II. Topologies adaptées à l'uniformisation locale
Fabrice Orgogozo
version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

Table des matières

Dans cet exposé, ℓ est un nombre premier, l'entier 1 ou bien le symbole ∞ et l'on note ℓ' l'ensemble des entiers naturels premiers à ℓ où, par convention, $\infty' = \{1\}$.

1. Morphismes maximalement dominants et la catégorie alt/S

1.1. Morphismes maximalement dominants. —

1.1.1. — Rappelons ([**ÉGA** IV 1.1.4]) qu'un point d'un schéma est dit **maximal** s'il est le point générique d'une composante irréductible ou, de façon équivalente, s'il est maximal pour l'ordre sur l'ensemble des points du schéma défini par la relation : $x \geq y$ si et seulement si y est une spécialisation de x (c'est-à-dire si $y \in \overline{\{x\}}$). Les points maximaux d'un schéma affine correspondent aux idéaux premiers minimaux. Tout ouvert dense d'un schéma nœthérien contient la totalité des points maximaux ; c'est plus généralement vrai lorsque le nombre de composantes irréductibles est localement fini, ou bien lorsque l'on suppose l'ouvert *rétrocompact*.

Définition 1.1.2. — Un morphisme de schémas est dit **maximalement dominant** s'il envoie tout point maximal de la source sur un point maximal du but.

Un morphisme entre schémas irréductibles est maximalement dominant si et seulement si il est dominant. Il est clair que le composé de deux morphismes maximalement dominants est maximalement dominant.

Exemple 1.1.3. — D'après [**ÉGA** IV$_2$ 2.3.4], un morphisme plat, ou plus généralement quasi-plat (*op. cit.*, 2.3.3), est générisant ([**ÉGA** I′ 3.9.1]) donc maximalement dominant (*op. cit.*, 3.9.5).

Proposition 1.1.4. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme maximalement dominant. Tout point maximal de Y appartenant à l'image de f est l'image d'un point maximal de X.*

Démonstration. — Cela résulte du fait que f est croissante pour le préordre ci-dessus et du fait que tout point de X a une générisation maximale. □

Proposition 1.1.5. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme maximalement dominant et $Y' \to Y$ un morphisme* plat. *Alors, le morphisme $X' = X \times_Y Y' \to Y'$ est maximalement dominant.*

Démonstration. — Voir [**ÉGA** IV$_2$ 2.3.7 (ii)]. □

Rappelons la proposition suivante.

***Proposition 1.1.6* ([ÉGA IV 20.3.5]).** — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme maximalement dominant. Supposons que X est* réduit *et que Y n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, pour tout ouvert U de Y et tout ouvert V dense dans U, l'ouvert $f^{-1}(V)$ est dense dans $f^{-1}(U)$.*

L'hypothèse sur Y assure que tout point maximal de U appartient à V ; elle est satisfaite lorsque Y est nœthérien.

Proposition 1.1.7. — *Soit Y un schéma nœthérien et soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini,* maximalement dominant. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *Il existe un ouvert dense de Y au-dessus duquel f est fini.*
ii. *Pour tout point maximal η de X, l'extension $\kappa(\eta)/\kappa(f(\eta))$ est finie.*

Un morphisme de schémas satisfaisant la condition (i) ci-dessus est dit **génériquement fini** (en bas).

Démonstration. — Comme rappelé ci-dessus, tout ouvert dense du schéma nœthérien Y contient ses points maximaux. On peut supposer Y irréductible et X, Y réduits : on utilise le fait que f est fini si et seulement si $f_{\text{réd}}$ l'est. Par passage à la limite ([**ÉGA** IV 8.10.5.(x)]), on peut également supposer que Y est le spectre d'un corps k. Dans ce cas, la conclusion résulte de [**ÉGA** I 6.4.2 et 6.4.4]. □

Définition 1.1.8. — On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est **maximalement ℓ'-fini** si pour tout point maximal η de X, l'extension $\kappa(\eta)/\kappa(f(\eta))$ est finie et si pour tout point maximal μ de Y dans l'image de f, il existe un point maximal η de X au-dessus de μ tel que l'extension $\kappa(\eta)/\kappa(\mu)$ soit de degré appartenant à ℓ'.

1.1.9. — Lorsque $\ell = 1$, la seconde condition est vide. Il est utile de faire les conventions de langage suivantes : un morphisme maximalement ℓ'-fini et maximalement dominant est dit **maximalement ℓ'-fini dominant**, et un morphisme maximalement $1'$-fini « **maximalement fini** ».

Proposition 1.1.10. — *Soient S un schéma et $f : X \to Y$ un S-morphisme entre S-schémas maximalement dominants. Si Y/S est maximalement fini, f est maximalement dominant. Si l'on suppose de plus X/S maximalement fini, le morphisme f est maximalement fini dominant.*

Démonstration. — Soient x un point maximal de X et s (resp. y) son image dans S (resp. Y). Soit $y' \geq y$ une générisation maximale de y. Les schémas X et Y étant maximalement dominants sur S, le point s est maximal et y' est d'image s. Enfin, si Y/S est maximalement fini, l'extension $\kappa(y')/\kappa(s)$ est finie de sorte que y' est fermé dans la fibre Y_s. Le point y, appartenant à l'adhérence de y' dans Y_s, coïncide donc avec y' : le morphisme f est maximalement dominant. Si l'on suppose de plus X/S maximalement fini, la finitude de l'extension $\kappa(x)/\kappa(s)$ entraîne celle de l'extension intermédiaire $\kappa(x)/\kappa(y)$. □

1.2. La catégorie alt/S. —

1.2.1. — Soit S un schéma nœthérien. Notons η_S le schéma coproduit (fini) de ses points maximaux.

