisceau en groupes abéliens R^1f_*Z agit sur le morphisme (localement constant) canonique $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ et l'action est transitive sur les fibres : $(R^1f_*Z)\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ est injective. (Ceci est l'analogie du fait bien connu (voir [GIRAUD 1971, III, 3.4.5] ou [SERRE 1994, I, §5.7]) que si $1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$ est une extension centrale de groupes sur un topos E , le groupe abélien $H^1(E, Z)$ agit sur $H^1(E, G)$ par produit contracté, c'est-à-dire par $[T] \cdot [P] = [T \overset{Z}{\wedge} P]$, et l'application $H^1(E, Z)H^1(E, G) \rightarrow H^1(E, G')$, de source le quotient à gauche de $H^1(E, G)$ par $H^1(E, Z)$, est *injective*.) Le morphisme f étant ℓ -monodromique, on peut supposer R^1f_*Z constant ; par récurrence, on peut

supposer qu'il en est de même de \mathcal{L}' . La conclusion résulte alors formellement de l'observation suivante : si un ℓ -groupe abélien fini C agit fidèlement et transitivement sur les fibres d'un morphisme $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ de faisceaux lisses à but constant, le faisceau \mathcal{L} est ℓ -monodromique. En effet, l'action de la monodromie sur \mathcal{L} se factorise à travers C . Ceci achève la démonstration du fait que $\pi_0(f_*\mathcal{C})$ est ℓ -monodromique lorsque f est une courbe ℓ -élémentaire et \mathcal{C} est ℓ -monodromique.

Supposons dorénavant le faisceau $\mathcal{L} = \pi_0(f_*\mathcal{C})$ trivial et considérons une sous-gerbe maximale \mathcal{G} de $f_*\mathcal{C}$. Il nous faut montrer que son lien est ℓ -monodromique (D.1.1.5) ; on va utiliser le lemme D.1.2.4. On vérifie en effet que le morphisme $f^*\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ déduit par adjonction de l'inclusion $\mathcal{G} \hookrightarrow f_*\mathcal{C}$ est fidèle : par commutation des images directes au passage aux fibres, on se ramène à observer que si G est un faisceau localement constant sur X et x un point géométrique d'une fibre géométrique X_s , le morphisme $G(X_s) \rightarrow G_x$ est injectif. (On utilise la connexité des fibres géométriques du morphisme $f : X \rightarrow S$.) D'après *loc. cit.*, il en résulte que la gerbe $f^*\mathcal{G}$ est ℓ -monodromique. Pour démontrer que le lien de \mathcal{G} est ℓ -monodromique, on est donc ramené à vérifier qu'un faisceau \mathcal{F} sur S est ℓ -monodromique si $f^*\mathcal{F}$ l'est. La constructibilité résulte de la surjectivité de f , cf. p. ex. [SGA 4 IX, 2.8], et la lissité n'est guère plus difficile. Que \mathcal{F} soit ℓ -monodromique résulte, dans le cas où les schémas sont connexes, de la surjectivité du morphisme $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S)$ rappelée en D.1.4.7 (premier paragraphe). \square

D.1.4. Schémas $K(\pi, 1)$.

D.1.4.1. Commençons par rappeler quelques résultats de [ABBES et GROS 2011, § 9]. Pour chaque schéma X , on note $X_{\text{ét}}$ le topos étale, $X_{f\text{ét}}$ le topos *fini étale* (autrement dit, le topos associé à la sous-catégorie pleine des X -schémas étales finis munie de la topologie étale) et $\rho : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{f\text{ét}}$ le morphisme évident ([*ibid.*, § 9.2]). Lorsque X est *cohérent*, le morphisme ρ est un morphisme cohérent entre topos cohérents ([*ibid.*, 9.12, 9.14]). Si l'on suppose de plus l'espace topologique quotient $\pi_0(X) = \text{Spec Idem}(X)$ discret (autrement dit : les composantes connexes de X ouvertes), le morphisme d'adjonction $\text{Id} \rightarrow R\rho_*\rho^*$ induit un isomorphisme en degrés 0 et 1, comme on peut le vérifier par passage aux fibres, c'est-à-dire en supposant X simplement connexe (ou encore : $X_{f\text{ét}}$ local). On dit ([*ibid.*, 9.21]) que le schéma X est un $K(\pi, 1)$ s'il satisfait la condition d'acyclicité suivante : pour tout entier $n \geq 1$ inversible sur X et tout faisceau \mathcal{L}_f de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules sur $X_{f\text{ét}}$, le morphisme d'adjonction $\mathcal{L}_f \rightarrow R\rho_*\rho^*\mathcal{L}_f$ est un isomorphisme.

D.1.4.2. Traduction dans le cas connexe. Si X est connexe, le choix d'un point géométrique x de X identifie le topos $X_{f\text{ét}}$ au topos $\mathbf{B}\pi_1(X, x)$ des $\pi_1(X, x)$ -ensembles continus (cf. [*ibid.*, § 9.8]). En particulier, la cohomologie de $X_{f\text{ét}}$ n'est autre que la cohomologie (« galoisienne ») du groupe profini $\pi_1(X, x)$ ([*ibid.*, 9.8.6]). Si X est un $K(\pi, 1)$, alors pour tout entier n inversible sur X et chaque faisceau étale \mathcal{L} de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules localement constant constructible sur X , la flèche canonique $\mathbf{R}\Gamma(\pi_1(X, x), \mathcal{L}_x) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{L})$ est un isomorphisme. La réciproque est vraie lorsque X est cohérent et ceci est encore équivalent au fait qu'un revêtement universel \tilde{X} de X n'a pas de cohomologie à valeur dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en degré ≥ 1 (ou, de façon équivalente, > 1).

D.1.4.3. Variante pro- ℓ . Soit ℓ un nombre premier inversible sur un schéma cohérent X à composantes connexes ouvertes et considérons la sous-catégorie pleine des X -schémas finis étales dont la monodromie (en tant que faisceau d'ensembles représenté) est, sur chaque composante connexe, un ℓ -groupe, autrement dit, dont le groupe de Galois sur X d'une clôture galoisienne est un ℓ -groupe. Munie de la topologie étale, cette catégorie donne lieu à un site, dont on note $X_{\ell\text{ét}}$ le topos associé, naturellement équipé d'un morphisme $\rho_\ell : X_{\ell\text{ét}} \rightarrow X_{\ell\text{ét}}$. Par construction, la cohomologie de $X_{\ell\text{ét}}$ est, dans le cas où X est connexe, la cohomologie du groupe fondamental pro- ℓ de X (pointé en un point géométrique).

D.1.4.4. Un schéma X comme ci-dessus est un $K(\pi, 1)$ **pro- ℓ** si pour tout faisceau abélien de ℓ -torsion ([SGA 4 IX, 1.1]) \mathcal{L}_ℓ sur $X_{\ell\text{ét}}$, l'unité d'adjonction $\mathcal{L}_\ell \rightarrow \mathbf{R}\rho_{\ell\star}\rho_\ell^*\mathcal{L}_\ell$ est un isomorphisme. En conséquence, si x est un point géométrique de X , supposé connexe, et \mathcal{L} est un faisceau abélien ℓ -monodromique (donc constructible) sur X , on a $\mathbf{R}\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X, x), \mathcal{L}_x) \simeq \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{L})$ et, réciproquement, ceci caractérise les $K(\pi, 1)$ pro- ℓ .

D.1.4.5. Mise en garde. Notons qu'avec nos définitions, un schéma $K(\pi, 1)$ n'est pas nécessairement un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ : le noyau du morphisme de pro- ℓ -complétion (« sous-groupe ℓ -résiduel ») d'un groupe profini n'est en général pas pro- ℓ' et, *a fortiori*, pas nécessairement acyclique pour les coefficients de ℓ -torsion.

D.1.4.6. Exemple. Toute courbe affine lisse C sur un corps algébriquement clos est un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ pour chaque nombre premier ℓ . En effet, ni la courbe (affine), ni le pro- ℓ groupe fondamental (libre, cf. p. ex. [WINGBERG 1984, théorème 1.1] lorsque ℓ est inversible sur C) n'ont de cohomologie en degré > 1 . (On utilise également le fait général que l'unité d'adjonction $\text{Id} \rightarrow \mathbf{R}\rho_{\ell\star}\rho_\ell^*$ est un isomorphisme en degré ≤ 1 pour les faisceaux de ℓ -torsion.)

D.1.4.7. PROPOSITION. Soient ℓ un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos k et X une polycourbe ℓ -élémentaire sur $\text{Spec}(k)$. Alors, le schéma X est un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ (cf. D.1.4.4), et le pro- ℓ complété du groupe fondamental de chaque composante connexe de X est extension itérée de pro- ℓ groupes libres de type fini.

DÉMONSTRATION. Soit $f : X \rightarrow Y$ une polycourbe ℓ -élémentaire, où Y est une courbe affine connexe lisse sur corps algébriquement clos de caractéristique $\neq \ell$. On note $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de Y et on souhaite tout d'abord montrer que la suite de pro- ℓ groupes

$$(\dagger) \quad 1 \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X_{\bar{\eta}}) \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{pro-}\ell}(Y) \rightarrow 1$$

est exacte. (On omet ici la notation de points bases.) L'exactitude à droite résulte de la surjection $\pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(Y)$ ([SGA 1 XIII, 4.1]). Soit G un ℓ -groupe fini. Rappelons (cf. par exemple [SGA 4 XII, §1]) que l'on a une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \rightarrow H^1(Y, f_\star G) \rightarrow H^1(X, G) \rightarrow H^0(Y, \mathbf{R}^1 f_\star G),$$

analogue non abélien de la suite exacte de bas degré usuelle (Leray). Ici, on a l'égalité $f_\star G = G$ et le faisceau $\mathbf{R}^1 f_\star G$ est localement constant de fibre en $\bar{\eta}$ isomorphe à $H^1(X_{\bar{\eta}}, G)$ de sorte que le noyau de la flèche (d'ensembles pointés) $H^1(X, G) \rightarrow H^1(X_{\bar{\eta}}, G)$ est l'image de $H^1(Y, G) :$

(\dagger) est exacte au centre (voir p. ex. [SGA 1 V, §6] pour la traduction en terme de groupes fondamentaux).

Notons \mathcal{C} le champ sur Y image directe par f du champ des G -torseurs sur X . Rappelons ([GIRAUD 1971, V.3.1.6]) l'interprétation champêtre de la suite exacte d'ensembles pointés précédente. Le terme de droite s'identifie à l'ensemble des sous-gerbes maximales de \mathcal{C} : à une classe $c \in H^0(Y, R^1 f_* G)$ est associée la gerbe $D(c)$ sur Y dont la fibre en $V \rightarrow Y$ est la catégorie des G -torseurs sur $U = X \times_Y V$ dont la classe dans $H^1(U, G)$ s'envoie sur la restriction $c|_V \in H^0(V, R^1 f_* G)$. La gerbe $D(c)$ est triviale si et seulement si c est l'image d'une classe $[T] \in H^1(X, G)$ et, dans ce cas, $D(c)$ est équivalente au champ des $f_* \text{Aut}(T)$ -torseurs sur Y . D'après D.1.3.7, il existe un ℓ -revêtement étale de $Y' \rightarrow Y$ tel que le faisceau $\pi_0(\mathcal{C}')$ des sous-gerbes maximales de $\mathcal{C}' = (Y' \rightarrow Y)^* \mathcal{C}$ soit fini constant et que chacune des sous-gerbes maximales soient *localement* liées par le lien d'un ℓ -groupe constant. (On utilise la commutation au changement de base de la formation de l'image directe $f_* BG$.) D'après D.1.2.5, ces sous-gerbes maximales, sur la *courbe affine* Y' , sont triviales. Il en résulte que le foncteur de restriction $\mathcal{C}'(Y') = \mathcal{C}(Y') \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\eta})$ est essentiellement surjectif : tout G -torseur sur $X_{\bar{\eta}}$ s'obtient par restriction à partir d'un G -torseur sur $X' = X \times_Y Y'$. Ceci suffit pour achever la démonstration de l'exactitude de (\dagger) (cf. [SGA 1 V, 6.8] et [SGA 1 XIII, 4.3]). On utilise le fait qu'une clôture galoisienne *sur* X d'un G -torseur sur X' est un revêtement d'ordre une puissance de ℓ : si $H'' \trianglelefteq H' \trianglelefteq H$ sont des groupes finis avec $[H : H']$ et $[H' : H'']$ des puissances d'un nombre premier ℓ , le sous-groupe $\bigcap_{h \in H/H''} hH''h^{-1}$ est d'indice une puissance de ℓ dans H .

Pour montrer que X est un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ , commençons par constater que si \mathcal{F} est un faisceau abélien ℓ -monodromique, et f une polycourbe ℓ -élémentaire, les faisceaux $R^j f_* \mathcal{F}$ sont ℓ -monodromiques. La stabilité par extension des faisceaux abéliens ℓ -monodromiques (D.1.2.1) nous permet en effet de nous ramener, par récurrence, au cas où f est une courbe ℓ -élémentaire, auquel cas cela résulte de la proposition D.1.3.7. La conclusion résulte alors de la suite exacte d'homotopie précédente, de l'égalité $R\Gamma(X, \mathcal{F}) = R\Gamma(Y, Rf_* \mathcal{F})$, de l'isomorphisme $R\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(Y, \bar{\eta}), (Rf_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}}) \simeq R\Gamma(Y, Rf_* \mathcal{F})$ (cf. D.1.4.6) et enfin de l'isomorphisme $(Rf_* \mathcal{F})_{\bar{\eta}} = R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \leftarrow R\Gamma(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(X_{\bar{\eta}}), \mathcal{F})$, obtenu par récurrence sur la dimension relative. \square

D.1.4.8. Avant d'énoncer le résultat d'abondance des $K(\pi, 1)$ pro- ℓ ci-dessous, rappelons que P. Deligne a défini dans [DELIGNE 1974b, §5.3.5] la topologie de la descente cohomologique universelle ([SGA 4 Vbis, §3.3]) ; pour une introduction pédagogique à cette notion, le lecteur pourra se référer à [CONRAD 2003]. Nous appellerons **topologie des altérations** la topologie définie par la prétopologie engendrée par les recouvrements étales et les altérations (= morphisme propre et surjectif induisant un morphisme fini au-dessus d'un ouvert partout dense et envoyant tout point maximal sur un point maximal). La topologie de la descente cohomologique universelle est plus fine que la topologie des altérations.

D.1.4.9. PROPOSITION. *Soit ℓ un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos k . Localement pour la topologie des altérations, tout k -schéma algébrique est une polycourbe ℓ -élémentaire (et en particulier, d'après [D.1.4.7](#), localement un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ). De plus, si le schéma est supposé lisse, c'est même vrai localement pour la topologie étale.*

DÉMONSTRATION. Soit X un schéma comme dans l'énoncé, que l'on peut supposer intègre. D'après [A. J. DE JONG 1996, 4.1], il est localement (par une altération) lisse sur k . D'après [SGA 4 XI, 3.3] (rappelé en [D.1.3.3](#)), on peut donc supposer que le k -schéma lisse connexe X est une polycourbe élémentaire. Factorisons $X \rightarrow \text{Spec}(k)$ à travers une courbe élémentaire $f : X \rightarrow Y$. Il existe un revêtement étale $h : Y' \rightarrow Y$ trivialisant $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, c'est-à-dire tel que le faisceau $h^* R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} = R^1 f'_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ soit trivial (i.e., constant) donc, en particulier, ℓ -monodromique. Un tel revêtement est calculable : quitte à se placer au-dessus du point générique du schéma normal Y , ceci est expliqué en [§D.2](#). (Le cas considéré ici est celui, plus facile, d'une courbe ; cf. [D.2.4](#) et [D.2.7](#).) Étant obtenu par changement de base de f , le morphisme f' est une courbe élémentaire, et même ℓ -élémentaire par construction. Par récurrence sur la dimension du schéma considéré, on peut supposer qu'il existe, localement pour la topologie étale au voisinage de chaque point, un morphisme $Y'' \rightarrow Y'$ tel que le morphisme g'' du diagramme commutatif ci-dessous soit une polycourbe ℓ -élémentaire. Le schéma X'' obtenu par changement de base convient.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & X'' \\
 f \downarrow & & \square & & f' \downarrow & & \square & & \downarrow f'' \\
 Y & \longleftarrow & h & \longleftarrow & Y' & \longleftarrow & Y'' \\
 g \downarrow & & \swarrow g' & & \searrow g'' & & \\
 \text{Spec}(k) & \longleftarrow & & & & &
 \end{array}$$

□

D.1.4.10. Notons que l'utilisation du théorème de A. J. de Jong fait perdre l'éventuelle primitive récursivité de notre algorithme (puisque l'on utilise ce théorème en énumérant tous les morphismes sur X jusqu'à trouver une altération qui en résolve les singularités, sans aucune borne sur le temps d'exécution autre que le fait que cette énumération terminera, cf. [D.11.6](#) et [D.12.7](#)). Il est probable que, dans le cas lisse, on puisse préserver l'éventuelle primitive récursivité de notre algorithme par une analyse précise de [SGA 4 XI, §2-3].

D.1.4.11. Si k est algébrique séparable sur un corps ${}_0k$ et X/k obtenu par extension des scalaires d'un ${}_0k$ -schéma algébrique ${}_0X$, tout recouvrement $\{Y_\alpha \rightarrow X\}$ par des polycourbes ℓ -élémentaires est dominé par un recouvrement du même type défini sur ${}_0k$ ^④. En effet, si $Y_\alpha \rightarrow X$ se descend en un morphisme de ${}_1k$ -schémas algébriques ${}_1Y_\alpha \rightarrow {}_1X$, où ${}_1k/{}_0k$ est étale, il suffit de considérer le ${}_0k$ -morphisme composé ${}_1Y_\alpha \rightarrow {}_0X$. Le schéma ${}_1Y_\alpha \otimes_{{}_0k} k$ est isomorphe à

④. Les indices sont mis à gauche pour éviter la confusion avec les indices simpliciaux utilisés ci-dessous.

$Y_\alpha \otimes_k ({}_1k \otimes_{0k} k)$; c'est un coproduit de polycourbes ℓ -élémentaires, fini surjectif au-dessus de Y_α .

Nous utiliserons la proposition précédente sous la forme suivante (cf. [SGA 4 Vbis, 5.1] ou bien [DELIGNE 1974b, 5.3.3.1 et § 6.2]).

D.1.4.12. COROLLAIRE. *Soient ℓ un nombre premier inversible sur un corps algébriquement clos k et X un k -schéma algébrique. Alors, il existe un X -schéma simplicial X_\bullet tel que chaque X_i soit un coproduit fini de polycourbes ℓ -élémentaires et tel que la flèche d'adjonction $\mathrm{R}\Gamma(X_{\bullet, \text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ soit un isomorphisme. De plus :*

- *un morphisme $Y \rightarrow X$ de k -schémas algébriques peut être coiffé par un morphisme simplicial $Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ du type précédent ;*
- *si k est algébrique séparable sur ${}_0k$ et X/k obtenu par extension des scalaires d'un ${}_0k$ -schéma algébrique ${}_0X$, on peut supposer pour tout entier r que la flèche $X_{\bullet, \leq r} \rightarrow X$ provient par extension des scalaires d'une flèche ${}_0X_{\bullet, \leq r} \rightarrow {}_0X$.*

Le dernier point résulte de l'observation **D.1.4.11** et de la construction des hyperrecouvrements rappelée ci-dessous, effectuée sur ${}_0k$. Pour la définition du topos total $\mathrm{Tot} X_{\bullet, \text{ét}}$, voir les références citées en § **D.4**. (Voir également **D.4.1.1** pour une variante « n -approchée ».) Pour la définition d'un hyperrecouvrement, voir par exemple [SGA 4 V, 7.3.1.1] ou bien [DELIGNE 1974b, 5.3.5] (ou, de nouveau, [CONRAD 2003] pour une approche pédagogique).

D.1.4.13. Par la suite, nous utiliserons implicitement le fait que les objets et les flèches ci-dessus sont calculables en tout étage : la construction décrite en [SGA 4 Vbis, 5.1.3] (voir aussi [DELIGNE 1974b, prop. 6.2.4]) ne fait intervenir que des limites et coproduits finis et explicites de schémas, que l'on « améliore » en utilisant **D.1.4.9**. Traitons le problème de la construction d'une flèche $Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ plus en détail ; le cas de X_\bullet en est un cas particulier. Par produit fibré, il suffit de montrer le lemme suivant.

LEMME. *Tout hyperrecouvrement X_\bullet de X peut être dominé par un hyperrecouvrement X'_\bullet à composantes des coproduits de polycourbes ℓ -élémentaires, calculables en tout étage.*

Ici, « hyperrecouvrement » = « hyperrecouvrement pour la topologie des altérations ».

DÉMONSTRATION. Fixons un entier $r \geq 0$ et supposons donné un morphisme simplicial (r -tronqué) $X'_{\leq r} \rightarrow \mathrm{sq}_r X_\bullet$, où $X'_{\leq r}$ est scindé à composantes des coproduits de polycourbes ℓ -élémentaires. D'après **D.1.4.9**, on peut « couvrir » le produit fibré de X_{r+1} et $\mathrm{cosq}_r(X'_{\leq r})_{r+1}$ au-dessus de $\mathrm{cosq}_r(\mathrm{sq}_r X_\bullet)_{r+1}$ par un coproduit de polycourbes ℓ -élémentaires, noté N . Pour le calcul du cosquelette, on utilise la formule :

$$\mathrm{cosq}_r(Z)_s = \lim_{\substack{k \leq r \\ [k] \rightarrow [s]}} Z_k$$

(la limite étant comprise dans la catégorie des X -schémas, et calculable d'après **D.16.3**). D'après [SGA 4 Vbis, 5.1.3], il existe un schéma simplicial $r+1$ -tronqué scindé (calculable) $X'_{\leq r+1}$ prolongeant $X'_{\leq r}$, s'envoyant sur $\mathrm{sq}_{r+1}(X_\bullet)$, tel que X'_{r+1} soit un coproduit de N et de composantes scindées de $X'_{\leq r}$; c'est donc un coproduit de polycourbes ℓ -élémentaires. \square

D.2. Calculabilité du H^1

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant.

D.2.1. THÉORÈME. *Soient X un schéma normal, de type fini sur un corps algébriquement clos k , et G un groupe fini constant d'ordre une puissance d'un nombre premier ℓ inversible sur X . Alors, on peut calculer $H^1(X, G)$, c'est-à-dire produire une liste de représentants des classes d'isomorphie de G -torseurs sur X .*

D.2.2. Il suffit de trouver une extension finie galoisienne du corps des fractions K de X qui domine tous ces G -torseurs, ou encore une extension les trivialisant tous. En effet, si L/K est une telle extension, de groupe de Galois π , l'ensemble $H^1(X, G)$ est naturellement un sous-ensemble de l'ensemble fini $H^1(L/K, G) = \text{Hom}(\pi, G)/G$ des classes d'isomorphie de G -torseurs sur K trivialisés par L/K . Si $\varphi \in \text{Hom}(\pi, G)$, on peut construire explicitement le G -torseur $A_\varphi = \text{Hom}_{\pi\text{-Ens}}(G, L)$ sur K correspondant par la théorie de Galois-Grothendieck, et tout G -torseur sur X est obtenu par normalisation de X dans un tel A_φ (voir [D.15.5](#) pour la calculabilité de la normalisation). Parmi ces X -schémas, en nombre fini, il faut vérifier quels sont ceux qui sont étales et galoisiens de groupe G sur X (cf. [D.17.2](#) et [D.17.3](#)).

D.2.3. Réduction au cas abélien. Notons Z le centre (non trivial) du ℓ -groupe fini G . La suite exacte

$$1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow G/Z \rightarrow 1$$

induit ([GIRAUD 1971, V.2.3]) une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1(X, Z) \rightarrow H^1(X, G) \rightarrow H^1(X, G/Z).$$

Supposons, par récurrence, que l'on sache trouver une extension L du corps des fonctions de X trivialisant les G/Z -torseurs. Soit X_L le normalisé de X dans L . L'image inverse sur X_L de chaque G -torseur sur X provient d'un Z -torseur sur X_L . (On utilise le fait que la restriction au point générique induit une injection sur les H^1 car les schémas considérés sont normaux.) Ceci nous ramène au cas particulier où G est un ℓ -groupe abélien et, finalement, au cas où $G = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, ce qu'on supposera maintenant.

D.2.4. Cas d'une courbe.

D.2.4.1. Si X est une courbe lisse sur le corps algébriquement clos k , le cardinal de $H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est connu. On peut donc effectivement produire tous les $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseurs sur X en un temps fini.

D.2.4.2. REMARQUE. Signalons comment l'on pourrait se ramener au cas d'une courbe projective (lisse). Si \overline{X} est la complétion projective de X et $\overline{X} - X = \{c_1, \dots, c_r\}$ sont les points à l'infini, il existe (Riemann-Roch) une fonction $f \in K^\times$ s'annulant exactement en ces points. Notons $L = K(\sqrt[\ell]{f})$. D'après le lemme d'Abhyankar, le tiré en arrière d'un $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur sur X au normalisé X_L de X dans L s'étend à la complétion projective \overline{X}_L . Pour trouver f , on note qu'il existe un entier n explicite tel que, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe une fonction $f_i \in \mathcal{L}((n+1)c_i) - \mathcal{L}(nc_i)$, que l'on peut calculer algorithmiquement, cf. [HEß 2002];

la fonction $f = \sum_i f_i$ convient. (Une variante de cet argument est également possible lorsque X est un k -schéma algébrique normal, quitte à l'altérer pour en faire le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans un k -schéma projectif lisse (de Jong).)

Signalons pour terminer que si X est une courbe projective lisse, on sait ([SERRE 1975, chap. VI, n°12]) que tout revêtement connexe de groupe $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est induit par une isogénie de la jacobienne de X (que l'on peut construire explicitement ; cf. p. ex. [ANDERSON 2002]). Ceci fournit une approche différente de **D.2.4.1** pour la détermination effective de $H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, qui peut probablement être rendue primitivement récursive.

D.2.5. Fibration en courbes. ^⑤ Supposons dorénavant le schéma X de dimension $d \geq 2$ et démontrons **D.2.1** par récurrence sur l'entier d . On peut supposer le schéma X intègre et, quitte à le modifier — c'est-à-dire le remplacer par un X -schéma propre et birationnel —, on peut également supposer qu'il existe un k -schéma de type fini intègre S de dimension $d - 1$ et un morphisme $X \rightarrow S$ faisant de X une courbe relative sur S à fibre générique lisse et géométriquement connexe. (Cf. p. ex. [A. J. DE JONG 1996, 4.11-12].) Il résulte de ce qui précède — appliqué à la courbe $X_{\bar{\eta}}$ où $\bar{\eta}$ est un point générique géométrique de S — qu'il existe un S -schéma étale S' intègre de point générique η' et un revêtement $Y' \rightarrow X_{S'}$, tel que si T est un G -torseur sur X et T' le toseur obtenu par le changement de base $Y' \rightarrow X$, la fibre générique géométrique $T'_{\eta'}$ est le G -torseur trivial. Quitte à changer les notations, on peut supposer $S = S'$ et $X = Y'$.

(Du point de vue algorithmique, signalons que l'on peut déterminer η par **D.15.2** et que les corps $\kappa(\eta)$ et $\kappa(\bar{\eta})$ conservent les bonnes propriétés de calculabilité que l'on peut imposer à k par **D.12.4**.)

D.2.6. Quitte à remplacer S par un ouvert étale, on peut supposer que le morphisme $X \rightarrow S$ est une *courbe élémentaire*. Vérifions que, sous cette hypothèse, tout G -torseur T sur X à fibre générique géométrique triviale provient de S : ceci nous permettra de conclure, par récurrence, car $\dim(S) = d - 1 < d$. Supposons, comme il a été fait ci-dessus, que G est le groupe abélien $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, et notons f le morphisme $X \rightarrow S$. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(S, f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^0(S, R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}).$$

Comme rappelé en **D.1.3.4**, le morphisme d'adjonction $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \rightarrow f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est un isomorphisme, le faisceau $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est lisse sur S et la fibre générique géométrique de $R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ est isomorphe à $H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Il en résulte que la flèche $H^0(S, R^1 f_* \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est une injection et, par conséquent, que tout $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseur sur X trivialisé par $X_{\bar{\eta}}$ provient de S . (Voir aussi **D.1.3.7** et **D.1.4.7**.) Ceci achève la démonstration du théorème **D.2.1**.

D.2.7. REMARQUE. Supposons X obtenu par extension algébrique des scalaires à partir d'un schéma X_0 sur k_0 et $T^{(1)}, \dots, T^{(N)}$ des représentants des classes d'isomorphie de G -torseurs sur X . Il existe une sous-extension étale k_1/k_0 de k , calculable (**D.16.11**), telle que les G -torseurs précédents soient définis sur k_1 , c'est-à-dire que chaque $T^{(i)}$ soit X -isomorphe à $T_1^{(i)} \times_{X_1} X$,

^⑤. Cette méthode nous a été suggérée par Ofer Gabber.

où $X_1 = X_0 \times_{k_0} k_1$ et $T_1^{(i)}$ est un G -torseur sur X_1 . Dans ce cas, l'action naturelle de $\text{Aut}(k/k_0)$ sur $H^1(X, G)$ se factorise à travers une action explicite du quotient fini $\text{Gal}(k_1/k_0)$: si (plus généralement) $g \in \text{Aut}_{k_0}(X_1)$, l'action (à droite) de g sur $[T_1] \in H^1(X_1, G)$ est donnée par $[T_1] \cdot g = [T_1 \times_{X_1, g} X_1]$.

D.3. Série ℓ -centrale descendante et groupe fondamental

D.3.1. Une filtration.

D.3.1.1. Soient ℓ un nombre premier et G un pro- ℓ groupe. Pour tout sous-groupe H de G , notons $F(H)$ l'adhérence du sous-groupe $H^\ell \cdot (H, G)$ de G , où (X, Y) désigne le sous-groupe engendré par les commutateurs $x^{-1}y^{-1}xy$ pour x dans X et y dans Y : autrement dit, il s'agit du sous-groupe fermé de G engendré par les puissances ℓ -ièmes des éléments de H et des commutateurs de ces éléments avec ceux de G . Rappelons ([DIXON et collab. 1999, 1.15] ou [NEUKIRCH, A. SCHMIDT et WINGBERG 2000, définition 3.8.1]) que la **série ℓ -centrale descendante** de G est la filtration définie de la façon suivante : $G^{[1]} = G$, et $G^{[n+1]} = F(G^{[n]})$. Ces sous-groupes sont caractéristiques dans G et on note $G^{(n)}$ le quotient $G/G^{[n]}$. En particulier, $G^{[2]}$ est le sous-groupe de Frattini $\Phi(G)$ de G ([SERRE 1978-79, §3.6] ou [ROTMAN 1995, théorème 5.48(ii)]) et le \mathbb{F}_ℓ -espace vectoriel $G^{(2)}$ est naturellement le dual de $\text{Hom}_{\text{cont}}(G, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.

Pour des raisons typographiques, nous noterons parfois $F^n G$ pour $G^{[n]}$, notamment en §D.6.

D.3.1.2. REMARQUES. On vérifie sans peine que $G^{[n+1]}$ est le plus petit sous-groupe fermé normal de G contenu dans $G^{[n]}$ tel que $G^{[n]}/G^{[n+1]}$ soit ℓ -élémentaire abélien et contenu dans le centre de $G/G^{[n+1]}$.

Pour notre propos, nous avons une certaine liberté dans le choix de la filtration : on aurait aussi bien pu considérer, par exemple, la filtration de Frattini itérée $\Phi^n G$, où $\Phi(H) = \overline{H^\ell(H, H)} \subseteq F(H)$. À ce sujet, signalons que la filtration de Frattini itérée $\Phi^n G$ et la filtration ℓ -centrale descendante $F^n G$ définie ci-dessus sont équivalentes au sens où il existe une fonction $\tau(d, n)$ (explicitement calculable, et même, primitivement récursive) telle que $F^{\tau(d, n)} G \subseteq \Phi^n G \subseteq F^n G$ si G a d générateurs (comme pro- ℓ -groupe). (Esquisse de démonstration : l'inclusion $\Phi^n G \subseteq F^n G$ est évidente. L'inclusion $F^{\tau(d, n)} G \subseteq \Phi^n G$ se montre en combinant le (i) du lemme D.6.1 ci-dessous avec un l'analogue du (ii) pour la filtration $\Phi^n G$. Cet analogue du (ii) revient à majorer l'ordre de $L/\Phi^n L$ où L est le pro- ℓ -groupe libre à d générateurs : ceci peut se faire par récurrence sur n en utilisant le fait que $\#(L/\Phi L) = \ell^d$ et le théorème de l'indice de Schreier [LUBOTZKY et SEGAL 2003, prop. 16.4.5] pour calculer le nombre de générateurs de $\Phi^n L$.)

Signalons également que si G est topologiquement de type fini, le passage à l'adhérence est superflu, les sous-groupes considérés étant déjà fermés, tant pour F que pour Φ ([DIXON et collab. 1999, corollaire 1.20]).

D.3.2. Revêtements et topos associés.

D.3.2.1. Soient X un schéma *connexe*, séparé de type fini sur un corps algébriquement clos k , x un point géométrique, ℓ un nombre premier inversible sur k et π_X le groupe fondamental pro- ℓ de (X, x) . Ce groupe est topologiquement de type fini, par finitude de $H^1(X, \mathbb{F}_\ell) = \text{Hom}(\pi_X, \mathbb{F}_\ell)$, si bien que le morphisme canonique $\pi_X \rightarrow \lim_n \pi_X^{(n)}$ est un isomorphisme (voir par exemple [NEUKIRCH, A. SCHMIDT et WINGBERG 2000, 3.8.2], ou [DIXON et collab. 1999, proposition 1.16 (iii)]).

Pour chaque entier $n \geq 1$, notons $X^{[n]} \rightarrow X$ un revêtement étale de X correspondant au sous-groupe d'indice fini $\pi_X^{[n]}$ de π_X ; nous dirons que c'est un **revêtement ℓ -étale n -approché universel** de X . On note $X_{\ell\text{ét}}^{(n)}$, voire simplement $X^{(n)}$, le *topos* des faisceaux sur $X_{\ell\text{ét}}$ trivialisés par le revêtement étale $X^{[n]} \rightarrow X$. Le morphisme naturel $X_{\ell\text{ét}} \rightarrow X_{\ell\text{ét}}^{(n)}$ s'identifie au morphisme de topos $\mathbf{B}\pi_X \rightarrow \mathbf{B}\pi_X^{(n)}$ déduit de la surjection $\pi_X \twoheadrightarrow \pi_X^{(n)}$: l'image inverse est le foncteur des $\pi_X^{(n)}$ -ensembles vers les π_X -ensembles continus (obtenu par composition) et l'image directe est le foncteur « invariants sous $\pi_X^{[n]}$ »; cf. p. ex. [SGA 4 IV, 4.5.1]. (On laisse le soin au lecteur de définir $X_{\ell\text{ét}}^{(n)}$ sous des hypothèses plus générales; nous n'en aurons pas usage.) Par construction, pour chaque $n \geq 2$, le topos $X_{\ell\text{ét}}^{(n)}$ est ponctuel si et seulement si π_X est trivial, c'est-à-dire si X ne possède pas de revêtement étale connexe d'ordre ℓ .

D.3.2.2. *Mutatis mutandis*, les définitions précédentes s'étendent au cas d'un schéma (algébrique sur un corps algébriquement clos) *non nécessairement connexe*. Pour définir $X^{[n]}$, on écrit X comme coproduit de ses composantes connexes (ouvertes) et l'on procède de manière évidente: si $X = \coprod_{c \in \pi_0(X)} X_c$, on pose $X^{[n]} := \coprod_{c \in \pi_0(X)} X_c^{[n]}$. La définition du topos $X^{(n)}$ est inchangée et celle du groupe $\pi_X^{(n)}$ devrait être remplacée par la définition d'un *groupoïde* $\Pi_X^{(n)}$.

Notons que $X_{\ell\text{ét}}^{(1)}$ est le topos discret des faisceaux sur l'ensemble (fini) $\pi_0(X)$.

D.3.2.3. Donnons une description alternative de $X^{(n)}$. Commençons par observer qu'il est équivalent au topos des faisceaux sur le site ℓ -étale n -approché de X dont les objets sont les $U \rightarrow X$ finis étales qui sont, composante connexe par composante connexe, quotients d'un revêtement ℓ -étale n -approché universel de X ; une famille est couvrante si son image recouvre X . Fixons un revêtement ℓ -étale n -approché universel $X^{[n]}$ de X , et notons $\Pi_{X^{[n]}/X}$ le groupoïde totalement discontinu (au sens de [GABRIEL et ZISMAN 1967, 6.1.4]) dont les objets sont les $c \in \pi_0(X)$, de groupe d'automorphismes $\text{Aut}_{X_c}(X_c^{[n]})$. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X^{[n]})$ induit une équivalence entre le topos $X^{(n)}$ et le topos des préfaisceaux sur $\Pi_{X^{[n]}/X}$. Les foncteurs $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X_c^{[n]})$ sont des *points* du topos $X^{(n)}$. (Noter qu'un schéma $X_c^{[n]}$ n'est pas nécessairement local au sens de la topologie ℓ -étale n -approchée considérée.)

D.3.2.4. Nous dirons qu'un faisceau d'ensembles constructible \mathcal{F} sur $X^{(n)}$ (resp. un morphisme $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$) est **calculable** (en fonction des données) s'il en est ainsi du X -schéma ℓ -étale n -approché $X^{\mathcal{F}}$ (resp. du morphisme $X^{\mathcal{F}} \rightarrow X^{\mathcal{G}}$) qui le représente (ce schéma ou morphisme étant lui-même décrit au sens de la section D.16); si le faisceau \mathcal{F} est abélien, on demande de plus que les X -morphisms $+$: $X^{\mathcal{F}} \times_X X^{\mathcal{F}} \rightarrow X^{\mathcal{F}}$ (addition), $[-1]$: $X^{\mathcal{F}} \rightarrow X^{\mathcal{F}}$ (opposé) et e : $X \rightarrow X^{\mathcal{F}}$ (neutre) soient calculables. L'ensemble des sections sur un ouvert ℓ -étale n -approché donné U d'un faisceau calculable \mathcal{F} , ainsi que les flèches de functorialité, sont calculables: il suffit de calculer l'ensemble des sections du morphisme fini étale de schémas

$X^{\mathcal{F}} \rightarrow X$ au-dessus de U , et les flèches induites ; cf. **D.17.3**. Réciproquement, l'action de la monodromie sur $\mathcal{F}(X^{[n]})$ permet de reconstruire $X^{\mathcal{F}}$.

