Sur la constructibilité uniforme des images directes supérieures en cohomologie étale.

エタールコホモロジーの高次順像の
一様構成可能性について

Fabrice Orgogozo (CNRS, École polytechnique)
IHÉS-東大, 2010-6-9

Motivation initiale : comprendre le lien entre le théorème suivant et les ultraproduits.

Théorème (O. Gabber)

Soient k un corps algébriquement clos et X un k-schéma projectif lisse. Pour presque tout nombre premier ℓ, les $\mathbf{Z}_\ell$-modules $\mathrm{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$ sont sans torsion.

元々の動機は次の定理と超積の関係を理解する事に有る。

定理 (O. ガバー)

Xを代数的閉体k上の滑らかな射影多様体とする。殆んど全ての素数ℓに対し、$\mathbf{Z}_\ell$加群$\mathrm{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$は捩れが無い。

Définition

Soient $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$.

定義

$\mathscr{P}$を素数全体の集合とし、$A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$とする。

Définition

Soient $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$.

1. On appelle ultrafiltre non principal sur $\mathscr{P}$ un ensemble $\mathfrak{L}$ de parties non vides, stable par intersection finie, maximal pour l'inclusion tel que $\bigcap_{X \in \mathfrak{L}} X = \emptyset$.

定義

$\mathscr{P}$を素数全体の集合とし、$A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$とする。

1. $\mathscr{P}$部分集合の族$\mathfrak{L}$が、空で無く、有限交叉性を持って極大で有る時、$\mathfrak{L}$を非単項超フィルターと言う。

Définition

Soient $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$.

1. On appelle ultrafiltre non principal sur $\mathscr{P}$ un ensemble $\mathfrak{L}$ de parties non vides, stable par intersection finie, maximal pour l'inclusion tel que $\bigcap_{X \in \mathfrak{L}} X = \emptyset$.
2. On appelle ultraproduit des $\mathbf{F}_\ell$ selon $\mathfrak{L}$ le quotient $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$ de A par l'idéal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{L}} = \{(a_\ell) : \{\ell | a_\ell = 0\} \in \mathfrak{L}\}$.

定義

$\mathscr{P}$を素数全体の集合とし、$A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$とする。

1. $\mathscr{P}$部分集合の族$\mathfrak{L}$が、空で無く、有限交叉性を持って極大で有る時、$\mathfrak{L}$を非単項超フィルターと言う。
2. Aのイデアル$\mathfrak{m}_{\mathfrak{L}} = \{(a_\ell) : \{\ell | a_\ell = 0\} \in \mathfrak{L}\}$による剰余環$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$は$\mathfrak{L}$に沿う$\mathbf{F}_\ell$の超積と呼ぶ。

Définition

Soient $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et $A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$.

1. On appelle ultrafiltre non principal sur $\mathscr{P}$ un ensemble $\mathfrak{L}$ de parties non vides, stable par intersection finie, maximal pour l'inclusion tel que $\bigcap_{X \in \mathfrak{L}} X = \emptyset$.
2. On appelle ultraproduit des $\mathbf{F}_\ell$ selon $\mathfrak{L}$ le quotient $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$ de A par l'idéal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{L}} = \{(a_\ell) : \{\ell | a_\ell = 0\} \in \mathfrak{L}\}$.

Chaque $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$ est un corps de caractéristique nulle, plongeable dans $\mathbf{C}$.

定義

$\mathscr{P}$を素数全体の集合とし、$A = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{F}_\ell$とする。

1. $\mathscr{P}$部分集合の族$\mathfrak{L}$が、空で無く、有限交叉性を持って極大で有る時、$\mathfrak{L}$を非単項超フィルターと言う。
2. Aのイデアル$\mathfrak{m}_{\mathfrak{L}} = \{(a_\ell) : \{\ell | a_\ell = 0\} \in \mathfrak{L}\}$による剰余環$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$は$\mathfrak{L}$に沿う$\mathbf{F}_\ell$の超積と呼ぶ。

各$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$は標数が零で、埋め込み$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}} \hookrightarrow \mathbf{C}$が存在する様な体で有る。

Posons $\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) := (\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$.

$\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$を$(\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$とする。

Posons $\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) := (\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$.
Admettons que $X \mapsto \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$ soit une cohomologie de Weil.

$\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$を$(\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$とする。
$X \mapsto \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$がヴェイユコホモロジーを成すと仮定する
ならば、

Posons $\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) := (\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$.
Admettons que $X \mapsto \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$ soit une cohomologie de Weil.
Il résulte de [Katz-Messing, 1974] que, pour tout ℓ et $\mathfrak{L}$,

$$\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = b^i(X) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell).$$

$\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$を$(\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$とする。
$X \mapsto \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$がヴェイユコホモロジーを成すと仮定する
ならば、任意の$\ell, \mathfrak{L}$に対し、

$$\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = b^i(X) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$$

が成り立つ事が[Katz-Messing, 1974]の定理より直ぐ分かる。

- On vérifie facilement que
$\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell,\mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$.

