Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Soit p un nombre premier impair.

(**i**). Montrer que le discriminant de $X^p - 1$ est $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p^p$.

(**ii**). En déduire que $\mathbf{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}) \subseteq \mathbf{Q}(\zeta_p)$.

(**iii**). En déduire que toute extension quadratique de $\mathbf{Q}$ se plonge dans une extension cyclotomique.

Exercice 2. (Théorème de Kummer, suivant Lagrange) Soit K/k une extension galoisienne de groupe de Galois cyclique d'ordre n, dont on note σ un générateur. On suppose que l'ensemble μ des racines n-ièmes de l'unité dans k est de cardinal n. Pour chaque $x \in K$ et chaque $\zeta \in \mu$, on note $(\zeta, x) := \sum_{0 \leq i < n} \zeta^i \sigma^i(x)$ (*résolvante de Lagrange*).

(**i**). Calculer $\sigma\big((\zeta, x)\big)$.

(**ii**). En déduire que $(\zeta, x)^n$ appartient à k.

(**iii**). Soient ξ une racine *primitive* n-ième de l'unité et $x \in K$ tels que $\alpha := (\xi, x)$ soit non nul. Montrer que $K = k(\alpha)$.

(**iv**). Pour chaque $x \in K$, calculer $\sum_{\zeta \in \mu} (\zeta, x)$.

(**v**). En déduire, lorsque n est premier, l'existence d'un ξ et d'un x comme en (iii).

(**vi**). Quid si n n'est pas premier ?

Exercice 3. Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et σ l'automorphisme de $k[Z_0, \ldots, Z_{p-1}]$ qui laisse invariant les coefficients et permute cycliquement les variables : $\sigma(Z_i) = Z_{i+1 \pmod p}$. On pose $A = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} i Z_i$, et $a = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} Z_i$.

(**i**). Calculer $\sigma(A)$ et en déduire que $A^p - A a^{p-1}$ est invariant par σ.

(**ii**). En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que si K/k est une extension cyclique de degré p, il existe un élément $\alpha \in k$ tel que $K = k[X]/(X^p - X - \alpha)$.

Exercice 4. $\cos(2\pi/17)$

Soit $\omega = e^{2\pi i/17}$, et G le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{Q}(\omega)/\mathbf{Q}$. Le groupe $(\mathbf{Z}/17\mathbf{Z})^\times$ étant engendré par 3, notons $\sigma \in G$ l'automorphisme $\omega \mapsto \omega^3$ et, pour $0 \leq i \leq 4$, notons $\sigma_i = \sigma^{2^i}$. Ainsi, $G_i = \langle \sigma_i \rangle$ est l'unique sous-groupe d'indice 2^i de G. On note $\mathbf{Q} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset E_4 = \mathbf{Q}(\omega)$ les sous-corps fixes correspondants.

(**i**). Pour $0 \leq i < 4$, on pose $\beta_i = \displaystyle\sum_{0 \leq j < 2^{4-i}} (-1)^j \sigma_i^j(\omega)$, c'est-à-dire :

$\beta_0 = \omega - \omega^3 + \omega^9 - \omega^{10} + \omega^{13} - \omega^5 + \omega^{15} - \omega^{11} + \omega^{16} - \omega^{14} + \omega^8 - \omega^7 + \omega^4 - \omega^{12} + \omega^2 - \omega^6$;
$\beta_1 = \omega - \omega^9 + \omega^{13} - \omega^{15} + \omega^{16} - \omega^8 + \omega^4 - \omega^2$; $\beta_2 = \omega - \omega^{13} + \omega^{16} - \omega^4$, et $\beta_3 = \omega - \omega^{16}$.
Montrer que $E_{i+1} = E_i(\beta_i)$.

(**ii**). Comment vérifier que $\beta_0 = \sqrt{17}$? Comparer avec l'exercice 1 ou avec l'exercice 3 de la feuille 8 (sommes de Gauß).

(**iii**). Comment montrer que $\beta_1 = \sqrt{\frac{17}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}}$?

(**iv**). En observant que $\frac{1}{2}(\omega + \omega^{16}) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\beta_0 + \frac{1}{8}\beta_1 + \frac{1}{4}\beta_2$, expliquer comment trouver l'expression

$$\begin{aligned}\cos\frac{2\pi}{17} &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{17}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{17}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}} - \sqrt{\frac{17}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

Exercice 5. (Une équation quintique résoluble) Soit $f = X^5 - 5X + 12 \in \mathbf{Q}[X]$, dont on note $x_0, \ldots, x_4$ les racines dans $\mathbf{C}$ et G le groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$.