D.3.2.5. Il résulte immédiatement de ce qui précède que l'on peut calculer le noyau d'un morphisme calculable $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de faisceaux constructibles abéliens. Il en est de même du conoyau : il est représenté par le plus grand quotient X' de $X^{\mathcal{G}}$ tel que le morphisme de schémas en groupes $X^{\mathcal{F}} \rightarrow X'$ se factorise à travers la section nulle $X \rightarrow X'$.

D.3.2.6. Nous dirons qu'un faisceau d'ensembles constructible \mathcal{F} sur $X^{(n)}$ est **induit** s'il est isomorphe à un faisceau image directe étale $\pi_{\text{ét}, \star} E$, où π est le morphisme (fini étale) $X^{[n]} \rightarrow X$ et E est un faisceau constant constructible sur chaque composante connexe. Tout faisceau d'ensemble constructible \mathcal{F} sur $X^{(n)}$ est sous-objet d'un faisceau induit : l'unité $\mathcal{F} \rightarrow \pi_{\text{ét}, \star} \pi_{\text{ét}, \star}^* \mathcal{F}$ est un monomorphisme. Si \mathcal{F} est *calculable*, il en est de même de l'injection précédente.

Rappelons que l'image inverse d'un faisceau représentable est représentée par le produit fibré évident et que si \mathcal{G} est un faisceau d'ensembles constructible sur un schéma X' , représenté par un X' -schéma Y' , le faisceau étale image directe $f_{\text{ét}, \star} \mathcal{G}$ par un morphisme *fini étale* $f : X' \rightarrow X$ est représenté par même schéma Y' , vu sur X . On utilise ici l'égalité $f_{\text{ét}, \star} = f_{\text{ét}, 1}$ et la description de ce dernier foncteur faite par exemple en [SGA 4 IV, 11.3.1].

D.3.3. Calculabilité de $X^{[n]}$.

D.3.3.1. Soient k un corps algébriquement clos et X un k -schéma algébrique *normal*, non nécessairement connexe. Comme précédemment, on a fixé un nombre premier ℓ inversible sur k . On se propose de montrer que l'on peut calculer un revêtement ℓ -étale n -approché universel $X^{[n]}$ de X . Une décomposition de X en composantes connexes étant calculable (cf. **D.16.6**), on suppose dorénavant le schéma X connexe. Observons maintenant qu'une fois calculé $X^{[n]} \rightarrow X$, on peut en déduire $\pi_X^{(n)}$ qui est isomorphe au groupe d'automorphismes $\text{Aut}_X(X^{[n]})$, lui-même en bijection avec $\pi_0(X^{[n]} \times_X X^{[n]})$ par son action sur la composante connexe diagonale (cf. **D.17.3** ou **D.16.6**). Réciproquement, si $\pi_X^{(n)}$ — ou même simplement son cardinal — est connu, on peut construire $X^{[n]}$, au pire par recherche non bornée (**D.12.7**) d'un revêtement étale ayant le bon groupe de Galois. Ci-dessous, nous allons donc nous contenter de calculer le groupe $\pi_X^{(n)}$ dans le cas où X est normal connexe (en fait, il n'est pas difficile de se convaincre qu'on construit bien $X^{[n]}$).

D.3.3.2. REMARQUE. Par « calcul » d'un groupe fini, on entend la détermination du cardinal et d'une table de multiplication du groupe. (En particulier, on peut en déterminer des générateurs — par exemple, le groupe tout entier — et, pour tout ensemble fini de générateurs, une présentation finie associée.)

D.3.3.3. $n = 2$. Comme signalé ci-dessus, le groupe abélien $\pi_X^{(2)}$ est isomorphe au dual du \mathbb{F}_ℓ -espace vectoriel de dimension finie $H^1(X, \mathbb{F}_\ell)$. D'après le théorème **D.2.1**, on peut calculer le rang de cet espace vectoriel. En particulier, si π_X est un pro- ℓ -groupe libre de type fini, on peut calculer son rang (nombre minimal de pro-générateurs).

D.3.3.4. Récurrence sur n . On suppose que l'on sait calculer le groupe $\pi_X^{(n)}$ et par conséquent un revêtement ℓ -étale n -approché universel $X^{[n]} \rightarrow X$. Considérons maintenant un

revêtement ℓ -étale 2-approché universel $X^{[n|2]}$ de $X^{[n]}$. C'est également un revêtement galoisien de X car le sous-groupe de Frattini $\Phi(\pi_X^{[n]})$ est caractéristique dans π_X donc distingué. Notons G le groupe de Galois de $X^{[n|2]}$ sur X , que l'on peut calculer : c'est le groupe d'automorphismes d'un X -schéma explicite. Abstraitement, il est isomorphe à $\pi_X/\Phi(\pi_X^{[n]})$; le groupe $\pi_X^{(n+1)} = \pi_X/\pi_X^{[n+1]}$ — que l'on cherche à calculer — en est donc un quotient. Plus précisément, par functorialité ([DIXON et collab. 1999, proposition 1.16 (i)]), $\pi_X^{(n+1)} = G^{(n+1)}$. Ceci permet de conclure.

D.3.4. Functorialité. De même que l'on ne peut associer à un espace topologique (connexe localement simplement connexe) un revêtement universel de façon functorielle, on ne peut espérer choisir $X^{[n]}$ functoriellement en X . Tout comme $X \rightsquigarrow X_{\text{ét}}$ (cf. p. ex. [SGA 4 VII, 1.4]), la construction $X \rightsquigarrow X_{\text{ét}}^{(n)}$ définit seulement un *pseudo-foncteur* ([SGA 1 VI, §8] ou [BORCEUX 1994, 7.5.1]) covariant de la catégorie des schémas vers la 2-catégorie des topos.

D.3.4.1. Soit $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ un morphisme de schémas pointés, entre k -schémas algébriques, où k est un corps algébriquement clos sur lequel un nombre premier ℓ fixé est inversible. (On ne suppose pas que le morphisme f est un k -morphisme.) Soient $n \geq 1$ un entier et $X^{[n]}$ (resp. $Y^{[n]}$) un revêtement ℓ -étale n -approché universel de X (resp. Y). Il résulte de la théorie des revêtements et de la functorialité de $G \mapsto G^{(n)}$ qu'il existe un morphisme $f^{[n]} : X^{[n]} \rightarrow Y^{[n]}$ au-dessus de $f : X \rightarrow Y$, c'est-à-dire rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X^{[n]} & \xrightarrow{f^{[n]}} & Y^{[n]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Si X et Y sont connexes, ce morphisme $f^{[n]}$ est unique à translation près par $\text{Aut}_Y(Y^{[n]})$. Si f est un k -morphisme explicite entre schémas normaux, on peut le calculer.

Rigidification : choisissons des points géométriques $x^{[n]} \rightarrow X^{[n]}$ et $y^{[n]} \rightarrow Y^{[n]}$ au-dessus de x et y respectivement. Alors, il existe un *unique* morphisme pointé $f_{xy}^{[n]} : (X^{[n]^\circ}, x^{[n]}) \rightarrow (Y^{[n]^\circ}, y^{[n]})$ au-dessus de f , où le terme de gauche d'une paire (Z°, z) désigne la composante connexe de Z contenant z .

D.3.4.2. Version simpliciale. Soit X_\bullet un k -schéma algébrique simplicial tronqué — c'est-à-dire un foncteur d'une catégorie $\mathbf{\Delta}_{\leq r}^\circ$ ($r \in \mathbb{N}$) vers les k -schémas algébriques —, et $P_\bullet \rightarrow X_\bullet$ un morphisme simplicial (tronqué), tel que chaque P_i soit coproduit fini de points géométriques. Il existe pour chaque i un relèvement de $P_i \rightarrow X_i$ à un revêtement ℓ -étale n -approché universel $X_i^{[n]}$ de X_i . Notons $X_{P_i}^{[n]^\circ}$ le coproduit $\coprod_{p_i \in P_i} X_{p_i}^{[n]^\circ}$, où $X_{p_i}^{[n]^\circ}$ désigne la composante connexe de $X_i^{[n]}$ contenant l'image de p_i . D'après le paragraphe précédent, les $X_{p_i}^{[n]^\circ}$ s'organisent *de façon unique* en un schéma simplicial $X_{P_\bullet}^{[n]^\circ}$ de telle sorte que $P_\bullet \rightarrow X_{P_\bullet}^{[n]^\circ}$ soit une factorisation simpliciale de $P_\bullet \rightarrow X_\bullet$.

⊙. C'est la catégorie des ensembles $\{0, \dots, s\} \subseteq \mathbb{N}$, où $s \leq r$, munis des applications croissantes ; elle est notée $(\mathcal{A})_r$ dans [DELIGNE 1974b, 5.1.1].

En d'autres termes, quitte à introduire des « multiplicités », on peut relever simplicialement les points géométriques d'un schéma à un revêtement ℓ -étale n -approché universel.

D.4. Cohomologie ℓ -étale n -approchée d'un schéma simplicial

On vérifie ici le fait — énoncé en [D.4.3.1](#) et intuitivement évident compte tenu de ce qui précède ([D.3.3](#)) —, que l'on sait calculer la cohomologie des topos obtenus à partir d'un schéma simplicial tronqué par application du pseudo-foncteur $S \rightsquigarrow S^{(n)}$ (cf. [¶D.3.4](#)). Il est logiquement possible, et peut-être préférable, de ne lire cette section qu'après la section [D.8](#). Pour un raccourci, cf. [D.4.2.3](#).

D.4.1. Généralités. Nous renvoyons le lecteur à [[ILLUSIE 1971-1972](#), VI, § 5.1 et § 6.2] ou [[SGA 4 VI](#), §7] pour les détails, et [[DELIGNE 1974b](#), § 5.1] pour un résumé (qui est le point de départ de la théorie) dans le cas des espaces topologiques.

D.4.1.1. Cohomologie d'un topos simplicial. Soient X_\bullet un k -schéma algébrique simplicial et n un entier ≥ 1 . Notons $X_\bullet^{(n)}$ le topos simplicial (c'est-à-dire fibré sur $\mathbf{\Delta}$) qui s'en déduit par application du pseudo-foncteur $S \rightsquigarrow S^{(n)}$ et $\text{Tot } X_\bullet^{(n)}$ le topos total associé, noté $\text{Top } X_\bullet^{(n)}$ dans [[ILLUSIE 1971-1972](#), VI, § 5.1]. On peut voir un objet \mathcal{F}_\bullet de $\text{Tot } X_\bullet^{(n)}$ comme la donnée pour chaque ouvert U d'un X_i (ouvert : objet du site ℓ -étale n -approché défini en [D.3.2.3](#)) d'un ensemble $\mathcal{F}_\bullet(U) = \mathcal{F}_i(U)$, fonctoriellement en un sens que nous ne répétons pas ([[ibid.](#), VI, § 5.2] ou [[DELIGNE 1974b](#), 5.1.7] ; essentiellement, la fonctorialité est « cosimpliciale en i et faisceautique en U »).

Rappelons par contre un procédé de calcul de la cohomologie de $\text{Tot } X_\bullet^{(n)}$ à valeurs dans un faisceau abélien \mathcal{F}_\bullet . Le cas du H^0 (sections globales) est particulièrement simple : c'est $\lim_{i \in \mathbf{\Delta}} \Gamma(X_i^{(n)}, \mathcal{F}_i) = \text{Ker}(\Gamma(X_0^{(n)}, \mathcal{F}_0) \rightrightarrows \Gamma(X_1^{(n)}, \mathcal{F}_1))$. Soit $u_\bullet : P_\bullet \rightarrow X_\bullet^{(n)}$ un morphisme simplicial tel que pour chaque étage i , le topos P_i soit discret (c'est-à-dire coproduit de topos ponctuels) et le morphisme $u_i : P_i \rightarrow X_i^{(n)}$ d'image inverse conservative. Notons $\mathcal{F}_i^\bullet = (\mathcal{F}_i^j)$ la résolution flasque (« de Godement ») du faisceau \mathcal{F}_i associée. Le système des $\Gamma(X_i^{(n)}, \mathcal{F}_i^j)$ est cosimplicial en i et différentiel gradué en j ; il fournit un complexe double, la différentielle en i étant la somme alternée usuelle. La cohomologie cherchée est celle du complexe simple associé :

$$\text{R}\Gamma(\text{Tot } X_\bullet^{(n)}, \mathcal{F}_\bullet) \simeq \text{Tot } \Gamma(X_i^{(n)}, \mathcal{F}_i^j).$$

Le terme $\Gamma(X_i^{(n)}, \mathcal{F}_i^j)$ de droite n'est autre que l'ensemble des sections globales de \mathcal{F}_i^j , vu comme faisceau étale sur le schéma X_i .

On en déduit notamment que $\tau_{<r} \text{R}\Gamma(\text{Tot } X_\bullet^{(n)}, \mathcal{F}_\bullet)$ ne dépend que du schéma simplicial tronqué $X_{\bullet \leq r}$ et de la restriction de \mathcal{F}_\bullet correspondante. Bien que cela ne soit pas absolument nécessaire pour les résultats de cet article, nous précisons en [D.4.1.2](#) ci-dessous cette observation.

D.4.1.2. Variante tronquée (cf. [[GABBER 2001](#)]). Pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et tout faisceau abélien $F_{\bullet \leq r}$ sur $\mathbf{\Delta}_{\leq r}^{\text{op}}$ (c'est-à-dire : groupe abélien cosimplicial tronqué $\mathbf{\Delta}_{\leq r} \rightarrow \text{Ab}$), les sections globales dérivées $\text{R}\Gamma(\mathbf{\Delta}_{\leq r}^{\text{op}}, F_{\bullet \leq r})$ sont calculées par le complexe normalisé $NF_{\bullet \leq r} \in \text{Ob } C^{[0,r]}(\text{Ab})$ de la correspondance de Dold-Kan. Pour une définition de ce complexe dans un

contexte non tronqué, cf. par exemple [DOLD et PUPPE 1961, §3]. Les sections globales dérivées d'un *complexe* (de groupes abéliens cosimpliciaux tronqués) se calculent en prenant le *complexe simple* obtenu par ce procédé. Si $X_{\leq r}$ est un k -schéma algébrique tronqué et $\mathcal{F}_{\leq r}$ est un faisceau sur $\text{Tot } X_{\leq r}^{(n)}$, on en déduit en poussant par $X_{\leq r}^{(n)} \rightarrow \mathbf{\Delta}_{\leq r}$ que pour toute résolution $\mathcal{F}_{\leq r}^{\bullet}$ à $\mathcal{F}_{i \leq r}^j$ acycliques sur $X_i^{(n)}$, on a

$$\mathbf{R}\Gamma(\text{Tot } X_{\leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_{\leq r}) = \text{Tot } N_i \Gamma(X_{i \leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_i^j)$$

où, pour chaque j , on note $N_i \Gamma(X_{i \leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_i^j)$ le complexe normalisé déduit du groupe cosimplicial tronqué $i \mapsto \Gamma(X_{i \leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_i^j)$. Ceci est compatible avec la description non « normalisée » du paragraphe précédent par le théorème d'Eilenberg-Mac Lane, [ibid., 3.22].

Si X_{\bullet} (resp. \mathcal{F}_{\bullet}) est une extension de $X_{\leq r}$ (resp. de $\mathcal{F}_{\leq r}$) en un k -schéma simplicial non tronqué (resp. en un faisceau sur $\text{Tot } X_{\bullet}^{(n)}$), on a donc un triangle distingué

$$(\text{complexe dans } D^{>r}(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(\text{Tot } X_{\bullet}^{(n)}, \mathcal{F}_{\bullet}) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(\text{Tot } X_{\leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_{\leq r}) \xrightarrow{+1}$$

de sorte qu'en particulier la flèche

$$\mathbf{H}^d(\text{Tot } X_{\bullet}^{(n)}, \mathcal{F}_{\bullet}) \rightarrow \mathbf{H}^d(\text{Tot } X_{\leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_{\leq r})$$

est un isomorphisme pour $d < r$ et injective pour $d = r$.

D.4.2. Résolution de Godement explicite. Montrons maintenant que les considérations précédentes permettent de calculer les $\mathbf{H}^i(\text{Tot } X_{\leq r}^{(n)}, \mathcal{F}_{\leq r})$ lorsque les objets sont donnés explicitement.

D.4.2.1. On reprend les notations de D.4.1.1 et l'on suppose chacun des étages X_i de $X_{\leq r}$ *normaux*, afin de pouvoir appliquer les résultats de D.3.3. Observons tout d'abord que, si P est un point géométrique d'un des X_i (obtenu par exemple par le procédé décrit en D.16.10), l'ensemble de ses images par toutes les composées de morphismes de bord et de dégénérescence est fini, de cardinal borné par celui de l'ensemble de toutes les applications croissantes $\{0, \dots, m\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ avec $m, n \leq r$. On peut donc choisir un ensemble fini $\{P_j\}$ de points géométriques formant un morphisme simplicial $P_{\leq r} \rightarrow X_{\leq r}$ et tel que chaque composante connexe de chacun des X_i contienne au moins un des P_j . Comme expliqué en D.3.4.2, on peut relever $P_{\leq r}$ en un morphisme de schémas simpliciaux $P_{\leq r} \rightarrow X_{P_{\leq r}}^{[n]^\circ}$, qui nous permet de calculer les images directes et inverses par le morphisme de topos simpliciaux $u_{\leq r} : P_{\leq r} \rightarrow X_{\leq r}^{(n)}$, où l'on voit maintenant (abusivement) les P_i comme des topos discrets. Le calcul de l'image inverse $u_i^* \mathcal{F}$ d'un faisceau \mathcal{F} sur $X_i^{(n)}$ est évident : sa fibre en p_i est $\mathcal{F}(X_{p_i}^{[n]^\circ})$. L'image directe $u_{i*} E$, pour la topologie ℓ -étales n -approchée, est le faisceau induit (D.3.2.6) image directe usuelle (=étales) par le morphisme fini étales $X_{P_i}^{[n]^\circ} \rightarrow X_i$ du faisceau constant sur chaque composante connexe correspondant à E . Donnée E , ce faisceau est calculable, étant représenté par un coproduit explicite $X_{P_i, E}^{[n]^\circ}$ de copies de $X_{P_i}^{[n]^\circ}$. De plus, on peut calculer les X -morphisms (addition, neutre, opposé) faisant de $X_{P_i, E}^{[n]^\circ}$ un X -schéma en groupes fini.

D.4.2.2. Pour tout faisceau $\mathcal{F}_{\cdot, \leq r} \in \text{Ob Tot } X_{\cdot, \leq r}^{(n)}$, le morphisme d'adjonction $\mathcal{F}_{\cdot, \leq r} \rightarrow \mathcal{G}_{\cdot, \leq r} := u_{\cdot, \leq r} u_{\cdot, \leq r}^* \mathcal{F}_{\cdot, \leq r}$ est le début de la résolution flasque de Godement considérée ci-dessus. Supposons $\mathcal{F}_{\cdot, \leq r}$ calculable, c'est-à-dire représentable par un schéma simplicial tronqué en groupes abéliens finis $X_{\cdot, \leq r}^{\mathcal{F}}$ au-dessus de $X_{\cdot, \leq r}$ qui est calculable (cf. [D.3.2.4](#)). Comme expliqué ci-dessus, le faisceau $\mathcal{G}_{\cdot, \leq r}$ — induit étage par étage — est également calculable, ainsi que la flèche $\mathcal{F}_{\cdot, \leq r} \rightarrow \mathcal{G}_{\cdot, \leq r}$. D'après [D.3.2.5](#), le conoyau de cette flèche est calculable : on a montré que, donné $\mathcal{F}_{\cdot, \leq r}$ — et les données auxiliaires, non canoniques, $P_{\cdot, \leq r}$, etc. —, on peut calculer une résolution « de Godement » $\mathcal{C}_P^{(n)}(\mathcal{F}_{\cdot, \leq r})$ jusqu'à des degrés arbitrairement grands.

D.4.2.3. Variante par recherche non bornée. Si l'on s'autorise à être moins explicite (et perdre l'éventuelle primitive récursivité), on peut procéder plus simplement, c'est-à-dire sans avoir recourt aux schémas simpliciaux $P_{\cdot, \leq r}$ et $X_{P_{\cdot, \leq r}}^{[n]_0}$. Fixons comme ci-dessus un corps k , un nombre premier ℓ , un schéma simplicial tronqué $X_{\cdot, \leq r}$, un anneau Λ , et deux entiers n et d . Il existe une résolution tronquée par un complexe d'induits \mathcal{F}_i^j (cosimplicial en $i \leq r$, différentiel gradué en $j \leq d$) du faisceau constant de valeur Λ sur $X_{\cdot, \leq r}$. Cette résolution tronquée est, par hypothèse, acyclique étage par étage et calcule la cohomologie tronquée : $\tau_{< d} \text{R}\Gamma(\text{Tot } X_{\cdot, \leq r}^{(n)}, \Lambda) = \tau_{j < d} \text{Tot } N_i \Gamma(X_i, \mathcal{F}_i^j)$. Pour calculer la cohomologie de $\text{Tot } X_{\cdot, \leq r}^{(n)}$ à valeurs dans Λ en degrés strictement inférieurs à d , il suffit donc de parcourir les morphismes $\Lambda \rightarrow \mathcal{F}_i^j$, où \mathcal{F}_i^j est un complexe tronqué d'induits, et, si c'est une résolution tronquée (c'est-à-dire acyclique en degrés $\leq d$) — fait que l'on sait vérifier (cf. [D.3.2.5](#)) —, de calculer le terme de droite correspondant. On peut procéder de même pour calculer les flèches de functorialité en n et en $X_{\cdot, \leq r}$.

D.4.2.4. REMARQUE. Ce qui précède peut être vu comme une variante du fait bien connu que l'on sait calculer en chaque degré la cohomologie d'un groupe fini agissant sur un Λ -module explicite (voir par exemple la définition donnée en [[SERRE 1994](#), I, §2.2]). Sur le problème de la détermination de l'algèbre de cohomologie $H^*(G, \Lambda)$ d'un groupe fini G , voir par exemple [[CARLSON 2001](#)]. (D'après le théorème de Venkov-Evens ([[EVENS 1991](#), 7.4.6]), c'est une Λ -algèbre de type fini.)

D.4.2.5. La construction précédente d'un résolution de Godement est fonctorielle en n en un sens évident : une fois choisi $P_{\cdot, \leq r} \rightarrow X_{P_{\cdot, \leq r}}^{[n]_0}$ comme ci-dessus, on a pour tout $m \leq n$ un choix naturel de $P_{\cdot, \leq r} \rightarrow X_{P_{\cdot, \leq r}}^{[m]_0}$, qui permet de calculer — jusqu'à des degrés arbitrairement grands — la flèche $\rho_m^* \mathcal{C}_P^{(m)}(\mathcal{F}_{\cdot, \leq r}) \rightarrow \rho_n^* \mathcal{C}_P^{(n)}(\mathcal{F}_{\cdot, \leq r})$, où ρ_n est le morphisme de topos $\text{Tot } X_{\cdot, \leq r} \rightarrow \text{Tot } X_{\cdot, \leq r}^{(?)}$.

D.4.2.6. Soit maintenant $f_{\cdot, \leq r} : X_{\cdot, \leq r} \rightarrow Y_{\cdot, \leq r}$ un morphisme de k -schémas normaux simpliciaux tronqués. Expliquons brièvement comment calculer la flèche induite sur la cohomologie des topos totaux ℓ -étales n -approchés. On commence par produire une flèche simpliciale de points conservatifs $P_{\cdot, \leq r}^X \rightarrow P_{\cdot, \leq r}^Y$ au-dessus de $X_{\cdot, \leq r} \rightarrow Y_{\cdot, \leq r}$, que l'on relève arbitrairement aux schémas $X_i^{[n]}$ et $Y_i^{[n]}$, puis on construit l'unique morphisme simplicial $X_{P_{\cdot, \leq r}^X}^{[n]} \rightarrow Y_{P_{\cdot, \leq r}^Y}^{[n]}$ au-dessus de $X_{\cdot, \leq r} \rightarrow Y_{\cdot, \leq r}$ les respectant. On peut alors calculer un morphisme de résolution de Godement $\mathcal{C}_{P^Y}^{(n)}(\mathcal{F}_{\cdot, \leq r}) \rightarrow \mathcal{C}_{P^X}^{(n)}(\mathcal{F}_{\cdot, \leq r})$ au-dessus du morphisme de topos $\text{Top } X_{\cdot, \leq r} \rightarrow \text{Top } Y_{\cdot, \leq r}$.

D.4.3. Pour référence ultérieure, résumons les rappels et observations précédentes sous la forme suivante.

D.4.3.1. PROPOSITION. *Soient k un corps algébriquement clos, ℓ un nombre premier inversible sur k , $r \geq 0$ un entier et $X_{\bullet, \leq r}$ un k -schéma algébrique normal simplicial tronqué. Pour tout ℓ -groupe abélien fini Λ et tout triplet d'entiers $d \geq 0, n \geq m \geq 1$, on peut calculer le complexe $\tau_{\leq d} \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \leq r}^{(n)}, \Lambda)$ et la flèche $\tau_{\leq d} \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \leq r}^{(m)}, \Lambda) \rightarrow \tau_{\leq d} \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \leq r}^{(n)}, \Lambda)$. De plus, donné un morphisme $X_{\bullet, \leq r} \rightarrow Y_{\bullet, \leq r}$ de k -schémas algébriques normaux simpliciaux tronqués, on peut calculer la flèche $\tau_{\leq d} \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Tot} Y_{\bullet, \leq r}^{(n)}, \Lambda) \rightarrow \tau_{\leq d} \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \leq r}^{(n)}, \Lambda)$.*

Par « calcul » d'un complexe ou d'une flèche, on entend par là que l'on peut trouver des représentants explicites au sens de [D.13.3](#).

D.4.3.2. REMARQUE. Considérant le cas particulier $m = 1$, on voit que l'on peut calculer les flèches

$$\tau_{\leq d} \check{\mathbf{R}}\Gamma(X_{\bullet, \leq r}, \Lambda) \rightarrow \tau_{\leq d} \mathbf{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \leq r}^{(n)}, \Lambda),$$

où le terme de gauche est le tronqué du complexe associé au Λ -module cosimplicial tronqué des $\Gamma(X_i, \Lambda)$. Cela résulte du fait que $X_{\bullet, \leq r}^{(1)} = \pi_0(X_{\bullet, \leq r})$ (voir [D.3.2.2](#)).

D.5. Systèmes essentiellement constants

D.5.1. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne satisfaisant les conditions AB3 et AB5 ([GROTHENDIECK 1957, I]) — qui garantissent l'existence et l'exactitude des colimites filtrantes — et $\mathbf{A}_\bullet = (A_i)$ un système inductif de \mathcal{A} indexé par \mathbb{N} . Notons A_∞ la colimite de \mathbf{A}_\bullet , et, pour chaque $j \leq k$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, posons $A(j, k) := \mathrm{Im}(A_j \rightarrow A_k)$. Si $j^- \leq j \leq k \leq k^+$, on a naturellement des flèches $A(j^-, k) \hookrightarrow A(j, k) \twoheadrightarrow A(j, k^+)$. Si A_∞ est *noëthérien*, il existe un j tel que $A(j, \infty) = A_\infty$; si de plus A_j est *noëthérien*, il existe un $k \geq j$ tel que $A(j, k) \simeq A(j, \infty) = A_\infty$.

D.5.1.1. DÉFINITION. *Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne, i_0 un entier, et $c : \mathbb{N}_{\geq i_0} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ une fonction. On dit qu'un système inductif $\mathbf{A}_\bullet = (A_i)$ de \mathcal{A} , indexé par $\mathbb{N}_{\geq i_0}$, est ***c-essentiellement constant*** si la colimite $A_\infty = \mathrm{colim}_i A_i$ est représentable dans \mathcal{A} et si pour chaque $i \in \mathbb{N}_{\geq i_0}$, tel que $c(i) = (j, k)$, l'inégalité $i \leq j \leq k$ est satisfaite et la flèche canonique $A(j, k) \rightarrow A_\infty$ est un isomorphisme.*

D.5.2. Variante : soient $N \geq i_0$ deux entiers et $\varphi : \mathbb{N}_{\geq i_0} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction telle que $\varphi(j) \geq j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_{\geq i_0}$. On dit qu'un système inductif $\mathbf{A}_{\bullet, \geq i_0}$ est ***(N, φ)-essentiellement constant*** si :

- (i) pour chaque j , le système inductif $A(j, k)_{k \geq \varphi(j)}$, à flèches de transition *a priori* épi-morphiques, est constant ;
- (ii) le système inductif $A(j, \varphi(j))_{j \geq N}$, à flèches de transition *a priori* monomorphiques, est constant.

Explicitement : (i) $\text{Ker}(A_j \rightarrow A_{\varphi(j)}) \simeq \text{Ker}(A_j \rightarrow A_k)$ pour $k \geq \varphi(j)$ et (ii) $\text{Im}(A_N \rightarrow A_{\varphi(j)}) \simeq \text{Im}(A_j \rightarrow A_{\varphi(j)})$ pour $j \geq N$.

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que, donné c , on peut calculer une paire (N, φ) telle que tout système inductif c -essentiellement constant soit (N, φ) -essentiellement et que, réciproquement, donnée (N, φ) , on peut calculer un c .

D.5.3. Il résulte des observations précédentes que si A_\bullet est un système inductif constitué d'objets noëthériens et à colimite noëthérienne, il existe une telle fonction. Nous dirons, de façon un peu vague, qu'un système inductif est **explicitement essentiellement constant** s'il est (N, φ) -essentiellement constant pour un entier N et une fonction φ calculables en fonction des données. Cette notion apparaît, avec un but semblable, dans [SCHÖN 1991], puis [RUBIO et SERGERAERT 2002, § 2.1], où un tel système inductif est appelé « module de Schön ». Voir également [GROTHENDIECK 1956, p. 3]^⑦.

D.5.4. Notons qu'un tel système inductif est essentiellement constant au sens usuel : il appartient à l'image essentielle du plongement de \mathcal{A} dans la catégorie abélienne (cf. p. ex. [KASHIWARA et SCHAPIRA 2006, 8.6.5 (i)]) des ind-objets $\text{Ind}(\mathcal{A})$. La proposition clef suivante est le pendant « explicite », du fait que la catégorie \mathcal{A} est naturellement une sous-catégorie épaisse de $\text{Ind}(\mathcal{A})$ (cf. p. ex. [ibid., 8.6.11]).

D.5.5. PROPOSITION. *Soit $0 \rightarrow A'_\bullet \rightarrow A_\bullet \rightarrow A''_\bullet \rightarrow 0$ une suite exacte de systèmes inductifs. Si deux des trois termes sont explicitement essentiellement constants, il en est de même du troisième.*

Cette proposition est élémentaire et bien connue (cf. [SCHÖN 1991, lemme 5, p. 4] ou [RUBIO et SERGERAERT 2002, théorème 2.3]). Pour la commodité du lecteur, nous en donnons une démonstration, dans le cas d'une catégorie de modules pour simplifier l'exposition.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que (A_n) et (A''_n) soient respectivement (N, φ) - et (N'', φ'') -essentiellement constants. La première condition de **D.5.2** est vérifiée de (A'_n) pour la fonction φ : en effet, un élément de A'_n qui s'annule dans A'_m pour $m \geq \varphi(n)$ s'annule en particulier dans A_m (d'après la même condition sur (A_n)) donc s'annule dans $A_{\varphi(n)}$ donc dans $A'_{\varphi(n)}$. Soit maintenant $N' = \varphi''(N)$ (qui est supérieur ou égal à N) : si x appartient à A'_n , son image dans $A'_{\varphi(n)}$ vue dans $A_{\varphi(n)}$ est l'image d'un élément y de A_N (d'après la deuxième condition sur le système (A_n)) : l'image de ce y dans A''_N s'annule dans $A''_{\varphi(n)}$, c'est-à-dire appartient à $\text{Ker}(A''_N \rightarrow A''_{\varphi(n)})$, et la première condition sur (A''_n) entraîne que cette image s'annule dans $A''_{N'}$, donc l'image de y dans $A_{N'}$ provient d'un élément de $A'_{N'}$, qui par construction a la même image dans $A'_{\varphi(n)}$ que l'élément x qu'on s'était fixé. On a donc montré que le système (A'_n) était (N', φ) -essentiellement constant (pour $N' = \varphi''(N)$).

Supposons maintenant que (A_n) et (A'_n) soient respectivement (N, φ) - et (N', φ') -essentiellement constants. Soit $z \in A''_n$ avec $n \geq N'$, et soit $m \geq n$ tel que l'image de z s'annule dans A''_m : alors, si y est un relèvement quelconque de z à A_n , l'image de y dans A''_m s'annule, donc l'image de y dans A_m provient d'un $x \in A'_m$; puisque (A'_n) est essentiellement

⑦. Nous remercions Luc Illusie de nous avoir communiqué cette référence.

constant, il existe $x_0 \in A'_n$ tel que x_0 et x aient même image dans $A'_{\varphi'(m)}$; alors $y' := y - x_0$ (vu comme élément de A_n) a une image nulle dans $A_{\varphi'(m)}$: donc l'image de y' dans $A_{\varphi(n)}$ est déjà nulle (d'après la première condition sur (A_n)), mais ceci implique que l'image de z dans $A''_{\varphi(n)}$ est nulle. Ceci montre la première condition pour (A''_n) , pour la fonction φ'' égale à $\max(\varphi, N')$. S'agissant de la seconde condition, si $z \in A''_n$ et si y en est un relèvement quelconque à A_n , il existe un \tilde{y} dans A_N tel que y et \tilde{y} aient la même image dans $A_{\varphi''(n)}$, et alors l'image \tilde{z} de \tilde{y} dans A''_N a la même image que z dans $A''_{\varphi''(n)}$. On a donc montré que le système (A''_n) était (N, φ'') -essentiellement constant (pour $\varphi'' = \max(\varphi, N')$).

Enfin, supposons que (A'_n) et (A''_n) soient respectivement (N', φ') - et (N'', φ'') -essentiellement constants. Soit $y \in A_n$ qui s'annule dans A_m pour $m \geq n$: alors en particulier son image dans A''_m s'annule, donc elle s'annule déjà dans $A''_{\varphi''(n)}$ (d'après la première propriété sur (A''_n)); donc l'image de y dans $A_{\varphi(n)}$ provient d'un élément x de $A'_{\varphi''(n)}$; si $m \geq \varphi''(n)$, l'image de x dans A'_m s'annule et s'annule donc déjà (d'après la première propriété sur (A'_n)) dans $A'_{\varphi'(\varphi''(n))}$. Ceci montre la première condition sur (A_n) pour la fonction $\varphi : n \mapsto \varphi'(\varphi''(n))$. Enfin, soit $y \in A_n$: son image dans A''_n a la même image dans $A''_{\varphi''(n)}$ qu'un certain élément $\tilde{z} \in A''_{N''}$, donc si \tilde{y} est un relèvement quelconque de \tilde{z} à $A_{N''}$, les éléments y et \tilde{y} (de A_n et $A_{N''}$ respectivement) ont même image dans $A_{\varphi''(n)}$, donc la différence entre ces images provient d'un élément $x \in A'_{\varphi''(n)}$; ce dernier a la même image dans $A'_{\varphi(n)} = A'_{\varphi'(\varphi''(n))}$ qu'un certain élément $\tilde{x} \in A'_{N'}$: si on appelle N le maximum de N' et N'' alors la somme des images de \tilde{x} et \tilde{y} dans $A_{\varphi(n)}$ est la même que celle de y . On a donc montré que le système (A_n) était (N, φ) -essentiellement constant pour $\varphi = \varphi' \circ \varphi''$ et $N = \max(N', N'')$. \square

D.5.6. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne, et $(E_{r,\lambda}^{*,*})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ un système inductif (indexé par λ) de suites spectrales ($r \geq r_0$) d'objets de \mathcal{A} , supposées dans le premier quadrant, dont on note, pour chaque indice λ , l'aboutissement E_λ^* . (Suivant p. ex. [ÉGA III₁, 0_{III}, § 11.1], on considère que cet objet filtré de \mathcal{A} fait partie de la donnée.)

D.5.7. COROLLAIRE. Soit m un entier tel que les systèmes inductifs $(E_{r_0,\lambda}^{p,q})_\lambda$ soient explicitement essentiellement constants pour chaque paire d'entiers p, q d'entiers tels que $p + q \leq 2m + 1$. Alors, pour chaque $0 \leq d \leq m$, le système inductif $(E_\lambda^d)_\lambda$ est explicitement essentiellement constant.

DÉMONSTRATION. Pour chaque indice λ , le calcul de $E_{r,\lambda}^{p,q}$ ne fait intervenir que des flèches entre sous-quotients de $E_{r_0,\lambda}^{p',q'}$ avec $p' + q' \leq p + q + (r - r_0)$. Comme d'autre part $E_{\infty,\lambda}^{p,q} = E_{r,\lambda}^{p,q}$ si $r > p + q + 1$, il résulte de la proposition précédente (D.5.5) que les systèmes inductifs $(E_{\infty,\lambda}^{p,q})_\lambda$ pour $p + q < m$ sont explicitement essentiellement constants. Enfin, comme pour chaque $0 \leq d \leq m$ l'aboutissement E_λ^d est une extension itérée de ces $E_{\infty,\lambda}^{p,q}$ la conclusion résulte d'une nouvelle application de *loc. cit.* \square

D.5.8. PROPOSITION. Soient $A. \rightarrow B.$ un morphisme de systèmes inductifs et $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Supposons qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A_{\bullet} & \longrightarrow & B_{\bullet} \\
 \downarrow & \searrow h_{\bullet} & \downarrow \\
 A_{\tau(\bullet)} & \longrightarrow & B_{\tau(\bullet)}
 \end{array}$$

Alors, si B_{\bullet} est (N, φ) -essentiellement constant, le système inductif A_{\bullet} est $(\tau N, \tau \varphi)$ -essentiellement constant. En particulier, lorsque τ est calculable, le système inductif A_{\bullet} est explicitement essentiellement constant si B_{\bullet} l'est.