Définition 1.2.2. — On note alt/S la catégorie des S-schémas de type fini, maximalement finis dominants, de source un schéma *réduit*. Les morphismes dans alt/S sont les S-morphismes.

1.2.3. — Notons les faits suivants :
- le S-schéma $S_{\text{réd}}$ est final dans la catégorie alt/S ;
- tout morphisme de alt/S est maximalement fini dominant (1.1.10) ;
- les images inverses de diviseurs existent pour tout morphisme de alt/S ([**ÉGA** IV 21.4.5.(iii)]) ;
- si $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{alt}/S$ et $S' \to S$ est un morphisme *réduit* ([**ÉGA** IV_2 6.8.1]) avec S' nœthérien, le produit fibré usuel $X' = X \times_S S'$ est naturellement un objet de alt/S'. Il en est plus généralement ainsi de $X'_{\text{réd}}$ dès lors que $S' \to S$ est plat. De même, si $X' \to X$ est un morphisme quasi-fini réduit (par exemple étale) et $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{alt}/S$, alors X' est également un objet de alt/S.

Remarques 1.2.4. —

i. Le produit fibré usuel de deux S-schémas maximalement dominants n'est pas nécessairement maximalement dominant, comme on peut le constater lorsque $S = \mathbf{A}^2$ et $X = Y$ sont l'éclatement en l'origine.
ii. La définition originale de la catégorie alt/S, due à O. Gabber, est moins restrictive sur le schéma S, supposé seulement cohérent et ayant un nombre fini de composantes irréductibles. Les objets de alt/S sont alors les S-schémas de type fini quasi-séparés réduits, maximalement dominants, génériquement finis. Le cadre nœthérien semble suffisant pour nos besoins. Signalons cependant que les « localisés » d'un schéma nœthérien pour la topologie des altérations (introduite ci-dessous) ne sont pas nécessairement nœthériens (voir 4.2.1).

1.2.5. — Soit X un S-schéma de type fini. On note X_{md} — ou bien $X_{\text{md}/S}$ en cas d'ambiguïté sur S — l'adhérence de l'image (ensembliste) de X_{η_S} dans X, muni de la structure réduite. C'est la réunion des composantes irréductibles de X dominant une composante irréductible de S, munie de la structure réduite. (Lorsque $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{alt}/S$, $X_{\eta_S} = \eta_X$.) Le foncteur $T \mapsto T_{\text{md}}$ est adjoint à droite au foncteur d'inclusion de la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalement dominants sur S dans la catégorie des S-schémas de type fini.

Proposition 1.2.6. — *Les produits fibrés existent dans* alt/S.

Démonstration. — Soient $X \to S' \leftarrow Y$ deux flèches dans alt/S ; d'après 1.1.10, les schémas X et Y sont naturellement des objets de alt/S'. Le composé de deux morphismes maximalement finis dominants de type fini étant de même nature, un produit de X et Y, vus dans alt/S', est — s'il existe — un produit fibré dans alt/S. On peut donc supposer $S = S'$ et S réduit. Il résulte formellement de l'existence du produit dans la catégorie des

S-schémas de type fini et de la propriété d'adjonction de $X \mapsto X_{md}$ que le schéma $(X \times_S Y)_{md}$, muni des deux projections évidentes, est le produit de X et Y dans la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalement dominants sur S. Il appartient à $\mathrm{Ob}\,\mathrm{alt}/S$ car $((X \times_S Y)_{md})_{\eta_S} = (X_{\eta_S} \times_{\eta_S} Y_{\eta_S})_{\text{réd}}$ est fini sur η_S. □

1.2.7. — Pour éviter toute ambiguïté, on notera parfois $X \times^S_{S'} Y$ le produit fibré de X et Y au-dessus de S' dans alt/S, ou plus généralement dans la catégorie des schémas réduits, de type fini et maximalement dominants sur S. Signalons également les faits suivants, de démonstration immédiate (le premier ayant été vu au court de la démonstration précédente) :

- si $X \to S' \leftarrow Y$ est un diagramme dans alt/S, le morphisme $X \times^{S'}_{S'} Y \to X \times^S_{S'} Y$ déduit du foncteur évident $\mathrm{alt}/S' \to \mathrm{alt}/S$ est un isomorphisme ;
- Si $X \to S' \leftarrow Y$ est un diagramme de S-schémas de type fini, les coünités induisent un isomorphisme $X_{md/S} \times^S_{S'_{md/S}} Y_{md/S} \xrightarrow{\sim} (X \times_{S'} Y)_{md/S}$.

Proposition 1.2.8. — *Soit $f : X \to Y$ une immersion ouverte (resp. un morphisme propre et surjectif, resp. quasi-fini) entre deux S-schémas de type fini. Le morphisme $f_{md} : X_{md} \to Y_{md}$ est une immersion ouverte (resp. un morphisme propre et surjectif, resp. quasi-fini). Enfin, si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski d'un S-schéma de type fini X, les ouverts $(U_{i\,md})_{i\in I}$ recouvrent le schéma X_{md}.*

Démonstration. — Le cas où f est une immersion ouverte est conséquence du fait général bien connu suivant sur les topologies induites : la trace sur un *ouvert* de l'adhérence d'une partie coïncide avec l'adhérence de la trace de cette partie (voir p. ex. [**Bourbaki**, **TG**, I, § 3, n° 1, prop. 1] pour une variante). Si $f : X \to Y$ est propre et surjectif, les morphismes $X_{md} \to X$ et $Y_{md} \to Y$ sont des immersions fermées ; les schémas X_{md} et Y_{md} sont donc propres sur Y. Le Y-morphisme f_{md} est donc propre et son image contient $f_{\eta_S}(X_{\eta_S}) = Y_{\eta_S}$ et donc son adhérence Y_{md}. Le cas d'un morphisme quasi-fini est laissé au lecteur. Vérifions le dernier énoncé. Que les $U_{i\,md}$ soient des ouverts a déjà été vu ; il faut vérifier la surjectivité. Elle résulte des égalités $X_{md} \cap U_i = U_{i\,md}$ et du fait que $X = \bigcup_i U_i$. □

2. Topologies : définitions

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma nœthérien S.

