École polytechnique 2012-2013
Théorie de Galois

Feuille d'exercices 7

Exercice 1. (i) Montrer que le polynôme $1+X+X^2+X^3+X^4 \in \mathbf{F}_2[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbf{F}_4$, puis qu'il est irréductible.

(ii) Montrer qu'un 4-cycle et un 3-cycle engendrent $\mathfrak{S}_4$.

(iii) Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ du polynôme $X^4+X^3-X^2+X-1$.

Exercice 2. (i) Soit $d \geq 2$ un entier et $p \geq d-2$ un nombre premier différent de 2 et 3. Montrer qu'il existe un polynôme $f \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire de degré d tel que :

- la réduction modulo 2 de f soit irréductible dans $\mathbf{F}_2[X]$,
- la réduction modulo 3 de f soit de la forme $XQ(X)$ où $Q(X) \in \mathbf{F}_3[X]$ est irréductible,
- la réduction modulo p de f ait un facteur irréductible de degré 2 et $d-2$ racines distinctes dans $\mathbf{F}_p$.

(ii) Montrer que le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ de f est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$.

Exercice 3. (i) Soit $P = p_1 p_2 \cdots p_r$ un produit de nombres premiers distincts. Soit $f \in \mathbf{Z}/P[X]$ un polynôme unitaire et $f_i \in \mathbf{F}_{p_i}[X]$ sa réduction modulo p_i ($1 \leq i \leq r$). Montrer que f est réductible si et seulement si chaque f_i l'est.

(ii) Soient $p \geq 3$ un nombre premier et $d \geq 1$ un entier. Montrer que de la proportion des polynômes à coefficients dans $\mathbf{F}_p$ irréductibles unitaires de degré d est au moins égale à $\frac{1}{2d}$.

(iii) En déduire que quand N tend vers $+\infty$, la proportion des polynômes f unitaires de degré d à coefficients entiers dans $[-N, N]$ qui sont *réductibles* tend vers 0. (Indication : on pourra commencer par montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe P comme ci-dessus tel que le nombre polynômes réductibles unitaires de $\mathbf{Z}/P[X]$ de degré d soit au plus εP^d puis considérer $N \geq P$ et le cardinal des fibres de la projection $f \mapsto f \mod P$.)

> En combinant les techniques des deux exercices précédents, on peut montrer que « la plupart » des polynômes unitaires de degré d ont pour groupe de Galois $\mathfrak{S}_d$ (cf. *Die Seltenheit der Gleichungen mit Affekt*, van der Waerden, 1933).

Exercice 4. Soit k un corps parfait et $P = X^3 + aX + b \in k[X]$ un polynôme irréductible dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les racines dans un corps de décomposition K de P. On rappelle que le discriminant $\delta(P)$ de P est $\left(\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)\right)^2$. (On peut vérifier, cf. exercice 2, qu'il est égal à $-4a^3 - 27b^2$.)

(i) Supposons que $\delta(P)$ soit un carré dans k. Que peut-on dire du groupe de Galois de P ?

(ii) Soit $f \in k[Z_1, Z_2, Z_3] = Z_1Z_2^2 + Z_2Z_3^2 + Z_3Z_1^2$. Montrer qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ est paire si et seulement si $\sigma(f) = f$. (On fait agir $\mathfrak{S}_3$ par permutation des variables.)

(iii) Montrer que $R_f(P) = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3}(T - \sigma(f)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$ appartient à $k[T]$ et l'exprimer en fonction de a et b.

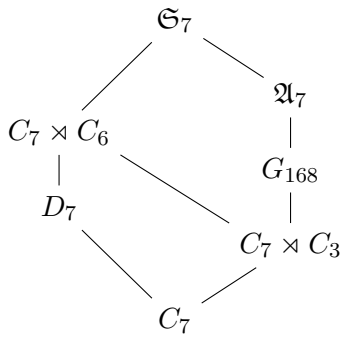
(iv) En déduire que si k est de caractéristique 2, le groupe de Galois de P est contenu dans $\mathfrak{A}_3$ ou $\mathfrak{S}_3$ selon que $1 + a^3b^{-2}$ est de la forme $x^2 + x$ ($x \in k$) ou pas.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer que le discriminant $\Delta(f)$ du polynôme $X^n + aX + b$ est

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(n^n b^{n-1} + (1-n)^{n-1}a^n\right).$$

(Indication : on pourra montrer que $\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_i f'(x_i)$, où les x_i sont les racines de f, et utiliser la formule $\prod_i(ux_i + v) = \sum_i u^i \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)v^{n-i}$ où les σ_j sont les fonctions symétriques élémentaires.)