DÉMONSTRATION. Soit j un entier. Remplaçons, dans le carré commutatif de l'énoncé, le système inductif A_{\bullet} (resp. B_{\bullet} , etc.) par le système $A'_{\bullet} := A(j, \bullet \geq \varphi(j))$ – à morphismes de transition épimorphiques – (resp. $B'_{\bullet} := B(j, \bullet \geq \varphi(j))$ – constant par hypothèse –, etc.). La commutativité du diagramme montre alors que h'_{\bullet} est un isomorphisme ; le système inductif $(A'_k)_{k \geq \varphi(j)}$ est donc constant pour $k \geq \tau \varphi(j)$. Posons $\psi = \tau \varphi$. Le même argument, appliqué à $A''_{\bullet} := A(j, \psi(j))_j$, etc. montre que ce système est constant pour $j \geq \tau(N)$. (On utilise le fait que B est (N, ψ) -essentiellement constant car $\psi \geq \varphi$). \square

D.6. Approximation d'un pro- ℓ -groupe par ses quotients finis

Pour π un ℓ -groupe fini, on rappelle qu'on a défini en §D.3 la filtration ℓ -centrale descendante par $F^1 \pi = \pi$ et $F^{n+1} \pi = (F^n \pi)^{\ell} \cdot (\pi, F^n \pi)$ (groupe topologiquement engendré).

D.6.1. LEMME. *Il existe deux fonctions calculables φ_{ℓ} et ψ_{ℓ} telles que :*

- (i) *si π est un ℓ -groupe fini d'ordre $\leq n$ alors $F^{\varphi_{\ell}(n)} \pi = 1$, et*
- (ii) *si π est un ℓ -groupe fini à d générateurs tel que $F^n \pi = 1$, alors $\#\pi \leq \psi_{\ell}(d, n)$.*

Il résulte de la démonstration que $\ell^{(d+1)^n}$ convient pour $\psi_{\ell}(d, n)$, et que 1 plus la valuation ℓ -adique de n convient pour $\varphi_{\ell}(n)$.

DÉMONSTRATION. Pour ce qui est de φ : pour chaque ℓ -groupe fini il existe un r tel que $F^r \pi = 1$ (cf. [NEUKIRCH, A. SCHMIDT et WINGBERG 2000, proposition 3.8.2]) ; or comme $F^{i+1} \pi$ est défini en fonction de π et de $F^i \pi$, deux termes consécutifs de la suite $F^i \pi$ ne peuvent pas être égaux sauf à ce que cette suite stationne, et on vient de dire que ceci ne se produit que pour $F^i \pi = 1$: il en résulte que la valuation ℓ -adique de l'ordre de $F^i \pi$ doit décroître strictement jusqu'à atteindre 0, donc la valuation ℓ -adique de n (plus 1, puisque la filtration $F^i \pi$ est numérotée à partir de 1) convient pour $\varphi_{\ell}(n)$.

Pour ce qui est de ψ : d'après [LUBOTZKY et SEGAL 2003, théorème 3.5.1], si L est le pro- ℓ -groupe libre sur $d \geq 2$ générateurs et N un sous-groupe distingué ouvert de L d'indice $\ell^s > 1$, si on note $N' = N^{\ell} \cdot (N, L)$, on a $(N : N') \leq \ell^{(d-1)s+1}$, de sorte que $(L : N') \leq \ell^{ds+1} \leq \ell^{(d+1)s}$; en appliquant ceci à $N = F^r L$ et par récurrence sur r on en déduit $(L : F^r L) \leq \ell^{(d+1)^r}$ (on vérifie immédiatement que cette inégalité fonctionne encore pour $d = 1$ et $r = 1, 2$). Par conséquent, si π est un ℓ -groupe fini à d générateurs tel que $F^n \pi = 1$, en considérant $L \twoheadrightarrow \pi$ la surjection donnée par ces d générateurs, on a une surjection $L/F^n L \twoheadrightarrow \pi$, donc $\#\pi \leq \ell^{(d+1)^n}$. \square

D.6.2. Il résulte de ce lemme que pour chaque ℓ et chaque d , on peut calculer (au sens de **D.3.3.2**) le ℓ -groupe fini $L^{(n)}$ quotient du pro- ℓ groupe libre L à d générateurs : parmi les groupes π comme en (ii) ci-dessus, c'est celui ayant le plus gros cardinal. (Notons qu'ici, il est *a priori* trivial de déterminer une présentation finie de $L^{(n)}$: c'est le quotient du pro- ℓ -groupe libre L par $L^{[n]}$. Par Frattini, le nombre minimal de générateurs de $L^{(n)}$ est d ; par Golod-Šafarevič ([SERRE 1994, I, § 4.4]), le nombre de relations entre ces générateurs est $> \frac{1}{4}d^2$.) En conséquence, on peut — pour chaque entier n — déterminer explicitement le système projectif tronqué $L^{(\leq n)}$ et un système compatible de d générateurs.

D.6.3. PROPOSITION (Lemme d'Artin-Rees-Frattini effectif). *Il existe une fonction τ_ℓ calculable telle que, si $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 1$ est une suite exacte courte de pro- ℓ -groupes, où π', π'' ont respectivement d', d'' générateurs, on a $F^{\tau_\ell(d', d'', n)}\pi \cap \pi' \subseteq F^n \pi' \subseteq F^n \pi \cap \pi'$ pour tout n .*

DÉMONSTRATION. Il est évident que $F^n \pi' \subseteq F^n \pi \cap \pi'$. On souhaite montrer que, réciproquement, $F^n \pi' \supseteq F^{\tau(n)}\pi \cap \pi'$ pour une certaine fonction τ explicitement calculable (dépendant du nombre d', d'' de générateurs de π', π'' , mais pas d'autres données).

Expliquons pourquoi on peut supposer que π'' est libre (en tant que pro- ℓ -groupe) : il existe en tout cas un morphisme surjectif $L \twoheadrightarrow \pi''$ où L est le pro- ℓ -groupe libre sur d'' générateurs ; et quitte à relever à π les images par ce morphisme de chacun des générateurs, on peut le factoriser comme la composée d'un morphisme $s : L \rightarrow \pi$ et de la surjection donnée $\pi \twoheadrightarrow \pi''$. Soit $\hat{\pi} = \pi \times_{\pi''} L$ l'ensemble des éléments de $\pi \times L$ dont les deux composantes ont même image dans π'' (la première projection est donc un morphisme surjectif $\hat{\pi} \twoheadrightarrow \pi$ qui se restreint à l'identité sur π') : ce $\hat{\pi}$, qui s'inscrit dans une suite exacte $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \hat{\pi} \rightarrow L \rightarrow 1$, se décrit aussi comme le produit semidirect $\hat{\pi} = \pi' \rtimes_* L$ par l'action de L sur π' donnée par $z * x = s(z)x s(z)^{-1}$. Si on a montré la conclusion voulue pour la suite exacte $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \hat{\pi} \rightarrow L \rightarrow 1$, la même vaut encore pour $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 1$ (puisque l'image de $F^N \hat{\pi}$ dans π est contenue dans, et même égale à, $F^N \pi$).

On peut donc bien supposer que π'' est libre, et qu'il existe une section $s : \pi'' \rightarrow \pi$, qui fait de π le produit semidirect $\pi = \pi' \rtimes_* \pi''$ où $*$ désigne l'action de π'' sur π' définie par $z * x = s(z)x s(z)^{-1}$.

Fixons n . On veut montrer qu'il existe N tel que $F^n \pi' \supseteq F^N \pi \cap \pi'$, et expliquer pourquoi N se calcule sous la forme $\tau(d', d'', n)$ en fonction de d', d'' et n .

L'action de π'' sur π' stabilise $F^n \pi'$, donc définit une action sur $\pi'/F^n \pi'$, et on a $(\pi/F^n \pi') = (\pi'/F^n \pi') \rtimes_* \pi''$ pour cette action quotient.

Comme $\pi'/F^n \pi'$ est fini, $\text{Aut}(\pi'/F^n \pi')$ est lui-même fini, et comme $\pi'' \rightarrow \text{Aut}(\pi'/F^n \pi')$ (donné par $*$) est continu, et que les $F^m \pi''$ forment un système fondamental de voisinages de l'unité dans π'' , il existe m tel que $F^m \pi''$ agisse trivialement sur $\pi'/F^n \pi'$ (cf. [NEUKIRCH, A. SCHMIDT et WINGBERG 2000, proposition 3.8.2]). On peut être plus précis : on a $\#(\pi'/F^n \pi') \leq \psi(d', n)$ avec les notations du lemme, donc $\# \text{Aut}(\pi'/F^n \pi') \leq \psi(d', n)!$, donc $\varphi(\psi(d', n)!)m$ convient (en considérant l'image de π'' dans $\text{Aut}(\pi'/F^n \pi')$) — ce qui nous importe est qu'un m qui convient puisse être calculé en fonction de d' et n .

L'action de π'' sur $\pi'/F^n\pi'$ passe donc au quotient par $F^m\pi''$, c'est-à-dire définit une action de $\pi''/F^m\pi''$ sur $\pi'/F^n\pi'$, et on a $(\pi'/F^n\pi')/s(F^m\pi'') = (\pi'/F^n\pi') \rtimes_* (\pi''/F^m\pi'')$ pour cette action quotientée.

Notons $\bar{\pi}$ ce ℓ -groupe fini $\pi/((F^n\pi') \cdot s(F^m\pi'')) = (\pi'/F^n\pi') \rtimes_* (\pi''/F^m\pi'')$. Son ordre est majoré par $\psi(d', n) \times \psi(d'', m)$ (et rappelons que $m = \varphi(\psi(d', n) !)$ convient).

Il existe alors $N \geq n, m$ tel que $F^N\bar{\pi} = 1$: précisément, $\varphi(\psi(d', n) \times \psi(d'', m))$ convient pour N . On a alors $F^N\pi \subseteq (F^n\pi') \cdot s(F^m\pi'')$, donc $F^N\pi \cap \pi' \subseteq F^n\pi'$, ce qu'on voulait démontrer. \square

D.6.4. COROLLAIRE. *On reprend les hypothèses et les notations de la proposition. Soient $\tilde{\pi}'^{(n)} = \pi' / (\pi' \cap \pi^{[n]})$ le noyau de la surjection naturelle $\pi^{(n)} \twoheadrightarrow \pi'^{(n)}$ et Λ un groupe abélien. Pour tout entier j , si le système inductif $H^j(\pi'^{(n)}, \Lambda)$ est explicitement essentiellement constant, il en est de même de $H^j(\tilde{\pi}'^{(n)}, \Lambda)$. (La fonction explicitant ce fait fait intervenir uniquement d', d'' et celle explicitant le fait que $H^j(\pi'^{(n)}, \Lambda)$ est essentiellement constant.)*

DÉMONSTRATION. Cela résulte de la proposition précédente, réécrite sous la forme d'un diagramme commutatif (pour chaque n)

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\pi}'^{(n)} & \longleftarrow & \pi'^{(n)} \\
 \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
 \tilde{\pi}'^{(\tau n)} & \longleftarrow & \pi'^{(\tau n)}
 \end{array}$$

et de **D.5.8**. \square

D.6.5. PROPOSITION. *Soient L un pro- ℓ -groupe libre à d générateurs topologiques, $n_0 \geq 1$ un entier, Λ un ℓ -groupe abélien fini et V un Λ -module de type fini muni d'une action explicite de $L^{(n_0)}$. Pour tout entier i , le système inductif $H^i(L^{(n)}, V)$, $n \geq n_0$, est explicitement essentiellement constant.*

Par « action explicite », on entend la donnée d'une présentation explicite (**D.13.3**) de V et de d éléments de $\text{Aut}(V)$ (**D.13.4**) satisfaisant des relations explicites décrivant $L^{(n_0)}$ (cf. **D.6.2**). Le module V est naturellement muni, pour chaque $n \geq n_0$, de l'action de $L^{(n)}$ déduite de la surjection $L^{(n)} \twoheadrightarrow L^{(n_0)}$.

DÉMONSTRATION. Distinguons trois cas :

$i = 0$. Le système inductif $H^0(L^{(n)}, V)$ étant *constant*, il est (n_0, Id) -essentiellement constant (**D.5.2**).

$i = 1$. Rappelons (cf. p. ex. [SERRE 1994, I, §2.6 b]) que les flèches $H^1(L^{(n)}, V) \rightarrow H^1(L^{(n+1)}, V)$ sont *injectives*, de sorte que la propriété **D.5.2** (i) est satisfaite pour $\varphi = \text{Id}$. (Notons que V est fixe par $L^{[n]}/L^{[n+1]}$.) Il reste à trouver $N \geq n_0$ tel que la flèche (injective) $H^1(L^{(N)}, V) \rightarrow H^1(L, V)$ soit un isomorphisme ou, de façon équivalente, tel que l'on ait l'égalité $\#H^1(L^{(N)}, V) = \#H^1(L, V)$. La conclusion résulte du fait que ces cardinaux sont calculables. Pour le terme de gauche c'est

clair : on sait calculer le système projectif $L^{(n)}$; pour le terme de droite, rappelons ([OGG 1962, p. 188]) que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(L, V) \rightarrow V \rightarrow V^d \rightarrow H^1(L, V) \rightarrow 0$$

si bien que l'on a l'égalité (formule « d'Euler-Poincaré », due à Ogg et Šafarevič) $\#H^1(L, V) = (\#V)^{d-1} \times \#H^0(L, V)$.

$i \geq 2$. La colimite $H^i(L, V)$ étant nulle (cf. [SERRE 1994, I, §3.4]), il suffit de trouver $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $H^i(L^{(n)}, V) \rightarrow H^i(L^{(\varphi(n))}, V)$ soit nulle pour chaque $n \geq n_0$ et de poser, par exemple, $N = n_0$. Une telle fonction φ existe et est calculable car les objets et les flèches le sont. □

D.6.6. REMARQUE. Bien que cela ne soit pas nécessaire — sauf pour ne pas perdre la primitive récursivité — signalons que l'on peut être plus précis. Avec les notations de l'énoncé, on a pour chaque $N \geq n \geq n_0$ un morphisme de la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(L^{(n)}, V) \rightarrow H^1(L, V) \rightarrow H^1(L^{[n]}, V)$$

vers la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(L^{(N)}, V) \rightarrow H^1(L, V) \rightarrow H^1(L^{[N]}, V),$$

où $L^{[n]}$ (resp. $L^{[N]}$) agit trivialement sur V et les flèches sont les flèches de functorialité évidentes. Par chasse au diagramme, l'injection $H^1(L^{(n)}, V) \hookrightarrow H^1(L, V)$ est un isomorphisme si la flèche « verticale » $H^1(L^{[n]}, V) \rightarrow H^1(L^{[N]}, V)$ est nulle. Il suffit pour cela que l'on ait l'inclusion $L^{[N]} \subseteq L^{[n][2]}$. À n fixé, un tel N peut être obtenu à partir de la suite exacte

$$1 \rightarrow L^{[n]} \rightarrow L \rightarrow L^{(n)} \rightarrow 1$$

par application de la proposition **D.6.3** et de l'estimation du rang du groupe libre $L^{[n]}$ par la formule de l'indice de Schreier ([SERRE 1977, I, §3.4] ou [ROTMAN 1995, théorème 11.45]). Considérons maintenant le cas $i \geq 2$. La suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la suite exacte précédente dégénère en E_3 , car $H^j(L^{[n]}, V)$ est nul pour $j > 1$. Comme l'aboutissement est nul — pour la même raison — en degré cohomologique > 1 , la flèche $d_2 : H^{i-2}(L^{(n)}, H^1(L^{[n]}, V)) \rightarrow H^i(L^{(n)}, V)$ est surjective pour chaque $i \geq 2$. Ceci est bien entendu valable pour chaque $N \geq n$. Il en résulte que pour tuer la flèche $H^i(L^{(n)}, V) \rightarrow H^i(L^{(N)}, V)$, il suffit de tuer $H^1(L^{[n]}, V) \rightarrow H^1(L^{[N]}, V)$. C'est ce que l'on a fait ci-dessus.

D.6.7. REMARQUE. Il serait intéressant de calculer la plus petite fonction φ telle que les flèches $H^i(L^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(L^{(\varphi(d,i,n))}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ soient nulles. (Lorsque $d = 1$ — cas d'un pro- ℓ -groupe abélien libre — la fonction $n \mapsto n + 1$ convient.) Nous ignorons la réponse à cette question, mais nous indiquons un argument, duquel nous sommes redevables à Jean-Pierre Serre, qui montre que si $i = 2$ et si $L^{[n]}$ désigne maintenant la filtration de Frattini itérée $\Phi^n L$ plutôt que la filtration $F^n L$ considérée ci-dessus (cf. **D.3.1.2** à ce sujet), et bien sûr $L^{(n)} = L/\Phi^n L$, alors la fonction $n \mapsto n + 1$ convient. Autrement dit, la flèche $H^i(L^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^i(L^{(n+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est nulle.

En comparant les suites spectrales de Hochschild-Serre associées aux suites exactes $1 \rightarrow L^{[n]} \rightarrow L \rightarrow L^{(n)} \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow L^{[n]}/L^{[n+1]} \rightarrow L^{(n+1)} \rightarrow L^{(n)} \rightarrow 1$, le morphisme évident de la seconde suite spectrale vers la première donne :

$$\begin{array}{ccccc} H^0(L^{(n)}, H^1(L^{[n]}/L^{[n+1]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) & \longrightarrow & H^2(L^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(L^{(n+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ H^0(L^{(n)}, H^1(L^{[n]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})) & \longrightarrow & H^2(L^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(L, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = 0. \end{array}$$

Or la flèche canonique de $H^1(L^{[n]}/L^{[n+1]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{Hom}(L^{[n]}/L^{[n+1]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ vers $H^1(L^{[n]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{Hom}(L^{[n]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est un isomorphisme puisque nous avons pris la filtration où $L^{[n+1]}$ est le Frattini de $L^{[n]}$. Comme tout élément de $H^2(L^{(n)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ se relève à $H^0(L^{(n)}, H^1(L^{[n]}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}))$, on en conclut que son image dans $H^2(L^{(n+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est nulle.

D.7. Calcul de la cohomologie d'une polycourbe ℓ -élémentaire

D.7.1. Soit X une polycourbe ℓ -élémentaire sur $\text{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos, que l'on peut supposer factorisée en courbes ℓ -élémentaires ($X = X_m \rightarrow X_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow \text{Spec } k$ où $\dim X_i = i$). D'après **D.1.4.7**, c'est un $K(\pi, 1)$ pro- ℓ , où π est le pro- ℓ complété du groupe fondamental de X , qui est extension itérée de pro- ℓ groupes libres de type fini. En particulier, pour chaque ℓ -groupe abélien fini Λ et chaque entier $d \geq 0$ le groupe $H^d(X, \Lambda)$ est canoniquement isomorphe à $H^d(\pi, \Lambda)$ qui s'identifie, d'après l'égalité $\pi = \lim_n \pi^{(n)}$ (**D.3.2.1**) et [SERRE 1994, I, § 2.2, prop. 8], à la colimite des $H^d(\pi^{(n)}, \Lambda)$.

L'objectif de cette section est de montrer que l'on peut déterminer une paire (N_d, φ_d) telle que ce système inductif $H^d(\pi^{(n)}, \Lambda)$, $n \geq 0$, soit (N_d, φ_d) -essentiellement constant au sens de **D.5.2**.

D.7.2. Dévissage. On raisonne par récurrence sur la dimension m de X . Par hypothèse (cf. **D.1.4.7**, démonstration), le groupe π s'insère dans une suite exacte $1 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'' \rightarrow 1$, où π'' est un pro- ℓ groupe libre (non abélien) et π' est une extension itérée de tels groupes. Cette suite exacte est d'origine géométrique, c'est-à-dire déduite de morphismes calculables de schémas (normaux connexes) comme ci-dessous, par application du foncteur « groupe fondamental pro- ℓ » :

$$\begin{array}{ccccc} \pi & X & \longleftarrow & X_{\bar{\eta}} & \pi' \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{[pro-}\ell\text{-libre]} \pi'' & Y & \longleftarrow & \bar{\eta} & \\ & \downarrow & & & \\ & k & & & \end{array}$$

(où $Y = X_1$ est une courbe ℓ -élémentaire et $\bar{\eta}$ un point générique géométrique de celle-ci ; soulignons que $X_{\bar{\eta}} \rightarrow \bar{\eta}$ est encore une polycourbe ℓ -élémentaire, cette fois de dimension $m - 1$).

Notons que l'on peut calculer le nombre de pro-générateurs (D.3.3.3) de π'' et π' , qui apparaissent dans le lemme d'Artin-Rees-Frattini effectif D.6.3. (Pour π' , on peut procéder par récurrence ou bien utiliser la calculabilité du H^1 .)

Fixons j . D'après D.3.3 et D.3.4.1, on peut calculer pour chaque $n \geq 1$ la suite exacte $1 \rightarrow \tilde{\pi}'^{(n)} \rightarrow \pi^{(n)} \rightarrow \pi''^{(n)} \rightarrow 1$ (de groupes finis) considérée en D.6.4 et, en particulier, calculer $\tilde{\pi}'^{(n)} = \pi' / (\pi' \cap \pi^{[n]})$. L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que le système inductif $H^j(\pi^{(n)}, \Lambda)$ est explicitement essentiellement constant. D'après *loc. cit.*, il en est de même de $V_n := H^j(\tilde{\pi}'^{(n)}, \Lambda)$. (Comme rappelé en D.4.2.4, on sait calculer chacun de ces différents groupes de cohomologie.)

D.7.3. Cas d'une courbe. Soit $V = \text{colim}_n V_n$; c'est un Λ -module de type fini. Il résulte du caractère explicitement essentiellement constant de la colimite que l'on peut calculer V ainsi que l'action induite d'un quotient explicite $\pi''^{(n_0)}$ de π'' . Fixons i . D'après D.6.5, on peut calculer un couple (M, ψ) tel que le système $H^i(\pi''^{(n)}, V)$, $n \geq n_0$, soit (M, ψ) -essentiellement constant. On veut montrer que, quitte à changer M et ψ , il en est de même du système inductif $H^i(\pi''^{(n)}, V_n)$. Par hypothèse, il existe un entier $N \geq n_0$ et une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tels que $(V_n)_n$ soit (N, φ) -essentiellement constant; en particulier, le morphisme $(V_n)_{n \geq N} \rightarrow (V_{\varphi(n)})_{n \geq N}$ se factorise à travers le morphisme $(V_n)_n \rightarrow (V_n)_n$, où $(V_n)_n$ est le système inductif constant de valeur V . Passant à la cohomologie, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(\pi''^{(\bullet)}, V_{\bullet}) & \longrightarrow & H^i(\pi''^{(\bullet)}, V) \\ \downarrow & \swarrow h_{\bullet} & \downarrow \\ H^i(\pi''^{(\varphi_{\bullet})}, V_{\varphi_{\bullet}}) & \longrightarrow & H^i(\pi''^{(\varphi_{\bullet})}, V). \end{array}$$

D'après D.5.8, le système inductif $H^i(\pi''^{(\bullet)}, V_{\bullet})$ est $(\varphi M, \varphi \psi)$ -essentiellement constant.

D.7.4. Suite spectrale de Hochschild-Serre. Revenons maintenant au calcul de la cohomologie du schéma X . On a

$$\text{R}\Gamma(X, \Lambda) = \text{R}\Gamma(\pi, \Lambda) = \text{R}\Gamma(\pi'', \text{R}\Gamma(\pi', \Lambda)),$$

que l'on approche par

$$\text{R}\Gamma(\pi^{(n)}, \Lambda) = \text{R}\Gamma(\pi''^{(n)}, \text{R}\Gamma(\tilde{\pi}'^{(n)}, \Lambda)).$$

D'après [ibid., I, § 2.6], on a pour chaque entier $\lambda \geq 1$ une suite spectrale

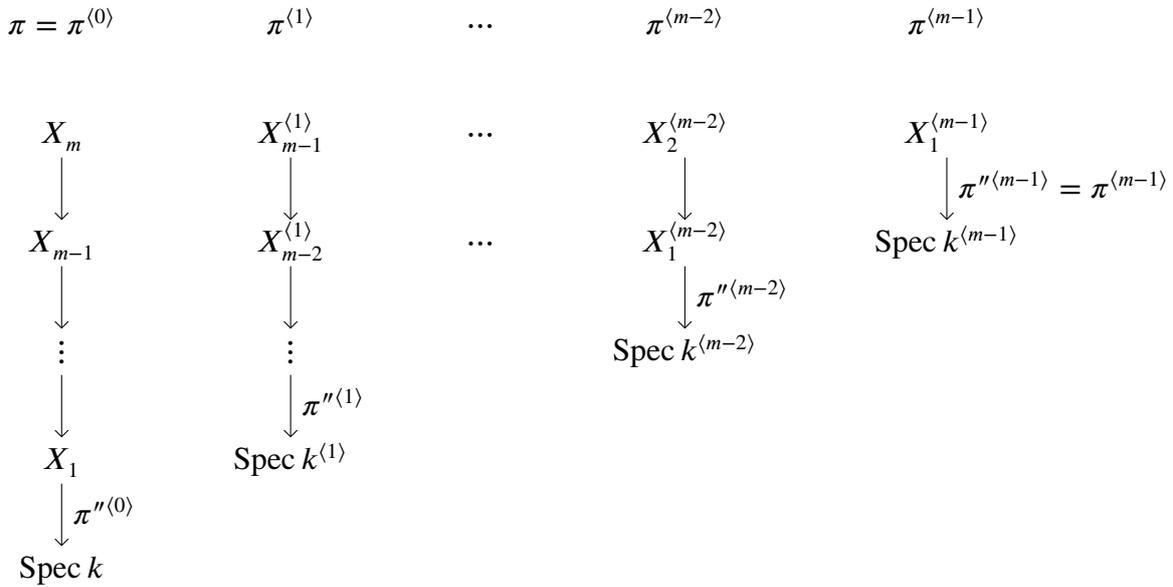
$$E_{2,\lambda}^{i,j} = H^i(\pi''^{(\lambda)}, H^j(\tilde{\pi}'^{(\lambda)}, \Lambda)) \Rightarrow H^{i+j}(\pi^{(\lambda)}, \Lambda).$$

Il résulte de D.5.7 et de ce qui précède que pour chaque entier $d \geq 0$ on peut calculer (N_d, φ_d) tels que le système inductif $H^d(\pi^{(\bullet)}, \Lambda)$ soit (N_d, φ_d) -essentiellement constant. En particulier, on peut trouver deux entiers $\alpha \leq \beta$ tels que

$$H^d(\pi, \Lambda) = \text{Im} (H^d(\pi^{(\alpha)}, \Lambda) \rightarrow H^d(\pi^{(\beta)}, \Lambda)).$$

Ces objets sont donc algorithmiquement calculables.

D.7.5. Synthèse. Résumons la situation de cette section sous la forme du diagramme suivant avec des notations légèrement différentes pour expliciter la récurrence :



Si $X = X_m \rightarrow X_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow \text{Spec } k$ est la polycourbe ℓ -élémentaire de départ, on appelle $X_{m-i}^{(i)} \rightarrow X_{m-i-1}^{(i)} \rightarrow \dots \rightarrow X_1^{(i)} \rightarrow \text{Spec } k^{(i)}$ sa fibre au-dessus d'un point générique géométrique de X_i , et $\pi^{(i)}$ le groupe fondamental pro- ℓ de cette fibre $X_{m-i}^{(i)}$, ainsi que $\pi''^{(i)}$ celui de $X_1^{(i)}$. Les $\pi''^{(i)}$ sont des groupes pro- ℓ -libres dont on peut calculer le nombre de générateurs ; les $\pi^{(i)}$ s'inscrivent dans des suites exactes $1 \rightarrow \pi^{(i+1)} \rightarrow \pi^{(i)} \rightarrow \pi''^{(i)} \rightarrow 1$, permettant de calculer leur nombre de générateurs, et des fonctions explicitant le fait que les $H^d(\pi^{(i)}, \Lambda)$ sont essentiellement constants.

D.8. Descente

D.8.1. Soient k un corps algébriquement clos, X un k -schéma algébrique (supposé décrit comme en D.16.2), et ℓ un nombre premier inversible sur k . D'après D.1.4.12, il existe un X -schéma simplicial X_\bullet , calculant la cohomologie étale de X à coefficients dans le ℓ -groupe abélien fini Λ , et dont les constituants sont des coproduits de polycourbes ℓ -élémentaires. Par descente cohomologique et D.1.4.4, les flèches ci-dessous sont des isomorphismes :

$$\text{R}\Gamma(X_{\text{ét}}, \Lambda) \simeq \text{R}\Gamma(\text{Tot } X_{\bullet, \text{ét}}, \Lambda) \leftarrow \text{R}\Gamma(\text{Tot } X_{\bullet, \ell \text{ét}}, \Lambda),$$

où $\text{Tot } X_{\bullet, \text{ét}}$ (resp. $\text{Tot } X_{\bullet, \ell \text{ét}}$) désigne le topos total associé au système simplicial des topos $X_{i, \text{ét}}$ (resp. $X_{i, \ell \text{ét}}$), $i \geq 0$. Le second isomorphisme résulte du fait que les images directes entre topos simpliciaux se calculent étage par étage, si bien que l'adjonction est un isomorphisme si elle l'est sur chaque étage (cf. [DELIGNE 1974b, 5.2.5] ou [ILLUSIE 1971-1972, VI.5.8.1 (iii)]).

D.8.2. Fixons un entier $d \geq 0$ puis un entier $r > d$. D'après les observations précédentes et D.1.4.13, il existe un X -schéma simplicial X_\bullet , à tronqué (=squelette) $X_{\bullet, \leq r}$, calculable, tel que $H^d(X_{\text{ét}}, \Lambda) = H^d(\text{Tot } X_{\bullet, \ell \text{ét}}, \Lambda)$ et tel que les X_i soient des coproduits finis de k -polycourbes ℓ -élémentaires.

Pour alléger les notations, on omet dorénavant les indices « $\ell\text{ét}$ » et « ét ».

Pour chaque entier $\lambda \geq 2$, on a une suite spectrale ([*ibid.*, VI.6.2.3.2])

$$E_{1,\lambda}^{i,j} = H^j(X_i^{(\lambda)}, \Lambda) \Rightarrow H^{i+j}(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda)}, \Lambda),$$

où les topos $X_i^{(\lambda)}$ sont comme définis en **D.3.2**. Il résulte donc de l'exactitude des colimites filtrantes ([*ÉGA III*, 0.11.1.8]) et des isomorphismes $\text{colim}_{\lambda} H^j(X_i^{(\lambda)}, \Lambda) \simeq H^j(X_i, \Lambda)$, que la cohomologie de $\text{Tot } X_{\bullet}$ est colimite de la cohomologie des $\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda)}$. D'autre part, d'après les résultats de §**D.7** (cas d'une polycourbe ℓ -élémentaire), on peut calculer (N_1, φ_1) tels que les systèmes inductifs $(E_{1,\lambda}^{i,j})_{\lambda}$ soient (N_1, φ_1) -essentiellement constants pour chaque $i, j \geq 0$ tels que $i + j \leq 2d + 1$. Il en résulte (**D.5.7**) que l'on peut calculer $(N_{\infty}, \varphi_{\infty})$ tels que le système inductif $H^d(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda)}, \Lambda)$ soit $(N_{\infty}, \varphi_{\infty})$ -essentiellement constants; en particulier, on peut calculer deux entiers $\mu \leq \nu$ tels que l'on ait

$$H^d(X, \Lambda) = \text{Im} \left(H^d(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\mu)}, \Lambda) \rightarrow H^d(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\nu)}, \Lambda) \right).$$

Comme expliqué en **D.4.1.2**, on a $H^d(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\mu)}, \Lambda) \simeq H^d(\text{Tot } X_{\leq r}^{(\mu)}, \Lambda)$, et de même pour ν . Que l'on puisse trouver une présentation explicite (**D.13.3**) de $H^d(X, \Lambda)$ résulte alors de la proposition **D.4.3.1**.

D.8.3. Hyper-Čech.

D.8.3.1. Soit $X' \rightarrow X$ un hyperrecouvrement pour la topologie des altérations. Vérifions que l'on peut calculer les morphismes $\check{H}^d(X', \Lambda) \rightarrow H^d(X, \Lambda)$, comme annoncé en **D.0.4**.

D'après le lemme **D.1.4.13**, on peut calculer (en tout étage) un hyperrecouvrement $X_{\bullet} \rightarrow X$ comme ci-dessus, se factorisant à travers un morphisme $X_{\bullet} \rightarrow X'$. Fixons $d \geq 0$. La flèche $\check{H}^d(X', \Lambda) \rightarrow H^d(X, \Lambda)$ étant la composée des flèches $\check{H}^d(X', \Lambda) \rightarrow \check{H}^d(X_{\bullet}, \Lambda)$ et $\check{H}^d(X_{\bullet}, \Lambda) \rightarrow H^d(X, \Lambda)$ — la première étant trivialement calculable pour des schémas simpliciaux donnés (par calculabilité fonctorielle du π_0) —, on est ramené au cas particulier où $X' = X_{\bullet}$. La conclusion résulte alors d'une part du fait que, comme observé en **D.4.3.2**, on a $\check{H}^d(X_{\bullet}, \Lambda) = H^d(\text{Tot } X_{\leq r}^{(1)}, \Lambda)$ pour $r > d$ et, d'autre part, de la calculabilité des flèches $H^d(\text{Tot } X_{\leq r}^{(\mu)}, \Lambda) \rightarrow H^d(\text{Tot } X_{\leq r}^{(\nu)}, \Lambda)$ pour $\mu \leq \nu \leq \infty$.

D.8.3.2. Il résulte de ce qui précède que, donnés deux hyperrecouvrements $X' \rightarrow X$, de X pour la topologie des altérations, on sait vérifier si la flèche $\check{H}^d(X_{\bullet}, \Lambda) \rightarrow H^d(X, \Lambda)$ identifie la cohomologie de X au quotient de $\check{H}^d(X_{\bullet}, \Lambda)$ par le noyau (calculable) de $\check{H}^d(X_{\bullet}, \Lambda) \rightarrow \check{H}^d(X', \Lambda)$. (D'autre part, on sait qu'il existe deux tels hyperrecouvrements.) En particulier, si les X_{α} sont comme en **D.0.2**, le système inductif $\check{H}^d(X_{\alpha}, \Lambda)$ est explicitement essentiellement constant (mais le « explicitement » utilise une recherche non bornée).

D.8.3.3. REMARQUE. Notons que si $V \rightarrow U$ est un morphisme de k -schémas algébriques se factorisant à travers un revêtement ℓ -étales n -approché universel $U^{[n]}$ de U , le morphisme de topos $V^{(n)} \rightarrow U^{(n)}$ se factorise à travers $V^{(n)} \rightarrow V^{(1)}$, dont le but est naturellement équivalent au topos discret des faisceaux sur $\pi_0(V)$. D'autre part, pour chaque X_{\bullet} comme en **D.8.2** et chaque entier $n \geq 1$, on devrait sans aucun doute pouvoir fabriquer en utilisant les techniques usuelles de construction d'hyperrecouvrements (cf. **D.1.4.13** et **D.4.2.1**) — donc, en particulier,

sans nouvelle recherche non bornée — un hyperrecouvrement \tilde{X}_\bullet de X au-dessus de X_\bullet tel que les $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$ se factorisent par un revêtement n -approché universel de X_i . Que $\mathrm{R}\Gamma(X_\bullet^{(n)}, \Lambda) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$ se factorise à travers $\check{\mathrm{R}}\Gamma(\tilde{X}_\bullet, \Lambda) \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$ entraîne que l'on peut obtenir (sans nouvelle recherche non bornée) des cocycles hyper-Čech pour une base des $\mathrm{H}^i(X, \Lambda)$.

D.8.4. Calcul de $\mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$.

D.8.4.1. Soient X et Λ comme ci-dessus et X_{α_\bullet} un système projectif (indexé par les entiers)[⊗] d'hyperrecouvrements de X tel que pour chaque entier i , on ait l'égalité $\mathrm{colim}_\alpha \check{\mathrm{H}}^i(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda) \simeq \mathrm{H}^i(X, \Lambda)$, ou encore un quasi-isomorphisme $\mathrm{hocolim}_\alpha \check{\mathrm{R}}\Gamma(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$, où $\check{\mathrm{R}}\Gamma(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda)$ est le complexe de Čech déduit du Λ -module cosimplicial $\Gamma(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda)$. (Rappelons que dans une catégorie abélienne satisfaisant la condition AB5 de Grothendieck, la cohomologie d'une colimite homotopique est la colimite des groupes de cohomologie.) Le complexe $\mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$ appartenant à $D_c^b(\Lambda)$, il résulte du lemme classique [Rapport, 4.7] qu'il existe un complexe \mathcal{K} de Λ -modules de type fini, concentré en degrés $[0, 2 \dim(X)]$ et, pour α suffisamment grand, un morphisme de (vrais) complexes $\mathcal{K} \rightarrow \check{\mathrm{R}}\Gamma(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda)$ tel que la flèche composée $\mathcal{K} \rightarrow \mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$ soit un quasi-isomorphisme. Pour calculer un tel \mathcal{K} , il suffit de parcourir les morphismes $\mathcal{K} \rightarrow \check{\mathrm{R}}\Gamma(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda)$ et de s'arrêter lorsqu'on en a trouvé un induisant le quasi-isomorphisme recherché (en degré $0 \leq i \leq 2 \dim(X)$). C'est possible car on sait calculer les flèches $\check{\mathrm{H}}^i(X_{\alpha_\bullet}, \Lambda) \rightarrow \mathrm{H}^i(X, \Lambda)$.

D.8.4.2. La remarque précédente devrait même permettre de calculer $\mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda)$ sans plus de recherches non bornées que celles faites jusqu'à **D.8.2**.

D.9. Functorialité

D.9.1. Functorialité sur $\mathrm{Spec}(k)$.

