Classification des groupes algébriques semi-simples.

(Notes informelles pour le groupe de travail « Introduction à la théorie de Bruhat-Tits ».)
École polytechnique, 2014-11-28

version du 2015-1-6 à 9h56 TU (31a4518)

1. Groupes réductifs et semi-simples déployés sur un corps

1.1. Racines.

1.1.1. Soit k un corps et $\overline{k}$ une clôture algébrique. Un k-groupe algébrique (=affine lisse) est (*géométriquement*) **réductif** (resp. **semi-simple**) si $G_{\overline{k}}$ l'est : le plus grand sous-groupe fermé lisse normal connexe qui est unipotent (resp. résoluble) est trivial.

Si l'on suit les conventions de [**SGA 3**] (voir par exemple [Demazure 1965, 2.1]), on demande que $G_{\overline{k}}$ soit *connexe*.

Par définition, un groupe semi-simple est donc réductif. Un groupe réductif est semi-simple lorsque son centre est fini. Tout groupe réductif a une décomposition HS, où H est semi-simple et S est un tore, chaque facteur étant distingué : H est le groupe dérivé de G (l'unique sous-groupe semi-simple maximal) et S est le radical de G (la composante connexe du centre de G). De plus, $H \cap S$ est fini.

Un k-**tore** (= une forme de $\mathbb{G}_m^r$) $T \subseteq G$ est (*géométriquement*) **maximal** ([ibid., 1.5.4]) si $T_{\overline{k}}$ est maximal dans $G_{\overline{k}}$, c'est-à-dire non contenu dans un tore strictement plus grand. (Notons qu'un tore (géométriquement) maximal est maximal (au sens usuel) parmi les (k-)tores mais que la réciproque est fausse.)

- **(i)** (caractérisation) Soit $T \subseteq G$ un tore dans un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Alors, le centralisateur $Z_G(T)$ est d'indice fini dans le normalisateur $N_G(T)$, et connexe si G l'est. Si G est réductif connexe, $Z_G(T)$ est réductif (connexe) et égal à T si et seulement si T est maximal.
- **(ii)** (invariance par extension des scalaires) Soit $T \subseteq G$ un tore dans un k-groupe algébrique, où k est un corps non nécessairement algébriquement clos. Alors, si T est (géométriquement) maximal, $T_{k'}$ est maximal dans $G_{k'}$ pour toute extension k'/k. (Et réciproquement.)
- **(iii)** (fonctorialité) Si $G_1 \twoheadrightarrow G_2$ est une isogénie centrale, $T_1 \mapsto f(T_1)$ est une bijection entre les k-tores maximaux. En général, pour toute surjection $G \twoheadrightarrow G'$, l'image d'un tore maximal est un tore maximal.
- **(iv)** (existence) Un groupe réductif possède des tores maximaux et ils sont conjugués localement pour la topologie étale (c'est-à-dire sur $k^{\text{sép}}$). De plus, les tores *déployés* maximaux sont conjugués par $G(k)$.

Le premier point résulte *grosso modo* du fait que le morphisme évident $N_G(T) \to \mathsf{Aut}(T) = \mathrm{GL}_r(\mathbb{Z})$ de schémas en groupes se factorise à travers $N_G(T)/Z_G(T)$ et est d'image finie car de source un k-groupe algébrique de type fini et de but un groupe constant. (Voir [ibid., 1.5.7] pour une application de la caractérisation des tores maximaux dans le cas réductif.) Le second résulte du premier (lorsque G est réductif) car $Z_G(T)$ commute à l'extension des scalaires. (Voir [Conrad 2014, 4.1] pour le troisième point et [Conrad, Gabber et Prasad 2010, A.2.6, C.4.4] pour le dernier.)

1.1.2. *Remarques.* On a des variantes sur une base S : l'existence de tores maximaux localement pour la topologie étale, et conjugaison Zariski (A. Grothendieck, [SGA 3 XIV, 3.20]), pour tout groupe algébrique (lisse). On peut aussi considérer des *paires* $(T, B \supseteq T)$: on a bien existence et conjugaison localement pour la topologie étale mais pas l'analogue de l'énoncé pour les tores déployés.

1.1.3. On appelle **rang** (ou k-**rang**) de G la dimension d'un tore déployé maximal ; si elle est nulle, on dit que G est **anisotrope**.

Si k est un corps local, G est anisotrope si et seulement si $G(k)$ est compact (voir [Harari 2014, §2]). On vérifie sans difficulté ([Borel 1966, p. 13]) que $\mathrm{SO}(q)$, où q est une forme quadratique ordinaire (=non dégénérée) sur un corps de caractéristique $\neq 2$ est anisotrope si et seulement si q ne représente pas 0 (sur k)[①].

1.1.4. *Exemples.* Le groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{H}}$ n'est pas déployé. Les groupes SL_2 et PGL_2 sont de rang 1 et, réciproquement, tout groupe semi-simple déployé de rang 1 est l'un d'eux ([SGA 3 XX], [Conrad 2014, §4], [Milne 2012, p. 26]).