- $\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell,\mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ は
$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$の定義より従う。

- On vérifie facilement que $\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell,\mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$.
- Cette limite ne dépendant pas de l'ultrafiltre non principal $\mathfrak{L}$, il en résulte que pour presque tout ℓ, $\dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$.

- $\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell,\mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ は $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$の定義より従う。
- 極限が非単項超フィルター$\mathfrak{L}$に依ら無い為、殆んど全て ℓに対し、$\dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$が成り立つ。

- On vérifie facilement que $\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell,\mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$.
- Cette limite ne dépendant pas de l'ultrafiltre non principal $\mathfrak{L}$, il en résulte que pour presque tout ℓ, $\dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$.
- Le théorème de O. Gabber résulte alors de la suite exacte des coefficients universels

$$0 \to \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell \to \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) \to \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)[\ell] \to 0,$$

- $\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell,\mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ は $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$の定義より従う。
- 極限が非単項超フィルター$\mathfrak{L}$に依ら無い為、殆んど全て ℓに対し、$\dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$が成り立つ。
- ガバーの定理は普遍係数定理

$$0 \to \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell \to \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) \to \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)[\ell] \to 0,$$

から導かれる。

Cependant, pour vérifier que la $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$-cohomologie est une cohomologie de Weil (cf. p. ex. [Tomašić, 2004]), on utilise :

然し、$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$コホモロジーがヴェイユコホモロジーで有るかどうかを確かめるには次の事が有効で有る
（[Tomašić, 2004]を参照せよ）:

Cependant, pour vérifier que la $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$-cohomologie est une cohomologie de Weil (cf. p. ex. [Tomašić, 2004]), on utilise :

$$\text{les fonctions } \ell \mapsto \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) \text{ sont bornées.}$$

然し、$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$コホモロジーがヴェイユコホモロジーで有るかどうかを確かめるには次の事が有効で有る
（[Tomašić, 2004]を参照せよ）:

$$\ell \mapsto \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)\text{が有界関数で有る事。}$$

Cependant, pour vérifier que la $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$-cohomologie est une cohomologie de Weil (cf. p. ex. [Tomašić, 2004]), on utilise :

$$\text{les fonctions } \ell \mapsto \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) \text{ sont bornées.}$$

Dans op. cit. et [Illusie, 2010] la vérification de ce fait utilise le théorème de Gabber sur la torsion.

然し、$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$コホモロジーがヴェイユコホモロジーで有るかどうかを確かめるには次の事が有効で有る
（[Tomašić, 2004]を参照せよ）:

$$\ell \mapsto \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)\text{が有界関数で有る事。}$$

上記と[Illusie, 2010]に於いて、捻れについてのガバー定理が此の事実の証明に使われている。

Dans cet exposé, on va s'intéresser à des théorèmes de finitudes semblables,

---

此の講演では　　類似の有限性
定理を考える。

Dans cet exposé, on va s'intéresser à des théorèmes de finitudes semblables, pour des coefficients non nécessairement constants

---

此の講演では定数層とは限らずに、類似の有限性定理を考える。

Dans cet exposé, on va s'intéresser à des théorèmes de finitudes semblables, pour des coefficients non nécessairement constants et dans une situation relative.

此の講演では定数層とは限らずに、相対的な場合の類似の有限性定理を考える。

Définition

Soient X un schéma nœthérien et $\mathscr{F}$ un faisceau étale sur X.

定義

Xをネータースキームとし、$\mathscr{F}$をX上のエタール層とする。

Définition

Soient X un schéma nœthérien et $\mathscr{F}$ un faisceau étale sur X. Si pour tout point géométrique $\overline{x}$ et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de $X_{(\overline{x})}$ localisé en y

---

定義

Xをネータースキームとし、$\mathscr{F}$をX上のエタール層とする。
若し任意の幾何学的点$\overline{x}$と任意の強ヘンゼル化$X_{(\overline{x})}$の点y
に対し、

Définition

Soient X un schéma nœthérien et $\mathscr{F}$ un faisceau étale sur X. Si pour tout point géométrique $\overline{x}$ et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de $X_{(\overline{x})}$ localisé en y l'action des p_x-Sylow de $\pi_1(y, \overline{y})$ sur la fibre $\mathscr{F}_{\overline{y}}$ est triviale,
(p_x est l'exposant caractéristique du corps $\kappa(\overline{x})$.)