D.9.1.1. Soient k un corps algébriquement clos, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas algébriques (supposé décrit comme en **D.16.2**), et Λ un ℓ -groupe abélien fini, avec ℓ inversible sur k . D'après **D.1.4.12**, il existe un morphisme simplicial $Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ au-dessus de f , calculable jusqu'à des étages arbitrairement élevés (et dépendant de ℓ mais pas de Λ), donnant lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \ell\text{ét}}, \Lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Tot} X_{\bullet, \text{ét}}, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Tot} Y_{\bullet, \text{ét}}, \Lambda) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Tot} Y_{\bullet, \ell\text{ét}}, \Lambda) \\ & & \uparrow \sim & & \uparrow \sim & & \\ & & \mathrm{R}\Gamma(X, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{R}\Gamma(Y, \Lambda) & & \end{array}$$

D'après ce qui précède (§ **D.8**), il existe deux entiers explicites $\mu \leq \nu$ tels que pour chaque $d \leq 2 \max\{\dim(X), \dim(Y)\} < r$, on ait $\mathrm{H}^d(Z, \Lambda) = \mathrm{Im}(\mathrm{H}^d(\mathrm{Tot} Z_{\bullet, \leq r}^{(\mu)}, \Lambda) \rightarrow \mathrm{H}^d(\mathrm{Tot} Z_{\bullet, \leq r}^{(\nu)}, \Lambda))$

⊗. Lorsque k est dénombrable, ce qui suffit pour notre propos, l'existence d'un tel système projectif est élémentaire (voir [DELIGNE 1980, 5.2.2], cité en **D.0.2**). Pour k quelconque, on peut améliorer le résultat classique selon lequel la catégorie des hyperrecouvrements à homotopie près est cofiltrante (cf. p. ex. [M. ARTIN et MAZUR 1969, 8.13]) en la « rigidifiant » ([FRIEDLANDER 1982, §4]; comparer avec **D.3.4.2**). D'après O. Gabber (communication personnelle) on a des résultats semblables pour des sites généraux, sans hypothèse de finitude (ni, notamment, d'existence de suffisamment de points).

pour $Z = X$ ou Y . Le morphisme $H^d(\text{Tot } X_{\bullet \leq r}^{(v)}, \Lambda) \rightarrow H^d(\text{Tot } Y_{\bullet \leq r}^{(v)}, \Lambda)$ étant calculable (cf. [D.4.2.6](#)), on peut trouver une présentation explicite du morphisme $H^d(f, \Lambda) : H^d(X, \Lambda) \rightarrow H^d(Y, \Lambda)$ (au sens de [D.13.3](#)). Si Λ est le corps $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, cela revient bien entendu à calculer le rang de $H^d(f, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$.

Notons que l'on pourrait aussi utiliser la présentation tirée de [D.8.3](#), pour obtenir le même résultat (voir aussi [D.9.2](#)).

D.9.1.2. Amélioration. Vérifions maintenant que pour toute collection finie f_1, \dots, f_r de k -morphisms explicites $Y \rightarrow X$, on peut calculer des présentations explicites des $H^d(f_i, \Lambda)$ relativement à de *mêmes* présentations explicites de $H^d(X, \Lambda)$ et $H^d(Y, \Lambda)$. Il résulte en effet de [D.1.4.12](#) et [D.1.4.13](#) qu'il existe pour chaque $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ un morphisme $Y_{\alpha\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ comme en *loc. cit.* au-dessus de f_{α} . En considérant le produit fibré des $Y_{\alpha\bullet}$ au-dessus de Y et en réappliquant la construction de *loc. cit.*, on en déduit qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{f_{1\bullet}} & \\
 Y_{\bullet} & \xrightarrow{\vdots} & X_{\bullet} \\
 & \xrightarrow{f_{r\bullet}} & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 & \xrightarrow{f_1} & \\
 Y & \xrightarrow{\vdots} & X \\
 & \xrightarrow{f_r} &
 \end{array}$$

où les flèches verticales *ne dépendent pas de l'indice* $\alpha \in \{1, \dots, r\}$. La conclusion en résulte aussitôt.

(En particulier, donnés deux morphismes $f, g : Y \rightarrow X$, on peut décider si $H^d(g, \Lambda) = H^d(f, \Lambda)$.)

Notons que si $Y = X$, on peut supposer que les Λ -modules explicites $H^d(X, \Lambda)$ et $H^d(Y, \Lambda)$ sont *égaux*. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de rajouter l'identité $Y \rightarrow X$ aux morphismes f_1, \dots, f_r et de composer avec l'inverse de l'isomorphisme $H^d(X, \Lambda) \rightarrow H^d(Y, \Lambda)$ qui s'en déduit.

On peut reformuler la functorialité établie sous la forme suivante.

D.9.1.3. Soit \mathcal{G} un graphe fini orienté avec arêtes multiples possibles. Supposons donné un étiquetage de \mathcal{G} par la catégorie des k -schémas algébriques, c'est-à-dire un étiquetage de ses sommets par des k -schémas algébriques et un étiquetage des arêtes par des k -morphisms (entre les schémas correspondants). On peut calculer un étiquetage du graphe opposé \mathcal{G}^{op} par la catégorie des Λ -modules finis, déduit du précédent par application du foncteur $H^d(\cdot, \Lambda)$.

On peut déduire cet énoncé du précédent en considérant le coproduit $X = \text{Spec}(k) \coprod \coprod_s X_s$, où X_s parcourt les étiquettes des sommets s de \mathcal{G} , et les endomorphismes $X \rightarrow X$ envoyant chaque $X_{s'}$, sauf un X_s , sur $\text{Spec}(k)$ et déterminé par l'étiquette d'une arête sur ce dernier X_s .

D.9.2. Action galoisienne.

D.9.2.1. Soient ${}_0k$ un corps (calculable et disposant d'un algorithme de factorisation et d'une p -base finie explicite : cf. [D.12.6](#)) et ${}_0X$ un ${}_0k$ -schéma algébrique explicite. Fixons une

clôture algébrique k de ${}_0k$ et notons X le k -schéma obtenu par extension des scalaires. Nous allons montrer que l'on peut calculer une extension finie galoisienne ${}_1k/{}_0k$ telle que l'action du groupe de Galois de ${}_0k$ sur $H^*(X, \Lambda)$ se factorise à travers $\Gamma = \text{Gal}({}_1k/{}_0k)$ et calculer la représentation du groupe fini correspondante. Toute extension étale de la clôture parfaite de ${}_0k$ dans k se descendant explicitement à ${}_0k$, on peut supposer le corps ${}_0k$ parfait (D.12.4(v)).

D.9.2.2. Fixons d . Comme on l'a vu en D.8.3, il existe un hyperrecouvrement tronqué pour la topologie des altérations $X_{\bullet, \leq r} \rightarrow X$ tel que $\check{H}^d(X_{\bullet, \leq r}, \Lambda) \rightarrow H^d(X, \Lambda)$ soit *surjective*; par cofinalité (observée en D.1.4.11), il existe un tel hyperrecouvrement *défini sur* ${}_0k$. La calculabilité de l'action du groupe de Galois sur $H^d(X, \Lambda)$ se déduit donc de celle de l'action sur $\check{H}^d(X_{\bullet, \leq r}, \Lambda)$ et de la calculabilité de la flèche. Plus précisément, si $c \in H^d(X, \Lambda)$ est l'image d'une d -chaîne $z \in H^0(X_d, \Lambda)$, la classe de cohomologie $\gamma \cdot c$, où $\gamma \in \text{Gal}(k/{}_0k)$, est l'image de la d -chaîne $\gamma \cdot z$ déduite de l'action du groupe de Galois sur $\pi_0(X_d) = \pi_0({}_0X_d \otimes_{{}_0k} k)$.

Notons que l'hyperrecouvrement tronqué $X_{\bullet, \leq r} \rightarrow X$ est défini sur une sous-extension galoisienne finie ${}_1k/{}_0k$, et l'action précédente se factorise à travers le quotient fini $\Gamma = \text{Gal}({}_1k/{}_0k)$. Ce dernier est calculable car ${}_0k$ est un corps calculable avec un algorithme de factorisation ([FRIED et JARDEN 2008, 19.3.2]).

D.10. Structure de l'algorithme et exemple simple

D.10.1. Structure générale. Récapitulons brièvement comment les différents éléments qui ont été présentés s'emboîtent pour fournir, en principe, un algorithme permettant de calculer $H^d(X, \Lambda)$ pour X un schéma algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de ℓ et Λ un ℓ -groupe abélien fini.

Dans un premier temps, on calcule, jusqu'à un certain niveau r , un hyperrecouvrement X_\bullet de X tel qu'explicité en D.1.4.12. Plus exactement, on calcule $X_0 \rightarrow X$ qui recouvre X et dont les composantes sont des polycourbes ℓ -élémentaires (et en particulier, des $K(\pi, 1)$ pro- ℓ) : ceci se fait au moyen de la proposition D.1.4.9 (compte tenu des remarques qui suivent au sujet de la constructivité); puis de même $X_1 \rightarrow X_0 \times_X X_0$ et ainsi de suite comme expliqué en D.1.4.13. Cette construction des X_i doit être menée pour $i \leq r$ avec r qui dépend uniquement du degré en lequel on veut calculer la cohomologie (comme expliqué en D.4.1.2, en fait $r = d + 1$ suffit).

D'après les résultats de la section D.3 — s'appuyant sur la calculabilité du nombre de $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ -torseurs établie en D.2.1 —, on sait calculer, pour chaque niveau d'approximation fini $\lambda \geq 1$, et pour tout k -schéma algébrique normal Y , un revêtement ℓ -étale λ -approché universel $Y^{[\lambda]}$, ainsi que le groupe de Galois correspondant $\pi_Y^{[\lambda]}$ si Y est connexe.

D'après §D.4, on sait calculer, pour chaque niveau d'approximation fini $\lambda \geq 1$, le groupe $H^d(\text{Tot } X_\bullet^{(\lambda)}, \Lambda)$ (isomorphe à $H^d(\text{Tot } X_{\bullet, \leq r}^{(\lambda)}, \Lambda)$ puisque r a été choisi assez grand), et même la flèche $H^d(\text{Tot } X_\bullet^{(\mu)}, \Lambda) \rightarrow H^d(\text{Tot } X_\bullet^{(\nu)}, \Lambda)$ pour deux entiers $\mu \leq \nu$.

Il s'agit donc de calculer de tels entiers pour que l'image de cette flèche soit le groupe $H^d(X, \Lambda)$ recherché. Comme expliqué en §D.8, ceci résulte de D.5.7 appliqué à la suite spectrale $E_{1,\lambda}^{i,j} = H^j(X_i^{(\lambda)}, \Lambda) \Rightarrow H^{i+j}(\text{Tot } X_\bullet^{(\lambda)}, \Lambda)$, une fois connus des fonctions explicitant, pour

chaque i et j , le fait que $H^j(X_i^{(\lambda)}, \Lambda)$ est essentiellement constant. De telles bornes sont obtenues en §D.7.

D.10.2. Esquisse d'exemple. Pour illustrer la manière dont l'algorithme s'exécuterait, nous esquissons le calcul de $H^i(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ pour les petits i en en suivant les différentes étapes. (Le cas encore plus simple d'une courbe *affine* lisse X consiste essentiellement à calculer $X^{[\lambda]}$ par D.3.3 pour des petites valeurs de λ et à appliquer la proposition D.6.5 : de toute façon, on est ramené à §D.2.)

Notons $U = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{\infty\}$ et $U' = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0\}$ deux ouverts de Zariski qui recouvrent \mathbb{P}_k^1 et dont on note $V := U \times_{\mathbb{P}_k^1} U'$ l'intersection. Soit $X_0 := U \amalg U' \rightarrow \mathbb{P}_k^1$, vu comme un \mathbb{P}_k^1 -schéma simplicial 0-tronqué ; son cosquelette est donné par $X_p = X_0 \times_{\mathbb{P}_k^1} \cdots \times_{\mathbb{P}_k^1} X_0$ (avec $p+1$ facteurs), qui est le coproduit $U \amalg V \amalg \cdots \amalg V \amalg U'$ de U, U' et $2^{p+1} - 2$ copies de V qu'on imaginera étiquetés par les 2^{p+1} mots binaires w de longueur $p+1$, et pour $0 \leq i \leq p+1$, le morphisme $X_{\delta_{p,i}} : X_{p+1} \rightarrow X_p$ envoie par le morphisme évident la composante $X_{p+1,w}$ étiquetée w sur celle $X_{p,w'}$ étiquetée par le mot w' égal à w privé de son i -ième bit. Il s'agit manifestement d'un hyperrecouvrement. Comme U, U', V sont des (poly)courbes ℓ -élémentaires sur $\text{Spec } k$, il est possible que la recherche de courbes élémentaires effectuée par l'algorithme retourne cet hyperrecouvrement.

Examinons maintenant comment se déroulerait le calcul de la cohomologie de $\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda+1)}$ (en fonction d'un entier $\lambda+1 \geq 1$) à valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. Comme $V = \mathbb{G}_m$, le topos $V^{(\lambda+1)}$ est le topos des $\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}$ -ensembles, tandis que $U^{(\lambda+1)}$ et $U'^{(\lambda+1)}$ sont, bien sûr, celui des ensembles. (Et pour un λ donné, l'algorithme est capable d'effectuer ce calcul en suivant D.3.3.) Un faisceau abélien de $\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda+1)}$ est donc (cf. D.4.1.1) la donnée pour chaque mot binaire w de longueur $p+1$ (pour $p \geq 0$) d'un groupe abélien $A_{p,w}$, muni d'une action de $\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}$ sauf si w est l'un des mots $00 \cdots 0$ ou $11 \cdots 1$, ainsi que de morphismes $A_{p,w} \rightarrow A_{p+1,w'}$ pour chaque mot w' obtenu en insérant un bit dans w , vérifiant les compatibilités évidentes. Si comme topos discret utilisé en §D.4 on prend $P_{\bullet} = X_{\bullet}^{(1)}$, alors un faisceau abélien de $\text{Tot } P_{\bullet}$ correspond à de telles données sans l'action de $\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}$: à un tel objet est associé un complexe de différentielle $(\dagger) \bigoplus_{w \in \{0,1\}^{p+1}} A_{p,w} \rightarrow \bigoplus_{w \in \{0,1\}^{p+2}} A_{p+1,w}$ somme alternée des morphismes $A_{p,w} \rightarrow A_{p+1,w'}$.

Les foncteurs u^* associant à un $\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}$ -ensemble son ensemble sous-jacent, et u_* son adjoint à droite $X \mapsto \text{Hom}_{\text{Ens}}(\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}, X)$, définissent pour tout $\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}$ -module une résolution de Godement, analogue (et quasi-isomorphe) à l'une des résolutions habituelles définissant la cohomologie des groupes (par exemple [SERRE 1994, I, §2.2] ou [NEUKIRCH, A. SCHMIDT et WINGBERG 2000, I, §2]). Ces foncteurs forment un morphisme $\text{Tot } P_{\bullet} \rightarrow \text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda+1)}$. À partir du faisceau constant $A_{p,w} = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$, l'algorithme (D.4.2) va donc calculer, en bas degrés, le complexe double dont les colonnes sont sommes de copies de la résolution qu'on vient de dire (et pour $w = 00 \cdots 0, 11 \cdots 1$, de la résolution triviale), et dont les différentielles horizontales sont données par (\dagger) . Le calcul du $H^i(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est alors donné par la cohomologie du complexe simple associé à ce complexe double.

On peut prédire quel sera le résultat de ce calcul en utilisant la suite spectrale de descente décrite en **D.8.2** (et qui est la « première » suite spectrale associée au complexe double décrit ci-dessus) : il est facile de se convaincre que cette suite spectrale dégénère en E_2 , les seuls termes non nuls étant $E_2^{0,0} = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ et $E_2^{1,q} = H^q(\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ si $q \geq 2$. Ainsi, $H^n(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ vaut $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ si $n = 0$, 0 si $n = 1$, et $H^{n-1}(\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ si $n \geq 2$ (c'est-à-dire $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ dès que $\lambda \geq 1$). Pour $\lambda \leq \mu$, les flèches $H^n(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\lambda+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\text{Tot } X_{\bullet}^{(\mu+1)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ correspondent bien aux morphismes fonctoriels (d'inflation) $H^{n-1}(\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{Z}/\ell^\mu\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, et grâce à **D.6.5–D.6.7** on sait que cette flèche sera un isomorphisme pour $n \leq 2$ et nulle pour $n \geq 3$ dès que $1 \leq \lambda < \mu$. Muni de cette borne, l'algorithme calcule $H^n(\mathbb{P}_k^1, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ comme l'image de $H^n(\text{Tot } X_{\bullet}^{(2)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\text{Tot } X_{\bullet}^{(3)}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$, ce qui donne bien le résultat attendu.

Soulignons sur cet exemple le fait suivant : si on remplace les coefficients $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ par le groupe μ_ℓ des racines ℓ -ièmes de l'unité (qui lui est non canoniquement isomorphe) et le groupe $\mathbb{Z}/\ell^\lambda\mathbb{Z}$ par le groupe μ_{ℓ^λ} (de nouveau non canoniquement isomorphe) des automorphismes du revêtement étale $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ donné par $z \mapsto z^{\ell^\lambda}$, on se convainc aisément que le calcul ne dépend plus d'aucun choix arbitraire (même si la description ci-dessus en utilise), et on voit donc $H^2(\mathbb{P}_k^1, \mu_\ell)$ comme $H^1(\mu_{\ell^\lambda}, \mu_\ell)$ (l'action de μ_{ℓ^λ} étant triviale), lui-même isomorphe à $\text{Hom}(\mu_{\ell^\lambda}, \mu_\ell) = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ sans faire de choix arbitraire.

D.11. Compléments

On considère ici quelques résultats qui sont des prolongements naturels de notre théorème principal et on énonce en **D.11.5** quelques questions, dont certaines sont probablement hors de portée. Cette section se termine (**D.11.6**) par quelques précisions métamathématiques sur la nature des algorithmes que l'on espère pouvoir obtenir.

Ci-dessous k est un corps algébriquement clos et Λ un anneau commutatif fini de cardinal inversible sur k .

D.11.1. Cohomologie d'un schéma simplicial. Soit X_{\bullet} un k -schéma algébrique simplicial. D'après [DELIGNE 1974b, § 6.4] et les résultats de § **D.1.4**, il existe un hyperrecouvrement $X_{\bullet\bullet} \rightarrow X_{\bullet}$ par des polycourbes ℓ -élémentaires tel que $H^*(X_{\bullet}, \Lambda) = H^*(X_{\bullet\bullet}, \Lambda)$. On peut donc procéder comme dans le cas non simplicial pour calculer le terme de gauche en tout degré donné à l'avance. Noter qu'il n'est pas absolument nécessaire d'utiliser une variante bisimpliciale de arguments précédents : d'après le théorème de Cartier-Eilenberg-Zilber ([*ibid.*, 6.4.2.2] ou [ILLUSIE 1971-1972, I, § 1.2]), on a $\text{R}\Gamma(X_{\bullet\bullet}, \Lambda) = \text{R}\Gamma(\delta X_{\bullet\bullet}, \Lambda)$, où $\delta X_{\bullet\bullet}$ est le schéma simplicial *diagonal* déduit de $X_{\bullet\bullet}$. Le même argument est valable si l'on veut calculer la cohomologie de X_{\bullet} à valeurs dans un faisceau à composantes localement constantes (étage par étage).

Tout espace algébrique (au sens d'Artin) étant localement pour la topologie étale un schéma, on peut probablement utiliser le résultat précédent pour en calculer la cohomologie étale.

D.11.2. Cohomologie relative. On présente ici deux constructions de la cohomologie relative d'un morphisme $Y \rightarrow X$: la première (simpliciale) est valable en toute généralité, la

seconde (D.11.2.5) s'applique uniquement à la cohomologie relativement à un sous-schéma fermé.

Rappelons que la cohomologie relative s'inscrit dans un triangle distingué

$$R\Gamma(X/Y, \Lambda) \rightarrow R\Gamma(X, \Lambda) \rightarrow R\Gamma(Y, \Lambda) \xrightarrow{+1}.$$

Lorsque Λ est un corps, la calculabilité de la dimension du groupe de cohomologie relative $H^i(X/Y, \Lambda)$ résulte donc immédiatement du théorème D.0.1 : c'est une extension de $\text{Ker}(H^i(X, \Lambda) \rightarrow H^i(Y, \Lambda))$ par $\text{Im}(H^{i-1}(X, \Lambda) \rightarrow H^{i-1}(Y, \Lambda))$.

D.11.2.1. Cône d'un morphisme simplicial. Soit $f_\bullet : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ un morphisme de topos simpliciaux (dont on notera $\text{Tot } f_\bullet : \text{Tot } Y_\bullet \rightarrow \text{Tot } X_\bullet$ le morphisme entre les topos totaux, cf. D.4.1.1); on pourra penser au cas d'un morphisme déduit, par passage aux topos étales, d'un morphisme de k -schémas algébriques simpliciaux. Notons Cf_\bullet son **cône** : $Cf_n = X_n \amalg Y_{<n}$, où $Y_{<n} = \coprod_{-1 \leq i < n} Y_i$ et, conformément à l'usage, Y_{-1} est le topos final e . Explicitons le morphisme de functorialité $Cf_\varphi : Cf_m \rightarrow Cf_n$ déduit d'une application croissante $\varphi : [n] = \{0, \dots, n\} \rightarrow [m] = \{0, \dots, m\}$. Sur le facteur X_m , c'est le morphisme composé $X_m \rightarrow X_n \hookrightarrow Cf_n$, la première flèche étant X_φ . Soit maintenant $-1 \leq \mu < m$ et considérons l'application $\varphi_\mu : [\nu] \rightarrow [\mu]$ déduite de φ par changement de base $[\mu] \hookrightarrow [m]$. Sur le facteur Y_μ , le morphisme Cf_φ est le morphisme composé $Y_\mu \rightarrow Y_\nu \hookrightarrow Cf_n$, la première flèche étant Y_{φ_μ} si $\nu < n$, et $Y_\mu \rightarrow Y_\nu \rightarrow X_\nu \hookrightarrow Cf_n$, où $Y_\nu \rightarrow X_\nu$ est f_ν , si $\nu = n$. Par exemple, le morphisme face $d_i : Cf_{n+1} \rightarrow Cf_n$, déduit de l'unique injection croissante $[n] \rightarrow [n+1]$ d'image ne contenant pas i , est induit par les identités $Y_j \rightarrow Y_j$ pour $j < i$ (composée avec $Y_n \rightarrow X_n$ si $j = n$) et les faces $d_i : Y_l \rightarrow Y_{l-1}$ pour $i \leq l \leq n$ et $d_i : X_{n+1} \rightarrow X_n$.

Soit $\varphi_\bullet : \mathcal{F}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$ un f_\bullet -morphisme entre faisceaux abéliens \mathcal{F}_\bullet sur $\text{Tot } X_\bullet$ et \mathcal{G}_\bullet sur $\text{Tot } Y_\bullet$, c'est-à-dire un morphisme $f_\bullet^* \mathcal{F}_\bullet \rightarrow \mathcal{G}_\bullet$, objet du topos flèche $\text{Fl}(\text{Tot } f_\bullet)$. Les coproduits et les flèches du paragraphe précédent, calculés dans la catégorie des paires (X, \mathcal{F}) – cf. [DELIGNE 1974b, 6.3.1.b)], en remplaçant « espace topologique » par « topos »[Ⓞ], permettent de définir un faisceau abélien simplicial sur $\text{Tot } Cf_\bullet$, cône de φ_\bullet , que nous notons $C\varphi_\bullet$. (Notons que l'objet final de cette catégorie de paires est le faisceau nul sur e .)

D.11.2.2. La cohomologie relative de $\text{Tot } X_\bullet$ modulo $\text{Tot } Y_\bullet$ est un cas particulier de celle définie, pour tout morphisme $S \rightarrow T$ de topos, en [ILLUSIE 1971-1972, III, §4] (voir aussi [DELIGNE 1980, §4.3.4]). On la note $R\Gamma(\text{Tot } X_\bullet / \text{Tot } Y_\bullet, \varphi_\bullet)$; ce n'est en général pas la cohomologie de $\text{Fl}(\text{Tot } f_\bullet)$ à valeurs dans φ_\bullet . (Cette dernière étant isomorphe à $R\Gamma(\text{Tot } X_\bullet, \mathcal{F}_\bullet)$ d'après [ILLUSIE 1971-1972, III.4.2].) Implicite en [DELIGNE 1974b, §6.3] est la formule suivante :

$$(\star) \quad R\Gamma(\text{Tot } X_\bullet / \text{Tot } Y_\bullet, \varphi_\bullet) = R\Gamma(\text{Tot } Cf_\bullet, C\varphi_\bullet).$$

En degré cohomologique nul, cette formule résulte immédiatement de la description explicite de d_0 et d_1 , et du fait que le terme de gauche est $\text{Ker}(H^0(\text{Tot } X_\bullet, \mathcal{F}_\bullet) \rightarrow H^0(\text{Tot } Y_\bullet, \mathcal{G}_\bullet))$. (On pourra aussi comparer à [ANDERSON 1987, §1], où le cas des ensembles simpliciaux et des coefficients constants est considéré.)

Ⓞ. Voir aussi [SGA 4 Vbis, 4.3.0].

D.11.2.3. Justifions brièvement (\star) . Notons \mathcal{R} le topos $\text{Fl}(\text{Tot } f_\bullet)$ et \mathcal{C} le topos $\text{Tot } C f_\bullet$. Il n'y a pas de morphisme naturel $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}$ — comme on le voit par exemple en considérant l'unique endomorphisme du topos simplicial vide — mais un morphisme $a : \mathcal{C}^\times \rightarrow \mathcal{R}$, où \mathcal{C}^\times est le *sous-topos ouvert* de \mathcal{C} , défini par la condition : $i^\star = \emptyset$, où $i : \text{Fl}(e_\bullet) \rightarrow \mathcal{C}$ est le morphisme évident. Le morphisme image inverse a^\star est la variante ensembliste du cône d'un morphisme de faisceau abélien considérée en **D.11.2.1** : sur chaque $Y_{-1} = e$, on considère le faisceau initial (=vide). Notant $j : \mathcal{C}^\times \hookrightarrow \mathcal{C}$, on vérifie sans peine l'égalité $C\varphi_\bullet = j_! a^\star \varphi_\bullet$ pour tout faisceau abélien sur \mathcal{R} . La formule (\star) résulte alors, par dérivation et exactitude de $j_! a^\star$, de la formule en degré cohomologique nul.

D.11.2.4. Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de k -schémas algébriques et $f_\bullet : Y_\bullet \rightarrow X_\bullet$ le morphisme induit entre les schémas simpliciaux constants. Il résulte de ce qui précède et de **D.11.1** que l'on peut calculer le groupe de cohomologie étale $H^i(X/Y, \Lambda) : c'est H^i(C f_\bullet, C\Lambda_\bullet)$. Ceci s'applique en particulier au calcul de la cohomologie à support compact : si X est *propre* sur k , la cohomologie de X/F — où F est un fermé de X — est la cohomologie à support compact de $U = X - F$:

$$H_c^i(U, \Lambda) = H^i(X/F, \Lambda).$$

D.11.2.5. Esquisons une autre approche du calcul de la cohomologie de X relative à un fermé F . Notons $Z = X \amalg_F X$ la somme amalgamée (pincement) de deux copies de X le long de F ; si $X = \text{Spec}(A)$ et $F = \text{Spec}(A/I)$, le schéma Z est le spectre du sous-anneau $B = \{(a_1, a_2) \in A^2 : a_1 \equiv a_2 \pmod{I}\}$ de A^2 . Voir [FERRAND 2003, §5 et §7, notamment le théorème 7.1] pour une discussion de l'existence de coproduits sous des hypothèses bien plus générales et **D.16.4** pour une approche effective.

Notons i_1 et i_2 les deux immersions fermées canoniques de X dans Z , et i l'immersion fermée de F dans Z . Considérons les morphismes d'adjonctions $\rho_\alpha : i_{\alpha\star} \Lambda \rightarrow i_\star \Lambda$ (pour $\alpha \in \{1, 2\}$) et δ le morphisme « différence » $(i_\star \Lambda)^2 \rightarrow i_\star \Lambda, (a_1, a_2) \mapsto a_1 - a_2$. Le complexe concentré en degrés $[0, 1]$

$$[i_{1\star} \Lambda \oplus i_{2\star} \Lambda \xrightarrow{\delta \circ (\rho_1, \rho_2)} i_\star \Lambda]$$

calcule la cohomologie $R\Gamma(Z, \Lambda)$ de Z (« Mayer-Vietoris »). Or, il est *isomorphe* au complexe

$$[i_{1\star} \Lambda \oplus i_{2\star} \Lambda \xrightarrow{0 \oplus \rho_2} i_\star \Lambda]$$

dont la cohomologie est la somme directe $R\Gamma(X, \Lambda) \oplus R\Gamma(X/F, \Lambda)$. La cohomologie de X/F se déduit donc fonctoriellement de la cohomologie (usuelle) de X et de celle de $Z = X \amalg_F X$.

(Notons que la rétraction $Z = X \amalg_F X \rightarrow X = X \amalg_X X$ des deux inclusions $X \rightrightarrows Z$ induit la décomposition en somme directe ci-dessus.)

D.11.3. Structure d'algèbre graduée.

D.11.3.1. Soient X et Y deux k -schémas de type fini, Λ comme au début de la section **D.11** et i, j deux entiers. Comme expliqué en **D.8.3**, on peut notamment construire deux hyper-recouvrements (étales) $X_\bullet \rightarrow X$ et $Y_\bullet \rightarrow Y$ tels que les flèches $\check{H}^i(X_\bullet, \Lambda) \rightarrow H^i(X, \Lambda)$ et $\check{H}^j(Y_\bullet, \Lambda) \rightarrow H^j(Y, \Lambda)$ soient *surjectives*. Utilisant la formule de Künneth triviale $\pi_0(X_\bullet \times_k Y_\bullet) =$

$\pi_0(X_\bullet) \times \pi_0(Y_\bullet)$ et l'existence d'un homotopisme d'Eilenberg-Zilber *explicite* ([MAC LANE 1963, VIII, théorèmes 8.1 et 8.8])

$$\mathrm{Hom}(\pi_0(X_\bullet), \Lambda) \otimes \mathrm{Hom}(\pi_0(Y_\bullet), \Lambda) \rightarrow \mathrm{Hom}(\pi_0(X_\bullet \times_k Y_\bullet), \Lambda),$$

on en déduit un morphisme

$$\check{H}^i(X_\bullet, \Lambda) \otimes \check{H}^j(Y_\bullet, \Lambda) \rightarrow \check{H}^{i+j}(X_\bullet \times_k Y_\bullet, \Lambda)$$

relevant le morphisme de Künneth $H^i(X, \Lambda) \otimes H^j(Y, \Lambda) \rightarrow H^{i+j}(X \times_k Y, \Lambda)$ ([MILNE 1980, V.1.19]; comparer avec [DELIGNE 1974b, 8.1.25]). Ce dernier est donc calculable compte tenu de ce qui précède. (On utilise le fait que la flèche naturelle $\check{H}^{i+j}(X_\bullet \times_k Y_\bullet, \Lambda) \rightarrow H^{i+j}(X \times_k Y, \Lambda)$ l'est.)

D.11.3.2. Lorsque $X = Y$, on en déduit la structure de Λ -algèbre graduée commutative sur $H^*(X, \Lambda)$ par composition avec la flèche de functorialité $H^*(X \times_k X, \Lambda) \rightarrow H^*(X, \Lambda)$ induite par la diagonale $X \rightarrow X \times_k X$: on peut donc calculer le produit

$$H^*(X, \Lambda) \otimes H^*(X, \Lambda) \rightarrow H^*(X, \Lambda)$$

$$c_1 \otimes c_2 \mapsto c_1 \smile c_2.$$

D.11.3.3. Le résultat précédent a une application immédiate aux cycles algébriques. Supposons dorénavant X propre, lisse, connexe de dimension d_X , et fixons un isomorphisme $t_X : H^{2d_X}(X, \Lambda) \simeq \Lambda$. Par la dualité de Poincaré, toute forme linéaire $\varphi : H^i(X, \Lambda) \rightarrow \Lambda$ est de la forme $b \mapsto t_X(a_\varphi \smile b)$ pour une unique classe $a_\varphi \in H^{2d_X-i}(X, \Lambda)$, que l'on peut calculer. En particulier, tout morphisme $Z \rightarrow X$ de source une variété propre lisse connexe de dimension d_Z induit une classe $c_Z \in H^{2(d_X-d_Z)}(X, \Lambda)$, correspondant à la forme linéaire composée $H^{2d_Z}(X, \Lambda) \rightarrow H^{2d_Z}(Z, \Lambda) \simeq \Lambda$, où le dernier morphisme est un morphisme trace pour Z .

La classe de cycle c_Z est ainsi définie à multiplication par un élément de Λ^\times près (lié au choix arbitraire de traces pour X et Z), ambiguïté que l'on devrait pouvoir lever. Ceci nous permet cependant de répondre à la question : la classe d'un cycle algébrique lisse de X est-elle triviale ?

D.11.4. Images directes. On montre que pour tout morphisme $f : X \rightarrow S$ entre k -schémas algébriques, tout faisceau constructible \mathcal{F} de Λ -modules sur X et tout entier i , on peut calculer le faisceau $R^i f_* \mathcal{F}$, fonctoriellement en \mathcal{F} .

D.11.4.1. Il conviendrait de donner une description explicite de la catégorie des faisceaux constructibles sur un schéma (explicite) X et de vérifier que quelques opérations usuelles (noyau, conoyau, etc.) sont bien calculables. Signalons simplement que différentes approches sont possibles : stratifications et flèches de recollement (cf. [SGA 4 IV, 9.3]), description des générateurs ou cogénérateurs usuels ([SGA 4 IX, 2.9 (ii) et 2.14 (ii)]), espaces algébriques ([M. ARTIN 1973, chap. VII], ou [MILNE 1980, chap. V, § 1]). Cette dernière est probablement la plus économique.

D.11.4.2. Effaçabilité et dévissages. Soient S un schéma noethérien et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. D'après une variante de [Arcata, 3.5], les foncteurs $R^i f_*$ pour $i > 0$ sont *effaçables* dans la catégorie des faisceaux constructibles sur X : pour chaque faisceau (abélien) constructible \mathcal{F} sur X , il existe un plongement de \mathcal{F} dans un faisceau *constructible* $\tilde{\mathcal{F}}$ tel que le morphisme $R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow R^i f_* \tilde{\mathcal{F}}$ soit nul. De plus, il est formel de vérifier que tout morphisme $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de faisceaux constructibles s'insère dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{F}}_1 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_2 \end{array}$$

où $\tilde{\mathcal{F}}_1$ et $\tilde{\mathcal{F}}_2$ effacent respectivement $R^i f_* \mathcal{F}_1$ et $R^i f_* \mathcal{F}_2$.

Fixons un entier $n > 1$ et supposons que l'on sache calculer, fonctoriellement en \mathcal{F} , les $R^i f_* \mathcal{F}$ pour chaque entier $i < n$, et chaque faisceau constructible \mathcal{F} de Λ -modules sur X . Considérons un faisceau constructible \mathcal{F} sur X et $\mathcal{F} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ un monomorphisme effaçant $R^n f_* \mathcal{F}$. Notant \mathcal{G} le faisceau quotient $\tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{F}$, on a la suite exacte $R^{n-1} f_* \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow R^{n-1} f_* \mathcal{G} \rightarrow R^n f_* \mathcal{F} \rightarrow 0$. La calculabilité (fonctorielle) de $R^n f_* \mathcal{F}$ se ramène donc à la détermination explicite d'un monomorphisme $\mathcal{F} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ comme ci-dessus. La possibilité de plonger tout Λ -faisceau constructible dans l'image directe par un morphisme fini d'un faisceau constant sur chaque composante connexe nous ramène au problème suivant : trouver un morphisme fini surjectif $\pi : X' \rightarrow X$ tel que la flèche de functorialité (dédue de l'unité de l'adjonction $\pi^* \dashv \pi_*$)

$$R^n f_* \Lambda \rightarrow R^n f'_* \Lambda$$

soit nulle, où $f' = f \circ \pi'$.

D.11.4.3. Cas d'un morphisme propre. (Par la suite, S est de type fini sur k algébriquement clos.) Quitte à énumérer les morphismes π (pour faire une recherche non bornée : cf. D.12.7), on se ramène au problème de *tester* la nullité d'une flèche comme ci-dessus. Or, on peut calculer une stratification explicite $S = \bigcup_i S_i$ (réunion disjointe) telle que les faisceaux $R^n f_* \Lambda$ et $R^n f'_* \Lambda$ ci-dessus soient lisses sur les S_i ; c'est un corollaire immédiat des démonstrations « géométriques » de la constructibilité des images directes. (Voir [uniformite//Orgogozo] pour des variantes sur ce thème.) Tester si $R^n f_* \Lambda \rightarrow R^n f'_* \Lambda$ est nulle revient donc à tester si sa fibre l'est en tout point géométrique $\bar{\eta}$ localisé en un point maximal η des S_i . Lorsque f est *propre* (ou simplement cohomologiquement propre pour les faisceaux de torsion), cette fibre n'est autre que la flèche de functorialité

$$H^n(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow H^n(X'_{\bar{\eta}}, \Lambda).$$

D'après le théorème D.0.1, on peut décider si une telle flèche est nulle ou non ; la conclusion résulte alors du fait que les points maximaux η sont en nombre fini.

Ceci démontre le théorème D.0.9 dans le cas particulier où f est *propre*, ou bien lorsque $S = \text{Spec}(k)$.

D.11.4.4. Notons que l'on peut améliorer légèrement le résultat d'effaçabilité précédent : donné $f : X \rightarrow S$ propre (et Λ), on peut calculer $X' \rightarrow X$ fini surjectif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi} & X' \\ f \downarrow & & \swarrow f' \\ S & & \end{array}$$

tel que le morphisme $R^{\geq 1} f_* \Lambda \rightarrow R^{\geq 1} f'_* \Lambda$ soit nul, où l'on note $R^{\geq 1} = \tau_{\geq 1} R$ pour simplifier. Il suffit d'itérer suffisamment la construction (cf. par exemple [BHATT 2011b, § 2]).

Déduisons de cette observation que, si f n'est plus nécessairement propre (mais toujours de type fini), l'existence d'un morphisme fini surjectif $\pi : X' \rightarrow X$ tel que les $R^i f_* \Lambda \rightarrow R^i f'_* \Lambda$ soient nuls pour $i > 0$ se déduit de l'existence d'une *altération* a effaçant la cohomologie. Supposons en effet que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{X}' \\ \downarrow a & \swarrow b & \downarrow \\ X & \xleftarrow{\pi} & X' \\ \downarrow f & \swarrow f' & \downarrow \\ S & & \end{array}$$

(Le diagramme est entouré de deux arcs : g à gauche et g' à droite, reliant \tilde{X} à S et \tilde{X}' à S respectivement.)

où :

- a est une altération effaçant la cohomologie de f : la flèche de functorialité $R^i f_* \Lambda \rightarrow R^i g_* \Lambda$ est nulle pour chaque $i > 0$;
- $\tilde{\pi}$ est un morphisme fini surjectif effaçant la cohomologie du morphisme propre a : la flèche de functorialité $R^{\geq 1} a_* \Lambda \rightarrow R^{\geq 1} b_* \Lambda$ est nulle ;
- $\tilde{X}' \rightarrow X' \rightarrow X$ est la *factorisation de Stein* de b ; en particulier, π est fini surjectif.