1.1.5. *Donnée radicielle d'un groupe k-réductif déployé.* Soient G un k-groupe réductif et T un tore maximal, supposé *déployé*.

On pose, comme d'habitude $X(T) \coloneqq \mathsf{Hom}_k(T, \mathbb{G}_m)$[②], $X^\vee(T) \coloneqq \mathsf{Hom}_k(\mathbb{G}_m, T)$ et on considère la décomposition de $\mathrm{Lie}(G)$ selon l'action de T :

$$\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{\alpha \in X(T)} \mathrm{Lie}(G)_\alpha,$$

où

$$\mathrm{Lie}(G)_\alpha = \{x \in \mathrm{Lie}(G) : \mathrm{Ad}(t)(x) = t^\alpha \cdot x\}.$$

On note $\Phi(G,T)$ l'ensemble des racines non triviales ; on a alors $\dim \mathrm{Lie}(G)_\alpha = 1$. D'autre part, $\mathrm{Lie}(G)_0 = \mathrm{Lie}(Z_G(T)) = \mathrm{Lie}(T)$. (Si l'on suppose T déployé maximal mais pas nécessairement maximal, le centralisateur est produit de T par un groupe réductif anisotrope.)

Pour chaque α, il existe un unique sous-groupe U_α normalisé par T tel que $\mathrm{Lie}(U_\alpha) = \mathrm{Lie}(G)_\alpha$. Il existe $u_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} U_\alpha$ tel que $t u_\alpha(x) t^{-1} = u_\alpha(t^\alpha x)$. Le groupe G_α engendré par U_α et $U_{-\alpha}$ est semi-simple de rang 1 ; c'est le groupe dérivé du groupe

---

①Si v est isotrope, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est facteur direct de q et $\lambda \mapsto \big((x_1,x_2) \mapsto (\lambda x_1, \lambda^{-1} x_2)\big)$ est un $\mathbb{G}_m$ inclus dans $\mathrm{SO}(q)$. Réciproquement, si $\mathbb{G}_m \subseteq \mathrm{SO}(q)$, il existe $v \neq 0$ et χ un caractère non trivial de $\mathbb{G}_m$ tel que $t \cdot v = \chi(t) v$. Soit $t \in k$ tel que $\chi(t) \neq \pm 1$; l'égalité $q(v) = q(t \cdot v)$ devient $q(v) = \chi(t)^2 q(v)$, d'où $q(v) = 0$.

②Noté $\widehat{T}$ dans [Harari 2014].

réductif $Z_\alpha := Z_G(T_\alpha)$, où $T_\alpha := \mathrm{Ker}(\alpha)^0$ est un sous-tore de T de codimension 1. (On a $\mathrm{Lie}(Z_\alpha) = \mathrm{Lie}(T) \oplus \mathrm{Lie}(G)_\alpha \oplus \mathrm{Lie}(G)_{-\alpha}$.) Ramené au cas particulier de SL_2 ou PGL_2, on montre qu'il existe une unique coracine $\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to S_\alpha := T \cap G_\alpha$ telle que $\alpha \circ \alpha^\vee = 2 \in \mathrm{End}(\mathbb{G}_m)$ [c'est-à-dire $\alpha^\vee(t) u_\alpha(x) \alpha^\vee(t^{-1}) = u_\alpha(t^2 x)$][1] et $T = \mathrm{Im}(\alpha^\vee) T_\alpha$. En fait, on peut étendre $\alpha^\vee$ en une isogénie centrale $\varphi_\alpha : \mathrm{SL}_2 \to G_\alpha$ envoyant $U^\pm$ sur $U_{\pm\alpha}$, par définition D dans S_α, et $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sur un générateur du groupe de Weyl $W(G_\alpha, S_\alpha) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subseteq W(G, T)$.

Le quintuplet
$$(X(T), \Phi(G,T), X^\vee(T), \Phi^\vee(G,T), \langle\rangle : X(T) \times X^\vee(T) \to \mathbb{Z})$$
est une **donnée radicielle** : X et $X^\vee$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini, $\Phi \subseteq X$ et $\Phi^\vee \subseteq X^\vee$ sont des ensembles finis ne contenant pas zéro et $\langle\rangle$ est un accouplement mettant X et $X^\vee$ en dualité parfaite tel qu'il existe une bijection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ satisfaisant $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et $s_\alpha(\Phi) = \Phi$, $s_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$ (où $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$, et de même pour $s_{\alpha^\vee}$).

Il est même **réduit** : $\mathbb{Q}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$ pour tout $\alpha \in \Phi$.