定義

Xをネータースキームとし、$\mathscr{F}$をX上のエタール層とする。
若し任意の幾何学的点$\overline{x}$と任意の強ヘンゼル化$X_{(\overline{x})}$の点yに対し、$\pi_1(y)$のシローp_x部分群が茎$\mathscr{F}_{\overline{y}}$へ自明な作用するならば、
（p_xは$\kappa(\overline{x})$の指標数で有る。）

Définition

Soient X un schéma nœthérien et $\mathscr{F}$ un faisceau étale sur X. Si pour tout point géométrique $\overline{x}$ et pour tout point géométrique $\overline{y}$ de $X_{(\overline{x})}$ localisé en y l'action des p_x-Sylow de $\pi_1(y, \overline{y})$ sur la fibre $\mathscr{F}_{\overline{y}}$ est triviale, on dit que $\mathscr{F}$ est modéré.
(p_x est l'exposant caractéristique du corps $\kappa(\overline{x})$.)

定義

Xをネータースキームとし、$\mathscr{F}$をX上のエタール層とする。
若し任意の幾何学的点$\overline{x}$と任意の強ヘンゼル化$X_{(\overline{x})}$の点yに対し、$\pi_1(y)$のシローp_x部分群が茎$\mathscr{F}_{\overline{y}}$へ自明な作用するならば、層$\mathscr{F}$を穏と言う。
（p_xは$\kappa(\overline{x})$の指標数で有る。）

Lemme (Abhyankar)

Soient X un schéma régulier et D un diviseur à croisements normaux. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau lisse sur $U = X - D$.

補題 (Abhyankar)

Xを正則スキームとし、Dを其の単純正規因子とする。
$\mathscr{L}$を$U = X - D$上の局所定数層とする。

Lemme (Abhyankar)

Soient X un schéma régulier et D un diviseur à croisements normaux. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau lisse sur $U = X - D$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

補題 (Abhyankar)

Xを正則スキームとし、Dを其の単純正規因子とする。
$\mathscr{L}$を$U = X - D$上の局所定数層とする。
次は同値で有る。

Lemme (Abhyankar)

Soient X un schéma régulier et D un diviseur à croisements normaux. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau lisse sur $U = X - D$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathscr{L}$ est modéré le long de D.*

補題 (Abhyankar)

Xを正則スキームとし、Dを其の単純正規因子とする。
$\mathscr{L}$を$U = X - D$上の局所定数層とする。
次は同値で有る。

1. $\mathscr{L}$はDに沿って穏。

Lemme (Abhyankar)

Soient X un schéma régulier et D un diviseur à croisements normaux. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau lisse sur $U = X - D$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathscr{L}$ est modéré le long de D.*
2. *$(U \hookrightarrow X)_! \mathscr{L}$ est modéré.*

補題 (Abhyankar)

Xを正則スキームとし、Dを其の単純正規因子とする。
$\mathscr{L}$を$U = X - D$上の局所定数層とする。
次は同値で有る。

1. $\mathscr{L}$はDに沿って穏。
2. $(U \hookrightarrow X)_! \mathscr{L}$は穏。

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$ une famille de faisceaux sur X.

定義

X上の層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$ une famille de faisceaux sur X.
S'il existe un morphisme propre et surjectif $p : X' \to X$ tel que chaque image inverse $p^* \mathscr{F}_l$ soit modérée sur X'

定義

X上の層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。
各逆像$p^* \mathscr{F}_l$が穏と成る固有全射$p : X' \to X$が有る時、

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$ une famille de faisceaux sur X.
S'il existe un morphisme propre et surjectif $p : X' \to X$ tel que chaque image inverse $p^* \mathscr{F}_l$ soit modérée sur X' on dit que la famille $\mathscr{F}$ est uniformément proprement modérée (upm).

定義

X上の層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。
各逆像$p^* \mathscr{F}_l$が穏と成る固有全射$p : X' \to X$が有る時、
族$\mathscr{F}$は一様固有的穏(upm)と言う。

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)$ une famille de faisceaux constructibles sur X.

定義

X上の構成可能層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)$ une famille de faisceaux constructibles sur X.
S'il existe une stratification finie à strates localement fermées telle que les faisceaux $\mathscr{F}_l$ soit lisses sur chaque strate,

---

定義

X上の構成可能層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。
或る滑層分割が任意の滑層に対し、各$\mathscr{F}_l$の制限が
局所定数層と成る様に存在する時、

Définition

Soit $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)$ une famille de faisceaux constructibles sur X.
S'il existe une stratification finie à strates localement fermées telle que les faisceaux $\mathscr{F}_l$ soit lisses sur chaque strate,
on dit que la famille $\mathscr{F}$ est uniformément constructible (uc).