(D'après ce qui précède, donné a , on sait *calculer* un tel diagramme.) Il résulte de la seconde hypothèse que l'on a une factorisation diagonale du carré commutatif ci-dessous

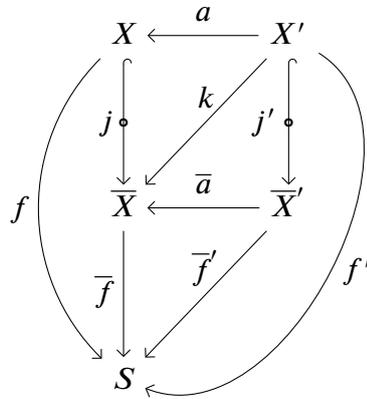
$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & R^0 b_* \Lambda = \pi_* \Lambda \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ R a_* \Lambda & \longrightarrow & R b_* \Lambda \end{array}$$

où l'égalité du coin supérieur droit est conséquence de la troisième hypothèse. Fixons $n > 0$ et appliquons le foncteur $R^n f_*$. Le carré précédent devient

$$\begin{array}{ccc}
 R^n f_{\star} \Lambda & \longrightarrow & R^n f'_{\star} \Lambda \\
 0 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 R^n g_{\star} \Lambda & \longrightarrow & R^n g'_{\star} \Lambda.
 \end{array}$$

La nullité de la flèche verticale de gauche correspond à la première hypothèse. La flèche horizontale supérieure est donc nulle. CQFD.

D.11.4.5. Les observations précédentes et le théorème de résolution des singularités [A. J. DE JONG 1996, 4.1] ramènent le calcul d'un morphisme fini surjectif effaçant la cohomologie d'un morphisme (non nécessairement propre) $f : X \rightarrow S$ au cas particulier où X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux stricts D dans un schéma projectif lisse \bar{X} sur k , et où l'on s'autorise à effacer par une *altération* a . Le cas propre étant déjà connu, il suffit de montrer que l'on peut calculer un diagramme commutatif



où \bar{a} est une altération et le carré commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 R^n \bar{f}_{\star} \Lambda & \longrightarrow & R^n \bar{f}'_{\star} \Lambda \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
 R^n f_{\star} \Lambda & \longrightarrow & R^n f'_{\star} \Lambda
 \end{array}$$

se factorise diagonalement comme indiqué. En effet, le cas propre appliqué au morphisme \bar{f}' permet de construire une altération (et même un morphisme fini surjectif) $\bar{X}'' \rightarrow \bar{X}'$ effaçant $R^n \bar{f}'_{\star} \Lambda$; la conclusion est alors immédiate.

Comme au paragraphe précédent (D.11.4.4), il suffit de montrer que l'on peut calculer une altération \bar{a} effaçant $R^{\geq 1} j_{\star} \Lambda$, c'est-à-dire telle que le morphisme $R^{\geq 1} j_{\star} \Lambda \rightarrow R^{\geq 1} k_{\star} \Lambda$ soit nul. En effet, on a sous cette hypothèse un diagramme commutatif et une factorisation

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda & \longrightarrow & k_{\star} \Lambda = \bar{a}_{\star} \Lambda & \longrightarrow & R \bar{a}_{\star} \Lambda \\
 \downarrow & & \nearrow & & \downarrow \\
 R j_{\star} \Lambda & \longrightarrow & & \longrightarrow & R k_{\star} \Lambda
 \end{array}$$

induisant après application du foncteur $R^n \bar{f}_{\star}$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{R}^n \bar{f}_\star \Lambda & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \bar{f}_\star (\bar{a}_\star \Lambda) & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \bar{f}_\star (\mathbf{R}\bar{a}_\star \Lambda) = \mathbf{R}^n \bar{f}'_\star \Lambda \\
\downarrow & & \nearrow \text{dotted} & & \downarrow \\
\mathbf{R}^n f_\star \Lambda & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathbf{R}^n f'_\star \Lambda
\end{array}$$

désiré. Pour effacer $\mathbf{R}^{\geq 1} j_\star \Lambda$, il suffit — par itération, cf. [D.11.4.4](#), premier paragraphe — de savoir effacer chaque $\mathbf{R}^i j_\star \Lambda$ pour $i > 0$ (en nombre fini). Pour tout entier $N > 0$, il existe un morphisme fini surjectif $\bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ tel que, Zariski-localement sur \bar{X} , le tiré en arrière du diviseur $D = \bar{X} - X$ soit une puissance N -ième dans \bar{X}' . En effet, il est possible de trouver, Zariski-localement, une extension finie du corps des fractions de \bar{X} telle que la clôture intégrale de \bar{X} convienne (cf. [DELIGNE 1980, § 1.7.9]); il suffit alors de considérer la clôture intégrale de \bar{X} dans une extension composée. Vérifions que $\bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ efface les $\mathbf{R}^i j_\star \Lambda$. Soit d un point géométrique de D , $U = X \times_{\bar{X}} \bar{X}_{(d)}$ le complémentaire de $D_{(d)}$ dans le schéma régulier strictement local $\bar{X}_{(d)}$ et V l'ouvert correspondant dans $\bar{X}'_{(d)} = \bar{X}_{(d)} \times_{\bar{X}} \bar{X}'$. La fibre en d de $\mathbf{R}^i j_\star \Lambda \rightarrow \mathbf{R}^i k_\star \Lambda$ s'identifie à l'application de functorialité $\mathbf{H}^i(U, \Lambda) \rightarrow \mathbf{H}^i(V, \Lambda)$. Cette dernière est nulle par construction et pureté lorsque $N \cdot \Lambda = \{0\}$. Notons que l'on peut bien itérer cette construction car, quitte à altérer (ce qui est licite comme on l'a vu), on peut supposer que \bar{X}' est régulier et que l'ouvert X' image inverse de X est le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux stricts. Ceci achève la démonstration du théorème [D.0.9](#).

D.11.5. Questions. Nous terminons en suggérant quelques questions, de difficulté variée, qui nous paraissent être un prolongement naturel de ce travail, et que nous n'avons pas eu la patience ou le courage d'aborder.

D.11.5.1. Calculer $\mathbf{H}^i(X, \mathcal{K})$, voire $\mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{K})$, pour \mathcal{K} un complexe borné constructible de Λ -modules. Variante relative : étendre le théorème [D.0.9](#) au calcul de $\mathbf{R}f_\star \mathcal{K}$.

D.11.5.2. (Théorème de changement de base propre effectif.) Donnés $X \rightarrow S$ un morphisme propre et $s \in S$, construire un voisinage étale U de s tel que tout élément de $\mathbf{H}^*(X_s, \Lambda)$ se relève à X_U .

D.11.5.3. Calculer les cycles proches $\Psi_f(\Lambda)$ d'un morphisme $f : X \rightarrow S = \text{Spec}(k[t]_{(t)})$.

D.11.5.4. Calculer les nombres de Betti ℓ -adiques dans le cas non nécessairement propre et lisse[Ⓜ].

D.11.6. Primitive récursivité, ou existence de bornes algorithmiques. Comme nous l'avons signalé en [D.0.10](#) (voir aussi [D.12.7](#) pour une explication plus détaillée), la notion de « calculabilité » que nous avons utilisée est la notion classique de calculabilité au sens de Church-Turing, qui permet notamment d'effectuer des « recherches non bornées », c'est-à-dire énumérer des objets (toujours ramenables aux entiers naturels) jusqu'à en trouver un, si on sait qu'il existe, vérifiant une propriété algorithmiquement testable. L'utilisation de ce procédé, sans aucune borne *a priori* sur la longueur des recherches en question, fait perdre tout contrôle sur la complexité de nos algorithmes.

[Ⓜ]. Ce problème nous semble actuellement hors de portée.

Il nous semble cependant plausible que de telles bornes puissent être trouvées. Plus exactement, nous pensons que les fonctions calculées algorithmiquement dans le présent article sont au moins *primitivement récursives*, c'est-à-dire calculables par un algorithme dont toutes les boucles peuvent être bornées *a priori* au sens où on doit avoir calculé un majorant sur le nombre d'exécutions de toute boucle avant d'entrer dans celle-ci : cf. [ODIFREDDI 1989, définition I.1.6 et proposition I.5.8]. Ceci interdit l'utilisation des « recherches non bornées » et correspond à la façon la plus naturelle de les interdire^①. (Pour rendre plus parlante la notion de fonction primitivement récursive, on peut décrire un langage de programmation qui ne permet pas d'appels récursifs de fonctions et dans lequel toutes les boucles sont des boucles bornées par la valeur d'une variable à l'entrée de la boucle : tel est le langage « BlooP » décrit dans [HOFSTADTER 1999, chapitre XIII], qu'on pourra consulter pour une description agréable à lire de la différence entre fonctions primitivement récursives et générales récursives, ces dernières y étant définies par le langage « FlooP ».) Par ailleurs, les fonctions primitivement récursives sont une « classe de complexité » car une fonction primitivement récursive est une fonction qui peut être calculée algorithmiquement avec une complexité (en espace ou en temps) elle-même donnée par une fonction primitivement récursive : cf. [ODIFREDDI 1999, VIII.8.8].

Les fonctions que nous calculons sont peut-être même « élémentaires » (ou « élémentairement récursives ») au sens de Kalmár, c'est-à-dire de temps d'exécution borné par une tour d'exponentielles, cf. [ibid., définition VIII.7.1] ; de nouveau, il revient au même de dire qu'elle est calculable algorithmiquement avec une complexité elle-même élémentaire (cf. [ibid., théorème VIII.7.6]).

Cette supposition est motivée, entre autres, par un slogan proposé par certains logiciens, cf. [FRIEDMAN 1999, conjecture 1] ou [AVIGAD 2003, « grand conjecture » page 258], selon lequel tout théorème mathématique « ordinaire »^②, qui peut s'énoncer dans le langage de l'arithmétique, est en fait prouvable dans des systèmes formels faibles de l'arithmétique ; or, dès que ces systèmes prouvent qu'un algorithme termine, ils prouvent en fait qu'il appartient à une classe de complexité bien comprise. On pense notamment au système PRA, « Primitive Recursive Arithmetic » (défini par exemple en [S. G. SIMPSON 2009, IX, § 3]) et qui démontre la terminaison précisément des fonctions primitivement récursives (cf. [HÁJEK et PUDLÁK 1998, corollaire IV.3.7]), et au système EA, « Elementary [function] Arithmetic », défini en [AVIGAD

①. Il n'est malheureusement pas possible de dire que toute fonction intuitivement calculable sans recherche non bornée est primitivement récursive, car il existe différentes sortes de récursion garantissant la terminaison qui ne peuvent pas s'exprimer sous forme primitivement récursive : la fonction d'Ackermann en est un exemple ; on pourra consulter [ODIFREDDI 1999, VIII.9, notamment les définitions VIII.9.1 et VIII.9.3] pour des notions plus générales. De toute manière, l'argument général du problème de l'arrêt (i.e., un principe diagonal) ne permet pas qu'on puisse formaliser la notion intuitive de « fonction calculable sans recherche non bornée » (donc en particulier, terminant toujours).

②. Il va de soi que l'affirmation est fautive sans le qualificatif « ordinaire », et que celui-ci ne peut pas être défini rigoureusement. Voir [SMORYŃSKI 1985] (ainsi que les autres articles de cet auteur dans le même recueil [HARRINGTON et collab. 1985]) pour un aperçu généraliste de ces questions, ou bien l'introduction de [FRIEDMAN 201 ?] pour une présentation plus systématique.

2003, § 2], et qui démontre la terminaison des fonctions Kalmár-élémentaires (cf. [ibid., théorème 2.2 et remarque qui suit]). Si notre théorème (affirmant qu'un certain algorithme termine en calculant la cohomologie étale) est démontrable dans ces systèmes faibles, c'est que l'algorithme est primitivement récursif voire Kalmár-élémentaire.

Pour s'en convaincre, il faudrait chercher à reprendre tous les résultats d'existence utilisés ici pour faire apparaître une borne explicite sur les objets construits (de manière à placer les algorithmes dans une des hiérarchies décrites dans [ODIFREDDI 1999, chapitre VIII]). Nous n'avons pas eu le courage de mener cet exercice, mais nous avons au moins cherché à limiter les appels aux « recherches non bornées » (notamment en D.6.6, ou encore D.15.5 pour le calcul de la normalisation). Il reste que nous n'avons pas réussi à l'éviter dans la construction d'un hyperrecouvrement d'un schéma X par des polycourbes ℓ -élémentaires (proposition D.1.4.9 et suite) : s'il est probable que, dans le cas où X est lisse on puisse sans trop de mal construire explicitement les polycourbes en question en suivant la démonstration de [SGA 4 XI, § 2-3], le cas général nécessiterait aussi de revoir les résultats de [A. J. DE JONG 1996] sous un angle algorithmique.

II. Algèbre commutative et géométrie algébrique effectives

L'objet de cette partie est de vérifier la calculabilité des propriétés et opérations algébriques et géométriques utilisées dans la première partie. Certains des résultats rassemblés ici, bien que connus, nous ont semblé difficiles à trouver dans la littérature, ou bien formulés dans un langage différent du nôtre, si bien que nous avons préféré, pour la commodité du lecteur, redémontrer certains faits, ou rappeler la manière dont ils se démontrent. (Ceci devrait en outre faciliter le travail de vérification du lecteur qui a commencé sa lecture par le texte [MADORE et ORGOGOZO 2014] et qui souhaite vérifier que tout ce que nous utilisons est calculable dans le modèle de calcul qui y est exposé.)

D.12. Corps et extensions de corps

D.12.0.1. DÉFINITION. *On appelle **corps calculable** la donnée d'une partie calculable (=récursive) \mathfrak{K} de \mathbb{N} , d'une relation d'équivalence calculable \equiv sur \mathfrak{K} , d'éléments $0_{\mathfrak{K}}$ et $1_{\mathfrak{K}}$ de \mathfrak{K} , et de fonctions calculables $(+)_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ et $(-)_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ et $(\times)_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ et $(^{-1})_{\mathfrak{K}} : \{z \in \mathfrak{K} : z \neq 0_{\mathfrak{K}}\} \rightarrow \mathfrak{K}$, telles que ces opérations passent au quotient par \equiv et définissent sur \mathfrak{K}/\equiv une structure de corps. On notera généralement $K = (\mathfrak{K}/\equiv)$ et on dira abusivement que K « est » un corps calculable pour sous-entendre qu'on s'est donné une structure de corps calculable dont K est le quotient ; s'il faut désambiguïser, on pourra dire que \mathfrak{K} est l'ensemble d'**étiquettes**^③ qui servent à décrire les éléments de K .*

Une **extension calculable** $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$ de corps calculables est la donnée d'une fonction calculable $f : \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{L}$ telle que $x \equiv_{\mathfrak{K}} y$ implique $f(x) \equiv_{\mathfrak{L}} f(y)$ et que l'application $K \rightarrow L$ définie par passage au quotient soit une extension (un morphisme) de corps. (On dira aussi que K est un sous-corps calculable de L .) Si de plus K est une partie récursive de L , c'est-à-dire s'il existe une fonction calculable qui, donné $y \in \mathfrak{L}$, décide s'il existe x tel que $f(x) \equiv_{\mathfrak{L}} y$ (et, cf. D.12.7, on peut alors

③. Une autre terminologie possible serait d'appeler \mathfrak{K} un « corps calculé » et K un « corps calculable ».

supposer^④ qu'elle calcule ce x), alors on dit que K est un sous-corps calculable **reconnaisable** de L (ou que L est une extension calculable reconnaissable de K).

On dit qu'un corps calculable K admet un **algorithme de factorisation** lorsqu'il existe un algorithme qui, donné un polynôme à coefficients dans K en une variable, calcule sa factorisation^⑤ en polynômes irréductibles.

D.12.1. REMARQUES. (0) Nous renvoyons notamment à [FRÖHLICH et SHEPHERDSON 1956] et [STOLTENBERG-HANSEN et TUCKER 1999] pour des généralités sur les corps calculables. Il existe différentes variantes autour de la définition, essentiellement sans importance dans le cadre dans lequel nous nous plaçons (par exemple, quitte à n'utiliser que le plus petit élément — pour l'ordre de \mathfrak{K} en tant que partie de \mathbb{N} — de chaque classe d'équivalence, on peut omettre la relation d'équivalence et demander directement que \mathfrak{K} soit une partie récursive de \mathbb{N} munie d'opérations qui en font un corps); celle proposée ci-dessus (équivalente à celle de [ibid., 2.1.5]), nous semble la plus naturelle et celle qui se transpose le plus agréablement, par exemple, au cas où on remplacerait les fonctions récursives par des fonctions seulement primitivement récursives (cf. [JACOBSSON et STOLTENBERG-HANSEN 1985, § 1]).

Il est notamment utile de rappeler les faits suivants.

(1) Si K est un corps calculable, alors $K(T)$ (où T est une indéterminée), ainsi que $K[X]/(f)$ (où $f \in K[X]$ est un polynôme irréductible) sont des extensions calculables et reconnaissables de K . (C'est-à-dire qu'il y a une façon standard de faire de $K(T)$ ou de $K[X]/(f)$ des corps calculables et de l'extension une extension calculable reconnaissable, et c'est de cette structure qu'on parlera toujours; par exemple, un élément de $K[X]/(f)$, si $d = \deg f$, est décrit comme un d -uplet (c_0, \dots, c_{d-1}) d'éléments de K , ou plus précisément de l'ensemble \mathfrak{K} d'étiquettes des éléments de K , représentant la classe modulo f du polynôme $\sum c_i X^i$, l'addition se faisant terme à terme et la multiplication se faisant en terminant par le reste de la division euclidienne par f , laquelle est évidemment calculable.)

(2) Si K est un corps calculable, alors « la » clôture algébrique de K est une extension calculable de K ([RABIN 1960, théorème 7]; cf. [STOLTENBERG-HANSEN et TUCKER 1999, corollaire 3.1.11]), mais non reconnaissable en général (cf. le point suivant). (3) L'existence d'un algorithme de factorisation pour un corps calculable K équivaut à l'existence d'un algorithme qui décide si un polynôme admet une racine, ou encore à l'existence d'un algorithme qui reconnaît si un élément de la clôture algébrique de K (calculable comme on vient de le dire en (2)) appartient à K ([RABIN 1960, théorème 8]: cf. aussi [STOLTENBERG-HANSEN et TUCKER 1999, proposition 3.2.2] et [MILLER 2010, théorème 2.5(2)]). Bien entendu, (4) tout corps calculable algébriquement clos admet un algorithme de factorisation.

De plus, (5) si K est un corps calculable admettant un algorithme de factorisation, alors c'est aussi le cas de $K(T)$ (où T est une indéterminée) et de $K[X]/(f)$ si $f \in K[X]$ est

④. Ce serait la bonne définition à prendre si on voulait remplacer la notion de calculabilité par celle de fonction primitivement récursive.

⑤. Plus exactement: donné une suite d'étiquettes représentant les coefficients d'un polynôme (en une variable) à factoriser, renvoie des suites d'étiquettes représentant les coefficients de ses facteurs irréductibles.

un polynôme irréductible *séparable* (cf. [STOLTENBERG-HANSEN et TUCKER 1999, théorèmes 3.2.3 et 3.2.4]; et (6) la nécessité de l'hypothèse « séparable » pour le point précédent est montrée dans [FRÖHLICH et SHEPHERDSON 1956, théorème 7.12]).

(7) Si K est un corps *parfait* calculable admettant un algorithme de factorisation (notamment si K est un corps calculable algébriquement clos), et si $K(x_1, \dots, x_n)$ est une extension de type fini de K , puisqu'on peut extraire de x_1, \dots, x_n une base de transcendance séparante ([MATSUMURA 1989, remarque précédant le théorème 26.3]), le point (5) montre que le corps calculable $K(x_1, \dots, x_n)$ admet lui aussi un algorithme de factorisation (cf. [STOLTENBERG-HANSEN et TUCKER 1999, 3.2.6]; ou bien [LECERF 2013, théorème 4 de l'introduction] lorsque K est un corps premier).

En lien avec ce fait, rappelons que si un corps calculable admet un algorithme de factorisation (des polynômes en une variable), il en admet automatiquement un pour les polynômes en un nombre fini quelconque de variables : [FRIED et JARDEN 2008, lemme 19.1.3].

D.12.2. On rappelle (voir notamment [Bourbaki A, V, § 13] ou [ÉGA IV₁, 0, § 21] ou encore [FRIED et JARDEN 2008, § 2.7]) qu'une p -base (resp. une famille p -libre) finie d'un corps K de caractéristique $p > 0$ (sous-entendu : sur K^p) est une famille $b_1, \dots, b_r \in K$ tels que les produits $b_1^{i_1} \dots b_r^{i_r}$ pour $0 \leq i_u < p$ forment une base (resp. une famille libre) du K^p -espace vectoriel K ; il existe une p -base finie de K si et seulement si K est de degré fini sur K^p , auquel cas ce degré vaut p^r où r est le cardinal de la p -base : on appelle r le p -rang ou *exposant d'imperfection* de K (sous-entendu : sur K^p).

D.12.3. PROPOSITION. Soit K un corps calculable de caractéristique $p > 0$ et de p -rang fini. Il revient au même de se donner :

- (i) le p -rang r de K et un algorithme décidant si des éléments a_1, \dots, a_s de K sont linéairement indépendants sur K^p ;
- (ii) le p -rang r de K et un algorithme décidant si des éléments a_1, \dots, a_s de K sont p -libres ;
- (iii) une p -base b_1, \dots, b_r de K ;
- (iv) une p -base b_1, \dots, b_r de K et un algorithme exprimant un élément x de K sous la forme $\sum_{\underline{i}} \xi_{\underline{i}}^p b_1^{i_1} \dots b_r^{i_r}$ où $\xi_{\underline{i}} \in K$ pour $\underline{i} = (i_1, \dots, i_r)$ vérifiant $0 \leq i_u < p$ pour tout u .

« Il revient au même de se donner » signifie qu'on peut exprimer n'importe laquelle de ses données en fonction de n'importe quelle autre de façon algorithmique et uniforme — c'est-à-dire par un algorithme indépendant de K et des autres données.

(On pourra comparer ces équivalences avec [RICHMAN 1981, théorème 1] qui en est l'analogue dans le cadre de l'algèbre constructive.)

On dira qu'on a sur un corps calculable une **p -base finie explicite** en référence à n'importe laquelle de ces données.

DÉMONSTRATION. Il est évident que connaître (i) permet de connaître (ii) (tester la p -liberté revient, par définition de ce terme, à tester l'indépendance linéaire de certaines puissances). Connaissant (ii), on peut connaître (iii) en énumérant les éléments de K et en ajoutant ceux

qui sont p -libres avec les précédents jusqu'à atteindre le p -rang de K . Connaissant (iii) on obtient (iv) en énumérant toutes les écritures possibles de x sur la p -base jusqu'à en obtenir une qui convient. Enfin, connaissant (iv), on a un isomorphisme explicite de K^p -espaces vectoriels entre K et $(K^p)^{\oplus p^r}$ (somme de p^r copies de K^p), ce qui permet donc facilement de tester l'indépendance linéaire d'une famille (il s'agit simplement de calculer des déterminants). \square

Comme on l'a souligné en [D.12.1\(5–6\)](#), si K est un corps calculable admettant un algorithme de factorisation, ces propriétés valent pour $L := K[X]/(f)$ (avec $f \in K[X]$ irréductible) lorsque f est séparable, mais pas nécessairement dans le cas général. Si on fait l'hypothèse qu'on dispose sur K d'une p -base finie explicite, cette difficulté n'existe plus :

D.12.3.1. LEMME. *Soit K un corps calculable pour lequel on dispose d'un algorithme de factorisation et d'une p -base finie explicite. Soit $a \in K$ n'appartenant pas à K^p . Alors sur le corps $L := K(\sqrt[p]{a})$ (extension calculable reconnaissable de K comme rappelé en [D.12.1\(1\)](#)), on dispose d'un algorithme de factorisation et d'une p -base finie explicite.*

DÉMONSTRATION. Puisque $a \notin K^p$ (autrement dit, le singleton a est p -libre), d'après [D.12.3\(ii\)](#), on peut explicitement construire une p -base de K contenant l'élément a (comme dans la démonstration du fait que (ii) permet de trouver (iii), en partant de a), disons a, b_2, \dots, b_r . Alors $a^{1/p}, b_2, \dots, b_r$ constitue une p -base explicite de L .

Pour montrer que L dispose d'un algorithme de factorisation, d'après [[FRÖHLICH et SHEPHERDSON 1956, 7.3](#)] ou son amélioration citée dans [[STOLTENBERG-HANSEN et TUCKER 1999, 3.2.5](#)], il suffit de montrer qu'on peut décider si un élément de L est une puissance p -ième : or d'après [D.12.3\(iv\)](#) on sait l'écrire sur la p -base $a^{1/p}, b_2, \dots, b_r$, et il suffit de vérifier que seul le coefficient devant 1 est non nul dans cette écriture. \square

Le résultat suivant a pour objet de convaincre que tous les corps que nous serons amenés à considérer sont calculables avec un algorithme de factorisation :

D.12.4. PROPOSITION. *Soit K un corps calculable pour lequel on dispose d'un algorithme de factorisation et (si K est de caractéristique $p > 0$) d'une p -base finie explicite. Soit L l'extension de K définie par l'une des opérations suivantes :*

- (i) l'ajout d'un transcendant : $L = K(T)$ où T est une indéterminée,
- (ii) l'ajout d'un élément algébrique : $L = K[X]/(f)$ où $f \in K[X]$ est irréductible (non supposé séparable), donné,
- (iii) le passage à la [Ⓜ] clôture algébrique $L = K^{\text{alg}}$ de K ,
- (iv) le passage à la clôture séparable $L = K^{\text{sép}}$ de K ,
- (v) (dans le cas où K est de caractéristique $p > 0$) le passage à la clôture parfaite $L = K^{1/p^\infty}$ de K ,

[Ⓜ]. On conviendra que, s'agissant d'un corps calculable, « la » clôture algébrique désigne celle qui est construite explicitement par l'algorithme de Rabin : cf. [D.12.1\(2\)](#); et de même « la » clôture séparable désigne la clôture séparable dans cette clôture algébrique.

alors L est une extension calculable reconnaissable de K , et on dispose d'un algorithme de factorisation et d'une p -base finie explicite pour L .

Plus précisément, on va esquisser des algorithmes explicites qui, donnés des algorithmes qui calculent les opérations sur K et la factorisation des polynômes de $K[X]$ et une p -base finie explicite de K , et donnés le cas où on se place, et le polynôme f dans le cas (ii), présentent L comme une extension calculable reconnaissable de K , permettent de factoriser les polynômes de $L[X]$, et fournissent une p -base de L .

(On pourra comparer avec [MINES et RICHMAN 1982, théorème 3.9], analogue de (ii) ci-dessus mais dans le cadre de l'algèbre constructive.)

DÉMONSTRATION. Traitons chacun des cas séparément.

(i) Le corps $L = K(T)$ est une extension calculable reconnaissable de K comme on l'a rappelé en [D.12.1\(1\)](#), et dispose d'un algorithme de factorisation d'après [D.12.1\(5\)](#). En ajoutant T à la p -base de K on obtient une p -base de L (cf. [FRIED et JARDEN 2008, lemme 2.7.2 et sa démonstration]).

Pour le cas (ii), on peut distinguer le cas où f est séparable et celui où il est purement inséparable : en effet, il est algorithmique d'écrire un polynôme irréductible $f \in K[X]$ sous la forme $h(X^{p^e})$ avec h irréductible et séparable, ce qui ramène l'extension $K[X]/(f)$ aux deux extensions $E := K[X]/(h)$ avec h séparable puis $L = E[X]/(X^{p^e} - a)$ avec a la classe de X modulo h . Par ailleurs, pour les extensions purement inséparables, on peut encore se ramener au cas où le polynôme est de la forme $X^p - a$ (quitte à écrire une racine (p^e) -ième comme extractions successives de racines p -ièmes).

Dans le cas (ii) avec f séparable, le corps L est une extension calculable reconnaissable de K comme on l'a rappelé en [D.12.1\(1\)](#), et dispose d'un algorithme de factorisation d'après [D.12.1\(5\)](#). Une p -base de K est encore une p -base de L (cf. [ibid., lemme 2.7.3]).

Dans le cas (ii) avec f de la forme $X^p - a$ a été traité en [D.12.3.1](#).

(iii) La clôture algébrique L de K est une extension calculable de K comme on l'a rappelé en [D.12.1\(2\)](#), et dispose d'un algorithme de factorisation ([D.12.1\(4\)](#)). La p -base vide convient pour L . De plus, comme K était supposé disposer d'un algorithme de factorisation, on peut reconnaître K dans L d'après [D.12.1\(3\)](#).

(iv) La clôture séparable L de K se voit comme un sous-corps de la clôture algébrique : pour reconnaître si un élément de cette dernière appartient à L , il suffit de calculer son polynôme minimal sur K (quitte à énumérer tous les polynômes de $K[X]$ jusqu'à en trouver un qui annule l'élément considéré[Ⓣ], cf. [D.12.7](#), puis le factoriser) et vérifier s'il est séparable. On dispose d'un algorithme de factorisation puisque, d'après [D.12.1\(3\)](#), il suffit pour cela de savoir identifier un élément de L dans la clôture algébrique commune de K et L , et on vient d'expliquer que c'est possible. Enfin, une p -base de K est encore une p -base de L (cf. [ibid., lemme 2.7.3]).

[Ⓣ]. Il va de soi que sur une description réellement explicite de la clôture algébrique on n'aurait pas besoin de faire quelque chose d'aussi absurde !

(v) Si K est un corps calculable (sans autre hypothèse pour l'instant), alors on peut construire $L = K^{1/p^\infty}$ extension calculable de K explicitement selon sa définition : on définit \mathcal{L} comme l'ensemble des couples (e, a) où $e \in \mathbb{N}$ et a est un élément de K : ce couple représente alors la racine (p^e) -ième de a dans L , et on peut définir $(e, a) \equiv_{\mathcal{L}} (e', a')$ (disons pour $e' \geq e$) lorsque $a^{p^{e'-e}} = a'$ dans K , ce qui est bien une relation calculable. Pour ajouter ou multiplier (e, a) et (e', a') (disons pour $e' \geq e$), on remplace (e, a) par $(e', a^{p^{e'-e}})$ et on effectue l'opération entre $a^{p^{e'-e}}$ et a' , qui est calculable.

Avec l'hypothèse supplémentaire que K dispose d'un algorithme de factorisation, on peut tester si un élément de K a sa racine p -ième dans K (et le cas échéant la calculer) : on peut donc considérer uniquement les couples $(e, a) \in \mathcal{L}$ « canoniques », définis comme ceux pour lesquels $a \notin K^p$ si $e > 0$, convertir un couple $(e, a) \in \mathcal{L}$ quelconque en un couple « canonique », et on voit alors clairement que L est une extension calculable reconnaissable de K (c'est d'ailleurs essentiellement ce qui est fait dans [STEEL 2005, § 2.1]).

Pour montrer que L dispose d'un algorithme de factorisation, il suffit clairement de montrer qu'on peut factoriser dans L les polynômes f de $K[X]$ (quitte à appliquer l'isomorphisme entre K^{1/p^e} et K pour un e assez grand) : comme K a un algorithme de factorisation, on peut évidemment supposer f irréductible dans $K[X]$, et l'écrire sous la forme $h(X^{p^e})$ avec $h \in K[X]$ irréductible séparable : ceci se réécrit $(h_1(X))^{p^e}$ avec h_1 le polynôme de $L[X]$ dont les coefficients sont les racines (p^e) -ièmes de ceux de h ; en utilisant de nouveau l'isomorphisme entre K^{1/p^e} et K il est clair que h_1 est irréductible dans $L[X]$, et on a la factorisation voulue. Enfin, la p -base vide convient pour L . \square

D.12.5. REMARQUE. L'énoncé ci-dessus considère des extensions algébriques du type $L = K[X]/(f)$ avec f irréductible (i.e., (f) maximal dans $K[X]$). Il n'y aura pas de difficulté, dès qu'on saura manipuler les idéaux d'une algèbre de polynômes à plusieurs variables (§ D.13), à y exprimer des extensions du type $L = K[Z_1, \dots, Z_d]/\mathfrak{m}$ avec \mathfrak{m} un idéal maximal de $K[Z_1, \dots, Z_d]$ comme une tour d'extensions monogènes. Il suffit en effet d'utiliser un algorithme d'élimination, cf. [EISENBUD 1995, § 15.10.4], pour calculer les intersections $\mathfrak{m} \cap K[Z_1, \dots, Z_i]$, qui définissent autant d'extensions de corps $K_i \subseteq K_{i+1}$ avec $K_i = K[Z_1, \dots, Z_i]/(\mathfrak{m} \cap K[Z_1, \dots, Z_i])$, algébriques engendrées par un seul élément dont on connaît le polynôme minimal, et $K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_d = L$.

Plus généralement, si \mathfrak{p} est un idéal premier de $K[Z_1, \dots, Z_d]$, l'extension $L := \text{Frac}(K[Z_1, \dots, Z_d]/\mathfrak{p})$ de K se ramène également explicitement à des extensions comme envisagées ci-dessus : en effet, il suffit de considérer un ensemble maximal E de variables Z_i telles que $\mathfrak{p} \cap K[E] = \{0\}$ (de nouveau calculable par élimination), si bien que $K(E) = \text{Frac}(K[E])$ est une extension transcendante pure de K et que L en est une extension algébrique du type considéré au paragraphe précédent (on peut aussi invoquer le lemme de normalisation de Noether [ibid., théorème 13.3] ou [SERRE 1965, III(D)2, théorème 2], mais ce n'est pas nécessaire ici car on a recherché simplement la finitude générique, c'est-à-dire la finitude de l'extension de corps).

D.12.6. CONVENTION. *On fera souvent l'abus de langage consistant à écrire qu'une certaine opération algébrique ou géométrique est calculable sans autre précision sur le corps k dans lequel vivent les données : sauf mention du contraire, il faut en fait comprendre : pour tout corps k calculable, disposant d'un algorithme de factorisation (cf. D.12.1) et une p -base finie explicite (D.12.3), l'opération en question est calculable. Lorsque k est algébriquement clos, bien entendu, seule l'hypothèse « calculable » est utile (cf. D.12.1(4)) ; par ailleurs, d'après le résultat qu'on vient de montrer, les corps que nous sommes amenés à manipuler vérifient toujours les hypothèses qui viennent d'être dites.*

(Dans le langage de l'algèbre constructive, l'analogie de nos hypothèses « calculable, disposant d'un algorithme de factorisation et une p -base finie explicite » serait les corps « discrets pleinement factoriels » : voir [MINES, RICHMAN et RUITENBURG 1988, théorème VII.3.3].)

D.12.7. REMARQUE. Le fait de considérer des fonctions récursives (générales, par opposition par exemple aux fonctions primitivement récursives) signifie que si $P(m, n)$ est une propriété calculable (des entiers naturels) et que pour chaque m il existe n vérifiant $P(m, n)$, alors la fonction $\mu_n P$ qui à m associe le plus petit n vérifiant $P(m, n)$ est calculable (il s'agit de l'« opérateur μ de Kleene », cf. par exemple [ODIFREDDI 1989, définitions I.1.5 et I.1.7]). Concrètement, cela signifie que les fonctions calculables (=récursives, donc) peuvent effectuer des « recherches non bornées » dans les entiers naturels, c'est-à-dire parcourir tous les n jusqu'à en trouver un qui vérifie la propriété $P(m, n)$ demandée, même si on ne dispose d'aucune borne de complexité sur le temps qu'une telle recherche pourra prendre (on demande simplement qu'elle termine pour tout m si on veut que la fonction soit totale).

Comme les corps calculables (D.12.0.1) sont étiquetés par les entiers naturels, cette notion de « recherche non bornée » s'applique aussi bien à eux. C'est la raison pour laquelle, dans la définition d'un corps calculable, on pourrait par exemple se passer d'imposer que la fonction $(^{-1})_{\mathfrak{K}} : \{z \in \mathfrak{K} : z \neq 0_{\mathfrak{K}}\} \rightarrow \mathfrak{K}$ soit calculable (elle l'est automatiquement puisque pour calculer x^{-1} on peut parcourir tous les $y \in \mathfrak{K}$ jusqu'à en trouver un qui vérifie $x \times_{\mathfrak{K}} y \equiv_{\mathfrak{K}} 1_{\mathfrak{K}}$).

Une fois définis les schémas et autres objets géométriques en D.16, on pourra effectuer de même ce type de « recherches non bornées » sur l'ensemble des schémas, morphismes de schémas, ou tout autre objet géométrique du même type : il s'agira d'énumérer toutes les données susceptibles de décrire, par exemple, un schéma, et pour chacune d'elles de tester si elle vérifie la propriété P considérée. Ainsi, il découle du théorème de A. J. de Jong sur la résolution des singularités par altérations ([A. J. DE JONG 1996, 4.1]), et du fait que cette propriété soit algorithmiquement testable, qu'on peut en fait calculer une telle résolution ! Il va de soi que cette façon de procéder fait perdre toute utilisabilité pratique à nos algorithmes — et comme observé en D.11.6 on *devrait* pouvoir s'en passer.

Sous-remarque : On pourrait même être un peu plus général dans les recherches par test non bornées : il n'est pas nécessaire que la propriété $P(m, n)$ soit décidable (=calculable, =récursive), il suffit qu'elle soit semi-décidable (=récursivement énumérable), autrement dit qu'il existe une machine de Turing qui termine en répondant « vrai » lorsque $P(m, n)$ est vrai, sans imposer qu'elle termine quand $P(m, n)$ n'est pas vrai — on peut alors calculer *un* n vérifiant

$P(m, n)$ (pas nécessairement le plus petit) en lançant en parallèle la vérification de tous les $P(m, n)$ jusqu'à ce que l'une d'entre elles termine.

D.13. Modules de type fini sur une k -algèbre de type fini

Soit $S = k[Z_1, \dots, Z_d]$ où k est un corps calculable (nous n'utiliserons pas ici l'ensemble des hypothèses [D.12.6](#) puisque nous n'aurons jamais affaire à des factorisations de polynômes : la simple calculabilité de k suffit). Le but de cette section est de montrer qu'on peut manipuler algorithmiquement les S -modules de type fini, et, plus généralement, les modules de type fini sur une algèbre quotient de S .