Exercice 6. On admet que les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_7$ sont, à conjugaison près, représentés par le schéma suivant :



où :
- G_{168} (d'ordre 168) est le groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$; il agit sur les 7 droites et est abstraitement isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$;
- $C_7 \rtimes C_6$ (d'ordre 42) est le groupe $\mathrm{AGL}(\mathbf{F}_7)$ des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sur $\mathbf{F}_7$ (avec $a \in \mathbf{F}_7^\times$ et $b \in \mathbf{F}_7$) ;
- $C_7 \rtimes C_3$ (d'ordre 21) est le groupe des fonctions affines de la forme $x \mapsto ax + b$ sur $\mathbf{F}_7$ avec $a \in \{1, 2, 4\}$ (et $b \in \mathbf{F}_7$) ;
- le $D_7 = C_7 \rtimes C_2$ (d'ordre 14) le groupe diédral de l'heptagone, qui est aussi le groupe des fonctions affines de la forme $x \mapsto ax + b$ sur $\mathbf{F}_7$ avec $a \in \{1, -1\}$ (et $b \in \mathbf{F}_7$) ;
- C_7 (d'ordre 7) est le groupe cyclique.

(i) Soit $f = X^7 - 7X + 3 \in \mathbf{Z}[X]$ dont on note $x_0, \ldots, x_6$ les racines dans un corps de décomposition K sur $\mathbf{Q}$. Montrer que f est irréductible.

(ii) On admet que f a exactement trois racines dans $\mathbf{F}_{107}$. Que peut-on en déduire sur le groupe de Galois G de f ?

(iii) Montrer que le polynôme de degré 35

$$g(T) = \prod_{i<j<k} (T - (x_i + x_j + x_k))$$

appartient à $\mathbf{Q}[X]$ et est *séparable*. (Indication : pour le second point, on pourra utiliser l'existence d'un 7-cycle dans le groupe de Galois G de f et le fait que le polynôme cyclotomique $\Phi_7(Z) = 1 + Z + \cdots + Z^6$ est irréductible.)

(iv) Montrer que G_{168} agit 2-fois transitivement mais pas 3-fois transitivement sur les droites de $\mathbf{F}_2^3$. Montrer que $\mathfrak{A}_7$ agit 3-fois transitivement sur $\{1, \ldots, 7\}$.

(v) On admet que g est divisible par le polynôme $T^7 + 14T^4 - 42T^2 - 21T + 9$. En déduire que le groupe de Galois G n'est ni le groupe alterné $\mathfrak{A}_7$ ni $\mathfrak{S}_7$. Conclure.

Exercice 7. Soit K une extension finie de $\mathbf{R}$, on veut montrer que K est égal à $\mathbf{R}$ ou isomorphe à $\mathbf{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauß).

(i) Montrer que si $K/\mathbf{R}$ est de degré 2, alors $K \simeq \mathbf{C}$.

(ii) Montrer que si $K/\mathbf{R}$ est de degré impair, alors $K = \mathbf{R}$.

(iii) Montrer que $\mathbf{C}$ n'admet pas d'extension de degré 2.

(iv) Supposons $K/\mathbf{R}$ galoisienne finie. Montrer l'existence d'une tour d'extensions

$$\mathbf{R} \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n = K$$

telle que $[K_1 : \mathbf{R}]$ est impair et, pour $i = 1, \ldots, n-1$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$. (On pourra utiliser le théorème de Sylow : « *si* $|G| = p^\alpha m$ *avec* p *premier et* $(p, m) = 1$ *alors* G *contient un sous-groupe d'ordre* p^α ».)

(v) Conclure.