定義

X上の構成可能層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。
或る滑層分割が任意の滑層に対し、各$\mathscr{F}_l$の制限が
局所定数層と成る様に存在する時、
族$\mathscr{F}$は一様構成可能 *(uc)*と言う。

Dorénavant, on fixe un schéma S qui peut être le spectre d'un corps ou d'un anneau de valuation discrète excellent et l'on travaille dans la catégorie des S-schémas de type fini.

此処からは体か優秀離散付値環のスペクトラムSを
固定する。S上の有限型なスキームの成す圏の対象や射だけを考える。

Dorénavant, on fixe un schéma S qui peut être le spectre d'un corps ou d'un anneau de valuation discrète excellent et l'on travaille dans la catégorie des S-schémas de type fini.
Soient $n = (n_l)_{l \in L}$ une famille d'entiers inversibles sur S et $\Lambda = (\mathbf{Z}/n_l)_{l \in L}$ la famille de coefficients correspondante.

此処からは体か優秀離散付値環のスペクトラムSを固定する。S上の有限型なスキームの成す圏の対象や射だけを考える。
$n = (n_l)_{l \in L}$をS上の可逆な整数の族とし、nに対応する係数の族を$\Lambda = (\mathbf{Z}/n_l)_{l \in L}$で表す。

Dorénavant, on fixe un schéma S qui peut être le spectre d'un corps ou d'un anneau de valuation discrète excellent et l'on travaille dans la catégorie des S-schémas de type fini.
Soient $n = (n_l)_{l \in L}$ une famille d'entiers inversibles sur S et $\Lambda = (\mathbf{Z}/n_l)_{l \in L}$ la famille de coefficients correspondante.
On définit de manière évidente la sous-catégorie $D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda)$ de $\prod_l D^b_c(X, \mathbf{Z}/n_l)$.

此処からは体か優秀離散付値環のスペクトラムSを固定する。S上の有限型なスキームの成す圏の対象や射だけを考える。
$n = (n_l)_{l \in L}$をS上の可逆な整数の族とし、nに対応する係数の族を$\Lambda = (\mathbf{Z}/n_l)_{l \in L}$で表す。
$\prod_l D^b_c(X, \mathbf{Z}/n_l)$の部分圏$D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda)$ の定義は明らかで有る。

Théorème

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre.

定理

$f : X \to Y$を固有射とする。

Théorème

Soit $f : X \to Y$ *un morphisme propre.*
Le foncteur $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$

定理

$f : X \to Y$を固有射とする。
関手$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$

Théorème

Soit $f : X \to Y$ *un morphisme propre.*
Le foncteur $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$
induit un foncteur

$$D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda) \to D^{ub}_{ucpm}(Y, \Lambda).$$

定理

$f : X \to Y$を固有射とする。
関手$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$
が関手

$$D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda) \to D^{ub}_{ucpm}(Y, \Lambda)$$

を誘導する。

Théorème

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre.
Le foncteur $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$
induit un foncteur

$$D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda) \to D^{ub}_{ucpm}(Y, \Lambda).$$

De plus, il existe une constante $C_{f,\mathscr{F}}$ telle que pour tout i, l, on ait « $\mathrm{rang}\ \mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}_l) \leq C_{f,\mathscr{F}} \cdot \mathrm{rang}\ \mathscr{F}_l$ ».

定理

$f : X \to Y$を固有射とする。
関手$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$
が関手

$$D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda) \to D^{ub}_{ucpm}(Y, \Lambda)$$

を誘導する。
更に、定数$C_{f,\mathscr{F}}$が存在し、任意のi, lに対し、
「$\text{階数}\left(\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}_l)\right) \leq C_{f,\mathscr{F}} \cdot \text{階数}\left(\mathscr{F}_l\right)$」を満たす。

Exemple

Soient X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p, D un diviseur à croisements normaux et U l'ouvert complémentaire.

例

Xを標数pの代数的閉体k上の滑らかな固有多様体とし、Dを単純正規因子、UはDの補開部分とする。

Exemple

Soient X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique p, D un diviseur à croisements normaux et U l'ouvert complémentaire.
Il existe une constante $C_{X,D}$ telle que pour tout $\ell \neq p$, tout i et tout $\mathbf{F}_\ell$-faisceau lisse modéré $\mathscr{L}$ sur U, on ait

$$h_c^i(U, \mathscr{L}) \leq C_{X,D} \cdot \mathrm{rang}(\mathscr{L}).$$

例

Xを標数pの代数的閉体k上の滑らかな固有多様体とし、Dを単純正規因子、UはDの補開部分とする。
定数$C_{X,D}$が存在し、任意の$i, \ell \neq p, U = X - D$上の$\mathbf{F}_\ell$-穏局所定数層$\mathscr{L}$に対し、

$$h_c^i(U, \mathscr{L}) \leq C_{X,D} \cdot \text{階数}(\mathscr{L})$$

を満たす。

Dévissages

(Esquisse)

