エタールコホモロジーの高次順像の一様構成可能性について

Fabrice Orgogozo (CNRS, École polytechnique)

IHÉS-東大, 2010-6-9

元々の動機は次の定理と超積の関係を理解する事に有る。

定理 (O. ガバー)

Xを代数的閉体k上の滑らかな射影多様体とする。殆んど全ての素数ℓに対し、$\mathbf{Z}_\ell$加群$\mathrm{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell)$は捩れが無い。

定義

$\mathscr{P}$を素数全体の集合とし、
$A=\prod_{\ell\in\mathscr{P}}\mathbf{F}_\ell$とする。

1. $\mathscr{P}$部分集合の族$\mathfrak{L}$が、空で無く、
   有限交叉性を持って極大で有る時、
   $\mathfrak{L}$を非単項超フィルターと言う。
2. Aのイデアル$\mathfrak{m}_\mathfrak{L}=\{(a_\ell):\{\ell|a_\ell=0\}\in\mathfrak{L}\}$による剰余環$\mathbf{F}_\mathfrak{L}$は$\mathfrak{L}$に沿う$\mathbf{F}_\ell$の超積と呼ぶ。

各$\mathbf{F}_\mathfrak{L}$は標数が零で、埋め込み$\mathbf{F}_\mathfrak{L}\hookrightarrow\mathbf{C}$が
存在する様な体で有る。

$\mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$を$(\prod_\ell \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)) \otimes_A \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$とする。
$X \mapsto \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}})$がヴェイユコホモロジーを成すと仮定するならば、任意の$\ell, \mathfrak{L}$に対し、

$$\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = b^i(X) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$$

が成り立つ事が[Katz-Messing, 1974]の定理より直ぐ分かる。

- $\dim_{\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_{\mathfrak{L}}) = \lim_{\ell, \mathfrak{L}} \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)$ は $\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$の定義より従う。
- 極限が非単項超フィルター$\mathfrak{L}$に依ら無い為、殆んど全てℓに対し、$\dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) = \dim_{\mathbf{Q}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$が成り立つ。
- ガバーの定理は普遍係数定理

$$0 \to \mathrm{H}^i(X, \mathbf{Z}_\ell) \otimes \mathbf{F}_\ell \to \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell) \to \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathbf{Z}_\ell)[\ell] \to 0,$$

から導かれる。

然し、$\mathbf{F}_{\mathfrak{L}}$コホモロジーがヴェイユコホモロジーで有るかどうかを確かめるには
次の事が有効で有る
（[Tomašić, 2004]を参照せよ）:

$$\ell \mapsto \dim_{\mathbf{F}_\ell} \mathrm{H}^i(X, \mathbf{F}_\ell)\text{が有界関数で有る事。}$$

上記と[Illusie, 2010]に於いて、捻れについての
ガバー定理が此の事実の証明に使われている。

此の講演では
定数層とは限らずに、
相対的な場合の
類似の有限性定理を考える。

定義

Xをネータースキームとし、
$\mathscr{F}$をX上のエタール層とする。
若し、任意の幾何学的点$\overline{x}$と
任意の強ヘンゼル化$X_{(\overline{x})}$の点yに対し、
$\pi_1(y)$のシローp_x部分群が
茎$\mathscr{F}_{\overline{y}}$へ自明な作用するならば、
層$\mathscr{F}$を稔と言う。
（p_xは$\kappa(\overline{x})$の指標数で有る。）

補題 (Abhyankar)

Xを正則スキームとし、
Dを其の単純正規因子とする。
$\mathscr{L}$を$U = X - D$上の局所定数層とする。
次は同値で有る。

1. $\mathscr{L}$はDに沿って穏。
2. $(U \hookrightarrow X)_! \mathscr{L}$は穏。

定義

X上の層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。
各逆像$p^*\mathscr{F}_l$が穏と成る固有全射$p : X' \to X$が有る時、族$\mathscr{F}$は一様固有的穏(*upm*)と言う。