`donnée-radicielle-canonique`

1.1.6. *Donnée radicielle basée canonique.* Supposons k séparablement clos. À toute paire, (T, B), on peut associer une **donnée radicielle basée** : en plus de $(X(T), \Phi(G,T), \ldots)$, on se donne l'ensemble $\Delta(G, T, B)$ des racines positives simples (=base de Φ) correspondant au sous-groupe de Borel B. Si (T', B') est une autre paire, il existe $g \in G(k)$ conjuguant (T, B) en (T', B'). Cette conjugaison induit des isomorphismes $T \simeq T'$, $X(T') \simeq X(T)$, etc. Ils sont canoniques : g est bien défini à $T(k)$ près, qui agit trivialement sur les objets. Ainsi, on obtient un objet canonique en considérant la limite
$$R_\Delta(G) := \lim_{(T,B)} R(G, T, B).$$
(De même, on pourrait parler « du » tore maximal, « du » groupe de Weyl, etc. Cf. [Deligne et Lusztig 1976, 1.1])

Étant canonique, tout k-automorphisme de G agit dessus.

Si k est une clôture séparable d'un corps k_0 et G_0 un k_0-groupe réductif, on pose :
$$R_\Delta(G_0, k) := R_\Delta(G_0 \otimes_{k_0} k).$$

1.1.7. *Réductif/semi-simple.* Notons que $X(T)$ est un réseau de $X(T)_\mathbb{Q}$ compris entre le **réseau des poids** $P(\Phi) := \{v \in X(T)_\mathbb{Q} : \forall \alpha \in \Phi,\ \langle v, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$ et le **réseau des racines** $Q(\Phi) := \mathbb{Z}\Phi$:
$$Q(\Phi) \subseteq X(T) \subseteq P(\Phi).$$

Si G est réductif, de donnée radicielle $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$, son groupe dérivé (semi-simple) est de donnée radicielle $(X/\Phi^{\vee\perp}, \Phi, \tilde{Q}^\vee, \Phi^\vee)$, où $\tilde{L}$ désigne le plus grand sous-groupe contenant L tel que $\tilde{L}/L$ soit fini.

Notons en particulier que G est semi-simple si et seulement si Φ engendre $X_\mathbb{Q}$. On parle de **donnée radicielle semi-simple** ; si de plus $Q(\Phi) = X$ (resp. $\mathbb{Z}\Phi^\vee = X^\vee$) elle est dite **adjointe** (resp. **simplement connexe**).

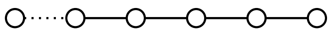
1.1.8. *Systèmes de racines et diagrammes de Dynkin.* À toute donnée radicielle, on peut associer un **système de racine** (au sens de [Bourbaki LIE, VI.§1]), c'est-à-dire une paire (V, Φ), où V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $\Phi \subseteq V - \{0\}$ un ensemble fini de générateurs tel que pour chaque $\alpha \in \Phi$, il existe une (unique) forme linéaire $\lambda \in V^\vee$ telle que $s_\alpha = \mathrm{Id} - \lambda \cdot \alpha$ satisfasse $\lambda(\Phi) \subseteq \mathbb{Z}$, $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ et $\lambda(\alpha) = 2$.

On associe au quintuplet précédent la paire $(V := X_\mathbb{Q}, \Phi)$.

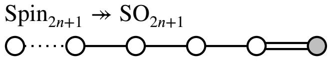
Fixons une **base** Δ de Φ (=**ensemble de racines simples**). On peut alors définir un **diagramme de Dynkin** en liant les racines simples qui ne sont pas orthogonales. On peut soit les décorer en indiquant leur longueur (normalisées par la convention que le plus petite est 1) soit mettre des arêtes multiples orientées (de la plus longue vers la plus courte, la multiplicité indiquant le rapport des longueurs). (Ci-dessous, les racines « longues » sont grisées.)

Théorème 1.1.9. *Les systèmes de racines réduits* irréductibles *([Bourbaki LIE, VI.§2]) ont pour diagramme de Dynkin les diagrammes*

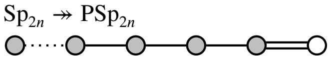
- A_n $(n \geq 1)$; $\mathrm{Aut}(A_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$; $P/Q = \mathbb{Z}/n+1\mathbb{Z}$; $\mathrm{SL}_n \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n$



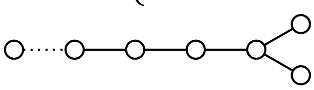
- B_n $(n \geq 2)$; $\mathrm{Aut}(B_n) = \{e\}$; $P/Q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\mathrm{Spin}_{2n+1} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_{2n+1}$



- C_n $(n \geq 3)$; $\mathrm{Aut}(C_n) = \{e\}$; $P/Q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\mathrm{Sp}_{2n} \twoheadrightarrow \mathrm{PSp}_{2n}$



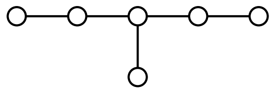
- D_n $(n \geq 4)$; $\mathrm{Aut}(D_4) = S_3$, $\mathrm{Aut}(D_{n>3}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $P/Q = \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & n \text{ pair} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & n \text{ impair} \end{cases}$; $\mathrm{Spin}_{2n} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_{2n}$



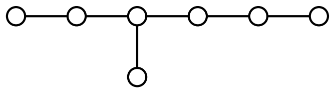
ainsi que les diagrammes exceptionnels E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 :

- E_6 ; $\mathrm{Aut}(E_6) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $P/Q = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