- *On peut supposer $\mathscr{F}$ modérée.*

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。

Dévissages

(Esquisse)

- *On peut supposer* $\mathscr{F}$ *modérée.*
- *On peut supposer* $\mathscr{F} = j_! \mathscr{L}$ *(*$\mathscr{L}$ *famille de faisceaux lisses,* $j : U \hookrightarrow X$ *immersion ouverte).*

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。
- $\mathscr{F} = j_! \mathscr{L}$と仮定して良い。（$\mathscr{L}$は局所定数層の族、$j : U \hookrightarrow X$、開埋め込み。）

Définition

Une courbe nodale $f : X \to Y$

定義

結節曲線$f : X \to Y$とし、

Définition

Une courbe nodale $f : X \to Y$ est dite adaptée à (U, V), où U (resp. V) est un ouvert dense de X (resp. Y) si

---

定義

結節曲線$f : X \to Y$とし、U、V を其々Xの稠密開集合及びYの稠密開集合とする。

Définition

Une courbe nodale $f : X \to Y$ est dite adaptée à (U, V), où U (resp. V) est un ouvert dense de X (resp. Y) si

1. f est lisse sur V ;

定義

結節曲線$f : X \to Y$とし、U、V を其々Xの稠密開集合及びYの稠密開集合とする。

1. V上でfが滑らかで、

Définition

Une courbe nodale $f : X \to Y$ est dite adaptée à (U, V), où U (resp. V) est un ouvert dense de X (resp. Y) si

1. f est lisse sur V ;
2. il existe un diviseur $D \subseteq \mathrm{LieuLisse}_X(f)$, étale sur Y, tel que $U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$.

定義

結節曲線$f : X \to Y$とし、U、V を其々Xの稠密開集合及びYの稠密開集合とする。

1. V上でfが滑らかで、
2. Y上にエタール因子$D \subseteq$ 平滑軌跡$_X(f)$が有り、$U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$と成る時

Définition

Une courbe nodale $f : X \to Y$ est dite adaptée à (U, V), où U (resp. V) est un ouvert dense de X (resp. Y) si

1. f est lisse sur V ;
2. il existe un diviseur $D \subseteq \mathrm{LieuLisse}_X(f)$, étale sur Y, tel que $U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$.

定義

結節曲線$f : X \to Y$とし、U、V を其々Xの稠密開集合及びYの稠密開集合とする。

1. V上でfが滑らかで、
2. Y上にエタール因子$D \subseteq$ 平滑軌跡$_X(f)$が有り、$U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$と成る時

fは(U, V)に適合していると言う。

Définition

Un morphisme $f : X \to Y$ est dit plurinodal adapté à (U, V)

定義

射$f : X \to Y$が(U, V)に適合している多重結節射で有るとは

Définition

Un morphisme $f : X \to Y$ est dit plurinodal adapté à (U, V) s'il existe une factorisation
$f = (f_d : X = X_d \to X_{d-1}) \circ \cdots \circ (f_1 : X_1 \to X_0 = Y)$ et des ouverts denses $U_i \subseteq X_i$ $(U_0 = V,\ U_d = U)$, tels que chaque f_i soit une courbe nodale adaptée à (U_i, U_{i-1}).

定義

射$f : X \to Y$が(U, V)に適合している多重結節射で有るとは
分解$f = (f_d : X = X_d \to X_{d-1}) \circ \cdots \circ (f_1 : X_1 \to X_0 = Y)$で
X_iの稠密開集合U_i($U_0 = V$且つ$U_d = U$)が存在し、
各f_iが(U_i, U_{i-1})に適合している結節曲線と成る事。

Dévissages

(Esquisse)

- *On peut supposer* $\mathscr{F}$ *modérée.*
- *On peut supposer* $\mathscr{F} = j_! \mathscr{L}$ *(*$\mathscr{L}$ *famille de faisceaux lisses,* $j : U \hookrightarrow X$ *immersion ouverte).*

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。
- $\mathscr{F} = j_! \mathscr{L}$と仮定して良い。（$\mathscr{L}$は局所定数層の族、$j : U \hookrightarrow X$、開埋め込み。）

Dévissages

(Esquisse)