(i). On admet que : $X^5 - 5X + 12$ est irréductible dans $\mathbf{F}_{2011}[X]$ et que le discriminant est $2^{12}5^6$. Que peut-on dire du groupe de Galois de f ?

(ii). On admet de plus que l'on a la factorisation suivante en polynômes irréductibles :

$$\prod_{0 \le i < j < 5} (T - (x_i + x_j)) = (T^5 - 5T^3 - 10T^2 + 30T - 36)(T^5 + 5T^3 + 10T^2 + 10T + 4).$$

En déduire que l'équation $f = 0$ est résoluble par radicaux. (Indication : on pourra faire agir G sur un pentagone régulier et numéroter les racines de sorte que $x_i = c^i(x_0)$, où c est un 5-cycle dans G.)

(iii). Soit z la classe de X dans le corps de rupture $K = \mathbf{Q}[X]/(f)$ de f. Montrer que le stabilisateur H d'une racine de f est isomorphe au groupe de Galois de f sur $\mathbf{Q}(z)$.

(iv). Expliquer comment utiliser l'égalité $f = (X - z)\big(X^2 + \frac{1}{4}(-z^4 - z^3 - z^2 + 3z + 4)X + \frac{1}{4}(-z^4 - z^3 - z^2 - 5z + 8)\big)\big(X^2 + \frac{1}{4}(z^4 + z^3 + z^2 + z - 4)X + \frac{1}{2}(-z^3 - z - 2)\big)$ pour donner une seconde démonstration du fait que le groupe de Galois de f est de cardinal divisant 10 donc résoluble.

(v). Montrer que G est le groupe diédral du pentagone. (Indication : on pourra réduire modulo un bon nombre premier ou bien « modulo l'infini ».)

(vi). Soit $Y = \sum_{i \in \mathbf{Z}/5} X_i X_{i+1}^2 \in \mathbf{Q}[X_i, i \in \mathbf{Z}/5]$. Montrer que le polynôme multivarié Y est invariant par l'action du groupe cyclique $\mathbf{Z}/5$ mais pas par $\tau : i \mapsto -i$ (c'est-à-dire pas par le groupe diédral).

(vii). En déduire que $y = x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + \cdots + x_4x_0^2$ est de degré au plus 2 sur $\mathbf{Q}$. On admet que $y + \tau(y) = -10$ et $y\tau(y) = 275$. En déduire que $\mathbf{Q}(y) = \mathbf{Q}(\sqrt{-10})$.

(viii). Expliquer comment, en considérant une racine primitive 5-ième de l'unité

$$\zeta = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}})$$

et les résolvantes de Lagrange $r_j = x_0 + \zeta^j x_1 + \zeta^{2j} x_2 + \cdots + \zeta^{4j} x_4$, pour $0 \le j < 5$, de l'exercice 2, on pourrait montrer que l'expression suivante est une racine de f.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{20}\left(-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right) \sqrt[5]{-3125 + 1250\sqrt{5} + 375\sqrt{-10}\sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} - \frac{375}{2}\sqrt{-10}\sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}\\
&+ \frac{1}{20}\left(-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right) \sqrt[5]{-3125 - 1250\sqrt{5} - \frac{375}{2}\sqrt{-10}\sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} - 375\sqrt{-10}\sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}\\
&+ \frac{1}{20}\left(-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right) \sqrt[5]{-3125 - 1250\sqrt{5} + \frac{375}{2}\sqrt{-10}\sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} + 375\sqrt{-10}\sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}\\
&+ \frac{1}{5}\sqrt[5]{-3125 + 1250\sqrt{5} - 375\sqrt{-10}\sqrt{-10 + 2\sqrt{5}} + \frac{375}{2}\sqrt{-10}\sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}
\end{aligned}$$

Exercice 6. (Trisection de l'angle) On dira que $\vartheta \in \mathbf{R}$ est un *angle constructible* si le point $e^{i\vartheta}$ est constructible à la règle et au compas.

(i). Montrer que si ϑ est un angle constructible alors $\vartheta/2$ l'est aussi.

(ii). Montrer que si ϑ angle constructible il n'en est pas nécessairement de même de l'angle $\vartheta/3$.