D.13.1. Algorithmes fondamentaux. Un morphisme $\varphi : S^m \rightarrow S^n$ de S -modules est représenté par une matrice $n \times m$ d'éléments de S . On sait (par exemple en utilisant des bases de Gröbner) répondre algorithmiquement aux deux questions fondamentales suivantes :

- (*Test d'appartenance à un sous-module.*) Donné $\varphi : S^m \rightarrow S^n$ et un élément $y \in S^n$, décider si y appartient à l'image M de φ et, le cas échéant, en calculer un antécédent. (Ou, de façon équivalente : donnés $x_1, \dots, x_m \in S^n$ et $y \in S^n$, décider si y peut être écrit comme combinaison linéaire de x_1, \dots, x_m et, le cas échéant, en trouver les coefficients. Pour le faire, on peut calculer une base de Gröbner du sous-module M engendré par x_1, \dots, x_m , cf. [EISENBUD 1995, algorithmes 15.7 et 15.9], [DECKER et LOSSEN 2006, problème 2.16] ou [BECKER et WEISPFENNING 1993, lemme 6.7 et discussion qui suit], cette base de Gröbner étant elle-même écrite comme combinaison des x_i , et ceci permet de décider si un élément y appartient à M et, le cas échéant, l'écrire comme combinaison des éléments de la base, donc des x_1, \dots, x_m .)
- (*Calcul de syzygies.*) Donné $\varphi : S^m \rightarrow S^n$, calculer un ensemble de générateurs du noyau de φ (ou, si on préfère, donnés des éléments x_1, \dots, x_m de S^n , calculer un système de générateurs des syzygies entre eux, cf. [EISENBUD 1995, algorithme 15.10] ou [BECKER et WEISPFENNING 1993, théorème 6.4]).

(De façon alternative, on pourra se référer à [MINES, RICHMAN et RUITENBURG 1988, VIII.1.5 combiné à III.2.6] ou bien [LOMBARDI et QUITTÉ 2011, VII.1.10] pour une présentation de ces faits en algèbre constructive et sans utiliser de bases de Gröbner.)

Soulignons que les algorithmes en question n'utilisent que des opérations rationnelles et des tests d'égalité dans le corps k .

D.13.2. Noyaux, conoyaux et images sur les anneaux de polynômes. Une **présentation explicite** d'un S -module M de type fini est la donnée d'un morphisme $\varphi : G \rightarrow F$, où F, G sont deux S -modules libres de type fini, tel que $M = \text{Coker } \varphi$ (concrètement, φ est fourni sous la forme d'une matrice $n \times m$ d'éléments de S où m et n sont les rangs de G et F respectivement).

Une **présentation explicite** d'un morphisme $\alpha : P \rightarrow Q$ de S -modules, où $P = \text{Coker}(G_P \xrightarrow{\varphi_P} F_P)$ et $Q = \text{Coker}(G_Q \xrightarrow{\varphi_Q} F_Q)$ sont deux S -modules explicitement présentés comme ci-dessus, est la donnée d'un morphisme $\alpha_F : F_P \rightarrow F_Q$ tel que α se

déduit de α_F par passage au quotient (autrement dit, tel qu'il existe $\alpha_G : G_P \rightarrow G_Q$ vérifiant $\alpha_F \varphi_P = \varphi_Q \alpha_G$).

Dans le contexte ci-dessus, donnés $P = \text{Coker}(G_P \xrightarrow{\varphi_P} F_P)$ et $Q = \text{Coker}(G_Q \xrightarrow{\varphi_Q} F_Q)$, on sait tester si un $\alpha_F : F_P \rightarrow F_Q$ est la présentation explicite d'un morphisme $\alpha : P \rightarrow Q$; et de plus, on sait calculer algorithmiquement l'image, le conoyau, et le noyau, d'un morphisme explicitement présenté : les algorithmes à cet effet sont bien connus, mais nous les rappelons brièvement ci-dessous pour la commodité du lecteur.

- Pour tester si $\alpha_F : F_P \rightarrow F_Q$ passe au quotient et définit (une présentation explicite d'un morphisme $\alpha : P \rightarrow Q$ (où $P = \text{Coker}(G_P \xrightarrow{\varphi_P} F_P)$ et $Q = \text{Coker}(G_Q \xrightarrow{\varphi_Q} F_Q)$), il s'agit, grâce à l'algorithme de test d'appartenance évoqué en [D.13.1](#), de tester si les éléments images de la base de G_P par $\alpha_F \varphi_P$ sont dans l'image de φ_Q : cf. [DECKER et LOSSEN 2006, problème 4.1 et début de § 4.2].
- Donné $\alpha : L \rightarrow F$ un morphisme entre S -modules libres de type fini, on sait calculer une présentation explicite de $\text{Im } \alpha$ (sous la forme $\text{Im } \alpha = \text{Coker}(H \rightarrow L)$). En effet, ceci revient exactement à calculer des générateurs des syzygies entre les images par α des éléments de la base de L (c'est-à-dire, des colonnes de la matrice décrivant α), algorithme déjà évoqué en [D.13.1](#) comme calcul de syzygies.
- Si $\alpha : L \rightarrow Q$ est un morphisme de S -modules, où L est toujours libre mais cette fois Q est défini par une présentation explicite $Q = \text{Coker}(G_Q \xrightarrow{\varphi_Q} F_Q)$, le morphisme α étant explicitement présenté par la donnée de $\alpha_F : L \rightarrow F_Q$, alors on peut encore calculer une présentation explicite de $\text{Im } \alpha$. En effet, il est isomorphe à $(\text{Im } \alpha_F + \text{Im } \varphi_Q) / \text{Im } \varphi_Q$, or $\text{Im } \alpha_F + \text{Im } \varphi_Q$ est l'image du morphisme $L \oplus G_Q \xrightarrow{(\alpha_F, \varphi_Q)} F_Q$ de modules libres, cas traité par le paragraphe précédent, et si $H \rightarrow L \oplus G_Q$ est la présentation de cette image, alors $H \rightarrow L$ définit la présentation de $\text{Im } \alpha$ recherchée (cf. [*ibid.*, problème 4.2]).
- Donné un morphisme $\alpha : P \rightarrow Q$ explicitement présenté entre modules explicitement présentés $P = \text{Coker}(G_P \xrightarrow{\varphi_P} F_P)$ et $Q = \text{Coker}(G_Q \xrightarrow{\varphi_Q} F_Q)$, il est facile de calculer une présentation explicite de $\text{Coker } \alpha$, à savoir $\text{Coker } \alpha = \text{Coker}(F_P \oplus G_Q \xrightarrow{(\alpha_F, \varphi_Q)} F_Q)$ (cf. [*ibid.*, § 4.2.1]). Mais on peut également calculer une présentation de $\text{Im } \alpha$ sous la forme $\text{Coker}(H \rightarrow F_P)$ avec H libre (en effet, il s'agit de $\text{Im}(F_P \rightarrow Q)$, cas qu'on a traité au paragraphe précédent), et aussi de $\text{Ker } \alpha$ (il s'agit de l'image de $H \rightarrow P$, de nouveau le cas qu'on a traité). (Cf. [*ibid.*, problème 4.3] ou [EISENBUD 1995, proposition 15.32].)

On notera bien évidemment qu'on obtient non seulement une présentation explicite de l'image ou du noyau d'un morphisme explicitement présenté $\alpha : P \rightarrow Q$, mais aussi une présentation explicite de l'inclusion canonique $\text{Im } \alpha \rightarrow Q$ ou $\text{Ker } \alpha \rightarrow P$. Ceci permettra aisément de se convaincre, par exemple, qu'on peut calculer des sommes ou intersections de sous-modules.

D.13.3. Modules sur les algèbres de type fini quelconques. Si $R = S/I$ est une algèbre de type fini sur un corps k où $S = k[Z_1, \dots, Z_d]$ et I l'idéal engendré par $h_1, \dots, h_r \in S$, un R -module n'est autre qu'un S -module annulé par I . On peut appeler **R -module explicitement présenté** le conoyau d'un morphisme $\varphi : R^m \rightarrow R^n$ (décrit par une matrice $n \times m$ d'éléments de R) ou, de façon équivalente, comme le conoyau d'un morphisme $\tilde{\varphi} : S^m \rightarrow S^n$ tel que $h_j e_i$ soit dans l'image de $\tilde{\varphi}$ pour tout $1 \leq j \leq r$ et tout $1 \leq i \leq n$ (en notant e_1, \dots, e_n la base canonique de S^n) : ce critère est algorithmiquement testable, et on passe de façon évidente d'une description à l'autre (dans un sens en reprenant la matrice de $\tilde{\varphi}$ comme matrice de φ , et dans l'autre en relevant de façon quelconque la matrice de φ et en ajoutant des colonnes $h_j e_i$). Les morphismes de R -modules sont simplement des morphismes de S -modules qui s'avèrent être des R -modules, et ce qui précède montre qu'on sait calculer l'image, le conoyau et le noyau d'un morphisme explicitement présenté de R -modules.

Notons par ailleurs que pour manipuler des *sous-modules* d'un module explicitement présenté, on peut représenter ceux-ci comme l'image d'un morphisme (ou, ce qui revient au même, par un ensemble d'éléments engendrant le sous-module) ou comme le noyau d'un morphisme : on a vu qu'on peut passer d'une représentation à l'autre. Dès lors, il est clair qu'on peut calculer des sommes ou intersections de sous-modules, de tester l'inclusion ou l'égalité entre deux sous-modules (tout se ramène facilement à tester la nullité d'un sous-module, ce qui est facile si on le décrit comme engendré par certains éléments).

(En particulier, on sait tester l'inclusion et l'égalité d'idéaux.)

D.13.4. Produits tensoriels et Hom de modules ; transporteurs et annulateurs. On continue de noter $R = S/I$ une k -algèbre de type fini où $S = k[Z_1, \dots, Z_d]$.

Si $P = \text{Coker}(G_P \xrightarrow{\varphi_P} F_P)$ et $Q = \text{Coker}(G_Q \xrightarrow{\varphi_Q} F_Q)$ sont deux R -modules explicitement présentés, on peut calculer une présentation explicite de $P \otimes_R Q$, à savoir $P \otimes_R Q = \text{Coker}((G_P \otimes F_Q) \oplus (F_P \otimes G_Q) \rightarrow F_P \otimes F_Q)$ où les produits tensoriels de modules libres sont triviaux à calculer et la flèche est $(\varphi_P \otimes \text{Id}) \oplus (\text{Id} \otimes \varphi_Q)$.

De même, grâce au fait qu'on sait calculer les noyaux, on peut calculer une présentation explicite du module $\text{Hom}_R(P, Q) = \text{Ker}(\text{Hom}_R(F_P, Q) \rightarrow \text{Hom}_R(G_P, Q))$ où $\text{Hom}_R(F_P, Q)$ admet la présentation explicite évidente $\text{Coker}(\text{Hom}_R(F_P, G_Q) \rightarrow \text{Hom}_R(F_P, F_Q))$ et de même pour $\text{Hom}_R(G_P, Q)$, et où la flèche entre eux est donnée par le morphisme $\text{Hom}_R(F_P, F_Q) \rightarrow \text{Hom}_R(G_P, F_Q)$ de composition à gauche par φ_P .

Si N, N' sont des sous-modules d'un module M explicitement présenté, on peut calculer l'idéal « transporteur » $(N : N') := \{f \in R : fN' \subseteq N\}$ (c'est-à-dire, en calculer des générateurs) : en effet, on peut le voir comme le noyau du morphisme $R \rightarrow \text{Hom}_R(N', M/N)$. De même, si J est un idéal de R et N un sous-module de M , on peut calculer le sous-module $(N : J) := \{x \in M : Jx \subseteq N\}$ de M (car on peut le voir comme noyau de $M \rightarrow \text{Hom}_R(J, M/N)$). (Comparer [ibid., exercice 15.41].)

En particulier, on sait calculer l'idéal annulateur $(0 : M)$ d'un module M explicitement présenté.

D.13.5. Tor et Ext. On continue de noter $R = S/I$ une k -algèbre de type fini où $S = k[Z_1, \dots, Z_d]$.

Si M est un R -module défini par une présentation explicite $M = \text{Coker}(G \rightarrow F)$, on peut aisément calculer le tronqué à un ordre quelconque d'une résolution libre de M : en effet, il suffit de poser $F_0 = F$ et $F_1 = G$ et récursivement construire le noyau de $F_{i+1} \rightarrow F_i$ comme l'image d'un morphisme $F_{i+2} \rightarrow F_{i+1}$ de modules libres (par l'algorithme de syzygies de **D.13.1** si on est sur l'algèbre de polynômes S , ou par les techniques générales présentées ci-dessus).

Si F_i est une résolution libre d'un R -module P explicitement présenté, et si Q est un R -module explicitement présenté, en calculant le complexe $F_i \otimes_R Q$, puis l'homologie de celui-ci, on peut calculer $\text{Tor}_i^R(P, Q)$ pour i arbitraire (mais fixé). De même, en calculant la cohomologie du complexe $\text{Hom}_R(F_i, Q)$ on calcule $\text{Ext}_R^i(P, Q)$ pour i arbitraire (mais fixé).

D.13.6. Présentation d'une algèbre finie comme module. Soit A un anneau quelconque. Une A -algèbre de présentation finie en tant que A -module est, en particulier, de présentation finie en tant que A -algèbre : la proposition facile suivante explicite ce fait (on pourra comparer avec [T. DE JONG 1998, §3], ou [LOMBARDI et QUITTÉ 2011, exercice IV.15] dans le cas libre) :

D.13.6.1. PROPOSITION. *Soit A un anneau et B une A -algèbre engendrée comme A -module par les éléments $1, x_1, \dots, x_n$ dont le module des syzygies (c'est-à-dire le sous- A -module N de A^{n+1} formé des $(c_0, \dots, c_n) \in A^{n+1}$ tels que $c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0 \in B$) soit de type fini engendré par y_1, \dots, y_m .*

Soit $\Phi : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B$ le morphisme de A -algèbres envoyant T_i sur x_i et J son noyau (c'est-à-dire l'idéal des relations algébriques entre x_1, \dots, x_n). On considère chaque y_i comme un élément de J en identifiant $(c_0, \dots, c_n) \in A^{n+1}$ au polynôme $c_0 + c_1T_1 + \dots + c_nT_n$ de degré 1. De plus, pour chaque $1 \leq i, j \leq n$, écrivons $x_ix_j = b_0^{(i,j)} + b_1^{(i,j)}x_1 + \dots + b_n^{(i,j)}x_n$ pour certains $b_u^{(i,j)} \in A$, et soit $q_{i,j} = b_0^{(i,j)} + b_1^{(i,j)}T_1 + \dots + b_n^{(i,j)}T_n - T_iT_j$, polynôme de degré 2 appartenant à J (relation quadratique).

Alors J est engendré, en tant qu'idéal de $A[T_1, \dots, T_n]$, par les y_i et par les $q_{i,j}$.

DÉMONSTRATION. Soit J' l'idéal de $A[T_1, \dots, T_n]$ engendré par les y_i et par les $q_{i,j}$. Fixons un ordre total quelconque sur les monômes en T_1, \dots, T_n qui raffine l'ordre partiel donné par le degré total (par exemple, l'ordre lexicographique gradué) : il s'agit donc d'un bon ordre sur les monômes. Soit z un élément de J n'appartenant pas à J' et dont le monôme initial (c'est-à-dire, le plus grand monôme intervenant dans z avec un coefficient non nul) soit le plus petit possible. Si z est de degré ≥ 2 , ce monôme initial est divisible par un T_iT_j , disons $z = aT_iT_j e + u$ où $a \in A$, où e est un monôme et où u ne fait intervenir que des monômes plus petits que $T_iT_j e$: alors $z' := z + aeq_{i,j}$ est congru à z modulo J' , donc appartient à J mais non à J' , et son monôme initial est strictement plus petit que celui de z , une contradiction. Si z est de degré ≤ 1 , alors z appartient à N donc z est engendré par y_1, \dots, y_m , de nouveau une contradiction. \square

D.13.6.2. En particulier, si $R = S/I$ est une algèbre de présentation finie sur un corps k et si B est un R -module explicitement présenté, et si on dispose sur B d'une multiplication décrite, par exemple, sous forme de tous les produits $x_i x_j$ pour x_i, x_j parcourant le système de générateurs donné par la présentation de B comme R -module, alors on peut calculer une présentation de B comme R -algèbre, et donc comme k -algèbre.

Ceci s'applique notamment pour montrer que si J est un idéal de R , on peut calculer une présentation de $\text{End}_R(J)$ en tant que R -algèbre ou en tant que k -algèbre.

D.14. Algèbres de type fini sur un corps : description algorithmique

Comme dans la section précédente, k est ici un corps calculable (nous n'utiliserons pas ici l'ensemble des hypothèses D.12.6 puisque nous n'aurons jamais affaire à des factorisations de polynômes : la simple calculabilité de k suffit).

D.14.1. Algèbres de type fini sur k . Une algèbre de type fini sur un corps k sera représentée comme un quotient $A = k[X_1, \dots, X_m]/I$ d'une algèbre de polynômes, c'est-à-dire par la donnée d'un ensemble (fini !) de générateurs de I . Un élément de R sera représenté par un polynôme dans $k[X_1, \dots, X_m]$ qui le relève : on peut ainsi calculer algorithmiquement les sommes et produits dans A , et le fait de pouvoir tester l'appartenance à I permet de tester la nullité, donc l'égalité, d'éléments de A . Remarquons aussi qu'on sait tester l'inversibilité (un $f \in R$ est inversible si et seulement si, pour n'importe quel $\tilde{f} \in k[X_1, \dots, X_m]$ le relevant, l'idéal $I + (\tilde{f})$ obtenu en adjoignant \tilde{f} aux générateurs décrivant I , est égal à l'idéal unité de $k[X_1, \dots, X_m]$, chose qu'on sait tester).

D.14.2. Morphismes entre algèbres de type fini. Si $A = k[X_1, \dots, X_m]/I$ et $B = k[Y_1, \dots, Y_n]/J$ sont deux algèbres de type fini sur k comme ci-dessus, on représentera un morphisme de k -algèbres $A \rightarrow B$ comme la donnée de m éléments h_1, \dots, h_m de B tels que $f_i(h_1, \dots, h_m) = 0$ pour tout i si f_1, \dots, f_r sont les générateurs choisis pour représenter I (cette condition est évidemment testable algorithmiquement).

Dans ces conditions, on peut aussi présenter B comme A -algèbre de la manière suivante : $B = A[Y_1, \dots, Y_n]/\tilde{J}$, où \tilde{J} est l'idéal $J + (x_i - h_i)$ décrit en adjoignant aux générateurs décrivant J les relations supplémentaires identifiant l'image x_i de X_i dans A avec l'élément h_i de B (ou plus exactement, n'importe quel polynôme dans $k[Y_1, \dots, Y_n]$ le relevant). Et réciproquement, donnée une présentation $B = A[Y_1, \dots, Y_n]/J$ où J est décrit par des générateurs, on peut écrire $B = k[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]/\hat{J}$ où \hat{J} est l'idéal obtenu en relevant les générateurs décrivant J et en y adjoignant ceux de I ; et le morphisme $A \rightarrow B$ est alors évident. On pourra donc librement choisir entre la représentation d'un morphisme entre k -algèbres de type fini et celle d'une algèbre sur une autre algèbre.

Dans les conditions ci-dessus, on peut tester algorithmiquement si le morphisme $A \rightarrow B$ est *surjectif*. En effet, sur la description où $A = k[X_1, \dots, X_m]/I$ et $B = k[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]/\hat{J}$, il s'agit de tester, pour chaque Y_i , si Y_i est congru modulo \hat{J} à un élément de $k[X_1, \dots, X_m]$, or

ceci peut se faire testant, au moyen d'une base de Gröbner, si chaque Y_i appartient à l'idéal initial (cf. [EISENBUD 1995, § 15.2]) de \hat{J} pour un ordre monomial pour lequel Y_i est supérieur à tout monôme en les X_1, \dots, X_m . (En effet, si pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $u_i \in k[X_1, \dots, X_m]$ tel que $Y_i - u_i \in \hat{J}$ alors pour un tel ordre monomial le terme initial de $Y_i - u_i$, à savoir Y_i d'après l'hypothèse faite sur l'ordre monomial, appartient à l'idéal initial de \hat{J} ; et réciproquement, si chaque Y_i appartient à l'idéal initial de \hat{J} , disons que $Y_1 < \dots < Y_n$, alors chaque Y_i est congru modulo \hat{J} à un polynôme en $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_{i-1}$, donc en les X_1, \dots, X_m .)

On peut aussi tester algorithmiquement si le morphisme $A \rightarrow B$ est *injectif* ou même calculer son noyau (un idéal de A , qu'on peut représenter comme l'image d'un idéal de $k[X_1, \dots, X_m]$). En effet, si $A = k[X_1, \dots, X_m]/I$ et $B = k[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]/\hat{J}$ où $I \subseteq \hat{J}$, le noyau du morphisme $A \rightarrow B$ est (l'image modulo I de) l'intersection $\hat{J} \cap k[X_1, \dots, X_m]$, laquelle se calcule par un algorithme d'élimination (cf. [ibid., § 15.10.4]). Ceci permet naturellement de calculer aussi une présentation de l'image $\text{Im } \varphi \simeq A/\text{Ker } \varphi$ d'un morphisme $\varphi : A \rightarrow B$ (il n'y a pas redondance avec le paragraphe précédent, car cette présentation de l'image ne permet pas trivialement de savoir si elle est B tout entier sauf, justement, à utiliser ce qui précède).

D.14.3. LEMME. *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de k -algèbres (où, ici, k est un anneau quelconque). Pour $f \in A$, on note comme d'habitude $A[\frac{1}{f}]$ la k -algèbre $A[T]/(Tf - 1)$ localisée de A en inversant f (et $B[\frac{1}{f}] = B \otimes_A A[\frac{1}{f}]$). Alors l'ensemble des $f \in A$ tels que le morphisme $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ déduit de φ soit injectif (resp. soit surjectif, resp. soit un isomorphisme) est un idéal de A .*

DÉMONSTRATION. Soient $N = \text{Ker } \varphi$ et $Q = \text{Coker } \varphi$, vus comme A -modules. La suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow Q \rightarrow 0$, tensorisée par le A -module plat $A[\frac{1}{f}]$, donne $0 \rightarrow N[\frac{1}{f}] \rightarrow A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}] \rightarrow Q[\frac{1}{f}] \rightarrow 0$: on voit donc que l'ensemble des f tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit injective (resp. surjective, resp. bijective) est l'ensemble des f tels que $N[\frac{1}{f}] = 0$ (resp. $Q[\frac{1}{f}] = 0$, resp. $N[\frac{1}{f}] = 0$ et $Q[\frac{1}{f}] = 0$). Or si M est un A -module, dire de $f \in A$ que $M[\frac{1}{f}] = 0$ signifie que chaque élément de M est annulé par une puissance de f (pouvant dépendre de l'élément), c'est-à-dire que f est dans l'intersection des radicaux des annulateurs de tous les éléments $z \in M$ — sous cette forme, il est clair que l'ensemble des f en question est bien un idéal de A . \square

D.14.4. PROPOSITION. *Dans les conditions du lemme ci-dessus (mais en reprenant pour k un corps calculable), si A et B sont des k -algèbres de type fini décrites par une présentation, alors on peut algorithmiquement calculer les idéaux indiqués par le lemme qui précède, à condition de savoir calculer le radical d'un idéal de A (ce qui sera possible d'après D.15.2 au prix des hypothèses D.12.6 sur le corps k).*

DÉMONSTRATION. On note comme précédemment $N = \text{Ker } \varphi$ et $Q = \text{Coker } \varphi$, vus comme, respectivement, un idéal de A et un A -module (qui n'est pas, en général, de type fini). Par ailleurs, on suppose $A = k[X_1, \dots, X_m]/I$ et $B = k[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]/\hat{J}$ où $I \subseteq \hat{J}$.

On a déjà expliqué qu'on pouvait calculer l'idéal $\hat{J} \cap k[X_1, \dots, X_m]$ de $k[X_1, \dots, X_m]$ par un algorithme d'élimination : les générateurs ainsi obtenus, lus modulo I , engendrent N , et fournissent donc une description de celui-ci comme idéal de A , ou en particulier, comme A -module de type fini. L'idéal des $f \in A$ tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit injectif, soit $N[\frac{1}{f}] = 0$, est le radical de l'annulateur de N , qu'on peut calculer d'après **D.13.4** et l'hypothèse faite sur la calculabilité du radical.

Pour calculer l'idéal des $f \in A$ tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit surjectif, on peut supposer que $A \xrightarrow{\varphi} B$ est injectif (quitte à quotienter par N , qu'on sait calculer, pour remplacer A par l'image de φ), autrement dit que $I = \hat{J} \cap k[X_1, \dots, X_m]$. Nous ferons donc cette hypothèse.

Pour chaque variable Y_i , dont on note y_i l'image dans B , on peut calculer l'idéal formé des $f \in A$ tels qu'il existe $r \geq 0$ pour lequel $f^r y_i \in A$: en effet, il s'agit du radical de l'idéal $(A : y_i)$ des $f \in A$ tels que $f y_i \in A$, et ce dernier est calculable en travaillant dans le sous- A -module de type fini de B engendré par 1 et y_i (dont les relations sont connues : c'est l'intersection de \hat{J} avec $k[X_1, \dots, X_m, Y_i]$). On peut donc aussi calculer l'intersection de ces n idéaux, c'est-à-dire l'ensemble des $f \in A$ tels que pour chaque i il existe $r \geq 0$ vérifiant $f^r y_i \in A$. Mais il est clair que cet idéal est aussi l'idéal des $f \in A$ tels que pour chaque $h \in B$ il existe $r \geq 0$ vérifiant $f^r h \in A$: c'est bien l'idéal des $f \in A$ tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit surjectif. \square

Vu au niveau du morphisme de schémas $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$, l'idéal des f tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit injectif définit le plus grand ouvert au-dessus duquel $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est schématiquement dominant, tandis que l'idéal des f tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit surjectif définit le plus grand ouvert au-dessus duquel $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est une immersion fermée.

Nous tirons le lemme suivant de [D. PETERSEN 2010] :

D.14.5. LEMME. *Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de k -algèbres (où, ici, k est un anneau quelconque) : le morphisme $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est une immersion ouverte si et seulement si l'idéal engendré dans B par l'idéal P des $f \in A$ tels que $A[\frac{1}{f}] \rightarrow B[\frac{1}{f}]$ soit un isomorphisme, est l'idéal unité de B . De plus, si c'est le cas, l'image de cette immersion est l'ouvert complémentaire du fermé de $\text{Spec } A$ défini par l'idéal P .*

DÉMONSTRATION. Si $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est une immersion ouverte, son image dans $\text{Spec } A$ est la réunion d'ouverts principaux $D(f_i)$ pour certains $f_i \in A$ (qui *a priori* pourraient ne pas être en nombre fini), pour chacun d'entre eux $A[\frac{1}{f_i}] \rightarrow B[\frac{1}{f_i}]$ est un isomorphisme puisque le morphisme de schémas correspondant en est un, et comme les $D(f_i)$ recouvrent $\text{Spec } B$, les images des f_i dans B engendrent l'idéal unité de B .

Réciproquement, supposons donnés un certain nombre (que cette fois on peut d'emblée supposer fini) de f_i dans A qui engendrent l'idéal unité de B et tels que les $A[\frac{1}{f_i}] \rightarrow B[\frac{1}{f_i}]$ soient des isomorphismes : alors le morphisme $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est un isomorphisme au-dessus de chacun des ouverts principaux $D(f_i)$ de $\text{Spec } A$, et leurs images réciproques recouvrent $\text{Spec } B$: il s'agit donc d'un isomorphisme de $\text{Spec } B$ sur l'ouvert réunion des $D(f_i)$ dans A . Cet ouvert est bien le complémentaire du fermé défini par les f_i . \square

En particulier, si A et B sont des k -algèbres de type fini décrites par une présentation, alors on peut algorithmiquement tester si φ définit une immersion ouverte $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$.

D.14.6. Morphismes finis. Soit $A = k[X_1, \dots, X_m]/I$ et $B = k[X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n]/\hat{J}$ avec $I \subseteq \hat{J}$ (comme en D.14.2) la présentation d'un morphisme $A \rightarrow B$ entre k -algèbres de type fini. Alors on peut tester algorithmiquement si ce morphisme est *fini* (c'est-à-dire si B est un A -module de type fini). En effet, c'est le cas si et seulement si les images modulo \hat{J} de chacun des Y_i sont entières sur A , ce qui d'une part permet de se ramener au cas où ($n = 1$, c'est-à-dire) $B = k[X_1, \dots, X_m, Y]/\hat{J}$, et d'autre part c'est le cas si et seulement si \hat{J} contient un polynôme dont le monôme initial, pour un ordre monomial pour lequel Y est supérieur à tout monôme en les X_1, \dots, X_m , est une puissance de Y . Autrement dit, sous ces hypothèses, c'est le cas lorsque l'idéal initial de \hat{J} (pour un tel ordre; c'est-à-dire l'idéal engendré par les monômes initiaux des éléments de \hat{J}) contient une puissance de Y . Or les monômes initiaux de la base de Gröbner de \hat{J} (pour l'ordre considéré) engendrent son idéal initial : il s'agit donc simplement de tester si la base contient un élément dont le monôme initial est une puissance de Y .

Notons qu'on a alors une présentation explicite de B comme un A -module de type fini, dont les générateurs sont les monômes sur les Y_i . Dans le cas où $n = 1$, il suffit d'aller jusqu'à la puissance donnée par le degré de l'équation entière satisfaite par Y , moins 1).

D.15. Algèbre commutative effective

Dans cette section (en fait, à partir de D.15.2) et dans la suite de cette partie, même si elles ne sont pas partout indispensables, nous ferons implicitement les hypothèses D.12.6 sur le corps k auquel on a affaire.

D.15.1. Fonction de Hilbert et dimension. Soit $S = k[Z_1, \dots, Z_d]$ où k est un corps, que nous voyons comme une k -algèbre *graduée* (par le degré total). Si $M = \text{Coker}(G \rightarrow F)$ est un S -module gradué explicitement présenté (c'est-à-dire que F et G sont des modules libres de type fini gradués, i.e. des sommes directes finies de $S[n_i]$ où $S[n_i]$ désigne l'algèbre S où le degré est décalé de n_i ; et où la flèche $G \rightarrow F$ qui décrit M est homogène de degré 0), alors on sait algorithmiquement calculer la fonction de Hilbert de M (qui à n associe la dimension sur k de l'espace vectoriel des éléments de M homogènes de degré n) : c'est-à-dire que non seulement on sait calculer sa valeur en chaque degré n donné, mais on sait aussi calculer un rang à partir duquel cette fonction est un polynôme, et quel est ce polynôme. (Pour ce fait, nous renvoyons à [EISENBUD 1995, théorème 15.26] et [COX, LITTLE et O'SHEA 2007, chapitre 9, §2–3].)

Dans ce même contexte, on sait calculer une résolution libre graduée *finie* de M (c'est-à-dire de la forme $0 \rightarrow F_r \rightarrow \dots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0$ avec F_i libre de type fini gradué et les flèches homogènes de degré 0) : cf. [EISENBUD 1995, corollaire 15.11]. (Notons que ce calcul ne fait pas appel à des recherches non bornées : notamment, la longueur r de la résolution est majorée par le nombre d de variables.)

Si $S = R/I$ où I est un idéal homogène de R , la fonction de Hilbert d'un S -module gradué M est celle du R -module gradué sous-jacent à M . (En revanche, il n'existe pas en général de résolution libre finie de M comme S -module.)

D.15.2. Décomposition primaire. Dans cette section, où on se penche sur la calculabilité d'une décomposition primaire d'un idéal I (dans un anneau de polynômes), on entend par ce terme le calcul de couples (M_i, \mathfrak{p}_i) d'idéaux (du même anneau) tels que $I = \bigcap_i M_i$, l'intersection étant irrédundante, avec \mathfrak{p}_i des idéaux premiers deux à deux distincts et M_i (pour chaque i) un idéal \mathfrak{p}_i -primaire. Nous cherchons donc à la fois à calculer les M_i (qui ne sont pas uniques) et les \mathfrak{p}_i (qui le sont). Remarquons en particulier que la décomposition primaire recouvre le calcul du radical d'un idéal (intersection des \mathfrak{p}_i), et permet de tester si un idéal est radical, ou s'il est premier.

D.15.2.1. Dimension zéro. Soit k un corps (dont, conformément à la convention [D.12.6](#), on suppose qu'il est calculable et dispose d'un algorithme de factorisation et une p -base finie explicite). Alors, si I est un idéal de $k[Z_1, \dots, Z_d]$ de dimension 0 (voir la section suivante pour le cas plus général), on peut algorithmiquement calculer le radical, et plus généralement une décomposition primaire, de I : pour cela, on renvoie soit à [GIANNI, TRAGER et ZACHARIAS 1988, §6], ou bien, pour une présentation peut-être plus simple, à [BECKER et WEISPFENNING 1993, théorème 8.22] combiné à [STEEL 2005] pour lever les difficultés liées à l'inséparabilité (cette dernière référence se place dans un cas plus restreint, mais il est aisé de voir que ces hypothèses additionnelles ne servent que pour obtenir celle que nous avons faite de factorisation dans les extensions finies).

D.15.2.2. Dimension arbitraire. Soit k un corps (dont, comme dans le paragraphe précédent, et conformément à la convention [D.12.6](#), on suppose qu'il est calculable et dispose d'un algorithme de factorisation et une p -base finie explicite). Alors, si I est un idéal de $k[Z_1, \dots, Z_d]$, on peut algorithmiquement calculer une décomposition primaire de I en ramenant ce problème à celui de la dimension 0 : on renvoie pour cela à [GIANNI, TRAGER et ZACHARIAS 1988, §8 et §9] et [BECKER et WEISPFENNING 1993, théorème 8.101] (cf. aussi [STEEL 2005, §5.3]).

(On pourra remarquer au passage que l'algorithme IDEALDIV2 décrit en [BECKER et WEISPFENNING 1993, p. 268], est primitivement récursif.)

D.15.3. Algèbre de Rees et gradué associé. Soit R une k -algèbre de type fini, disons $R = S/I$ où $S = k[Z_1, \dots, Z_d]$ est un anneau de polynômes, et soit J un idéal de R engendré par des éléments $f_1, \dots, f_r \in R$.

L'**algèbre de Rees** associée à cette situation est la sous-algèbre $R[Jt] = R \oplus Jt \oplus J^2t^2 \oplus \dots$ de l'algèbre $R[t]$ des polynômes en une indéterminée t sur R formée des polynômes dont le coefficient de degré i appartient à J^i . On peut calculer une présentation de $R[Jt]$ comme R -algèbre, donc aussi comme k -algèbre, de la manière suivante. Soit L l'idéal de $S[T_1, \dots, T_r]$ défini comme l'intersection de ce dernier avec l'idéal de $S[T_1, \dots, T_r, t]$ engendré par I et par les $T_i - f_i t$: alors on sait calculer L par un algorithme d'élimination (cf. [EISENBUD 1995, §15.10.4]).

Or $R[Jt]$ est isomorphe au quotient $S[T_1, \dots, T_r]/L$, l'isomorphisme envoyant $a \in R$ sur la classe modulo L de n'importe quel $\hat{a} \in S$ qui le représente (remarquer que L contient I), et $f_{u_1} \cdots f_{u_i} t^i \in J^i t^i$ sur la classe de $T_{u_1} \cdots T_{u_i}$ modulo L . (Cf. [VASCONCELOS 2005, proposition 1.5].)

Le quotient de l'algèbre de Rees $R[Jt]$ par l'idéal J de R définit l'**algèbre graduée associée** à J dans R , soit $\text{gr}_J(R) = (R/J) \oplus (J/J^2)t \oplus (J^2/J^3)t^2 \oplus \cdots$ (les t^i , qui servent simplement à étiqueter les degrés, sont souvent omis de cette description). D'après ce qui précède, on peut aussi en calculer une présentation comme (R/J) -algèbre ou comme k -algèbre, à savoir $S[T_1, \dots, T_r]/(L + (f_1, \dots, f_r))$.

Expliquons comment ceci s'adapte au cas d'un R -module M explicitement présenté (cf. **D.13.3**) pour obtenir une présentation explicite de $M[Jt] = M \oplus JMt \oplus J^2Mt^2 \oplus \cdots$ comme module sur l'algèbre de Rees $R[Jt]$, ainsi donc que du gradué $\text{gr}_J(M) = (M/JM) \oplus (JM/J^2M)t \oplus \cdots$ comme module sur $\text{gr}_J(R)$. À partir d'une présentation $M = S^n/Q$ de M comme S -module (où $Q \subseteq S^n$ contient I^n), on définit encore le $S[T_1, \dots, T_r]$ -module L — tel que $M[Jt]$ soit isomorphe à $S[T_1, \dots, T_r]^n/L$ — comme l'intersection de $S[T_1, \dots, T_r]^n$ avec le sous- $S[T_1, \dots, T_r, t]$ -module de $S[T_1, \dots, T_r, t]^n$ engendré par Q et les produits de $T_i - f_i t$ par les éléments de la base canonique de $S[T_1, \dots, T_r, t]^n$. On peut calculer une présentation de L car la théorie de l'élimination fonctionne encore pour les sous-modules des modules libres de type fini sur les anneaux de polynômes ([EISENBUD 1995, remarque suivant la proposition 15.29 et exercice 15.37]).

D.15.4. Calculs de longueurs et de multiplicités. Soit comme dans la section précédente (**D.15.3**) R une k -algèbre de type fini, et soit maintenant \mathfrak{p} un idéal *premier* de R . (On rappelle que grâce à **D.15.2** on sait tester si un idéal de R est premier.) Remarquons que le corps $\kappa_{\mathfrak{p}} := R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \text{Frac}(R/\mathfrak{p})$ est calculable, et on a même les propriétés (**D.12.6**) d'admettre un algorithme de factorisation et une p -base finie explicite en vertu de **D.12.4** et des remarques **D.12.5**. Si M est un R -module explicitement présenté, on a obtenu ci-dessus une présentation explicite de $\text{gr}_{\mathfrak{p}} R$ comme algèbre de type fini sur R/\mathfrak{p} et de $\text{gr}_{\mathfrak{p}} M$ comme module sur $\text{gr}_{\mathfrak{p}} R$: ceci donne donc également une présentation explicite de $\text{gr}_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}}$ comme algèbre de type fini sur $\kappa_{\mathfrak{p}}$ et de $\text{gr}_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$ comme module sur cette algèbre de type fini. D'après **D.15.1**, on peut calculer la fonction de Hilbert de $\text{gr}_{\mathfrak{p}} M_{\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire la fonction $\dim_{\kappa_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}^i M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{i+1} M_{\mathfrak{p}}$ (« calculer » au sens où on peut à la fois calculer le polynôme avec lequel cette fonction coïncide pour i assez grand, et expliciter une borne à partir de laquelle elle coïncide avec lui).