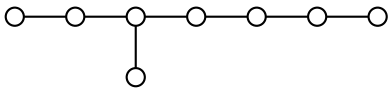
[1] Par exemple, si $u_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, prendre $\alpha^\vee(t)$ égal à $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ (cas SL_2) ou $\begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



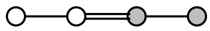
- E_7 ; $\mathrm{Aut}(E_7) = \{e\}$; $P/Q = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



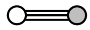
- E_8 ; $\mathrm{Aut}(E_8) = \{e\}$; $P/Q = \{0\}$



- F_4 ; $\mathrm{Aut}(F_4) = \{e\}$; $P/Q = \{0\}$



- G_2 ; $\mathrm{Aut}(G_2) = \{e\}$; $P/Q = \{0\}$; $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$[1]



Ci-dessus, on a noté P/Q le quotient $P(\Phi)/Q(\Phi)$ du réseau des poids par le réseau des racines ; c'est aussi le centre du groupe semi-simple simplement connexe ou encore le groupe fondamental du groupe semi-simple adjoint.

Pour la démonstration, voir par exemple [Bourbaki LIE, VI.§4, p. 197].

1.2. Théorème de classification : isomorphismes, isogénies et existence.

1.2.1. La construction des données radicielles est fonctorielle en les isomorphismes (une fois choisi un tore maximal) : un isomorphisme induit un isomorphisme de données radicielles. La réciproque est vraie : c'est le *théorème d'isomorphisme.* (Voir une formulation plus bas dans le cas semi-simple.)

1.2.2. En fait, on a un résultat plus fin, à condition d'introduire la notion de **p-morphisme** c'est-à-dire de triplet $(f : X' \hookrightarrow X, \iota : \Phi \xrightarrow{\sim} \Phi', q : \Phi \to p^{\mathbb{N}})$ tel que $f_{\mathbb{Q}}$ soit un isomorphisme et $f(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, $f^{\vee}(a^{\vee}) = q(a)a'^{\vee}$.

(Voir par exemple [Springer 1979, p. 9—10] ou [Conrad, Gabber et Prasad 2010, p. 418] pour une discussion rapide de cette notion et [SGA 3 XXI, §7] pour une classification.)

Théorème 1.2.3. *Soit k un corps d'exposant caractéristique $p \geq 1$.*

- ***(i)*** *Une paire réductive déployée (G, T) sur k est déterminée à isomorphisme (unique à conjugaison par $(T/Z_G)(k)$) près par sa donnée radicielle (réduite). Réciproquement, toute donnée radicielle réduite provient d'une telle paire.*
- ***(ii)*** *Soient (G, T) et (G', T') deux paires réductives déployées sur k. Tout p-morphisme $R(G', T') \to R(G, T)$ entre données radicielles est induit par une isogénie $G \to G'$ envoyant T sur T' (unique à conjugaison par $(T'/Z_{G'}(k)$ près). Cette isogénie est centrale si et seulement si le p-morphisme est central (c'est-à-dire $q = 1$).*

Pour une démonstration (isomorphismes/isogénies), voir [Steinberg 1999] (du moins sur un corps algébriquement clos ; cas général, [Conrad, Gabber et Prasad 2010, A.4.10]) ; on a aussi des variantes « épinglées » : on met les $\varphi_\alpha : \mathrm{SL}_2 \to G_\alpha$ dans la donnée, etc. La démonstration utilise de toutes façons les φ_α. Remarque : une isogénie étale est centrale.

Pour l'existence : Chevalley ([Chevalley 2005], [SGA 3 XXV]).

Citons un cas particulier plus simple de ce théorème ([Knus et collab. 1998, p. 356]).

Théorème 1.2.4. *L'application envoyant une paire déployée (G, T) sur la paire constituée du système de racines $(\Phi(G, T) \subseteq X(T)_{\mathbb{Q}})$ et d'un réseau $X(T)$ compris entre $Q(\Phi)$ et $P(\Phi)$ induit une bijection entre les classes d'isomorphismes de groupes semi-simples déployés sur k et les classes d'isomorphismes de telles paires.*

Si l'on oublit le réseau $X(T)$, on a la classification à isogénie centrale près.

On « retrouve » le fait que G semi-simple s'insère dans un diagramme d'isogénies centrales $H_1 \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow H_2$, où H_1 est simplement connexe et H_2 adjoint. (Ces types de groupes sont uniquement déterminés par leur diagramme de Dynkin.) (Voir par exemple [ibid., p. 364] dans le cas non nécessairement déployé.)

1.2.5. *Isogénies exceptionnelles.* Si R est un système de racines irréductible dont les racines ne sont pas toutes de longueur 1, notons $R' = \{\alpha' = 2\alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle, \alpha \in R\}$ le système de racines *dual*[2]. L'application $\alpha \mapsto \alpha'$ envoie racines longues sur courtes et vice versa.

Exemple : $B_n \leftrightarrow C_n$, $B_2 \leftrightarrow B_2$, $F_4 \leftrightarrow F_4$, $G_2 \leftrightarrow G_2$.