2.1. Topologie étale ℓ'-décomposée. —

2.1.1. — Nous dirons qu'un recouvrement étale $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'un schéma X est ℓ'-**décomposé** si tout point de X peut être relevé en un point x_i d'un X_i tel que le degré $[\kappa(x_i) : \kappa(x)]$ appartienne à ℓ'. Lorsque $\ell = 1$ la condition imposée est vide et l'on dit simplement que la famille constitue un recouvrement étale. Lorsque $\ell=\infty$, on retrouve la définition de [**Nisnevič, 1989**, § 1] et l'on dit alors, comme dans *op. cit.*, que le recouvrement est **complètement décomposé**.

Le résultat de stabilité suivant résulte immédiatement du (i) du lemme ci-dessous (2.1.3).

Proposition 2.1.2. — *La propriété d'être un recouvrement étale ℓ'-décomposé est stable par changement de base.*

D'après 1.2.3, il n'y a pas lieu de préciser s'il s'agit du changement de base usuel ou, le cas échéant, dans une catégorie alt/S.

Lemme 2.1.3. — *Soient k un corps, K/k une extension finie et k'/k une extension quelconque. Notons K' la k'-algèbre finie $K \otimes_k k'$.*

1. *Soit ℓ un nombre premier et supposons le degré $[K : k]$ d'ordre premier à ℓ. Alors, au moins un corps résiduel de K' est de degré sur k' premier à ℓ.*
2. *Supposons K' locale et notons κ' son corps résiduel. Alors, le degré $[K : k]$ est produit de $[\kappa' : k']$ par une puissance de l'exposant caractéristique p de k.*

Démonstration. — (i) Écrivons $K' = \prod_i K'_i$ avec K'_i locale. Il existe un indice i tel que $[K'_i : k']$ soit premier à ℓ, puisqu'il en est ainsi de leur somme. Soit $\mathfrak{m}_i$ l'idéal maximal de K'_i ; le degré de l'extension $[\kappa(\mathfrak{m}_i) : k']$ divise $[K'_i : k']$, puisqu'il existe un corps de représentants ; ceci permet de conclure. (ii) Le résultat est trivial si l'extension K/k est étale car $[K : k] = [K' : k']$ et, dans ce cas, $\kappa' = K'$. Si K/k est finie radicielle, $[K : k]$ est une puissance de p et, comme on l'a vu, $[\kappa' : k']$ divise son degré. Ceci permet de conclure. □

2.1.4. — On appelle **topologie étale** ℓ'-**décomposée** la topologie de Grothendieck sur alt/S, notée $\text{ét}_{\ell'}$, définie par la prétopologie constituée des recouvrements étales ℓ'-décomposés.

2.2. Sorites sur le lieu ℓ'-décomposé. —

2.2.1. — Pour chaque morphisme de schémas $f : Y \to X$, posons

$$\text{déc}_{\ell'}(f) = \{x \in X : \exists y \in Y \text{ tel que } f(y) = x,\ [\kappa(x) : \kappa(y)] \text{ fini appartenant à } \ell'\}.$$

Lorsque $\ell = \infty$, on retrouve l'ensemble $\mathrm{cd}(f)$ introduit par Y. Nisnevič. Nous utiliserons également cette notation.

Proposition 2.2.2. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme étale, avec X nœthérien. L'ensemble* $\text{déc}_{\ell'}(f)$ *est* ind-constructible, *c'est-à-dire — X étant nœthérien — réunion de parties localement fermées.*

Démonstration. — On peut supposer X et Y intègres, de points génériques notés η et μ respectivement. Par récurrence nœthérienne, il suffit de montrer que si η appartient à l'ensemble $\text{déc}_{\ell'}(f)$, celui-ci contient un ouvert de X. On peut supposer de plus X et Y affines d'anneaux A et B respectivement, et le morphisme $A \to B$ *fini*. La fonction $\mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} B/\mathfrak{p}B$, $X \to \mathbf{N}$, est localement constante pour la topologie de Zariski car B est plat de présentation finie — donc localement libre — sur A. Elle prend la valeur $[\kappa(\mu) : \kappa(\eta)]$ — première à ℓ — en η. Il en est donc ainsi au voisinage de η ; la conclusion en résulte aussitôt. □

Précisons un peu ce résultat lorsque $\ell = \infty$.

Proposition 2.2.3. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme localement de type fini, avec X nœthérien. Un point $x \in X$ appartient à* $\mathrm{cd}(f)$ *si et seulement si il existe un sous-schéma Z de X contenant x au-dessus duquel f a une section.*

Démonstration. — La condition est bien entendu suffisante. Considérons $x \in \mathrm{cd}(f)$; c'est le point générique du sous-schéma fermé réduit $\overline{\{x\}}$. Par hypothèse, il existe une section au-dessus de ce point. Le morphisme f étant localement de présentation finie, cette section s'étend par passage à la limite à un ouvert $Z = U \cap \overline{\{x\}}$ de $\overline{\{x\}}$, où U est un ouvert de X. □

Corollaire 2.2.4. — *Soient X un schéma nœthérien et $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ un recouvrement de X pour la topologie étale ℓ'-décomposée. Il existe alors un sous-ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que la famille $(U_i \to X)_{i\in I_0}$ soit également couvrante.*

Rappelons qu'un morphisme étale est, par définition, localement de présentation finie.