En particulier, on sait calculer la *multiplicité* $\text{mult}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}, M_{\mathfrak{p}})$ de \mathfrak{p} dans $M_{\mathfrak{p}}$ (cf. [SERRE 1965, V(A)2] et [EISENBUD 1995, remarque suivant le corollaire 12.5]).

Expliquons comment, dans le cas où \mathfrak{a} est seulement supposé être un idéal \mathfrak{p} -primaire de R (avec \mathfrak{p} un idéal premier), on peut *majorer* la multiplicité $\text{mult}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{a}, M_{\mathfrak{p}})$ (nous n'aurons pas besoin d'un calcul exact). En calculant la fonction de Hilbert de $\text{gr}_{\mathfrak{p}} R/\mathfrak{a}$, on calcule (sans effectuer de recherche non bornée) un r assez grand pour que $\mathfrak{p}^r \subseteq \mathfrak{a}$, ce qui entraîne $\mathfrak{p}^r M \subseteq \mathfrak{a}^i M$ pour tout i : la longueur sur $R_{\mathfrak{p}}$ de $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}^i M_{\mathfrak{p}}$ est donc majorée par celle de $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^r M_{\mathfrak{p}}$, or

les paragraphes précédents montrent qu'on sait calculer la longueur sur R_p de $\mathfrak{p}^j M_p / \mathfrak{p}^{j+1} M_p$ (qui est la dimension de ce κ_p -espace vectoriel), donc de $M_p / \mathfrak{p}^j M_p$.

D.15.5. Normalisation.

D.15.5.1. Soient A un anneau noëthérien réduit, K son anneau total des fractions et \tilde{A} le normalisé de A dans K . La détermination constructive de \tilde{A} est un problème classique, qui fait l'objet d'une littérature abondante : citons notamment les articles [STOLZENBERG 1968], [T. DE JONG 1998], [SINGH et SWANSON 2009] (en caractéristique positive uniquement) et les livres [VASCONCELOS 2005, chap. 6] et [HUNEKE et SWANSON 2006, chap. 15]. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici brièvement un argument (tiré de [T. DE JONG 1998]). Soit I un idéal de A contenant un élément i non diviseur de zéro et posons $A' = \text{End}_A(I)$. Le morphisme évident $A \rightarrow A'$ est entier ; il est injectif, de même que le morphisme $A' \rightarrow K$, $\varphi \mapsto \varphi(i)i^{-1}$, qui est indépendant du choix de i . Notons que la structure d'anneau de A' est facilement explicitable, d'abord comme A -module puis comme anneau ; cf. D.13.4 et D.13.6.2 ou bien [ibid., §3]. Il résulte de ce qui précède que si A est normal, le morphisme $A \rightarrow A'$ est un isomorphisme. On a la réciproque suivante, moyennant des hypothèses supplémentaires.

D.15.5.2. PROPOSITION (Grauert-Remmert). *Soient k un corps parfait et $A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$ un anneau intègre de normalisé \tilde{A} dans son corps des fractions. Notons I le radical de l'idéal de Fitting $J = \text{Fitt}_d(\Omega_{A/k}^1)$ engendré par l'image dans A des déterminants des sous-matrices jacobiniennes de taille $n - d$. Alors :*

- (i) l'idéal J est non nul et inclus dans l'idéal conducteur $\mathfrak{c} := \text{Ann}_A(\tilde{A}/A)$;
- (ii) le morphisme $A \rightarrow \text{End}_A(I)$ est un isomorphisme si et seulement si A est normal.

Pour (i), voir par exemple [SINGH et SWANSON 2009, rem. 1.5], où il est implicitement fait usage du théorème de normalisation de Noether « génériquement étale » ([EISENBUD 1995, cor. 16.18], [ZARISKI et SAMUEL 1975, V, §3, th. 8]). (Voir aussi [HUNEKE et SWANSON 2006, exercice 12.12].) Pour (ii), voir par exemple [GRAUERT et REMMERT 1984, VI, §5],

L'anneau A étant japonais, la suite croissante $A \subseteq A' \subseteq A'' \subseteq \dots$ obtenue en itérant la construction $A \mapsto \text{End}_I(A)$, pour $I = \sqrt{\text{Fitt}(\Omega_{A/k}^1)}$, est stationnaire. D'après (ii), sa limite est le normalisé \tilde{A} que l'on souhaite calculer.

D.15.5.3. La méthode précédente ne dit rien sur le nombre d'opérations à faire : on s'arrête simplement lorsque le morphisme d'inclusion d'un terme dans le suivant est un isomorphisme, condition que l'on sait tester (D.14.2). L'existence de bornes *a priori*, mais non calculables, est connue ([DRIES et K. SCHMIDT 1984, §3]) mais inutile ici. On se propose ici de montrer que l'on peut contrôler cette terminaison par un calcul de multiplicité et ainsi calculer la normalisation sans faire de recherche non bornée.

Rappelons ([SERRE 1965, IV, th. 11]) qu'un anneau est normal si et seulement si il est R_1 , c'est-à-dire régulier en codimension 1, et satisfait la condition S_2 de Serre ([ÉGA IV₂, 5.7.2]).

La condition S_2 est facile à satisfaire : si P est une sous- k -algèbre de polynômes de A telle que $P \rightarrow A$ soit fini, et que l'on note $D(-) = \text{Hom}_P(-, P)$, le bidual $B = D(D(A))$ est S_2 et est

la S_2 -ification de A , c'est-à-dire que $A \rightarrow B$ est la plus petite extension finie contenue dans l'anneau total des fractions de A qui soit S_2 . Voir [VASCONCELOS 2005, prop. 6.21], [HUNEKE et SWANSON 2006, démonstration du théorème 15.3.3 et exercices 15.9 et 15.12]. (La multiplication sur B utilisée ici provient de son plongement dans le corps des fractions de A ; mais elle peut aussi se définir de façon intrinsèque : si $\xi, \eta \in D(D(A))$ sont vues comme des formes P -linéaires sur $D(A)$, leur produit est la forme P -linéaire sur $D(A)$ qui à $\varphi \in D(A)$ associe $\eta(x \mapsto \xi(y \mapsto \varphi(xy)))$ – cette multiplication du bidual, appelée « multiplication d'Arens » par les analystes dans le contexte des algèbres de Banach, cf. [PALMER 1974], n'est pas commutative en général, mais il est facile de se convaincre qu'elle l'est, et qu'elle coïncide bien avec la restriction de la multiplication sur $\text{Frac}(A)$, dans le cas où on s'est placé, cf. [MADORE 2014].) Voir aussi [ÉGA IV₂, § 5.10] et [ACHAR et SAGE 2009] pour une présentation intrinsèque de S_2 -ification. Or P est calculable en utilisant une démonstration explicite du lemme de normalisation de Noether ([EISENBUD 1995, théorème 13.3 en utilisant le lemme 13.2(a)] ou [SERRE 1965, III(D)2, théorème 2]), on sait décrire explicitement A comme un P -module de type fini d'après la remarque faite en D.14.6, on peut en déduire la structure de B comme P -module d'après D.13.4, et bien sûr comme algèbre (D.13.6.1, puisque la multiplication sur $D(D(A))$ est calculable).

D'autre part, si A est R_1 , il en est de même de B (en fait, $A \rightarrow DD(A)$ est un isomorphisme en codimension 1 ; cf. [HUNEKE et SWANSON 2006, exercice 15.11]).

Ceci nous ramène donc à normaliser (=régulariser) en codimension 1. D'après la proposition précédente (i), on peut trouver un élément non nul f dans le conducteur \mathfrak{c} . Notons $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ un point maximal (de codimension 1) de $V(f)$, calculé par décomposition primaire de f . Soit B le localisé de A en \mathfrak{p} et notons \tilde{B} le normalisé de B . La longueur de toute chaîne strictement croissante $B \subsetneq B' \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{B}$ est majorée par l'entier $\text{long}_B(\tilde{B}/B)$ lui-même inférieur ou égal à $\text{long}_B(\tilde{B}/\mathfrak{c})$. Rappelons que ce dernier est égal à la multiplicité $\text{mult}(\mathfrak{c}, B)$ de \mathfrak{c} dans B , à son tour inférieur ou égal à $\text{mult}((f), B)$, que l'on sait majorer (cf. D.15.4). Ceci montre que l'on a peut calculer une borne sur le nombre d'étapes pour rendre A régulier en codimension 1[®].

Justifions brièvement l'égalité $\text{long}_B(\tilde{B}/\mathfrak{c}) = \text{mult}(\mathfrak{c}, B)$. Soit $n \geq 1$ un entier ; on a $\text{long}_B(\tilde{B}/\mathfrak{c}^n) = \sum_{\mathfrak{q}} [\kappa(\mathfrak{q}) : \kappa(\mathfrak{p})] \cdot \text{long}_{\tilde{B}_{\mathfrak{q}}}(\tilde{B}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{c}^n)$, où \mathfrak{q} parcourt le spectre maximal (fini) de l'anneau de Dedekind semi-local \tilde{B} . Par régularité des anneaux $\tilde{B}_{\mathfrak{q}}$ et nouvelle application de cette formule (pour $n = 1$), on obtient l'égalité $\text{long}_B(\tilde{B}/\mathfrak{c}^n) = n \cdot \text{long}_B(\tilde{B}/\mathfrak{c})$ d'où $\text{mult}(\mathfrak{c}, \tilde{B}) = \text{long}_B(\tilde{B}/\mathfrak{c})$. Comme d'autre part $\text{long}_B(\tilde{B}/B)$ est finie, on a $\text{mult}(\mathfrak{c}, \tilde{B}) = \text{mult}(\mathfrak{c}, B)$.

D.15.6. Lissité et étalitude. Soient A un anneau, $P = A[X_1, \dots, X_n]$ un anneau de polynômes sur A et B le quotient de P par un idéal de type fini I . Considérons le B -module $\text{Ext}_B^1(\mathbb{L}_{B/A}, I/I^2)$, où $\mathbb{L}_{B/A}$ est le complexe cotangent. D'après [ILLUSIE 1971-1972, III.1.2.9.1], ce

[®]. Cette technique nous a été suggérée par O. Gabber.

module est naturellement isomorphe au quotient $\text{End}_B(I/I^2)/d^* \text{Hom}_P(\Omega_{P/A}^1, I/I^2)$, où d désigne la dérivation $I/I^2 \rightarrow \Omega_{P/A}^1 \otimes_P B$. On peut donc en déterminer la structure (cf. [D.13.4](#)). Notons $H_A(P, I)$ son idéal annulateur en tant que P -module ; d'après une variante du critère jacobien ([GABBER et RAMERO 2003, 5.4.2]), le lieu lisse (à la source) du morphisme $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est l'ouvert complémentaire du fermé Σ défini par l'idéal image de $H_A(P, I)$ dans B . (Un avantage de cette description est que, contrairement à la description plus classique du lieu singulier par un idéal de Fitting du B -module $\Omega_{B/A}^1$ (cf. [D.15.5](#)), elle ne fait pas d'hypothèse d'équidimensionalité ou de platitude.) On trouve en [ibid., § 5.4.5] et [ELKIK 1973, § 0.2] une variante moins intrinsèque mais plus explicite qui, donnés des générateurs $\{f_1, \dots, f_r\}$ de I , produit – par dérivation de ces générateurs et opérations élémentaires sur les idéaux de P (cf. [D.13.2](#) et [D.13.3](#)) – un idéal contenu dans $H_A(P, I)$ et définissant également le fermé Σ .

Il résulte de ce qui précède que l'on peut tester si le morphisme de présentation finie $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est *lisse*, par exemple lorsque A est une algèbre de type fini sur un corps. Pour vérifier s'il est *étale*, il suffit de vérifier si les fibres au-dessus des points maximaux de $\text{Spec}(A)$ (c'est-à-dire les points génériques des composantes irréductibles, calculables d'après [D.15.2](#)) sont vides ou de dimension nulle.

D.15.7. Présentation d'un pincement.

D.15.7.1. DÉFINITION. Soit A un anneau et I un idéal de A . On définit une A -algèbre B en munissant le A -module $A \oplus I$ de la multiplication donnée par $(a, u) \cdot (b, v) = (ab, av + bu + uv)$. On dit que B est la A -algèbre obtenue par **pincement de A le long de I** .

Remarquons que B peut aussi se voir comme la A -algèbre $A \times_{A/I} A$ – en identifiant le couple (a, u) de $A \oplus I$ à $(a, a + u)$ de $A \times_{A/I} A$ – ou comme la A -algèbre obtenue en ajoutant une unité à l'idéal I vu comme une A -algèbre-non-unitaire.

D.15.7.2. PROPOSITION. Soient k un corps, $A = k[t_1, \dots, t_d]/(u_1, \dots, u_q)$ une k -algèbre de type fini explicitement présentée et I l'idéal de A engendré par des éléments x_1, \dots, x_r de A , images d'éléments $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_r$ de $k[t_1, \dots, t_d]$. Alors on peut trouver algorithmiquement une présentation explicite de l'algèbre $B = A \oplus I$ obtenue par pincement de A le long de I (cf. [D.15.7.1](#)).

DÉMONSTRATION. Le A -module B est engendré par $1, x_1, \dots, x_r$. D'après [D.13.3](#), on sait trouver algorithmiquement des générateurs y_1, \dots, y_s des relations linéaires entre les x_1, \dots, x_r (donc entre les $1, x_1, \dots, x_r$). Quitte à écrire chaque $x_i x_j$ comme combinaison de x_1, \dots, x_r , on trouve également des relations quadratiques $q_{i,j}$ telles que définies en [D.13.6.1](#), qui assure alors que les relations y_i et les $q_{i,j}$ définissent l'algèbre B comme un quotient de $A[t'_1, \dots, t'_r]$, donc, quitte à prendre leur relèvement et y ajouter les u_1, \dots, u_q , comme un quotient de $k[t_1, \dots, t_d, t'_1, \dots, t'_r]$. \square

D.16. Schémas de type fini sur un corps : description algorithmique

On rappelle que les hypothèses [D.12.6](#) sont implicitement faites sur le corps k . Par ailleurs, nous ne parlerons ici que de schémas de type fini sur k , omettant fréquemment les mots « de type fini ».

D.16.1. Schémas affines et quasi-affines, morphismes entre iceux. On représentera un *schéma affine* (sous-entendu : de type fini) X sur un corps k par une algèbre de type fini R dont il est le spectre, cette algèbre R étant elle-même représentée comme un quotient $k[Z_1, \dots, Z_d]/I$ d'une algèbre de polynômes, c'est-à-dire par la donnée d'un ensemble (fini !) de générateurs de I , équations de X dans l'espace affine \mathbb{A}_k^d . Remarquons qu'on peut tester algorithmiquement si un tel schéma est vide (il s'agit exactement de tester si I est l'idéal unité).

On représentera un morphisme $X \rightarrow Y$ de k -schémas affines, où $X = \text{Spec}(R)$ et $Y = \text{Spec}(S)$ sont les spectres de deux k -algèbres de type fini R, S , comme un morphisme $S \rightarrow R$ de k -algèbres (cf. [D.14.2](#)).

On représentera un schéma *quasi-affine*, c'est-à-dire un ouvert U d'un schéma affine X , au moyen d'un fermé dont il est le complémentaire (décrit par des équations f_i de ce fermé : ceci revient à écrire U comme la réunion des ouverts principaux $D(f_i)$). Remarquons que, à l'intérieur d'un schéma affine X fixé, on sait tester l'inclusion ou l'égalité entre des ouverts (cela revient à tester l'inclusion entre les radicaux des idéaux définissant les fermés : cf. [D.15.2](#) pour le calcul du radical).

Un morphisme d'un schéma affine X vers un schéma quasi-affine V ouvert complémentaire de Z dans un schéma affine Y sera décrit comme un morphisme $X \rightarrow Y$ qui se factorise par V : ce fait est testable algorithmiquement en testant si l'image réciproque de Z par $X \rightarrow Y$ est vide (c'est-à-dire si l'algèbre produit tensoriel de celles de X et Z au-dessus de celle de Y est nulle).

Un morphisme d'un schéma quasi-affine U ouvert d'un schéma affine X , vers un schéma quasi-affine V , sera décrit comme une collection de morphismes $U_i \rightarrow V$ qui coïncident sur $U_i \cap U_j$, où les U_i sont les ouverts affines principaux recouvrant U (c'est-à-dire les $D(f_i)$ avec f_i parcourant des équations d'un fermé dont U est le complémentaire dans X : on sait écrire des équations de $D(f_i)$ comme schéma affine en le considérant comme une hypersurface d'équation $Tf_i - 1$ au-dessus de X , où T est une nouvelle indéterminée ; et on peut représenter l'ouvert affine $U_i \cap U_j$ comme $D(f_i f_j)$). De nouveau, on peut calculer la composée de tels morphismes entre schémas quasi-affines, et tester l'égalité de deux d'entre eux (même si le quasi-affine U de départ n'est pas représenté par le même recouvrement par des $D(f_i)$: il suffit de prendre un raffinement commun entre deux recouvrements, ce qui est facile).

D.16.2. Description des schémas et de leurs morphismes. On représentera un *schéma* (sous-entendu : de type fini) X sur un corps k par la donnée d'un nombre fini de schémas affines U_i et, pour chacun, d'un recouvrement $V_{i'}$ par des ouverts quasi-affines (les variables i et i' parcourent ici le même ensemble fini) et, pour chaque paire i, i' , d'un morphisme $\varphi_{i' i} : V_{i' i} \rightarrow V_{i i'}$ vérifiant la condition de compatibilité que ($V_{i i} = U_i$ et $\varphi_{i i} = \text{Id}_{U_i}$ et que) $\varphi_{i_2 i_3} \circ \varphi_{i_1 i_2}$ et $\varphi_{i_1 i_2}$ coïncident là où tous deux sont définis (en particulier, les $\varphi_{i' i}$ sont des isomorphismes). Toutes ces conditions sont bien testables algorithmiquement, et le schéma X défini est alors le recollement des U_i en identifiant l'ouvert $V_{i' i}$ de U_i avec l'ouvert $V_{i i'}$ de $U_{i'}$ au moyen de $\varphi_{i' i}$. On dit aussi que les U_i (avec les autres données les accompagnant) constituent un **atlas** affine de X . Un **raffinement** d'un tel atlas est un atlas obtenu en remplaçant

chaque U_i par un recouvrement de celui-ci par des ouverts affines principaux U_{ij} (ici le j parcourt un ensemble fini qui peut dépendre de i), avec les données évidemment déduites de ce recouvrement.

On représentera un morphisme de schémas $X \rightarrow Y$, décrits par des atlas U_i pour X et V_j pour Y , en se donnant un raffinement U_{ij} de l'atlas initial de X et des morphismes $U_{ij} \rightarrow V_j$ de schémas affines, qui se recollent aux intersections décrites par l'atlas.

Notons qu'on peut algorithmiquement calculer la composée de morphismes de schémas ainsi décrits, et par ailleurs que, donnés deux morphismes $X \rightarrow Y$ entre les deux mêmes schémas décrits par les *mêmes* atlas, on peut tester leur égalité (ceci se fait en prenant un raffinement commun aux deux atlas de X qui décrivent les morphismes à comparer, ce qu'on peut faire puisqu'il s'agit de raffiner des recouvrements de mêmes schémas affines U_i).

Remarquons aussi que si dans la définition d'un schéma on ne suppose plus les U_i affines mais que ce sont des schémas plus généraux (autrement dit, si on cherche à recoller un atlas formé de schémas non nécessairement affines), on peut encore se ramener algorithmiquement à la situation où ils sont affines (quitte à remplacer chaque schéma U_i par un atlas affine qui le décrit).

Nous ne prétendons pas qu'il soit possible de tester l'égalité (l'isomorphisme) de deux schémas décrits par des atlas (ceci sera néanmoins possible dans le cas étale : cf. [D.17.3](#) ci-dessous). Remarquons à ce sujet que dans la suite si nous écrivons par exemple « si Z est affine » il faut comprendre « si on s'est donné une description de Z comme schéma affine » et pas « si on s'est donné une description de Z comme un schéma général, et qu'il s'avère que Z est affine [chose qu'on ne sait pas tester] » : ceci ne devrait pas prêter à confusion.

En fait, à ce stade de la description, nous ne savons même pas encore tester si un morphisme *donné* entre schémas est un isomorphisme (ceci, en revanche, sera bien décidable : cf. [D.16.5](#)).

D.16.3. Produits fibrés de schémas. Donnés X, Y, Z trois schémas (i.e., k -schémas de type fini) décrits comme précédemment, et donnés $X \rightarrow Z$ et $Y \rightarrow Z$ deux morphismes, on peut algorithmiquement calculer le produit fibré $X \times_Z Y$. En effet, si X, Y, Z sont affines (disons $X = \text{Spec } R, Y = \text{Spec } S$ et $Z = \text{Spec } A$), il s'agit de calculer un produit tensoriel de k -algèbres de type fini, or on a vu en [D.14.2](#) qu'on pouvait calculer des présentations finies de R et S comme A -algèbres, auquel cas leur produit tensoriel se calcule simplement en réunissant les générateurs et les relations. La démonstration dans le cas général suit celle de [[ÉGA I](#), 3.2.6] : si Z est toujours supposé affine mais que X, Y ne le sont plus, on obtient un atlas de $X \times_Z Y$ comme en [[ÉGA I](#), 3.2.6.3], en prenant les $U_i \times_Z V_j$ pour U_i parcourant un atlas de X et V_j de Y ; si Z n'est plus supposé affine, étant donné un atlas W_i de Z , la donnée même des morphismes $X \rightarrow Z$ et $Y \rightarrow Z$ fournit des atlas de X et Y appropriés à les représenter, c'est-à-dire par des $U_i \rightarrow W_i$ où U_i est un ouvert de X (non nécessairement affine, mais réunion d'ouverts affines) et $V_i \rightarrow W_i$ de même, on peut donc calculer les produits fibrés $U_i \times_{W_i} V_i$ comme on vient de le dire, et les recoller à leur tour.

Dans le cas où $X = Y$, en recollant les morphismes $R \otimes_A R \rightarrow R$ (de multiplication, qui ne posent pas de difficulté à décrire algorithmiquement), on obtient une description de la diagonale $X \rightarrow X \times_Z X$ d'un morphisme $X \rightarrow Z$ quelconque.

D.16.4. Pincement (cas non nécessairement affine). On renvoie à [FERRAND 2003] pour la question générale de l'existence des pincements dans la catégorie des schémas, dont on tire notamment (théorème 7.1(B)) le fait que la somme amalgamée (=« pincement ») $X \amalg_F X$ est représentable dans la catégorie des schémas lorsque X est un schéma et F un sous-schéma fermé de X , et plus exactement, représentée par la même somme amalgamée dans la catégorie des espaces annelés.

On a vu en D.15.7.2 comment calculer algorithmiquement ce pincement si X est un schéma affine de type fini sur un corps k (si $X = \text{Spec } A$ et $F = \text{Spec}(A/I)$ avec I un idéal de A , alors $X \amalg_F X = \text{Spec}(A \oplus I)$ où $A \oplus I$ est muni de la structure d'algèbre décrite en D.15.7.1). Remarquons par ailleurs que la construction est fonctorielle : si $\varphi : A \rightarrow A'$ est un morphisme d'algèbres et $I' = \varphi(I)$ l'idéal engendré dans A' par l'image de l'idéal I de A , alors $(A \oplus I) \rightarrow (A' \oplus I')$ défini par $(a, u) \mapsto (\varphi(a), \varphi(u))$ est bien un morphisme d'algèbres.

Si X est un schéma de type fini sur k et U un ouvert affine de X , alors d'après [ibid., lemme 4.4] $U \amalg_V U$ est un ouvert de $X \amalg_F X$, où V désigne l'ouvert $F \cap U$ de F : ces ouverts sont calculables algorithmiquement d'après ce qu'on vient de dire (il est clair que $F \cap U$ est calculable, au besoin d'après D.16.3), ils recouvrent $X \amalg_F X$, et si U, U' sont deux ouverts affines de X , l'ouvert quasi-affine $(U \amalg_V U) \cap (U' \amalg_{V'} U') = (U \cap U') \amalg_{V \cap V'} (U \cap U')$ se décrit comme réunion des $U'' \amalg_{V''} U''$ pour $U'' \subseteq U \cap U'$ et s'envoie vers $U \amalg_V U$ et $U' \amalg_{V'} U'$ par les morphismes de fonctorialité (cf. ci-dessus). Ceci fournit donc une description de $X \amalg_F X$ au sens de D.16.2.

D.16.5. Immersions ouvertes et isomorphismes de schémas. Donné un schéma X décrit par un atlas d'ouverts affines $U_i = \text{Spec } R_i$ (dont on notera $V_{ij} = U_i \cap U_j$ les intersections deux à deux que l'atlas identifie) et un schéma Y que nous supposons dans un premier temps affine $Y = \text{Spec } S$, on peut tester algorithmiquement si un morphisme $X \rightarrow Y$ est une immersion ouverte : en effet, pour ceci, il faut et il suffit que chacun des $U_i \rightarrow Y$ soient des immersions ouvertes, et que l'intersection (dans Y) des images de U_i et U_j coïncide avec V_{ij} en tant qu'ouvert de U_i ; or d'après D.14.5 on sait tester si $U_i \rightarrow Y$ est une immersion ouverte, on peut calculer $U_i \cap U_j$ dans Y comme $\text{Spec}(R_i \otimes_S R_j)$, et tester si l'ouvert en question de $U_i = \text{Spec } R_i$ coïncide bien avec V_{ij} .

Le cas où le schéma Y cible n'est plus supposé affine ne pose pas de difficulté particulière : le morphisme est décrit dans des atlas adaptés, et il est une immersion ouverte si et seulement si sa restriction à chaque carte de la cible est une immersion ouverte.

On peut également tester algorithmiquement si un morphisme $X \rightarrow Y$ de schémas est un isomorphisme et, le cas échéant, calculer sa réciproque. En effet, en considérant d'abord le cas où Y est affine, ceci se fait en testant d'abord s'il s'agit d'une immersion ouverte comme décrit par le pénultième paragraphe dont nous reprenons les notations, puis, si c'est bien le

cas, en vérifiant que les U_i recouvrent Y , ce qui se fait en calculant (toujours par [D.14.5](#)) un fermé complémentaire de U_i dans Y , ce qui permet de tester si l'intersection de ces fermés est vide (les équations qui les décrivent engendrent l'idéal unité de S); le cas échéant, les ouverts principaux dont les U_i sont écrits comme réunion forment un atlas de Y pour lequel l'écriture de l'isomorphisme réciproque est claire. Le cas où Y n'est pas affine ne présente pas de difficulté nouvelle (il s'agit, de nouveau, d'être un isomorphisme en restriction à chaque carte de la cible).

D.16.6. Réduit, composantes irréductibles, composantes connexes. On peut tester algorithmiquement si un schéma est réduit, ou bien calculer son réduit : en effet, X est réduit si et seulement si chacun des ouverts affines constituant un atlas de X l'est, ce qui ramène à tester si une k -algèbre de type fini est réduite, donc si un idéal d'un anneau de polynômes est radical (cf. [D.15.2](#)); et réduire X se fait en réduisant chaque carte d'un atlas de X (les morphismes de recollement passent au réduit grâce à la fonctorialité de celui-ci).

De même, on peut tester algorithmiquement si un schéma est irréductible, ou bien calculer ses composantes irréductibles.

Enfin, en testant parmi les composantes irréductibles celles dont l'intersection est vide (on a déjà observé ci-dessus qu'on pouvait tester si un schéma est vide), on peut calculer algorithmiquement les composantes connexes d'un schéma.

D.16.7. Image fermée, immersions fermées. Si $X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas, on peut en calculer algorithmiquement l'image fermée schématique (c'est-à-dire, [[ÉGA I](#), 9.5], le plus petit sous-schéma fermé Y' de Y par lequel le morphisme $X \rightarrow Y$ se factorise, et bien sûr on cherche aussi à calculer la factorisation en question) : en effet, si on suppose d'abord que $Y = \text{Spec } S$ est affine, et si X est décrit par un atlas d'ouverts affines $U_i = \text{Spec } R_i$, alors $Y' = \text{Spec}(S/N)$ où N est l'intersection des noyaux de tous les $S \rightarrow R_i$ décrivant le morphisme (cf. [[ÉGA I](#), 9.5.2]). Si Y n'est plus supposé affine, de nouveau, il suffit d'effectuer cette construction localement.

Grâce à cette construction, on peut tester si un morphisme de schémas $X \rightarrow Y$ est une immersion fermée : en effet, cela revient à tester si la factorisation $X \rightarrow Y'$, où Y' est l'image fermée schématique décrite ci-dessus, est un isomorphisme, et on a vu comment tester ce fait.

On peut également tester si un morphisme de schémas est dominant (c'est-à-dire d'image dense), puisque cela signifie précisément que son réduit est schématiquement dominant (c'est-à-dire que son image fermée schématique, définie ci-dessus, est toute la cible).

D.16.8. Image d'un morphisme, surjectivité. Si $X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas, on peut tester algorithmiquement s'il est surjectif, ou même calculer son image (une partie constructible de Y , décrite comme combinaison booléenne de fermés de Y). En effet, cette image est caractérisée par l'ensemble de ses points à valeurs dans la clôture algébrique de k (on rappelle que nous ne considérons ici que des schémas de type fini sur k ; cf. [[ÉGA I](#)_{Spr}, proposition 7.1.8 et sa démonstration]), or pour k algébriquement clos il est algorithmique de calculer l'image d'une partie constructible de k^n par la projection sur un sous-ensemble de ses

coordonnées ([FRIED et JARDEN 2008, théorème 9.3.1]), ce qui suffit à calculer l'image de $X(k)$ par f comme la projection du graphe de f .

D.16.9. Morphismes et schémas séparés, radiciels. On peut tester si un morphisme de schémas est séparé, resp. radiciel, en testant si sa diagonale (qu'on sait calculer d'après **D.16.3**) est une immersion fermée ([ÉGA I, 5.4.1]), resp. une surjection ([ÉGA IV₁, 1.8.7.1]), ce qu'on sait tester d'après **D.16.7**, resp. **D.16.8**.

D.16.10. Détection de points. Expliquons brièvement pourquoi, donné un schéma X non vide sur k , on peut algorithmiquement en expliciter un point géométrique, c'est-à-dire un point sur « la » clôture algébrique de k . Comme il suffit de trouver un point d'un ouvert affine de X , on peut évidemment supposer que X est affine. Le cas où X est un fermé de la droite affine \mathbb{A}_k^1 est trivial (s'il est décrit comme l'ensemble $\{f = 0\}$ des zéros d'un polynôme f , on considère une racine de f dans la clôture algébrique de k), et le cas où X est un ouvert de \mathbb{A}_k^1 ne l'est pas moins (si l'ouvert en question est décrit comme $\{f \neq 0\}$, on peut considérer le fermé $\{f = 1\}$ qui y est contenu, se ramenant ainsi au cas précédent). Dans le cas général, on procède par récurrence sur la dimension de l'espace affine dans lequel X est inclus : si π est la projection sur une coordonnée, alors $\pi(X)$ est calculable d'après **D.16.8**, on peut trouver un point géométrique de $\pi(X) \subseteq \mathbb{A}_k^1$ d'après ce qui vient d'être dit, et on est ramené au même problème dans la fibre de π au-dessus de ce point.

D.16.11. Passage à la limite. Soient k_0 un corps, X_0 un k_0 -schéma séparé de type fini et k/k_0 une extension algébrique (non nécessairement finie). On note X le produit fibré $X_0 \times_{k_0} k$ et on suppose donné un morphisme de type fini $f : T \rightarrow X$. Alors, on peut construire une extension finie k_1/k_0 et un morphisme $f_1 : T_1 \rightarrow X_1 = X_0 \times_{k_0} k_1$ induisant le morphisme f par changement de base : il suffit de considérer le sous-corps de k engendré des coefficients définissant f . Si f est étale, on peut supposer qu'il en est de même de k_1/k_0 (par invariance topologique du site étale).

D.17. Géométrie algébrique effective

On rappelle que les hypothèses **D.12.6** sont implicitement faites sur le corps k , et que les schémas sur k sont supposés de type fini.

D.17.1. Dimension. Grâce au calcul de la fonction de Hilbert (cf. **D.15.1**), il est possible de calculer la dimension d'un schéma (cf. [COX, LITTLE et O'SHEA 2007, § 9.3]), ou la dimension de ses composantes connexes et irréductibles.

D.17.2. Lissité et étalitude. Les propriétés d'être lisse ou étale étant locales, le fait de pouvoir tester cette propriété sur un morphisme d'algèbres (**D.15.6**) permet de tester si un morphisme de schémas est lisse, resp. étale.

D.17.3. Sections et isomorphismes de morphismes étales. On peut décider algorithmiquement si un morphisme étale séparé $X \rightarrow S$ admet une section. En effet, d'après [ÉGA IV₄, 17.4.9] (ou bien [MILNE 1980, corollaire I.3.12]), c'est le cas si et seulement si sa restriction à une réunion de composantes connexes de X est un isomorphisme.

Par conséquent, on peut aussi décider si deux morphismes étales finis $X \rightarrow S$ et $Y \rightarrow S$ sont S -isomorphes. Pour s'en convaincre, constatons d'abord qu'on peut calculer le morphisme $\underline{\text{Isom}}_S(X, Y) \rightarrow S$ où $\underline{\text{Isom}}$ est le schéma paramétrant les S -isomorphismes $X \rightarrow Y$: ses équations s'écrivent explicitement en fonction de celles de X et Y . Plus exactement, on peut décrire $\underline{\text{Isom}}_S(X, Y)$ comme le fermé des $(u, v) \in \underline{\text{Hom}}_S(X, Y) \times_S \underline{\text{Hom}}_S(Y, X)$ défini par les équations $v \circ u = \text{Id}_X$ et $u \circ v = \text{Id}_Y$, où $\underline{\text{Hom}}_S(X, Y)$ (aussi noté $\mathfrak{R}_{X/S}(Y \times_S X)$, où \mathfrak{R} désigne la restriction à la Weil) est le schéma paramétrant les morphismes $X \rightarrow Y$: voir [BOSCH, LÜTKEBOHMERT et Michel RAYNAUD 1990, § 7.6, notamment théorème 4], dont la démonstration fournit une description explicite de ce schéma (cf. aussi [DEBARRE 2001, chapitre 2]). Comme $\underline{\text{Isom}}_S(X, Y) \rightarrow S$ est lui-même étale fini quand X et Y le sont, et que savoir si X et Y sont isomorphes sur S revient à savoir s'il a une section, ce qui nous ramène à la question précédente.

D.17.4. Proj. Soient r un entier, k un corps et S l'algèbre graduée de polynômes $k[x_0, \dots, x_r]$, où les variables x_i sont de degré 1. On va montrer que pour chaque un S -module gradué de type fini M , on peut calculer le k -module de type fini $H^0(\mathbb{P}_k^r, \mathcal{M})$, où \mathcal{M} désigne le faisceau quasi-cohérent naturellement associé à M ([ÉGA II, 2.5]). Rappelons ([SERRE 1955, ch. III, § 4, ¶ 69, cor. 2]), que l'on a $H^0(\mathbb{P}_k^r, \mathcal{M}) = \text{colim}_\nu \text{Hom}_S((x_0^\nu, \dots, x_r^\nu), M)_0$. (L'indice 0 indique que l'on ne considère que les morphismes de degré nul.) Étant donné une résolution libre (de type fini) L_\bullet de M — que l'on peut déduire d'une présentation de M comme conoyau d'un morphisme $L_1 \rightarrow L_0$ entre S -modules gradués libres de type fini —, il résulte de [ibid., ch. III, § 3, ¶ 63, prop. 3 (a)] que l'on a égalité $H^0(\mathbb{P}_k^r, \mathcal{M}) = \text{Hom}_S((x_0^\nu, \dots, x_r^\nu), M)_0$ dès que $\nu + r$ est supérieur à chaque entier n tel que $S(-n)$ apparaisse comme facteur direct des L_i . Rappelons qu'un S -module gradué libre est somme directe de modules $S(n)$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $S(n)$ est le S -module S muni de la graduation $S(n)_i = S_{n+i}$. (Un tel ν est aussi lié à la « régularité », au sens de Mumford-Castelnuovo, de M , cf. [BAYER et MUMFORD 1993, définition 3.2].)

Pour le calcul d'une résolution libre, cf. **D.15.1**.

D.17.5. Application. Soient k un corps et $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}_k^r$ un schéma projectif. Il résulte de ce qui précède (et des résultats de la section **D.13**) que l'on peut calculer $H^0(X, \mathcal{O}_X) = H^0(\mathbb{P}_k^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^r}/I)$. En particulier, on peut vérifier si la flèche naturelle $k \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme : ceci fournit une approche alternative à **D.16.6** pour le calcul des composantes connexes géométriques d'une variété projective.

La même approche, en remplaçant k par une k -algèbre A de type fini (qu'on peut supposer être une algèbre de polynômes) permettrait de calculer la factorisation de Stein d'un morphisme projectif $f : Y \rightarrow \text{Spec } A$ en calculant la A -algèbre $f_* \mathcal{O}_Y$: on pourrait en déduire la même chose pour $f : Y \rightarrow X$ sur une base non nécessairement affine.

Sigles

Éléments de mathématique

- Bourbaki A Nicolas BOURBAKI (1970-2012). *Éléments de mathématique. Algèbre*. Chap. 1 à 3 (1970), chap. 4 à 7 (1981), chap. 8 (2012), chap. 9 (1959), chap. 10 (1980). Springer-Verlag.
- Bourbaki AC Nicolas BOURBAKI (1968-1998). *Éléments de mathématique. Algèbre*. Chap. 1 à 4 (1968), chap. 5 à 7 (1975), chap. 8 et 9 (1983), chap. 10 (1998). Springer-Verlag.
- TG Nicolas BOURBAKI. *Éléments de mathématique. Topologie générale*.