Notons $p \in \{2, 3\}$ le carré des rapports des longueurs[3].

Soit k un corps de caractéristique p et notons $\mathrm{Chev}_k(R)$, $\mathrm{Chev}_k(R')$ les groupes de Chevalley simplement connexes correspondant.

---

[1] $\mathbb{O}$ = octaves de Cayley ; voir par exemple [Gross 1996, §4] pour une structure entière.

[2] C'est l'ensemble des racines du dual de Langlands, tel que défini par exemple en [Borel 1979, I.§2].

[3] On peut montrer ([SGA 3 XXI, 7.2.2]), que le groupe de Weyl [=groupe des transformations de X engendré par les s_α, $\alpha \in \Phi$] d'une donnée radicielle irréductible agit transitivement sur l'ensemble des racines de même longueur et l'on peut en déduire dans le cas irréductible ([SGA 3 XXI, 7.5.2]) que la fonction q d'un p-morphisme ne dépend que de la longueur de la racine et que soit q soit $q \cdot$ long est constante. Analysant les diagrammes de Dynkin, on montre qu'il n'existe de p-morphisme que lorsque p est égal à 2 ou 3. Voir aussi [Springer 1998, 9.6.4].

Théorème 1.2.6. *Alors, il existe un morphisme $f : G \to G'$ et des signes tels que pour chaque $\alpha \in R$, $f(u_\alpha(t)) = u_{\alpha'}(\pm t)$ si α est longue et $f(u_\alpha(t)) = u_{\alpha'}(\pm t^p)$ si α est courte. Si k est parfait, le morphisme $G(k) \to G'(k)$ est un isomorphisme.*

Voir [Steinberg 1968, §10].

En particulier, sur un corps parfait k de caractéristique 2, $\mathrm{Spin}_{2n+1}(k)$, $\mathrm{SO}_{2n+1}(k)$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ sont isomorphes. On peut construire l'isogénie (inséparable donc non centrale) $\mathrm{SO}_{2n+1} \to \mathrm{Sp}_{2n}$ de la façon suivante. (Voir aussi [Steinberg 1999, §4.11] et [Borel 1991, §23.5—6].)

Esquissons l'argument[1]. Soit V un k-espace vectoriel de dimension $2n+1$ et q une forme quadratique ordinaire ([SGA 7 XII, §1.1]), c'est-à-dire telle que la quadrique associée soit lisse : en caractéristique 2 et dimension impaire, cela signifie que la forme bilinéaire *alternée* f associée $(=q(x+y)-q(x)-q(y))$ est de noyau N de dimension 1 et que $q(N) \neq \{0\}$. Étale localement, une telle forme quadratique est de la forme $\lambda x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i x_{i+n}$ et N la droite ke_0 ([SGA 7 XII, 1.2]). Notons $\overline{V}$ le quotient V/N et W un supplémentaire. L'application de restriction à $\overline{V}$ induit un morphisme de groupes algébriques (convenablement définis) $\pi : \mathrm{SO}_V \to \mathrm{Sp}_{\overline{V}}$. Montrons que c'est une isogénie de noyau α_2^{2n}, où α_2 est le schéma en groupes (fini et plat mais pas étale) « $x^2 = 0$ ». Un élément g dans le noyau est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_g \in W^\vee \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$ car il est de déterminant 1 : on a $g(w) = w + \lambda_g(w)e$ et $g \to \lambda_g$ est un morphisme de groupes. L'égalité $q(g(w)) = q(w)$ devient $\lambda_g(w)^2 q(e) = 0$. Comme $q(e)$ est une unité, le noyau est bien représenté par $\mathsf{Hom}(W, \alpha_2) = \alpha_2^{2n}$.

La surjectivité (du morphisme de groupes algébrique) en résulte pour des raisons de dimension. Sur les points, on peut la vérifier ainsi. Soit $\overline{g} \in \mathsf{End}(W)$ tel que $f(\overline{g}x, \overline{g}y) = f(x, y)$. On cherche $\mu \in W^\vee$ tel que $\overline{g} + \mu e$ soit dans SO_V c'est-à-dire $q(\overline{g} + \mu e) = q$, ou encore, $\lambda^2(w)q(e) = q(\overline{g}w) - q(w)$. Or, le terme de droite est Frob_2-linéaire ; sur un corps parfait, c'est le carré d'une (unique) forme linéaire.

Remarque : pour C_2 (et $p = 2$), on obtient grâce au théorème précédent un endomorphisme de Sp_4 qui induit un automorphisme extérieur de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq S_6$ (cf. [Steinberg 1968, p. 147—148]).

1.3. Groupe des automorphismes. Références : [Conrad 2014, §7], [SGA 3 XXIV], [Knus et collab. 1998, 25.15—16]. (Comparer à [Bourbaki LIE, VIII.§5].)

Proposition 1.3.1. *Soit G un groupe semi-simple déployé. La suite*

$$1 \to G/Z_G(k) \to \mathsf{Aut}_k(G) \to \mathsf{Aut}(\mathrm{Dyn}(G))$$

est exacte, scindée si G est adjoint ou simplement connexe.

