

Feuille d'exercices 9

Exercice 1. (Théorème de Kummer, suivant Lagrange) Soit K/k une extension galoisienne de groupe de Galois cyclique d'ordre n , dont on note σ un générateur. On suppose que l'ensemble μ des racines n -ièmes de l'unité dans k est de cardinal n . Pour chaque $x \in K$ et chaque $\zeta \in \mu$, on note $(\zeta, x) := \sum_{0 \leq i < n} \zeta^i \sigma^i(x)$ (résolvante de Lagrange).

- (i). Calculer $\sigma((\zeta, x))$.
- (ii). En déduire que $(\zeta, x)^n$ appartient à k .
- (iii). Soient ξ une racine primitive n -ième de l'unité et $x \in K$ tels que $\alpha := (\xi, x)$ soit non nul. Montrer que $K = k(\alpha)$.
- (iv). Pour chaque $x \in K$, calculer $\sum_{\zeta \in \mu} (\zeta, x)$.
- (v). En déduire, lorsque n est premier, l'existence d'un ξ et d'un x comme en (iii).
- (vi). Quid si n n'est pas premier ?

Exercice 2. (Une équation quintique résoluble) Soit $f = X^5 - 5X + 12 \in \mathbf{Q}[X]$, dont on note $x_0, \dots, x_4$ les racines dans $\mathbf{C}$ et G le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$.

- (i). On admet que : $X^5 - 5X + 12$ est irréductible dans $\mathbf{F}_{2011}[X]$ et que le discriminant est $2^{12}5^6$. Que peut-on dire du groupe de Galois de f ?
- (ii). On admet de plus que l'on a la factorisation suivante en polynômes irréductibles :

$$\prod_{0 \leq i < j < 5} (T - (x_i + x_j)) = (T^5 - 5T^3 - 10T^2 + 30T - 36)(T^5 + 5T^3 + 10T^2 + 10T + 4).$$

En déduire que l'équation $f = 0$ est résoluble par radicaux. (Indication : on pourra faire agir G sur un pentagone régulier et numéroté les racines de sorte que $x_i = c^i(x_0)$, où c est un 5-cycle dans G .)

- (iii). Soit z la classe de X dans le corps de rupture $K = \mathbf{Q}[X]/(f)$ de f . Montrer que le stabilisateur H d'une racine de f est isomorphe au groupe de Galois de f sur $\mathbf{Q}(z)$.
- (iv). Expliquer comment utiliser l'égalité $f = (X - z)(X^2 + \frac{1}{4}(-z^4 - z^3 - z^2 + 3z + 4)X + \frac{1}{4}(-z^4 - z^3 - z^2 - 5z + 8))(X^2 + \frac{1}{4}(z^4 + z^3 + z^2 + z - 4)X + \frac{1}{2}(-z^3 - z - 2))$ pour donner une seconde démonstration du fait que le groupe de Galois de f est de cardinal divisant 10 donc résoluble.
- (v). Montrer que G est le groupe diédral du pentagone. (Indication : on pourra réduire modulo un bon nombre premier ou bien « modulo l'infini ».)
- (vi). Soit $Y = \sum_{i \in \mathbf{Z}/5} X_i X_{i+1}^3 \in \mathbf{Q}[X_i, i \in \mathbf{Z}/5]$. Montrer que le polynôme multivarié Y est invariant par l'action du groupe cyclique $\mathbf{Z}/5$ mais pas par $i \mapsto -i$ (c'est-à-dire pas par le groupe diédral).
- (vii). En déduire que $y = x_0 x_1^3 + x_1 x_2^3 + \dots + x_4 x_0^3$ est de degré au plus 2 sur $\mathbf{Q}$. On admet qu'il est racine du polynôme $Y^2 - 10Y + 1025$. Cet élément appartient donc à $\mathbf{Q}(\sqrt{-10})$.
- (viii). Soit $\zeta = \frac{1}{4}(\sqrt{2\sqrt{5}-10} - \sqrt{5} - 1)$, une racine primitive 5-ième de l'unité et soient $r_j = x_0 + \zeta^j x_1 + \zeta^{2j} x_2 + \dots + \zeta^{4j} x_4$, pour $0 \leq j < 5$, les résolvantes de Lagrange considérées dans l'exercice précédent. Montrer que x_0 , et plus généralement chaque x_i , est une combinaison linéaire explicite à coefficients dans $\mathbf{Q}(\zeta)$ en les r_j .