- *On peut supposer* $\mathscr{F}$ *modérée.*
- *On peut supposer* $\mathscr{F} = j_!\mathscr{L}$ *(*$\mathscr{L}$ *famille de faisceaux lisses,* $j : U \hookrightarrow X$ *immersion ouverte).*
- *On peut supposer* f *plurinodale adaptée à* (U, V)

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。
- $\mathscr{F} = j_!\mathscr{L}$と仮定して良い。（$\mathscr{L}$は局所定数層の族、$j : U \hookrightarrow X$、開埋め込み。）
- fは(U, V)に適合している多重結節射、

Dévissages

(Esquisse)

- *On peut supposer* $\mathscr{F}$ *modérée.*
- *On peut supposer* $\mathscr{F} = j_!\mathscr{L}$ *(*$\mathscr{L}$ *famille de faisceaux lisses,* $j : U \hookrightarrow X$ *immersion ouverte).*
- *On peut supposer* f *plurinodale adaptée à* (U, V)*, où la paire* (Y, V) *est torique.*

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。
- $\mathscr{F} = j_!\mathscr{L}$と仮定して良い。（$\mathscr{L}$は局所定数層の族、$j : U \hookrightarrow X$、開埋め込み。）
- fは(U, V)に適合している多重結節射、(Y, V)はトーリックと仮定して良い。

On utilise ici :

を用いる。

On utilise ici :

- les résultats de [de Jong, 1997]
  (altérations de familles de courbes) ;

- 論文[de Jong, 1997]の結果
  （曲線の族のオルタレーション）

を用いる。

On utilise ici :

- les résultats de [de Jong, 1997]
  (altérations de familles de courbes) ;
- une triple récurrence
  (dimensions de Y et f, degré de troncation) ;

- 論文[de Jong, 1997]の結果
  （曲線の族のオルタレーション）
- 三重の帰納法
  （Yの次元、fの次元、截頭作用の次数）

を用いる。

On utilise ici :

- les résultats de [de Jong, 1997]
  (altérations de familles de courbes) ;
- une triple récurrence
  (dimensions de Y et f, degré de troncation) ;
- un lemme de Gabber (déjà utilisé dans [Orgogozo, 2006]) ;

- 論文[de Jong, 1997]の結果
  （曲線の族のオルタレーション）
- 三重の帰納法
  （Yの次元、fの次元、截頭作用の次数）
- 或るガバーの補題 ([Orgogozo, 2006])

を用いる。

Lemme (O. Gabber)

Soient X un schéma nœthérien, F un sous-schéma fermé et $F' \to F$ un morphisme propre et surjectif.

補題 (O. ガバー)

Xをネータースキームとし、Fを閉部分スキーム、
$F' \to F$を固有全射とする。

Lemme (O. Gabber)

Soient X un schéma nœthérien, F un sous-schéma fermé et $F' \to F$ un morphisme propre et surjectif.
Il existe un morphisme propre et surjectif $X' \to X$ tel que toute composante irréductible de $F \times_X X'$ soit la source d'un F-morphisme vers F'.

補題 (O. ガバー)

Xをネータースキームとし、Fを閉部分スキーム、
$F' \to F$を固有全射とする。
次の事が成り立つ様な固有全射$X' \to X$が存在する: 各$F \times_X X'$の既約成分からF'へ F上の射が存在する事。

On utilise ici :

- les résultats de [de Jong, 1997]
  (altérations de familles de courbes) ;
- une triple récurrence
  (dimensions de Y et f, degré de troncation) ;
- un lemme de Gabber ;

- 論文[de Jong, 1997]の結果
  （曲線の族のオルタレーション）
- 三重の帰納法
  （Yの次元、fの次元、截頭作用の次数）
- 或るガバーの補題

を用いる。

On utilise ici :

- les résultats de [de Jong, 1997]
  (altérations de familles de courbes) ;
- une triple récurrence
  (dimensions de Y et f, degré de troncation) ;
- un lemme de Gabber ;
- les résultats de [de Jong, 1996].

- 論文[de Jong, 1997]の結果
  （曲線の族のオルタレーション）
- 三重の帰納法
  （Yの次元、fの次元、截頭作用の次数）
- 或るガバーの補題
- 論文[de Jong, 1996]の結果。

を用いる。

Il suffit de démontrer la proposition suivante.

次の命題を証明すれば良い。

Proposition

Soient Y un schéma régulier, $D_Y \subseteq Y$ un diviseur à croisements normaux et $k : V \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte du complémentaire.

命題

Yを正則スキームとし、D_Yを其の単純正規因子、$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込みとする。

Proposition

Soient Y un schéma régulier, $D_Y \subseteq Y$ un diviseur à croisements normaux et $k : V \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte du complémentaire. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que f soit nodale adaptée à (U, V).