Dans le cas adjoint, $Z_G = \{e\}$.) En général, $\mathsf{Aut}_k(G)$ est extension (scindée) d'un sous-groupe fini de $\mathsf{Aut}(\mathrm{Dyn}(G))$ (isomorphe au groupe des automorphismes d'une donnée radicielle *basée*) par $G/Z_G(k)$.

Exemple : $\mathsf{Aut}(\mathrm{SL}_n) = \mathrm{PGL}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n > 2$ et $\mathsf{Aut}(\mathrm{SL}_2) = \mathrm{PGL}_2$. L'élément « externe » est $g \mapsto g^{-t}$ (qui est la conjugaison par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ si $n = 2$).

2. Formes

2.1. Généralités. Voir [Harari 2014].

2.1.1. Descente fidèlement plate : si M est un A-module et $A \to B$ un morphisme fidèlement plat, la suite $0 \to M \to M_B \to M_{B\otimes_A B} \to M_{B\otimes_A B\otimes_A B} \to \dots$ est exacte. On en déduit qu'il revient au même de se donner un A-module ou un B-module M' muni d'une « donnée de recollement » c'est-à-dire un isomorphisme $c : p_1^\star M' \simeq p_2^\star M'$ (que l'on peut voir comme un isomorphisme $M' \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B \otimes_A M'$) satisfaisant la condition de cocycle usuelle sur $B \otimes_A B \otimes_A B$. (On retrouve M comme le noyau d'une double flèche $M' \rightrightarrows M' \otimes_A B$ naturelle en les données.)

Si $A = k$, $B = k'$ extension finie galoisienne, on a $k' \otimes_k k' = \oplus_{\sigma\in G} k'_\sigma$ et on retrouve la descente galoisienne. (Et notamment le théorème 90 de Hilbert sous la forme $\mathsf{H}^1(k, \mathrm{GL}_n) = \{\star\}$.)

2.1.2. Soient k_0 un corps, k une clôture séparable de k_0, et X_0 un k_0-schéma affine. Utilisant ce qui précède, il est formel de vérifier l'ensemble classes d'isomorphisme de k_0-schémas Y_0 isomorphes à X_0 après extension des scalaires à k (=« **formes** de X_0) est en bijection avec l'*ensemble* (pointé) $\mathsf{H}^1(\mathrm{Gal}(k/k_0), \mathsf{Aut}(X_0)_k)$.

2.2. Classification cohomologique des groupes semi-simples. Pour des résultats sur une base plus générale, voir par exemple [Gille 2014].

2.2.1. *$\star$-action.* Soit G_0 un k_0-groupe semi-simple (non nécessairement déployé). Le groupe $G = G_0 \times_{k_0} k$ est déployé, de groupe de k-automorphisme $(G_0/Z_{G_0})(k) \rtimes \mathsf{Aut}(R_\Delta(G_0, k))$. L'action du groupe de Galois sur le premier terme est claire ; sur le second, cela résulte de la fonctorialité de la construction (**1.1.6** ; voir aussi [Conrad 2014, 7.1.2], [Springer 1979, p. 12] et [Platonov et Rapinchuk 1994, 2.1.14, p. 66]).

Théorème 2.2.2. *L'ensemble des classes d'isomorphie de k_0-formes d'un groupe semi-simple G_0 est en bijection naturelle avec l'ensemble de cohomologie non abélienne $\mathsf{H}^1(k/k_0, (G_0/Z_{G_0})(k) \rtimes \mathsf{Aut}(R_\Delta(G_0, k))$. Si G_0 est adjoint ou simplement connexe, ou bien si le groupe fondamental est cyclique, $\mathsf{Aut}(R_\Delta(G_0, k))$ coïncide avec le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin associé.*

[1] Merci à Gaëtan Chenevier de m'avoir expliqué cet exemple.

Ce résultat n'est mis que pour mémoire. Le complément sur l'égalité dans l'inclusion $\mathsf{Aut}(R_\Delta(G_0, k)) \subseteq \mathsf{Aut}(\mathrm{Dyn}(G))$ résulte du fait qu'un automorphisme d'un groupe cyclique préserve ses sous-groupes (donc $X/Q \subseteq P/Q$). (Voir par exemple [Conrad 2014, prop. 1.5.1].)

Remarque : la classification des simplement connexes serait suffisante car tout groupe semi-simple est quotient de son revêtement universel par un sous-groupe du centre, qui est lui-même le dual de P/Q.

On dit qu'une forme est une **forme intérieure** si sa classe appartient à l'image de l'application $\mathsf{H}^1(k/k_0, (G_0/Z_{G_0})(k) \to \mathsf{H}^1(k/k_0, \mathsf{Aut}(G))$.

2.3. Applications.

2.3.1. *Corps finis.* D'après un théorème de Lang ([Serre 1975, VI.§4]), $\mathsf{H}^1(k_0, L_0)$ est trivial pour tout groupe algébrique connexe[1].