- (ix). Expliquer comment on pourrait exprimer les racines x_i par radicaux et montrer en particulier que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{20} \left(\sqrt{2\sqrt{5}-10} - \sqrt{5}-1 \right) \sqrt[5]{ \left(-750 \sqrt{-5\sqrt{5}+25} + 375 \sqrt{5\sqrt{5}+25} + 1250 \sqrt{5}-3125 \right) } + \\ & \frac{1}{20} \left(\sqrt{2\sqrt{5}-10} - \sqrt{5}-1 \right) \sqrt[5]{ \left(-375 \sqrt{-5\sqrt{5}+25} - 750 \sqrt{5\sqrt{5}+25} - 1250 \sqrt{5}-3125 \right) } + \\ & \frac{1}{20} \left(\sqrt{2\sqrt{5}-10} - \sqrt{5}-1 \right) \sqrt[5]{ \left(375 \sqrt{-5\sqrt{5}+25} + 750 \sqrt{5\sqrt{5}+25} - 1250 \sqrt{5}-3125 \right) } + \\ & \frac{1}{5} \sqrt[5]{ \left(750 \sqrt{-5\sqrt{5}+25} - 375 \sqrt{5\sqrt{5}+25} + 1250 \sqrt{5}-3125 \right) } \text{ est une racine.} \end{aligned}$$

Exercice 3. (*Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.* [Gauß, 1796-3-30]) Soient $p = 2^n + 1$ un nombre premier de Fermat et $\zeta = e^{2i\pi/p}$.

- (i). Soit G un groupe (fini) cyclique. Montrer que pour tout élément $g \neq e$ de G , la somme $\sum_{\chi} \chi(g)$ est nulle, où χ parcourt l'ensemble $\widehat{G}$ des morphismes de groupes $G \rightarrow \mathbf{C}^\times$.
- (ii). Pour chaque χ dans $\widehat{\mathbf{F}_p^\times}$, on note $\mathfrak{g}_\chi$ la *somme de Gauß* $\sum_{x \in \mathbf{F}_p^\times} \chi(x) \zeta^x$. Montrer que $\sum_{\chi} \mathfrak{g}_\chi = (p-1)\zeta$.
- (iii). En déduire que la constructibilité de ζ se ramène à celle des $\mathfrak{g}_\chi^{2^n}$.
- (iv). Pour chaque $\chi, \chi' \in \widehat{\mathbf{F}_p^\times}$, montrer que la *somme de Jacobi*

$$J(\chi, \chi') = \sum_{\substack{a+b=1 \\ a, b \in \mathbf{F}_p^\times}} \chi(a) \chi'(b)$$

est constructible.

- (v). Montrer que si χ, χ' et $\chi\chi'$ sont non triviaux, on a $\mathfrak{g}_\chi \mathfrak{g}_{\chi'} = \mathfrak{g}_{\chi\chi'} J(\chi, \chi')$.
On montre par des arguments semblables que si χ est non trivial, alors $\mathfrak{g}_\chi \mathfrak{g}_{\chi^{-1}} = \chi(-1)p$.
- (vi). En déduire que si χ est d'ordre 2^r , le nombre algébrique $\mathfrak{g}_\chi^{2^r}$ est constructible.

Exercice 4. (Trisection de l'angle) On dira que $\vartheta \in \mathbf{R}$ est un *angle constructible* si le point $e^{i\vartheta}$ est constructible à la règle et au compas.

- (i). Montrer que si ϑ est un angle constructible alors $\vartheta/2$ l'est aussi.
- (ii). Montrer que si ϑ angle constructible il n'en est pas nécessairement de même de l'angle $\vartheta/3$.