命題

Yを正則スキームとし、D_Yを其の単純正規因子、$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込みとする。
$f : X \to Y$を固有射とし、$j : U \hookrightarrow X$を
fが(U, V)に適合している様な開埋め込みとする。

Proposition

Soient Y un schéma régulier, $D_Y \subseteq Y$ un diviseur à croisements normaux et $k : V \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte du complémentaire. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que f soit nodale adaptée à (U, V). Alors, pour tout faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U tel que $j_!\mathscr{L}$ soit modéré, et chaque $i \in \{0, 1, 2\}$,

---

命題

Yを正則スキームとし、D_Yを其の単純正規因子、$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込みとする。
$f : X \to Y$を固有射とし、$j : U \hookrightarrow X$を
fが(U, V)に適合している様な開埋め込みとする。
其の時、$j_!\mathscr{L}$が穏で有るの任意のU上の局所定数層$\mathscr{L}$と
各$i \in \{0, 1, 2\}$に対し、次の事が成り立つ。

Proposition

Soient Y un schéma régulier, $D_Y \subseteq Y$ un diviseur à croisements normaux et $k : V \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte du complémentaire. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que f soit nodale adaptée à (U, V). Alors, pour tout faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U tel que $j_!\mathscr{L}$ soit modéré, et chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, il existe un faisceau lisse $\mathscr{M}_i$ sur V tel que $\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L})$ soit isomorphe à $k_!\mathscr{M}_i$ et modéré.

命題

Yを正則スキームとし、D_Yを其の単純正規因子、$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込みとする。
$f : X \to Y$を固有射とし、$j : U \hookrightarrow X$を
fが(U, V)に適合している様な開埋め込みとする。
其の時、$j_!\mathscr{L}$が穏で有るの任意のU上の局所定数層$\mathscr{L}$と
各$i \in \{0, 1, 2\}$に対し、次の事が成り立つ。
層$\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L})$は穏で、$\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L}) \simeq k_!\mathscr{M}_i$と成る
局所定数層$\mathscr{M}_i$が存在する。

Pour se ramener à cet énoncé, on utilise :

以上の問題に帰着する為には、次の定理を用いる。

Pour se ramener à cet énoncé, on utilise :

- le fait que si la paire (Y, V) est torique et $f : X \to Y$ est adapté à (U, V), la paire (X, U) est également torique ;

以上の問題に帰着する為には、次の定理を用いる。

- ペア(Y, V)がトリックとし、$f : X \to Y$が(U, V) に適合している時、ペア(X, U)もトリックで有る。

Pour se ramener à cet énoncé, on utilise :

- le fait que si la paire (Y, V) est torique et $f : X \to Y$ est adapté à (U, V), la paire (X, U) est également torique ;
- la résolution des singularités des paires toriques [Katô K, 1994].

以上の問題に帰着する為には、次の定理を用いる。

- ペア(Y, V)がトリックとし、$f : X \to Y$が(U, V) に適合している時、ペア(X, U)もトリックで有る。
- トリックペアの特異点解消 [加藤和也, 1994]。

Plus précisément :

詳しくは、

$$
\begin{tikzcd}
(X, U) \arrow[d, "h", "\text{nodal/結節}"'] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] & (X_\bullet, U_\bullet) \arrow[l] \arrow[d, "h_\bullet"] \\
\underset{\text{torique/トリック}}{(Z, W)} \arrow[d, "g", "\text{plurinodal/多重結節}"'] & (Z_\bullet, W_\bullet) \arrow[l] \arrow[dl, bend left=60, "g_\bullet"] \\
\underset{\text{torique/トリック}}{(Y, V)} &
\end{tikzcd}
$$

Proposition

Soient Y un schéma régulier, $D_Y \subseteq Y$ un diviseur à croisements normaux et $k : V \hookrightarrow Y$ l'immersion ouverte du complémentaire. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et $j : U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que f soit nodale adaptée à (U, V). Alors, pour tout faisceau lisse $\mathscr{L}$ sur U tel que $j_!\mathscr{L}$ soit modéré, et chaque $i \in \{0, 1, 2\}$, il existe un faisceau lisse $\mathscr{M}_i$ sur V tel que $\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L})$ soit isomorphe à $k_!\mathscr{M}_i$ et modéré.

命題

Yを正則スキームとし、D_Yを其の単純正規因子、$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込みとする。
$f : X \to Y$を固有射とし、$j : U \hookrightarrow X$を
fが(U, V)に適合している様な開埋め込みとする。
其の時、$j_!\mathscr{L}$が穏で有るの任意のU上の局所定数層$\mathscr{L}$と
各$i \in \{0, 1, 2\}$に対し、次の事が成り立つ。
層$\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L})$は穏で、$\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L}) \simeq k_!\mathscr{M}_i$と成る
局所定数層$\mathscr{M}_i$が存在する。

Démonstration de la proposition : lissité.