Démonstration. — D'après [**ÉGA** IV 1.9.15], l'espace topologique X^{cons}, dont l'espace sous-jacent est X et dont les ouverts sont les parties ind-constructibles de X, est *compact* car X est cohérent. Les ensembles $\text{déc}_{\ell'}(f_i)$ en constituent un recouvrement par des ouverts. □

Proposition 2.2.5. — *Soit $(U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} X_\alpha)_{\alpha\in A}$ un système projectif, filtrant, cartésien, de morphismes étales entre schémas nœthériens, à morphismes de transition affines. Notons $f_\infty : U_\infty \to X_\infty$ le morphisme induit sur la limite projective et, pour chaque α, notons π_α la projection $X_\infty \to X_\alpha$. On a*

$$\mathrm{cd}(f_\infty) = \bigcup_\alpha \pi_\alpha^{-1}\big(\mathrm{cd}(f_\alpha)\big).$$

En particulier, si $\mathrm{cd}(f_\infty) = X_\infty$, *il existe α_0 tel que* $\mathrm{cd}(f_\alpha) = X_\alpha$ *pour chaque $\alpha \geq \alpha_0$.*

Démonstration. — L'inclusion du terme de droite dans le terme de gauche est évidente. Considérons réciproquement un point x_∞ dans $\mathrm{cd}(f_\infty)$. Le morphisme f_∞ a une section sur un sous-schéma de présentation finie Z_∞ contenant x_∞. Le morphisme et la section se descendent par passage à la limite à un niveau fini α (voir [**ÉGA** IV 8.6.3, 8.8.2]). Si $\mathrm{cd}(f_\infty) = X_\infty$, il résulte de la compacité de X_∞^{cons} — par cohérence de X_∞, les morphismes $X_\infty \to X_\alpha$ étant affines — que $X_\infty = \pi_\alpha^{-1}(\mathrm{cd}(f_\alpha))$ pour α suffisamment grand. L'égalité $X_\alpha = \mathrm{cd}(f_\alpha)$ pour α grand résulte alors de [**ÉGA** IV 8.3.11]. □

Les quatre énoncés précédents sont valables, *mutatis mutandis*, lorsque l'on fait des hypothèses de présentation finie locale sur les morphismes et de cohérence sur leurs buts.

Pour référence ultérieure, signalons le résultat suivant de descente d'une section.

Proposition 2.2.6. — *Soient k'/k une extension finie de corps de degré premier à ℓ et K/k une extension finie de degré une puissance de ℓ. Posons $K' = k' \otimes_k K$. Si le morphisme* $\mathrm{Spec}(K') \to \mathrm{Spec}(K)$ *possède une section, le morphisme* $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ *possède également une section : c'est un isomorphisme.*

(Notons qu'un morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ a une section si et seulement si le morphisme $X_{\text{réd}} \to \mathrm{Spec}(k)$ qui s'en déduit a une section.)

Démonstration. — Cela résulte du fait que l'image de k' dans K par le morphisme composé $k' \to K' \to K$, où la seconde flèche est la rétraction dont on suppose l'existence, est à la fois de degré premier à ℓ et de degré une puissance de ℓ sur k. □

2.3. Topologie des ℓ'-altérations. —

2.3.1. — On appelle **topologie des ℓ'-altérations** la topologie de Grothendieck sur alt/S, notée $\mathrm{alt}_{\ell'}$, définie par la prétopologie engendrée par

i. les recouvrements étales *ℓ'-décomposés* ;
ii. les morphismes propres *maximalement ℓ'-finis* surjectifs.

Prendre garde au fait que la seconde condition (« maximalement ℓ'-fini ») porte sur les points maximaux tandis que la première (« ℓ'-décomposé ») sur tous les points.

Remarques 2.3.2. —

i. Les familles précédentes ne constituent pas une prétopologie au sens de [**SGA 4** II 1.3] : la condition de stabilité par composition n'est pas satisfaite. Les autres conditions le sont, notamment la quarrabilité des morphismes (1.2.6).
ii. On trouvera une variante de la définition précédente dans [**Kelly, 2012**, § 3].

2.3.3. — La topologie $\mathrm{alt}_{1'}$ est appelée **topologie des altérations**, notée simplement alt.

3. Formes standard

Dans ce paragraphe, on fixe un schéma nœthérien S et X un objet de alt/S.

3.1. Topologie étale. — Le cas $\ell = 1$ de l'énoncé ci-dessous est un prototype bien connu des résultats que nous allons établir.

Proposition 3.1.1. — *Toute famille couvrante $(U_i \to X)_{i\in I}$ pour la topologie étale ℓ'-décomposée est dominée par une famille $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrante du type*

$$(V_i \to Y \to X)_{i\in I}$$

où $Y \to X$ est fini, maximalement ℓ'-fini, surjectif et $(V_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement étale complètement *décomposé. Si $\ell = 1$, on peut supposer que $(V_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski.*

Démonstration. — On peut supposer l'ensemble I fini (2.2.4) et X intègre. Par passage à la limite, on peut supposer de plus X normal, de corps des fractions ayant un groupe de Galois (absolu) pro-ℓ. (Le schéma X n'est donc pas nécessairement nœthérien.) Or, un morphisme étale ℓ'-décomposé d'un tel schéma est nécessairement complètement décomposé car le groupe de Galois des corps résiduels est également pro-ℓ. Pour le complément lorsque $\ell = 1$, voir p. ex. [**Orgogozo, 2006**, lemme 10.3]. □

3.2. Topologie des altérations. — Dans ce sous-paragraphe, on fixe un nombre premier ℓ.

Théorème 3.2.1. — *Supposons le schéma nœthérien X irréductible. Toute famille couvrante pour la topologie des ℓ'-altérations de X est dominée par une famille couvrante du type suivant :*

$$(V_i \to Y \to X)_{i\in I},$$

où Y est un schéma intègre, $Y \to X$ est propre et surjectif de degré générique premier à ℓ et $(V_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement pour la topologie complètement décomposée. Si de plus $\ell = 1$, on peut supposer que $(V_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement par des ouverts de Zariski.