定義

X上の構成可能層の族$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l)_{l \in L}$とする。
或る滑層分割が任意の滑層に対し、
各$\mathscr{F}_l$の制限が局所定数層と成る様
に存在する時、
族$\mathscr{F}$は一様構成可能 *(uc)*と言う。

此処からは体か優秀離散付値環の
スペクトラムSを固定する。
S上の有限型なスキームの成す圏の
対象や射だけを考える。
$n=(n_l)_{l\in L}$をS上の可逆な整数の族とし、
nに対応する係数の族を$\Lambda=(\mathbf{Z}/n_l)_{l\in L}$で表す。
$\prod_l D^b_c(X,\mathbf{Z}/n_l)$の部分圏$D^{ub}_{ucpm}(X,\Lambda)$ の定義は
明らかで有る。

定理

$f: X \to Y$を固有射とする。
関手$\mathscr{F} = (\mathscr{F}_l) \mapsto \mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{R}f_*\mathscr{F}_l)$
が関手

$$D^{ub}_{ucpm}(X, \Lambda) \to D^{ub}_{ucpm}(Y, \Lambda)$$

を誘導する。更に、
定数$C_{f,\mathscr{F}}$が存在し、任意のi, lに対し、

$$「階数\left(\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}_l)\right) \leq C_{f,\mathscr{F}} \cdot 階数\left(\mathscr{F}_l\right)」$$

を満たす。

例

Xを標数pの代数的閉体k上の滑らかな固有多様体とし、Dを単純正規因子、UはDの補開部分とする。定数$C_{X,D}$が存在し、任意の$U = X - D$上の$\mathbf{F}_\ell$-穏局所定数層$\mathscr{L}$に対し、

$$h^i_c(U, \mathscr{L}) \leq C_{X,D} \cdot \text{階数}(\mathscr{L})$$

を満たす。

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。
- $\mathscr{F} = j_!\mathscr{L}$と仮定して良い。
（$\mathscr{L}$は局所定数層の族、
$j : U \hookrightarrow X$、開埋め込み。）

定義

結節曲線$f : X \to Y$とし、U, V を其々Xの稠密開集合及びYの稠密開集合とする。

1. V上でfが滑らかで、
2. Y上にエタール因子$D \subseteq$ 平滑軌跡$_X(f)$が有り、$U = f^{-1}(V) \cap (X - D)$と成る時

fは(U, V)に適合していると言う。

定義

射$f:X\to Y$が(U,V)に適合している多重結節射で有るとは

分解$f=(f_d:X=X_d\to X_{d-1})\circ\cdots\circ(f_1:X_1\to X_0=Y)$で

X_iの稠密開集合U_i（$U_0=V$且つ$U_d=U$）

が存在し、

各f_iが(U_i,U_{i-1})に適合している結節曲線

と成る事。

「ネジを抜く事」

（大要）

- $\mathscr{F}$は穏と仮定して良い。
- $\mathscr{F} = j_!\mathscr{L}$と仮定して良い。
（$\mathscr{L}$は局所定数層の族、
$j : U \hookrightarrow X$、開埋め込み。）
- fは(U, V)に適合している多重結節射、
(Y, V)はトーリックと仮定して良い。

- 論文[de Jong, 1997]の結果
（曲線の族のオルタレーション）
- 三重の帰納法
（Yの次元、fの次元、截頭作用の次数）
- 或るガバーの補題 ([Orgogozo, 2006])

を用いる。

補題 (O. ガバー)

Xをネータースキームとし、
Fを閉部分スキーム、$F' \to F$を固有全射
とする。
次の事が成り立つ様な固有全射$X' \to X$が
存在する：各$F \times_X X'$の既約成分から
F'へF上の射が存在する事。

- 論文[de Jong, 1997]の結果
（曲線の族のオルタレーション）
- 三重の帰納法
（Yの次元、fの次元、截頭作用の次数）
- 或るガバーの補題
- 論文[de Jong, 1996]の結果。