- On peut supposer que Y est un trait.

命題の証明:局所定数性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。

Démonstration de la proposition : lissité.

- On peut supposer que Y est un trait.
- $R\Phi(j_!\mathscr{L}) = 0$ (SGA 7, XIII, 2.1.11).

命題の証明:局所定数性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。
- $R\Phi(j_!\mathscr{L}) = 0$ (SGA 7, XIII, 2.1.11).

Démonstration de la proposition : modération.

- On peut supposer que Y est un trait.

命題の証明:穏性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。

Démonstration de la proposition : modération.

- On peut supposer que Y est un trait.
- On peut supposer $\mathscr{L}$ constant.

命題の証明:穏性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。
- $\mathscr{L}$が定数層と仮定して良い。

Démonstration de la proposition : modération.

- On peut supposer que Y est un trait.
- On peut supposer $\mathscr{L}$ constant.
- On utilise le théorème de log-acyclicité de Nakayama. ([Illusie, 2002, 8.4.3])

命題の証明：穏性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。
- $\mathscr{L}$が定数層と仮定して良い。
- 中山能力の対数的非輪状性の定理を用いる。（[Illusie, 2002, 8.4.3]）

Généralisation :

一般化:

Généralisation : le cas d'un morphisme non nécessairement propre.

一般化：必ずしもfが固有射とは限ら無い場合。

Généralisation : le cas d'un morphisme non nécessairement propre.

- faisceau compactement modéré : le prolongement par zéro à une compactification l'est.

一般化：必ずしもfが固有射とは限ら無い場合。

- コンパクト的に穏層$\mathscr{F}$：コンパクト化$k : X \hookrightarrow \overline{X}$ が存在し、$k_! \mathscr{F}$は穏と成る。

Généralisation : le cas d'un morphisme non nécessairement propre.

- faisceau compactement modéré : le prolongement par zéro à une compactification l'est.
- réduction au cas clef suivant.

一般化：必ずしもfが固有射とは限ら無い場合。

- コンパクト的に穏層$\mathscr{F}$：コンパクト化$k : X \hookrightarrow \overline{X}$ が存在し、$k_! \mathscr{F}$は穏と成る。
- 次の場合は重要で有る

Lemme

Soient X etc. comme ci-dessous.

補題

X等は上の様な物とする。

Lemme

Soient X etc. comme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 = U_{12} = X - (D_1 \cup D_2) \arrow[r, "j_{12,1}"] \arrow[d, "j_{12,2}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_1 = X - D_1 \arrow[d, "j_1"] \\
U_2 = X - D_2 \arrow[r, "j_2"] & \underset{\text{régulier/正則}}{X}
\end{tikzcd}$$

補題

X等は上の様な物とする。

Lemme

Soient X etc. comme ci-dessous.
Soit $\mathscr{L}$ la famille des U_1-faisceaux lisses de torsion inversible sur X, modérés le long de D_1.

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 = U_{12} = X - (D_1 \cup D_2) \arrow[r, "j_{12,1}"] \arrow[d, "j_{12,2}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_1 = X - D_1 \arrow[d, "j_1"] \\
U_2 = X - D_2 \arrow[r, "j_2"] & \underset{\text{régulier/正則}}{X}
\end{tikzcd}$$

補題

X等は上の様な物とする。
$\mathscr{L}$はXに於いて可逆な捻れを持ち、Dに沿って穏のU_1上局所定数で有る層の族とする。

Lemme

Soient X etc. comme ci-dessous.
Soit $\mathscr{L}$ la famille des U_1-faisceaux lisses de torsion inversible sur X, modérés le long de D_1.
Alors, la famille

$$\mathrm{R}j_{2*}\left(j_{12,2!}{j_{12,1}}^{*}\mathscr{L}\right)$$

est uniformément constructible modérée.

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 = U_{12} = X - (D_1 \cup D_2) \arrow[r, "j_{12,1}"] \arrow[d, "j_{12,2}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_1 = X - D_1 \arrow[d, "j_1"] \\
U_2 = X - D_2 \arrow[r, "j_2"] & \underset{\text{régulier/正則}}{X}
\end{tikzcd}$$

補題

X等は上の様な物とする。
$\mathscr{L}$はXに於いて可逆な捻れを持ち、Dに沿って穏のU_1上局所定数で有る層の族とする。
其の時、族

$$\mathrm{R}j_{2*}\left(j_{12,2!}{j_{12,1}}^{*}\mathscr{L}\right)$$

は一様構成可能で穏で有る。

fin

終り