Commençons par la démonstration du cas particulier $\ell = 1$, bien qu'il résulte du cas général (joint à 3.1.1 pour le complément).

Démonstration dans le cas où $\ell = 1$. — On peut supposer l'ensemble I fini. D'après 3.1.1, il suffit de montrer que si $(U_i \to X)_{i\in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts de Zariski et $(X_i \to U_i)_{i\in I}$ une collection de morphismes propres et surjectifs, il existe un morphisme propre et surjectif $Y \to X$ dans alt/S et un recouvrement par des ouverts de Zariski $(V_i \to Y)_{i\in I}$ tels que chaque morphisme composé $V_i \to X$ se factorise à travers $X_i \to X$. Choisissons pour chaque i une compactification $\overline{X_i} \to X$ de $X_i \to X$; on a $\overline{X_i}_{|U_i} = X_i$. Posons $Y = \overline{X_1} \times_X \cdots \times_X \overline{X_r}$, où $I = \{1, \dots, r\}$, et $V_1 = X_1 \times_X \overline{X_2} \times_X \cdots \times_X \overline{X_r}$, $V_2 = \overline{X_1} \times_X X_2 \times_X \overline{X_3} \times_X \cdots \times_X \overline{X_r}$, etc. Les ouverts V_i recouvrent le schéma $\overline{X}$, qui est propre et surjectif sur X. Par projection sur le i-ième facteur, chaque V_i s'envoie sur X_i. Quitte à appliquer le foncteur $T \mapsto T_{\mathrm{md}}$ (1.2.5), qui transforme un morphisme propre et surjectif (resp. un recouvrement de Zariski) en un morphisme propre et surjectif (resp. en un recouvrement de Zariski) (voir 1.2.8), on obtient un recouvrement du type désiré dans alt/S. Si, comme on l'a supposé, X est irréductible, le schéma Y peut être supposé intègre. □

Démonstration dans le cas général. — Il suffit de vérifier que si $(U_i \to X)_{i \in I}$ est un recouvrement étale complètement décomposé de X et $(X_i \to U_i)_{i\in I}$ une collection de morphismes propres, surjectifs, maximalement ℓ'-finis, il existe une famille comme dans l'énoncé la dominant. On peut supposer l'ensemble I fini et le schéma X intègre. Commençons par traiter le cas où X est universellement japonais (p. ex. quasi-excellent) ; on peut alors le supposer également normal, ce que nous faisons. Il est loisible de supposer les U_i connexes (normaux) et les morphismes $X_i \to U_i$ *finis*, surjectifs, plats et de degré générique premier à ℓ : chaque $X_i \to X$ étant génériquement plat (X est réduit), quitte à remplacer X par une modification $X' \to X$, on peut les platifier ([**Raynaud & Gruson, 1971**, I 5.2.2]), ce qui les rend *finis*. Quitte à ne considérer qu'une seule composante irréductible de chaque X_i, de degré générique premier à ℓ et à la normaliser, on peut supposer les X_i normaux connexes. Résumons :

— les schémas X, U_i et X_i sont normaux intègres (de corps des fractions notés respectivement K, K_i et K'_i) ;
— les morphismes $X_i \to U_i$ sont finis de degrés génériques premiers à ℓ.

Soit L une clôture quasi-galoisienne (=normale) sur K d'une extension composée des K'_i, et considérons X_L le normalisé de X dans L. De même, considérons pour chaque i, le produit fibré $U_{iL} = U_i \times_X X_L$ (resp. le produit fibré réduit normalisé $X_{iL} = (X_i \times_X X_L)^{\mathrm{nor}}_{\mathrm{réd}}$). Compte tenu du choix de L, les morphismes $X_{iL} \to U_{iL}$ admettent une section au-dessus de $\mathrm{Spec}(L)$. Ces morphismes étant finis et les U_{iL} étant *normaux*, les sections s'étendent en des sections $\sigma_i : U_{iL} \to X_{iL}$. Soit maintenant un ℓ-Sylow S_ℓ de $\mathrm{Aut}(L/K) = G$ et notons p l'exposant caractéristique du corps K. Si $\ell = p$, les extensions K'_i/K sont donc étales de sorte que l'on peut supposer L/K étale donc *galoisienne* ; l'extension L^{S_ℓ}/K est alors de degré $(G : S_\ell)$, premier à ℓ. Si $\ell \neq p$, l'extension L^{S_ℓ}/K est de degré $(G : S_\ell)$ multiplié par une puissance de p ; c'est donc également un entier premier à ℓ. Comme ci-dessus, notons $X_{L^{S_\ell}}$ le normalisé de X dans L^{S_ℓ}, et $U_{iL^{S_\ell}}$ (resp. $X_{iL^{S_\ell}}$) le produit fibré (resp. le produit fibré réduit normalisé) de U_i (resp. X_i) avec $X_{L^{S_\ell}}$ au-dessus de X. Le morphisme $X_{L^{S_\ell}} \to X$ est fini, de degré générique premier à ℓ. D'après ce qui précède on a pour chaque i un diagramme commutatif de schémas normaux :

$$\begin{tikzcd}
X_{iL^{S_\ell}} \arrow[d, "\text{premier à } \ell"'] & X_{iL} \arrow[l] \arrow[d] \\
U_{iL^{S_\ell}} & U_{iL} \arrow[l, "\text{puissance de } \ell"] \arrow[u, bend right, "\sigma_i"']
\end{tikzcd}$$

En considérant isolément les composantes irréductibles du schéma normal $U_{iL^{S_\ell}}$ et, pour chacune d'entre elles, un point maximal de $X_{iL^{S_\ell}}$ de degré générique premier à ℓ au-dessus, on montre immédiatement (cf. proposition 2.2.6) qu'il existe une section $U_{iL^{S_\ell}} \to X_{iL^{S_\ell}}$. Cela achève la démonstration de la proposition car les $U_{iL^{S_\ell}}$ forment un recouvrement pour la topologie complètement décomposée du schéma $X_{L^{S_\ell}}$, irréductible, de degré générique premier à ℓ sur X.