Éléments de géométrie algébrique

- ÉGA I Alexander GROTHENDIECK (1960). « Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 4. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–228.
- ÉGA II Alexander GROTHENDIECK (1961a). « Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 8. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–222.
- ÉGA III₁ Alexander GROTHENDIECK (1961b). « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents (Première partie) ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 11. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–167.
- ÉGA III₂ Alexander GROTHENDIECK (1963). « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents (Seconde partie) ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 17. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–91.
- ÉGA I_{Spr} Alexander GROTHENDIECK et Jean DIEUDONNÉ (1971). *Éléments de géométrie algébrique. I. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 166. Springer-Verlag.
- ÉGA IV₁ Alexander GROTHENDIECK (1964). « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Première partie) ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 20. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–259.
- ÉGA IV₂ Alexander GROTHENDIECK (1965). « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Seconde partie) ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 24. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–231.
- ÉGA IV₃ Alexander GROTHENDIECK (1966). « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Troisième partie) ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 28. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–255.
- ÉGA IV₄ Alexander GROTHENDIECK (1967). « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième partie) ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* 32. Rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné, 5–361.

Séminaires de géométrie algébrique

- SGA 1 V Alexander GROTHENDIECK. « Le groupe fondamental : généralités ».
- SGA 1 VI Alexander GROTHENDIECK. « Catégories fibrées et descente ».
- SGA 1 XIII Michèle RAYNAUD. « Propriété cohomologique des faisceaux d'ensembles et des faisceaux en groupes non commutatifs ».

- SGA 4** Alexander GROTHENDIECK, Michael ARTIN et Jean-Louis VERDIER (1972–1973). *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1963–1964*. Lecture Notes in Mathematics **269, 270, 305**. Springer-Verlag.
- SGA 4 IV Alexander GROTHENDIECK et Jean-Louis VERDIER. « **Topos** ».
- SGA 4 IX Michael ARTIN. « Faisceaux constructibles. Cohomologie d’une courbe algébrique ».
- SGA 4 V Jean-Louis VERDIER. « **Cohomologie dans les topos** ».
- SGA 4 Vbis Bernard SAINT-DONAT. « Technique de descente cohomologique ».
- SGA 4 VI Alexander GROTHENDIECK et Jean-Louis VERDIER. « Conditions de finitude. Topos et site fibrés. Applications aux questions de passage à la limite ».
- SGA 4 VII Alexander GROTHENDIECK. « **Site et topos étale d’un schéma** ».
- SGA 4 VIII Alexander GROTHENDIECK. « **Foncteurs fibres, supports, étude cohomologique des morphismes finis** ».
- SGA 4 X Michael ARTIN. « Dimension cohomologique : premiers résultats ».
- SGA 4 XI Michael ARTIN. « Comparaison avec la cohomologie classique : cas d’un schéma lisse ».
- SGA 4 XII Michael ARTIN. « Changement de base pour un morphisme propre ».
- SGA 4 XIV Michael ARTIN. « Théorème de finitude pour un morphisme propre ; dimension cohomologique des schémas algébriques affines ».
- SGA 4 XIX Michael ARTIN. « Cohomologie des préschémas excellents d’égalité caractéristiques ».
- SGA 4 XV Michael ARTIN. « Morphismes acycliques ».
- SGA 4 XVI Michael ARTIN. « Théorème de changement de base par un morphisme lisse, et applications ».
- SGA 4 XVII Pierre DELIGNE. « Cohomologie à supports propres ».
- SGA 4½** Pierre DELIGNE (1977). *Cohomologie étale*. Lecture Notes in Mathematics **569**. Avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier. Springer-Verlag, iv+312 pages.
- Arcata Cycle Pierre DELIGNE. « Cohomologie étale : les points de départ ».
- Alexander GROTHENDIECK. « La classe de cohomologie associée à un cycle ». Rédigé par Pierre Deligne.
- Rapport Pierre DELIGNE. « Rapport sur la formule des traces ».
- Th. finitude Pierre DELIGNE. « Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ -adique ».
- Th. finitude, A Luc ILLUSIE. « Appendice à [Th. finitude] ».
- SGA 5 I Luc ILLUSIE. « Complexes dualisants ».
- SGA 5 VI Jean-Pierre JOUANOLOU. « Cohomologie ℓ -adique ».
- SGA 5 X Alexander GROTHENDIECK. « Formule d’Euler-Poincaré en cohomologie étale ».
- SGA 7** Alexander GROTHENDIECK, Pierre DELIGNE et Nicholas M. KATZ (1972). *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1967–1969*. Lecture Notes in Mathematics **288, 340**. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim. Springer-Verlag, viii+523 pages.
- SGA 7 I Pierre DELIGNE. « Résumé des premiers exposés de A. Grothendieck ».
- SGA 7 XIII Pierre DELIGNE. « Le formalisme des cycles évanescents ».
- SGA 7 XV Pierre DELIGNE. « La formule de Picard-Lefschetz ».
- SGA 7 XVII Nicholas M. KATZ. « Pinceaux de Lefschetz : théorèmes d’existence ».
- SGA 7 XVIII Nicholas M. KATZ. « Étude cohomologique des pinceaux de Lefschetz ».

Séminaire sur les travaux de Gabber

- STG** Luc ILLUSIE, Yves LASZLO et Fabrice ORGOGOZO (2014). *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents. Séminaire à l'École polytechnique 2006–2008*. Astérisque **363–364**. Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng. Société mathématique de France, xxiv+627 pages.
- STG 0 Luc ILLUSIE. « Introduction ».
- STG II Fabrice ORGOGOZO. « Topologies adaptées à l'uniformisation locale ».
- STG IV Fabrice ORGOGOZO. « Le théorème de Cohen-Gabber ».
- STG IX Luc ILLUSIE. « Uniformisation locale première à ℓ ».
- STG V Fabrice ORGOGOZO. « Algébrisation partielle ».
- STG VI Luc ILLUSIE. « Log régularité, actions très modérées ».
- STG VII Fabrice ORGOGOZO. « Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible) ».
- STG XII_A Fabrice ORGOGOZO. « Descente cohomologique orientée ».
- STG XII_B Weizhe ZHENG [郑维喆]. « On hyper base change ».
- STG XIII Fabrice ORGOGOZO. « Le théorème de finitude ».
- STG XV Vincent PILLONI et Benoît STROH. « Théorème de Lefschetz affine ».
- STG XVI Joël RIOU. « Classes de Chern, morphismes de Gysin, pureté absolue ».
- STG XVII Joël RIOU. « Dualité ».
- STG XVIII_B Fabrice ORGOGOZO. « Dimension cohomologique : raffinements et compléments ».
- STG XVIII_B Luc ILLUSIE. « Cohomological dimension : First results ».

Bibliographie

- ABBES, Ahmed et Michel GROS (2011). « Topos co-évanescents et généralisations ». Prépublication, [arXiv :1107.2380v2](https://arxiv.org/abs/1107.2380v2).
- ACHAR, Pramod N. et Daniel S. SAGE (2009). « Perverse coherent sheaves and the geometry of special pieces in the unipotent variety ». *Adv. Math.* **220**(4), 1265–1296.
- ANDERSON, Greg W. (1987). « Torsion points on Fermat Jacobians, roots of circular units and relative singular homology ». *Duke Math. J.* **54**(2), 501–561.
- (2002). « Abeliants and their application to an elementary construction of Jacobians ». *Adv. Math.* **172**(2), 169–205.
- ARTIN, Emil (1957). *Geometric algebra*. Interscience Publishers, x+214 pages.
- ARTIN, Michael (1971). « On the joins of Hensel rings ». *Advances in Math.* **7**, 282–296.
- (1973). *Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques*. Les presses de l'université de Montréal, 282 pages.
- ARTIN, Michael et Barry MAZUR (1969). *Étale homotopy*. Lecture Notes in Mathematics **100**. Springer-Verlag, iii+169 pages.
- AVIGAD, Jeremy (2003). « Number theory and elementary arithmetic ». *Philos. Math.* **11**(3), 257–284.
- BARBIERI-VIALE, Luca et Vasudevan SRINIVAS (2001). « Albanese and Picard 1-motives ». *Mém. Soc. math. Fr.* (87), vi+104 (↑ p. 26).
- BASS, H. et J. TATE (1973). « The Milnor ring of a global field ». *Algebraic K-theory, II : "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic*. Springer, 349–446. Lecture Notes in Math., Vol. 342.
- BASTOS, Gervasio G. (1978). « Some results on the degree of imperfection of complete valued fields ». *manuscripta math.* **25**(4), 315–322.
- BAYER, Dave et David MUMFORD (1993). « What can be computed in algebraic geometry ? ». Dans [Cortona1991].

- BECKER, Thomas et Volker WEISPFENNING (1993). *Gröbner bases*. Graduate Texts in Mathematics **141**. Springer-Verlag, xxii+574 pages.
- BEILINSON, Alexander (2017). « **Constructible sheaves are holonomic** ». *Selecta Math.* **22**, 1797–1819 (↑ p. [18](#)).
- BEILINSON, Alexander, Joseph BERNSTEIN et Pierre DELIGNE (1982). *Faisceaux pervers*. Astérisque **100**. Analyse et topologie sur les espaces singuliers I. Société mathématique de France (↑ p. [18](#), [91](#), [112](#), [129](#), [131](#)).
- BERTHELOT, Pierre (1997). « Altérations de variétés algébriques (d’après A. J. de Jong) ». *Séminaire Bourbaki*. Astérisque 241, exp. n° 815, 273–311 (↑ p. [19](#), [132](#)).
- BHARGAVA, Manjul et Matthew SARIANO (2014). « **On a notion of “Galois closure” for extensions of rings** ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16**(9), 1881–1913.
- BHATT, Bhargav (2011a). « **Annihilating the cohomology of group schemes** ». Prépublication, arXiv (↑ p. [10](#)).
- (2011b). « **Derived splinters in positive characteristic** ». Prépublication, [arxiv : 1109 . 0354v1](#).
- BLOCH, Spencer et Kazuya KATO (1986). « *p*-adic étale cohomology ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* (63), 107–152.
- BÖCKLE, Gebhard, Wojciech GAJDA et Sebastian PETERSEN (2015). « Independence of ℓ -adic representations of geometric Galois groups ». *J. reine angew. Math.* (↑ p. [19](#), [131](#)).
- BORCEUX, Francis (1994). *Handbook of categorical algebra. 1*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **50**. Basic category theory. Cambridge University Press, xvi+345 pages.
- BOREL, Armand et collab. (1984). *Intersection cohomology*. Progress in Mathematics **50**. Birkhäuser Boston, x+234 pages.
- BOSCH, Siegfried, Werner LÜTKEBOHMERT et Michel RAYNAUD (1990). *Néron models*. Springer-Verlag, x+325 pages.
- BRÜNJES, Lars et Christian SERPÉ (2008). « **Étale and motivic cohomology and ultraproducts of schemes** ».
- BÜRGISSER, Peter, Michael CLAUSEN et M. Amin SHOKROLLAHI (1997). *Algebraic complexity theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **315**. Springer-Verlag, xxiv+618 pages.
- CARLSON, Jon F. (2001). « **Calculating group cohomology : tests for completion** ». *J. Symbolic Comput.* **31**(1-2), 229–242.
- COLLIOT-THÉLÈNE, Jean-Louis (1999). « Cohomologie des corps valués henséliens, d’après K. Kato et S. Bloch ». *Algebraic K-theory and its applications, Trieste, 1997 (Notes d’un cours fait à Bordeaux et à Trieste)*. World Scientific, 120–163.
- CONRAD, Brian (2003). « **Cohomological Descent** ».
- CONRAD, Brian et Aise Johan de JONG (2002). « Approximation of versal deformations ». *J. Algebra* **255**(2), 489–515 (↑ p. [11](#)).
- COX, David, John LITTLE et Donal O’SHEA (2007). *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Troisième édition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, xvi+551 pages.
- CRÉPEAUX, E. (1967). « Une caractérisation des couples henséliens ». *Enseignement math.* **13**, 273–279.
- DE JONG, Aise Johan (1996). « **Smoothness, semi-stability and alterations** ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **83**, 51–93 (↑ p. [5](#), [25](#), [92](#), [93](#), [124](#), [126](#), [127](#), [132–134](#), [151](#), [154](#), [182](#), [185](#), [192](#)).
- (1997). « **Families of curves and alterations** ». *Ann. Inst. Fourier* **47**(2), 599–621 (↑ p. [6](#), [13](#), [19](#), [31](#), [40](#), [92](#), [118](#)).
- DE JONG, Theo (1998). « **An algorithm for computing the integral closure** ». *J. Symbolic Comput.* **26**(3), 273–277.

- DEBARRE, Olivier (2001). *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, xiv+233 pages.
- DECKER, Wolfram et Christoph LOSSEN (2006). *Computing in algebraic geometry : A quick start using SINGULAR*. Algorithms and Computation in Mathematics **16**. Springer-Verlag, xvi+327 pages.
- DELIGNE, Pierre (1973). « Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L ». *Modular functions of one variable, II (Anvers, 1972)*. Springer, 501–597. Lecture Notes in Math., vol. 349 (↑ p. [19](#), [132](#)).
- (1974a). « La conjecture de Weil. I ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **43**, 273–307.
 - (1974b). « Théorie de Hodge. III ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **44**, 5–77.
 - (1980). « La conjecture de Weil. II ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **52**, 137–252 (↑ p. [17](#), [57](#), [108](#), [132](#), [133](#), [137](#), [172](#), [178](#), [183](#)).
 - (1999). Lettre à FU Lei (13 décembre 1999) ; 4 pages.
 - (2012). « Finitude de l’extension de \mathbb{Q} engendrée par des traces de Frobenius, en caractéristique finie ». *Mosc. Math. J.* **12**(3), 497–514, 668 (↑ p. [17](#), [20](#)).
- DELIGNE, Pierre et collab. (1982). *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*. Lecture Notes in Mathematics **900**. Springer-Verlag, ii+414 pages.
- DIXON, John D. et collab. (1999). *Analytic pro- p groups*. 2^e éd. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **61**. Cambridge University Press, xviii+368 pages.
- DOLD, Albrecht et Dieter PUPPE (1961). « Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen ». *Ann. Inst. Fourier* **11**, 201–312.
- DRIES, Lou van den et K. SCHMIDT (1984). « Bounds in the theory of polynomial rings over fields. A nonstandard approach ». *Invent. math.* **76**(1), 77–91.
- EDIXHOVEN, Bas et Jean-Marc COUVEIGNES, édés. (2011). *Computational aspects of modular forms and Galois representations. How one can compute in polynomial time the value of Ramanujan’s tau at a prime*. Annals of Mathematics Studies **176**. Princeton University Press, xii+425 pages (↑ p. [22](#), [137](#)).
- EISENBUD, David (1995). *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics **150**. Springer-Verlag, xvi+785 pages.
- ELKIK, Renée (1973). « Solutions d’équations à coefficients dans un anneau hensélien ». *Ann. sci. École norm. sup.* **6**, 553–603 (↑ p. [12](#), [75](#), [204](#)).
- EPP, Helmut (1973). « Eliminating wild ramification ». *Invent. math.* **19**, 235–249.
- EVENS, Leonard (1991). *The cohomology of groups*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, xii+159 pages.
- FALTINGS, Gerd (1988). « p -adic Hodge theory ». *J. Amer. Math. Soc.* **1**(1), 255–299.
- FERRAND, Daniel (2003). « Conducteur, descente et pincement ». *Bull. Soc. math. France* **131**(4), 553–585.
- FOUVRY, Étienne et Nicholas M. KATZ (2001). « A general stratification theorem for exponential sums, and applications ». *J. reine angew. Math.* **540**, 115–166.
- FRIED, Michael D. et Moshe JARDEN (2008). *Field arithmetic*. Troisième édition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **11**. Springer-Verlag, xxiv+792 pages.
- FRIEDLANDER, Eric M. (1982). *Étale homotopy of simplicial schemes*. Annals of Mathematics Studies **104**. Princeton University Press, vii+190 pages.
- FRIEDMAN, Harvey (201 ?). *Boolean Relation Theory and Incompleteness*. Lecture Notes in Logic. À paraître. Cambridge University Press.
- (1999). Courriel du 16 avril 1999, 15h18 HAE, à la liste de diffusion *Foundations of Mathematics*.
- FRÖHLICH, Albrecht et John C. SHEPHERDSON (1956). « Effective procedures in field theory ». *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* **248**, 407–432.

- FUJIWARA, Kazuhiro (1995). « Theory of tubular neighborhood in étale topology ». *Duke Math. J.* **80**.(1), 15–57.
- (2002). « Independence of ℓ for intersection cohomology (after Gabber) ». *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*. Adv. Stud. Pure Math. 36. Math. Soc. Japan, 145–151 (↑ p. 17).
- FUKAYA, Takako (2001). « Explicit reciprocity laws for p -divisible groups over higher dimensional local fields ». *J. reine angew. Math.* **531**, 61–119.
- GABBER, Ofer (automne 2006). Lettre à F. Orgogozo.
- (1983). « Sur la torsion dans la cohomologie ℓ -adique d'une variété ». *C. R. Acad. sci. Paris Sér. I Math.* **297**.(3), 179–182 (↑ p. 18, 132, 133).
- (1992). « K -theory of Henselian local rings and Henselian pairs ». *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*. **126**. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., 59–70.
- (2001). « Lettre à F. Orgogozo (2001-12-28) ».
- (2005a). « A finiteness theorem for non abelian H^1 of excellent schemes ». Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Luc Illusie, Orsay, juin 2005.
- (2005b). « Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes ». Notes de l'exposé à la conférence en l'honneur de Pierre Deligne, Princeton, octobre 2005.
- GABBER, Ofer et François LOESER (1996). « Faisceaux pervers ℓ -adiques sur un tore ». *Duke Math. J.* **83**.(3), 501–606.
- GABBER, Ofer et Fabrice ORGOGOZO (2008). « Sur la p -dimension des corps ». *Invent. math.* **174**.(1), 47–80 (↑ p. 15, 16).
- GABBER, Ofer et Lorenzo RAMERO (2003). *Almost ring theory*. Lecture Notes in Mathematics **1800**. Springer-Verlag.
- (2014). « Foundations for almost ring theory ». Prépublication, arXiv (version 8).
- GABRIEL, Peter et Michel ZISMAN (1967). *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **35**. Springer-Verlag, x+168 pages.
- GIANNI, Patrizia, Barry TRAGER et Gail ZACHARIAS (1988). « Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals ». *J. Symbolic Comput.* **6**.(2-3), 149–167.
- GILLE, Philippe et Tamás SZAMUELY (2006). *Central simple algebras and Galois cohomology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101**. Cambridge University Press, xii+343 pages.
- GILLET, Henri et Christophe SOULÉ (2009). « Motivic weight complexes for arithmetic varieties ». *J. Algebra* **322**.(9), 3088–3141.
- GIRAUD, Jean (1971). *Cohomologie non abélienne*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **179**. Springer-Verlag, ix+467 pages.
- GRAUERT, Hans et Reinhold REMMERT (1984). *Coherent analytic sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **265**. Springer-Verlag, xviii+249 pages.
- GROTHENDIECK, Alexander (197 ?). « Pré-notes ÉGA V ».
- (1956). « Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux ». *Bull. Soc. math. France* **84**, 1–7.
- (1957). « Sur quelques points d'algèbre homologique ». *Tohoku Math. J.* **9**, 119–221.
- GROTHENDIECK, Alexander et Jakob Pieter MURRE (1971). *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*. Lecture Notes in Mathematics **208**. Springer-Verlag.
- GUILLÉN, F. et collab. (1988). *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*. Lecture Notes in Mathematics **1335**. Springer-Verlag, xii+192 pages.
- HAIMAN, Mark et Bernd STURMFELS (2004). « Multigraded Hilbert schemes ». *J. Algebraic Geom.* **13**.(4), 725–769.
- HÁJEK, Petr et Pavel PUDLÁK (1998). *Metamathematics of first-order arithmetic*. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, xiv+460 pages.

- HARRINGTON, L. A. et collab. Éd. (1985). *Harvey Friedman's research on the foundations of mathematics*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **117**. North-Holland, xvi+408 pages.
- HEINZER, William (1973). « Minimal primes of ideals and integral ring extensions ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **40**, 370–372.
- HERR, Laurent (1998). « Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques ». *Bull. Soc. math. France* **126**(4), 563–600 (↑ p. 16).
- HEß, Florian (2002). « Computing Riemann-Roch spaces in algebraic function fields and related topics ». *J. Symbolic Comput.* **33**(4), 425–445.
- HOFSTADTER, Douglas R. (1999). *Gödel, Escher, Bach : an Eternal Golden Braid*. Basic Books, 23+xxi+777 pages.
- HUBER, Roland (1996). *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, x+450 pages.
- HUNEKE, Craig et Irena SWANSON (2006). *Integral closure of ideals, rings, and modules*. London Mathematical Society Lecture Note Series **336**. Cambridge University Press, xiv+431 pages.
- IGUSA, Jun'ichi (1959). « Fibre systems of Jacobian varieties. III. Fibre systems of elliptic curves ». *Amer. J. Math.* **81**, 453–476.
- ILLUSIE, Luc (1971-1972). *Complexe cotangent et déformations*. Lecture Notes in Mathematics **239, 283**. Springer-Verlag.
- (1979). « Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline ». *Ann. sci. École norm. sup.* (4) **12**(4), 501–661.
 - (1981). « Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré (d'après P. Deligne) ». *Astérisque* **82**. Société mathématique de France, 161–172.
 - (2002a). « An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology ». *Astérisque* **279**. Société mathématique de France, 271–322.
 - (2002b). « Sur la formule de Picard-Lefschetz ». *Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka)*. Adv. Stud. Pure Math. **36**. Math. Soc. Japan, 249–268.
 - (2003). « Perversité et variation ». *manuscripta math.* **112**(3), 271–295 (↑ p. 15).
 - (2004). « On semistable reduction and the calculation of nearby cycles ». *Geometric aspects of Dwork theory, vol. II*. de Gruyter, 785–803.
 - (2010). « Constructibilité générique et uniformité en ℓ ». Prépublication (↑ p. 14, 17, 19, 20, 92, 126, 127, 134).
 - (2014). « Grothendieck et la cohomologie étale ». *Alexandre Grothendieck : a mathematical portrait*. Int. Press, 175–192 (↑ p. 4).
 - (2017). « Around the Thom-Sebastiani theorem ». *manuscripta math.* **152**(1-2). Avec un appendice par Weizhe Zheng, 61–125 (↑ p. 6).
- ILLUSIE, Luc, Kazuya KATO et Chikara NAKAYAMA (2005). « Quasi-unipotent logarithmic Riemann-Hilbert correspondences ». *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **12**(1), 1–66.
- JACOBSSON, Carl et Viggo STOLTENBERG-HANSEN (1985). « Poincaré-Betti series are primitive recursive ». *J. London Math. Soc.* **31**(1), 1–9.
- JOUANOLOU, Jean-Pierre (1983). *Théorèmes de Bertini et applications*. Progress in Mathematics **42**. Birkhäuser, ii+127 pages.
- KASHIWARA, Masaki et Pierre SCHAPIRA (2006). *Categories and sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **332**. Springer-Verlag, x+497 pages.
- KATO, Fumiharu (2000). « Log smooth deformation and moduli of log smooth curves ». *Internat. J. Math.* **11**(2), 215–232.
- KATO, Kazuya (1982). « Galois cohomology of complete discrete valuation fields ». *Algebraic K-theory, Part II (Oberwolfach, 1980)*. **967**. Lecture Notes in Math. Springer, 215–238 (↑ p. 16, 61, 70, 83).
- (1994). « Toric singularities ». *Amer. J. Math.* **116**(5), 1073–1099.

- KATO, Kazuya et Takako KUZUMAKI (1986). « The dimension of fields and algebraic K -theory ». *J. Number Theory* **24**(2), 229–244.
- KATO, Kazuya et Takeshi SAITO (2013). « Ramification theory for varieties over a local field ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **117**, 1–178.
- KATZ, Nicholas M. (1970). « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* (39), 175–232.
- (1983). « Wild ramification and some problems of “independence of l ” ». *Amer. J. Math.* **105**(1), 201–227 (↑ p. 17).
- (1988). *Gauss sums, Kloosterman sums, and monodromy groups*. Annals of Mathematics Studies **116**. Princeton University Press, x+246 pages.
- (1990). *Exponential sums and differential equations*. Annals of Mathematics Studies **124**. Princeton University Press, xii+430 pages.
- (2001). « Sums of Betti numbers in arbitrary characteristic ». *Finite Fields and Their Applications* **7**(1), 29–44 (↑ p. 20, 134).
- KATZ, Nicholas M. et Gérard LAUMON (1985). « Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **62**, 361–418 (↑ p. 17, 19, 20, 92, 94, 98, 135, 139).
- KATZ, Nicholas M. et William MESSING (1974). « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields ». *Invent. math.* **23**, 73–77 (↑ p. 18, 133).
- KATZ, Nicholas M. et Peter SARNAK (1999). *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*. American Mathematical Society Colloquium Publications **45**. American Mathematical Society, xii+419 pages.
- KLEIMAN, Steven L. (1968). « Algebraic cycles and the Weil conjectures ». *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. **3**. Adv. Stud. Pure Math. North-Holland, 359–386.
- LAFFORGUE, Vincent et Alain GENESTIER (2017). « Chtoucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands locale ». Version du 5 avril 2017 d’un manuscrit non publié (↑ p. 7).
- LAUMON, Gérard (1981). « Semi-continuité du conducteur de Swan (d’après P. Deligne) ». *Astérisque* **83**. Soc. math. France, 173–219 (↑ p. 6, 44).
- (1983). « Vanishing cycles over a base of dimension ≥ 1 ». *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*. Lecture Notes in Math. **1016**. Springer, 143–150 (↑ p. 6, 32, 49, 106).
- (1987). « Transformation de Fourier, constantes d’équations fonctionnelles et conjecture de Weil ». *Publications mathématiques de l’IHÉS* **65**, 131–210 (↑ p. 7, 92).
- LECERF, Grégoire (2013). « Factorisation des polynômes à plusieurs variables ». *Les cours du CIRM* **3**(1), 1–85.
- LIEBLICH, Max et Martin OLSSON (2010). « Generators and relations for the étale fundamental group ». *Pure Appl. Math. Q.* **6**, 209–243 (↑ p. 25).
- LOMBARDI, Henri et Claude QUITTÉ (2011). *Algèbre commutative (Méthodes constructives)*. Mathématiques en devenir. Calvage & Mounet, xxxi+991 pages.
- LUBOTZKY, Alexander et Dan SEGAL (2003). *Subgroup Growth*. Progress in Mathematics **212**. Birkhäuser, xxii+453 pages.
- MAC LANE, Saunders (1963). *Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114**. Springer-Verlag, x+422 pages.
- MADORE, David (2014). <http://mathoverflow.net/q/156091/17064>.
- MADORE, David et Fabrice ORGOGOZO (2008-2013). *Théorie de Galois et ses ramifications* (↑ p. 3, 27).
- (2014). « Un modèle de calcul universel sur les éléments des corps ». Titre provisoire, partie III dans [arXiv :1304.5376v3](https://arxiv.org/abs/1304.5376v3).
- (2015). « Calculabilité de la cohomologie étale modulo ℓ ». *Algebra & Number Theory* **9-7**, 1647–1739 (↑ p. 21, 22, 93, 134).

- MAISONOBE, Philippe (2013). « Cycles évanescents algébriques et topologiques par un morphisme sans pente ». *J. Singul.* **7**, 157–189 (↑ p. 8).
- MANNISTO, Peter (2013). « **Albanese and Picard 1-motives in positive characteristic** » (↑ p. 26).
- MATSUMI, Kazuya (2002). « A Hasse principle for three-dimensional complete local rings of positive characteristic ». *J. reine angew. Math.* **542**, 113–121.
- MATSUMURA, Hideyuki (1989). *Commutative ring theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8**. Cambridge University Press, xiv+320 pages.
- MILLER, Russell (2010). « **Is it harder to factor a polynomial or to find a root ?** ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **362**(10), 5261–5281.
- MILNE, James S. (1980). *Étale cohomology*. Princeton University Press, xiii+323 pages.
- MINES, Ray et Fred RICHMAN (1982). « **Separability and factoring polynomials** ». *Rocky Mountain J. Math.* **12**(1), 43–54.
- MINES, Ray, Fred RICHMAN et Wim RUITENBURG (1988). *A course in constructive algebra*. Universitext. Springer-Verlag, xii+344 pages.
- MOCHIZUKI, Shin'ichi (1995). « **The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme** ». *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **31**(3), 355–441.
- (1999). « **Extending families of curves over log regular schemes** ». *J. reine angew. Math.* **511**, 43–71.
- MORITA, Kazuma (2008). « Galois cohomology of a p -adic field via (Φ, Γ) -modules in the imperfect residue field case ». *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **15**(2), 219–241 (↑ p. 16).
- MUMFORD, David (1975). *Curves and their Jacobians*. The University of Michigan Press, vi+104 pages.
- NEUKIRCH, Jürgen, Alexander SCHMIDT et Kay WINGBERG (2000). *Cohomology of Number Fields*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **323**. Springer-Verlag, xvi+699 pages.
- ODIFREDDI, Piergiorgio (1989). *Classical recursion theory*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **125**. North-Holland, xviii+668 pages.
- (1999). *Classical recursion theory. II*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **143**. North-Holland, xvi+949 pages.
- OGG, Andrew Pollard (1962). « Cohomology of abelian varieties over function fields ». *Ann. of Math.* **76**, 185–212.
- OHM, Jack et R. L. PENDLETON (1968). « Rings with noetherian spectrum ». *Duke Math. J.* **35**, 631–639.
- ORGOGOZO, Fabrice (2003a). « **Altérations et groupe fondamental premier à p** ». *Bull. Soc. math. France* **131**(1), 123–147 (↑ p. 14, 92, 127).
- (2003b). « **Altérations et groupe fondamental premier à p** ». *Bull. Soc. math. France* **131**, 123–147.
- (2006). « **Modifications et cycles proches sur une base générale** ». *Int. Math. Res. Not. Art. ID 25315*, 38 (↑ p. 6, 10, 98, 99, 107, 118).
- (2017). « **Sur les propriétés d'uniformité des images directes en cohomologie étale** ». (pré-publication disponible sur arXiv) (↑ p. 14, 17–19, 139).
- PALMER, Theodore W. (1974). « Arens multiplication and a characterization of W^* -algebras ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **44**, 81–87.
- PESKINE, Christian et Lucien SZPIRO (1973). « **Dimension projective finie et cohomologie locale. Applications à la démonstration de conjectures de M. Auslander, H. Bass et A. Grothendieck** ». *Publications mathématiques de l'IHÉS* (42), 47–119 (↑ p. 11).
- PETERSEN, Dan (2010). <http://mathoverflow.net/a/20790/17064>.
- PETERSEN, Sebastian (2014). « Independence of ℓ -adic Galois representations attached to étale cohomology ». Habilitation (↑ p. 19).
- PINK, Richard (1995). Lettre à N. Katz (26 mai 1995) ; 4 pages (↑ p. 19, 93, 95, 105).

- POONEN, Bjorn, Damiano TESTA et Ronald van LUIJK (2015). « **Computing Néron-Severi groups and cycle class groups** ». *Compos. Math.* **151**(4), 713–734 (↑ p. [22](#), [137](#), [140](#)).
- POPESCU, Dorin (1986). « General Néron desingularization and approximation. ». *Nagoya Math. J.* **104**, 85–115.
- RABIN, Michael O. (1960). « Computable algebra, general theory and theory of computable fields ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **95**, 341–360.
- RAYNAUD, Michel et Laurent GRUSON (1971). « Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d'un module ». *Invent. math.* **13**, 1–89.
- RAYNAUD, Michèle (1972). « Propriétés de finitude du groupe fondamental ». (↑ p. [25](#)).
- RICHMAN, Fred (1981). « Seidenberg's condition P ». Dans [**Constructive//Richman**], 1–11.
- ROTMAN, Joseph J. (1995). *An introduction to the theory of groups*. Quatrième édition. Graduate Texts in Mathematics **148**. Springer-Verlag, xvi+513 pages.
- RUBIO, Julio et Francis SERGERAERT (2002). « **Constructive algebraic topology** ». *Bull. sci. math.* **126**(5), 389–412 (↑ p. [24](#), [163](#)).
- SABBAH, Claude (1983). « Morphismes analytiques stratifiés sans éclatement et cycles évanescents ». *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, (Luminy, 1981)*. Astérisque 101. Soc. math. France, 286–319 (↑ p. [6](#), [31](#)).
- ŠAFAREVIČ, Igor R. (1961). « **Главные однородные пространства, определенные над полем функций [Espaces principaux homogènes définis sur un corps de fonctions]** ». *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **64**, 316–346.
- SAITO, Shuji (1986). « Arithmetic on two-dimensional local rings ». *Invent. math.* **85**(2), 379–414 (↑ p. [16](#), [62](#), [72](#)).
- SAITO, Takeshi (2004). « **Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction** ». *J. Algebraic Geom.* **13**(2), 287–321.
- (2017). « **Characteristic cycles and the conductor of direct image** ». Prépublication arXiv (version 2) (↑ p. [18](#)).
- SCHOLL, Anthony J. (2006). « **Higher fields of norms and (φ, F) -modules** ». *Doc. Math. (volume en l'honneur de John Coates)*, 685–709 (↑ p. [16](#)).
- SCHÖN, Rolf (1991). « Effective algebraic topology ». *Mem. Amer. Math. Soc.* **92**(451), vi+63 (↑ p. [24](#), [138](#), [162](#), [163](#)).
- SERGERAERT, Francis (1994). « **The computability problem in algebraic topology** ». *Adv. Math.* **104**(1), 1–29.
- SERRE, Jean-Pierre (1978-79). « Groupes finis ». Notes d'un cours à l'ÉNSJF; [arXiv : 0503154v6](#).
- (1955). « Faisceaux algébriques cohérents ». *Ann. of Math.* (61), 197–278.
- (1965). *Algèbre locale. Multiplicités*. Lecture Notes in Mathematics **11**. Springer-Verlag, vii+188 pages.
- (1968). *Corps locaux*. 2^e éd. Publications de l'Université de Nancago, n^o VIII. Hermann, 245 pages.
- (1975). *Groupes algébriques et corps de classes*. 2^e éd. Actualités scientifiques et industrielles, 1264. Hermann, 207 pages.
- (1977). *Arbres, amalgames, SL_2* . Astérisque **46**. Société mathématique de France, 189 pages.
- (1994). *Cohomologie galoisienne*. Cinquième édition révisée et complétée. Lecture Notes in Mathematics **5**. Springer-Verlag (↑ p. [15](#), [61](#), [62](#), [69](#), [70](#), [72](#), [81](#), [83](#), [147](#), [161](#), [165](#), [167](#), [169](#), [170](#), [176](#)).
- (2007). « **Bounds for the orders of the finite subgroups of $G(k)$** ». *Group representation theory*. EPFL Press, 405–450.
- (2012). *Lectures on $N_X(p)$* . **11**. Research Notes in Mathematics. CRC Press, x+163 pages (↑ p. [22](#)).

- (2013). « Un critère d'indépendance pour une famille de représentations ℓ -adiques ». *Comment. Math. Helv.* **88**(3), 541–554 (↑ p. 19, 131).
- SIMPSON, Carlos (2008). « Algebraic cycles from a computational point of view ». *Theoret. Comput. Sci.* **392**(1-3), 128–140.
- SIMPSON, Stephen G. (2009). *Subsystems of second order arithmetic*. 2^e éd. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, xvi+444 pages.
- SINGH, Anurag K. et Irena SWANSON (2009). « An algorithm for computing the integral closure ». *Algebra Number Theory* **3**(5), 587–595.
- SMORYŃSKI, C. (1985). « The varieties of arboreal experience ». Dans [HARRINGTON et collab. 1985, p. 381–397].
- THE STACKS PROJECT AUTHORS (2017). « *Stacks Project* ».
- STEEL, Allan (2005). « Conquering inseparability : primary decomposition and multivariate factorization over algebraic function fields of positive characteristic ». *J. Symbolic Comput.* **40**(3), 1053–1075.
- STEINBERG, Robert (1968). *Lectures on Chevalley groups*. Yale University, iii+277 pages.
- STOLTENBERG-HANSEN, Viggo et John V. TUCKER (1999). « Computable rings and fields ». Dans [Griffor], 363–447.
- STOLZENBERG, Gabriel (1968). « Constructive normalization of an algebraic variety ». *Bull. Amer. Math. Soc.* **74**, 595–599.
- SUH, Junecue (2012). « Symmetry and parity in Frobenius action on cohomology ». *Compos. Math.* **148**(1), 295–303.
- SWAN, Richard G. (1998). « Néron-Popescu desingularization ». *Algebra and geometry (Taipei, 1995)*. 2. Lect. Algebra Geom. Int. Press, 135–192.
- SZAMUELY, Tamás (2009). *Galois groups and fundamental groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics **117**. Cambridge University Press, x+270 pages.
- TEMKIN, Michael (2017). « Tame distillation and desingularization by p -alterations ». *Ann. of Math.* **186**(1), 97–126 (↑ p. 9).
- THOMASON, R. W. et Thomas TROBAUGH (1990). « Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories ». *The Grothendieck Festschrift III*. Progress in Mathematics 88. Birkhäuser, 247–435.
- TOMAŠIĆ, Ivan (2004). « A new Weil cohomology theory ». *Bull. London Math. Soc.* **36**(5), 663–670.
- TSUJI, Takeshi (1996). « Syntomic complexes and p -adic vanishing cycles ». *J. reine angew. Math.* **472**, 69–138.
- UMEZAKI, Naoya (2012). « On uniform bound of the maximal subgroup of the inertia group acting unipotently on ℓ -adic cohomology ». Mémoire de maîtrise, université de Tôkyô.
- VASCONCELOS, Wolmer (2005). *Integral closure. Rees algebras, multiplicities, algorithms*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, xii+519 pages.
- WINGBERG, Kay (1984). « Ein Analogon zur Fundamentalgruppe einer Riemann'schen Fläche im Zahlkörperfall ». *Invent. math.* **77**(3), 557–584.
- YU, Jia-Kang (1995). « Exposés à l'université de Princeton, février 1995 ».
- ZALESSKIĬ, A. E. et B. H. SEREŽKIN (1976). « Линейные группы, порожденные трансвекциями [Groupes linéaires engendrés par des transvections] ». *Изв. АН СССР. Сер. матем. [Math. USSR-Izv.]* **10** (1), 26–49.
- ZARISKI, Oscar et Pierre SAMUEL (1975). *Commutative algebra*. Graduate Texts in Mathematics **28, 29**. Springer-Verlag, xi+329, x+414 pages.