Il en résulte formellement que $\mathsf{H}^1(k_0, \mathsf{Aut}(G_0)) \to \mathsf{H}^1(k_0, \mathsf{Aut}(R_\Delta(G_0, k))$ est une bijection et que

> l'ensemble les $\mathbb{F}_q$-formes d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe (resp. adjoint) est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathsf{Aut}(\mathrm{Dyn})$, où Dyn est le diagramme de Dynkin « géométrique » du groupe.

Il en résulte qu'un k_0-groupe algébrique semi-simple connexe est déployé dans les cas A_1, B, C, E_7, E_8 et G_2.

2.3.2. *Finitude.* Si k est un corps p-adique, il résulte de la description cohomologique précédente (et d'un théorème de Borel-Serre) que l'ensemble des k-formes d'un groupe semi-simple est fini. (Voir [Harari 2014, §5.2].)

2.3.3. *Un calcul : formes de* SL_n. Premier cas (${}^1A_n$) : la k_0-forme L_0 de $G_0 = \mathrm{SL}_n$ est d'image triviale dans $\mathsf{H}^1(k_0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Dans ce cas, le groupe L_0 correspondant est une *forme intérieure* de SL_n (c'est-à-dire provient de $\mathsf{H}^1(k_0, \mathrm{PGL}_n)$), qui classifie les algèbres d'Azumaya (東屋), qui sont les formes de M_n. Finalement, L_0 est le groupe algébrique des éléments de GL_A de norme réduite 1. (Remarque : il n'y a pas de « formes intérieures pures » car $\mathsf{H}^1(\mathrm{SL}_n)$ est trivial.)

Second cas (${}^2A_n$). Commençons par l'observation suivante : GL_n se plonge dans $\mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n$ par le morphisme $g \mapsto (g, g^{-t})$ dont l'image est exactement l'ensemble des éléments tels que $u \cdot u^\star = 1$, avec $(x, y)^\star = (y^t, x^t)$. Ceci induit un isomorphisme $\mathsf{Aut}(\mathrm{SL}_n) \simeq \mathsf{Aut}(\mathrm{M}_n^2, \star)$. Comme dans le cas précédent, les k_0-formes de SL_n sont les algèbres à involution $(D, \star)$, semi-simples et de rang $2n^2$ sur k_0, de centre une algèbre étale k_1 de rang 2 sur k_0, l'involution de D induisant l'involution non triviale de k_1. La forme correspondante est le groupe spécial unitaire SU_D des éléments de norme réduite 1 tels que $uu^\star = 1$. Dans le cas où k_1 est un corps, l'involution est de la forme $x \mapsto q\overline{x}^{-t}q^{-1}$. (La classe $[k_1] \in \mathsf{H}^1(k_0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est précisément l'image de $[L_0]$. Si elle est triviale, $D = A \times A^{\mathrm{op}}$, l'involution est $(x, y) \mapsto (y, x)$ et $\mathrm{SU}_D = \mathrm{SL}_A$.)

Nous renvoyons par exemple à [Serre 1994, III.§1.4] et [Conrad 2014, 7.2.10] pour plus de détails.

On a d'autres descriptions, avec des involutions, pour les autres groupes classiques : voir [Weil 1960] et les tables à la fin de [Tits 1966] ou [Satake 1971]. Dans ces deux dernières références, on considère des **systèmes de racines *relatifs*** tels que définis dans [Platonov et Rapinchuk 1994, 2.1.14], [Springer 1979, 3.5, p. 13], [Borel 1991, §21], etc.

Pour un rapide survol historique, voir [Borel 2001, p. 129]. Pour des exemples et compléments sur les groupes classiques, voir par exemple [Knus et collab. 1998, p. 344—352, 355—360], [Borel 1991, p. 253—267], [Platonov et Rapinchuk 1994, 78-96].

Sigles

Éléments de mathématique

Bourbaki LIE — Nicolas Bourbaki (1960-1982). *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie.* Chap. 1 (1960, 1971), chap. 2 et 3 (1972), chap. 4 à 6 (1968), chap. 7 et 8 (1975), chap. 9 (1982). Springer-Verlag (↑ p. 2–4).

Séminaires de géométrie algébrique

SGA 3 — Michel Demazure et Alexander Grothendieck (2011—?). *Schémas en groupes. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1962—1964.* Documents mathématiques **7,8,?** Édition recomposée et annotée des LNM 151—153. Société mathématique de France (↑ p. 1).

SGA 3 XIV — Alexander Grothendieck. « Éléments réguliers : suite. Applications aux groupes algébriques » (↑ p. 1).

SGA 3 XX — Michel Demazure. « Groupes réductifs de rang semi-simple 1 » (↑ p. 1).

SGA 3 XXI — Michel Demazure. « Données radicielles » (↑ p. 3).

SGA 3 XXIV — Michel Demazure. « Automorphismes des groupes réductifs » (↑ p. 4).

SGA 3 XXV — Michel Demazure. « Le théorème d'existence » (↑ p. 3).

SGA 7 — Alexander Grothendieck, Pierre Deligne et Nicholas M. Katz (1972). *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1967—1969.* Lecture Notes in Mathematics **288, 340**. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim. Springer-Verlag, viii+523 pages.