Si X n'est pas universellement japonais, on écrit les normalisations ci-dessus comme des limites de morphismes finis affines et on utilise les théorèmes classiques de passage à la limite pour redescendre les schémas construits sur les normalisations. Comme nous n'utiliserons ce résultat que dans le cas excellent, nous laissons les détails au lecteur. (On pourrait également procéder par « approximation nœthérienne absolue », c'est-à-dire écrire le schéma cohérent X comme limite filtrante de schémas de type fini sur **Z**, les morphismes de transition étant affines.) □

Remarque 3.2.2. — Il résulte de la proposition 3.1.1 que dans la définition du § 2.3, on peut remplacer la condition d'être ℓ'-décomposé par celle d'être *complètement* décomposé (resp. de Zariski, si $\ell = 1$). Ceci résulte également du théorème précédent car en passant à la limite sur les ℓ'-altérations Y de X, on obtient un schéma normal dont le corps des fonctions a un groupe de Galois absolu pro-ℓ. Cette propriété passe aux corps résiduels si bien qu'un recouvrement étale ℓ'-décomposé d'un tel schéma est nécessairement *complètement* décomposé.

Nous ferons également usage de la variante suivante du théorème précédent.

Théorème 3.2.3. — *Supposons le schéma nœthérien X irréductible. Toute famille couvrante pour la topologie des ℓ'-altérations de X est dominée par une famille couvrante du type suivant :*

$$(W_i \to V_i \to Y \to X)_{i \in I},$$

où tous les schémas sont irréductibles, $Y \to X$ est propre birationnel, $(V_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement pour la topologie complètement décomposée, et les morphismes $W_i \to V_i$ sont finis, plats, de degré premier à ℓ.

On a une variante pour X réduit non nécessairement irréductible : considérer le coproduit de ses composantes irréductibles.

Esquisse de démonstration. — Par platification, il suffit de montrer le résultat d'échange suivant : si $Y \to X$ est fini, plat, de degré générique premier à ℓ et $(V_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement étale complètement décomposé, il existe un recouvrement étale complètement décomposé $(U_j \to X)_{j\in J}$ et des morphismes $Z_j \to U_j$, finis, plats, de degré premier à ℓ tels que la famille de morphismes composés $(Z_j \to X)$ domine celle des $(V_i \to X)$. Par passage à la limite, on peut supposer X hensélien. Par hypothèse, il existe une composante connexe Y^0 de Y qui est plate de degré premier à ℓ sur X. Le schéma Y^0 étant local hensélien, il existe un indice i tel que la restriction du morphisme $V_i \to Y$ à Y^0 ait une section, de sorte que le morphisme composé $Y^0 \to X$ se factorise à travers V_i. Ceci permet de conclure. □

4. Applications

4.1. Sorites. —

Proposition 4.1.1. — *Soient X un schéma nœthérien, x un point de X, $(X_i \to X)_{i=1,\dots,n}$ un recouvrement pour la topologie des altérations et, pour chaque indice i, un ouvert $X_i^0 \hookrightarrow X_i$ contenant la fibre $(X_i)_x$. Il existe un voisinage ouvert de Zariski U de x tel que la famille $(X^0_{i\,|U} \to U)_i$ soit* alt*-couvrante.*

Un cas particulièrement utile — et auquel on pourrait se ramener d'après les résultats de passage à la limite ci-dessous — est celui où X est local de point fermé x, de sorte que $U = X$.

Démonstration. — D'après le théorème 3.2.1, la famille $(X_i \to X)_i$ est dominée par une famille $(V_j \hookrightarrow Y \to X)_j$ où $f : Y \to X$ est notamment propre et surjectif, et les $(V_j \to Y)_j$ forment un recouvrement ouvert de Y. Pour chaque j, notons Y_j^0 l'image inverse de $X_i^0 \hookrightarrow X_i$ par le morphisme $V_j \to X_i$ dont on suppose l'existence. Par hypothèse, au-dessus du point x de X, les ouverts Y_j^0 et V_j de Y coïncident, de sorte que les ouverts Y_j^0 recouvrent la fibre Y_x. Leur réunion $Y^0 := \bigcup_j Y_j^0$ est un ouvert de Y, contenant cette fibre, et on vérifie aussitôt que l'ouvert $U = X - f(Y - Y^0)$ de X convient. □

Proposition 4.1.2. — *Soit $S' \to S$ un morphisme maximalement dominant entre schémas nœthériens. Le foncteur de changement de base* $\mathrm{alt}/S \to \mathrm{alt}/S'$, $X \mapsto X'' = (X \times_S S')_{\mathrm{md}/S'}$, *commute aux produits fibrés et transforme une famille* $\mathrm{alt}_{\ell'}$*-couvrante en une famille* $\mathrm{alt}_{\ell'}$*-couvrante.*

4.1.3. — En d'autres termes, le foncteur précédent induit un *morphisme de sites* ([**SGA 4** IV 4.9]) de alt/S' vers alt/S, où les deux catégories sont munies de la topologie des ℓ'-altérations. (On utilise ici le critère [**SGA 4** III 1.6].) Lorsque $S' \to S$ est plat (donc maximalement dominant, voir 1.1.3), il résulte de 1.1.5 et de la proposition précédente que si $(X_i \to X)$ est une famille $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrante dans alt/S, la famille $(X_i \times_S S' \to X \times_S S')$ de morphismes dans alt/S', obtenue par changement de base usuel, est également $\mathrm{alt}_{\ell'}$-couvrante