を用いる。

次の命題を証明すれば良い。

命題

Yを正則スキームとし、
D_Yを其の単純正規因子、
$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込み
とする。
$f : X \to Y$を固有射とし、$j : U \hookrightarrow X$をfが
(U, V)に適合している様な開埋め込みとする。
其の時、$j_! \mathscr{L}$が穏で有るの任意の
U上の局所定数層$\mathscr{L}$と各$i \in \{0, 1, 2\}$に対し、
次の事が成り立つ。
層$\mathrm{R}^i f_*(j_! \mathscr{L})$は穏で、$\mathrm{R}^i f_*(j_! \mathscr{L}) \simeq k_! \mathscr{M}_i$と成る
局所定数層$\mathscr{M}_i$が存在する。

以上の問題に帰着する為には、
次の定理を用いる。

- ペア(Y, V)がトリックとし、
  $f : X \to Y$が(U, V)に適合している時、
  ペア(X, U)もトリックで有る。
- トリックペアの特異点解消
  [加藤和也, 1994]。

詳しくは、

$$
\begin{tikzcd}
(X, U) \arrow[d, "\begin{array}{c} h \\ \text{結節} \end{array}"] \arrow[dd, bend right, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X_\bullet, U_\bullet) \arrow[l] \arrow[d, "h_\bullet"] \\
\begin{array}{c} (Z, W) \\ \text{トリック} \end{array} \arrow[d, "\begin{array}{c} g \\ \text{多重結節} \end{array}"] & (Z_\bullet, W_\bullet) \arrow[l] \arrow[dl, bend left, "g_\bullet"] \\
\begin{array}{c} (Y, V) \\ \text{トリック} \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

命題

Yを正則スキームとし、
D_Yを其の単純正規因子、
$k : V \hookrightarrow Y$を補開部分スキームの開埋め込み
とする。
$f : X \to Y$を固有射とし、$j : U \hookrightarrow X$をfが
(U, V)に適合している様な開埋め込みとする。
其の時、$j_!\mathscr{L}$が穏で有るの任意の
U上の局所定数層$\mathscr{L}$と各$i \in \{0, 1, 2\}$に対し、
次の事が成り立つ。
層$\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L})$は穏で、$\mathrm{R}^i f_*(j_!\mathscr{L}) \simeq k_!\mathscr{M}_i$と成る
局所定数層$\mathscr{M}_i$が存在する。

命題の証明:局所定数性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。
- $R\Phi(j_!\mathscr{L}) = 0$ (SGA 7, XIII, 2.1.11).

命題の証明：穏性。

- Yが離散付値環のスペクトラムと仮定して良い。
- $\mathscr{L}$が定数層と仮定して良い。
- 中山能力の対数的非輪状性の定理を用いる。
（[Illusie, 2002, 8.4.3]）

一般化:
必ずしもfが固有射とは限ら無い場合。

- コンパクト的に穏層$\mathscr{F}$:
  コンパクト化$k : X \hookrightarrow \overline{X}$が存在し、
  $k_!\mathscr{F}$は穏と成る。
- 次の場合は重要で有る

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 = U_{12} = X - (D_1 \cup D_2) \arrow[r, "j_{12,1}"] \arrow[d, "j_{12,2}"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U_1 = X - D_1 \arrow[d, "j_1"] \\
U_2 = X - D_2 \arrow[r, "j_2"] & \underset{\text{正則}}{X}
\end{tikzcd}
$$

補題

X等は上の様な物とする。
$\mathscr{L}$はXに於いて可逆な捻れを持ち、Dに沿って穏のU_1上局所定数で有る層の族とする。
其の時、族

$$\mathrm{R}j_{2*}\left(j_{12,2!}{j_{12,1}}^{*}\mathscr{L}\right)$$

は一様構成可能で穏で有る。

終り