SGA 7 XII — Pierre Deligne. « Quadriques » (↑ p. 4).

[1] On commence par montrer que l'« isogénie de Lang » (qui n'en est pas une), le morphisme $g \mapsto g^{-1}F(g)$, est étale surjectif puis que si X_0 est un L_0-torseur et x dans $X_0(k)$, il existe l tel que $x = l \cdot Fx$. Si $l = \lambda^{-1}F(\lambda)$, on a alors $F(\lambda x) = \lambda x$, d'où un point rationnel.

Références

Borel, Armand (1966). « Linear algebraic groups ». *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Boulder, 1965).* American Mathematical Society, 3–19 (↑ p. 1).

— (1979). « Automorphic L-functions ». *Automorphic forms, representations and L-functions II (Corvallis, 1977).* Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII. American Mathematical Society, 27–61 (↑ p. 3).

— (1991). *Linear algebraic groups.* 2e éd. Graduate Texts in Mathematics **126**. Springer-Verlag, xii+288 pages. ☞ (↑ p. 4, 5).

— (2001). *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups.* History of Mathematics **21**. American Mathematical Society, xiv+184 pages (↑ p. 5).

Chevalley, Claude (2005). *Classification des groupes algébriques semi-simples.* Réédition du séminaire Chevalley (ÉNS, 1956—1958), avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck and M. Lazard. Springer-Verlag, xiv+276 pages (↑ p. 3).

Conrad, Brian (2014). « Reductive group schemes ». Notes de cours pour l'école d'été « Schémas en groupes », Luminy, 2011 (↑ p. 1, 4, 5).

Conrad, Brian, Ofer Gabber et Gopal Prasad (2010). *Pseudo-reductive groups.* New Mathematical Monographs **17**. Cambridge University Press, xx+533 pages. ☞ (↑ p. 1, 3).

Deligne, Pierre et George Lusztig (1976). « Representations of reductive groups over finite fields ». *Ann. of Math.* **103**.(1), 103–161 (↑ p. 2).

Demazure, Michel (1965). « Schémas en groupes réductifs ». *Bull. Soc. math. France* **93**, 369–413. ☞ (↑ p. 1).

Gille, Philippe (2014). « Sur la classification des schémas en groupes semi-simples ». ☞ (↑ p. 4).

Gross, Benedict H. (1996). « Groups over $\mathbf{Z}$ ». *Invent. math.* **124**, 263–279. ☞ (↑ p. 3).

Harari, David (2014). « Quelques résultats sur l'arithméique des groupes algébriques (n'utilisant pas la théorie des immeubles) ». Ce groupe de travail, exposé du 28 novembre 2014. ☞ (↑ p. 1, 4, 5).

Knus, Max-Albert et collab. (1998). *The book of involutions.* American Mathematical Society Colloquium Publications **44**. American Mathematical Society, xxii+593 pages (↑ p. 3–5).

Milne, James S. (2012). « Reductive groups ». Disponible depuis `www.jmilne.org/math/` (↑ p. 1).

Platonov, Vladimir et Andrei Rapinchuk (1994). *Algebraic groups and number theory.* **139**. Pure and Applied Mathematics. Traduit de l'original en russe de 1991. Academic Press, xii+614 pages (↑ p. 4, 5).

Satake, Ichirô [佐武一郎] (1971). *Classification theory of semi-simple algebraic groups.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 3. Marcel Dekker, viii+149 pages (↑ p. 5).

— (2001). « On classification of semisimple algebraic groups ». *Class field theory—its centenary and prospect (Tôkyô, 1998).* Adv. Stud. Pure Math. 30. 日本数学会, 197–216.

Serre, Jean-Pierre (1975). *Groupes algébriques et corps de classes.* 2e éd. Actualités scientifiques et industrielles, 1264. Hermann, 207 pages (↑ p. 5).

— (1994). *Cohomologie galoisienne.* Cinquième édition révisée et complétée. Lecture Notes in Mathematics **5**. Springer-Verlag (↑ p. 5).

Springer, T. A. (1979). « Reductive groups ». *Automorphic forms, representations and L-functions I (Corvallis, 1977).* Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII. American Mathematical Society, 3–27 (↑ p. 3–5).

— (1998). *Linear algebraic groups.* 2e éd. Progress in Mathematics **9**. Birkhäuser, xiv+334 pages. ☞ (↑ p. 3).

Steinberg, Robert (1968). *Lectures on Chevalley groups.* Yale University, iii+277 pages (↑ p. 4).

— (1999). « The isomorphism and isogeny theorems for reductive algebraic groups ». *J. Algebra* **216**.(1), 366–383. ☞ (↑ p. 3, 4).

Tits, Jacques (1966). « Classification of algebraic semisimple groups ». *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Boulder, 1965).* American Mathematical Society, 33–62 (↑ p. 5).

Weil, André (1960). « Algebras with involutions and the classical groups ». *J. Indian Math. Soc.* **24**. = [Œuvres 1960b] (↑ p. 5).