Démonstration de la proposition. — La commutation aux produits fibrés est formelle (utiliser 1.2.7). Vérifions qu'une famille couvrante d'un schéma $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{alt}/S$ est transformée par changement de base en une famille couvrante de X''. On peut supposer X irréductible et la famille couvrante du type $(V_i \to Y \to X)$ comme en 3.2.1. Par changement de base, on obtient une famille $(V_i'' \to Y'' \to X'')$, où $(V_i'' \to Y'')$ est également étale complètement décomposée, compte tenu du fait que $V_i'' = V_i \times_Y Y''$. Pour conclure, il suffit de montrer que le morphisme propre et surjectif (1.2.8) $Y'' \to X''$ est maximalement ℓ'-fini ; cela résulte de 2.1.3 (i). □

4.1.4. — Considérons maintenant un système projectif filtrant $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de schémas nœthériens, à morphismes de transitions affines et *dominants*. Fixons un nombre premier ℓ inversible sur ces schémas. Notons X_∞ la limite des X_α ; on suppose que c'est un schéma nœthérien. (On laisse au lecteur le soin de considérer le cas des schémas cohérents ayant un nombre fini de composantes irréductibles.) Il résulte de [**ÉGA** IV$_3$ 8.4.2 a) i)] que, pour α assez grand, le morphisme $X_\infty \to X_\alpha$ induit une bijection sur les points maximaux. En particulier, pour α assez grand et $\infty \geq \beta \geq \alpha$, les morphismes $X_\beta \to X_\alpha$ sont maximalement dominants et induisent des bijections sur les ensembles de points maximaux. Il résulte formellement de cette observation et des résultats généraux de *op. cit.* (notamment [**ÉGA** IV 8.7.1, 8.10.5 (vi,xii)]) que la catégorie alt/X_∞ est la 2-colimite des catégories alt/X_α, les foncteurs $\mathrm{alt}/X_\alpha \to \mathrm{alt}/X_\beta$ étant ceux considérés dans la proposition précédente.

D'après ce qui précède, il est loisible de supposer les morphismes de transition maximalement dominants ; on peut donc considérer les morphismes de *sites* $(\mathrm{alt}/X_\beta, \mathrm{alt}_{\ell'}) \to (\mathrm{alt}/X_\alpha, \mathrm{alt}_{\ell'})$. On peut montrer que le site $(\mathrm{alt}/X_\infty, \mathrm{alt}_{\ell'})$ est la 2-limite ([**SGA 4** VI 8.2-3]) $\lim_\alpha(\mathrm{alt}/X_\alpha, \mathrm{alt}_{\ell'})$. Contentons nous de vérifier le fait suivant :

Proposition 4.1.5. — *Sous les hypothèses du 4.1.4, toute famille* $\mathrm{alt}_{\ell'}$*-couvrante de* X_∞ *est dominée par l'image inverse d'une famille* $\mathrm{alt}_{\ell'}$*-couvrante de l'un des* X_α*.*

Noter qu'*a priori*, l'« image inverse » de l'énoncé est définie à l'aide du foncteur $T \mapsto T_{\mathrm{md}/X_\infty}$. Cependant, comme on l'a vu, ce changement de base et le changement de base naïf (produit fibré usuel) coïncident pour α assez grand.

Démonstration. — Compte tenu de ce qui précède, on peut supposer X_∞ et les X_α *irréductibles*. D'après le théorème 3.2.1, il suffit de vérifier que (1) un X_∞-schéma propre et surjectif Y_∞ intègre de degré premier à ℓ et (2) une famille finie couvrante pour la topologie étale complètement décomposée se descendent en des schémas et familles du même type sur X_α pour α assez grand. Dans le premier cas, seul l'énoncé sur les degrés reste à vérifier ; il résulte de 2.1.3 (ii). Dans le second cas, on utilise [**ÉGA** IV$_4$ 17.7.8 (ii)] pour descendre un recouvrement étale complètement décomposé $(U_{i\infty})_i$ de X_∞ en un recouvrement étale $(U_{i\alpha} \to X_\alpha)$. D'après 2.2.5, appliqué aux morphismes $f_\beta : X_\beta \times_{X_\alpha} \coprod_i U_{i\alpha} \to X_\beta$ pour $\beta \geq \alpha$, le recouvrement étale induit de X_β est complètement décomposé lorsque β est suffisamment grand. □

4.2. Caractérisation ponctuelle. — Terminons par une caractérisation de la topologie des altérations semblable à la caractérisation de la topologie étale à l'aide des anneaux locaux strictement henséliens.

Théorème 4.2.1 **([Goodwillie & Lichtenbaum, 2001], 3.5)**. — *Soient* X *un schéma nœthérien et* Y *un objet de* alt/X. *La flèche* $Y \to X$ *est couvrante pour la topologie des altérations si et seulement si elle est valuativement surjective au sens suivant : tout morphisme maximalement dominant* $\mathrm{Spec}(V) \to X$*, où* V *est un anneau de valuation à corps des fractions algébriquement clos, se relève en un morphisme* $\mathrm{Spec}(V) \to Y$.

Démonstration. — Montrons que la condition est nécessaire. D'après le théorème précédent, on peut supposer $Y \to X$ propre et surjectif. (Le cas où Y est associé à un recouvrement par des ouverts de Zariski est clair car $\mathrm{Spec}(V)$ est local.) Notons η_V le point générique de $\mathrm{Spec}(V)$. Le morphisme $\eta_V \to X$ se relève en un morphisme (non unique) $\eta_V \to Y$ d'après le Nullstellensatz, car $Y \to X$ est surjectif et $\kappa(\eta_V)$ algébriquement clos. Il résulte du critère valuatif de propreté que le morphisme $\eta_V \to Y$ s'étend en un X-morphisme $\mathrm{Spec}(V) \to Y$. (Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer $\mathrm{Spec}(V) \to X$ maximalement dominant.)

Montrons que la condition est suffisante. On peut supposer pour simplifier X affine intègre, de point générique noté η. On peut également supposer Y affine, de sorte qu'il existe une immersion ouverte $Y \hookrightarrow \overline{Y}$ dans un schéma propre et surjectif sur X. Choisissons une clôture algébrique de $\kappa(\eta)$ induisant un point géométrique générique $\overline{\eta} \to X$, et considérons l'espace de Zariski-Riemann $\mathrm{ZR}_{\overline{\eta}}(X)$, limite des espaces annelés X', où X' est un X-schéma intègre, propre et surjectif, muni d'un X-morphisme $\overline{\eta} \to X'$. On peut montrer qu'il est quasi-compact (voir [Goodwillie & Lichtenbaum, 2001, 3.5] ou [Zariski & Samuel, 1975, chap. VI, th. 40] pour une variante) et que si $X = \mathrm{Spec}(A)$, l'application qui à un anneau de valuation intermédiaire $A \subset V \subset \kappa(\overline{\eta})$ associe le point de $\mathrm{ZR}_{\overline{\eta}}(X)$ correspondant par le critère valuatif de propreté est une bijection.

Tout relèvement $r : \overline{\eta} \to Y$ du point générique géométrique de X induit un X-morphisme $\overline{\eta} \to \overline{Y}$ donc un morphisme continu $\pi_r : \mathrm{ZR}_{\overline{\eta}}(X) \to \overline{Y}$, qui se factorise à travers la composante irréductible de $\overline{Y}$ atteinte par r. Par hypothèse, les ouverts $\pi_r^{-1}(Y)$, pour r variable, recouvrent $\mathrm{ZR}_{\overline{\eta}}(X)$. Par quasi-compacité, il existe donc un nombre fini de relèvements $r_1, \dots, r_n : \overline{\eta} \to Y$ tels que $\mathrm{ZR}_{\overline{\eta}}(X)$ soit recouvert par les $\pi_{r_i}^{-1}(Y)$. Notons $\overline{Z}$ la composante irréductible du produit fibré $\overline{Y} \times_X \cdots \times_X \overline{Y}$ (n facteurs) de point générique l'image de $r_1 \times_X \cdots \times_X r_n$. Par construction, le morphisme $\mathrm{ZR}_{\overline{\eta}}(X) \to X$ se factorise à travers le X-schéma $\overline{Z}$, qui est donc *réunion* des n ouverts préimages de Y. Ainsi, $Y \to X$ peut être raffiné en un recouvrement par des ouverts de Zariski d'un schéma propre et surjectif. CQFD. □

Remarque 4.2.2. — On dispose d'un analogue du théorème 4.2.1 pour la topologie des ℓ'-altérations, le cas déjà traité étant celui où $\ell = 1$. Lorsque $\ell = \infty$, il n'y a pas de condition sur le corps des fractions des anneaux V ; si ℓ est un nombre premier, on se restreint aux anneaux de valuation V qui sont :

— à corps des fractions K de groupe de Galois absolu pro-ℓ ;

— parfaits si $\ell \neq \mathrm{car.}(K)$.

4.3. Réduction des théorèmes d'uniformisation locale au cas hensélien. — Rappelons qu'un des objectifs de ce livre est de démontrer les théorèmes d'uniformisation locale exp. **VII**, 1.1 et exp. **IX**, 1.1 (également énoncé en **Introduction**, 2) dont nous reproduisons les énoncés.

Théorème 4.3.1 **([Gabber, 2005], 1.1)**. — *Soient* X *un schéma nœthérien quasi-excellent et* Z *un fermé rare de* X*. Il existe une famille finie de morphismes* $(X_i \to X)_{i \in I}$*, couvrante pour la topologie des altérations et telle que pour tout* $i \in I$ *on ait :*

i. *le schéma* X_i *est régulier et intègre ;*
ii. *l'image inverse de* Z *dans* X_i *est le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

Par convention, l'ensemble vide est considéré comme un diviseur à croisements normaux strict : c'est une somme indexée par l'ensemble vide.

***Théorème 4.3.2* (*op. cit.*, 1.3).** — *Soient* X *un schéma nœthérien quasi-excellent,* Z *un fermé rare de* X *et* ℓ *un nombre premier inversible sur* X*. Il existe une famille finie de morphismes* $(X_i \to X)_{i \in I}$ *, couvrante pour la topologie des* ℓ'*-altérations et telle que pour tout* $i \in I$ *on ait :*
i. *le schéma* X_i *est régulier et intègre ;*
ii. *l'image inverse de* Z *dans* X_i *est le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

Nous terminons cet exposé par la réduction suivante.

Proposition 4.3.3. — *Si l'un des théorèmes d'uniformisation précédents est vrai pour tout schéma* X *local nœthérien hensélien excellent normal (resp. pour tout schéma* X *local nœthérien hensélien excellent normal de dimension inférieure ou égale à un entier* d *fixé), il est vrai en général (resp. pour tout schéma nœthérien excellent de dimension finie inférieure ou égale à* d*).*

La réduction au cas où X est local nœthérien *complet* est bien plus délicate, et fait l'objet de l'exposé suivant.

Démonstration. — Supposons le théorème 4.3.1 (resp. 4.3.2) démontré dans le cas local hensélien excellent. Soit X un schéma nœthérien quasi-excellent et Z un fermé rare. On peut supposer X normal intègre car le morphisme de normalisation est couvrant pour la topologie des ℓ'-altérations et l'image inverse de Z reste rare. Fixons $x \in X$. D'après [**ÉGA** IV 18.7.6] l'hensélisé $X_{(x)}$ de X en x est excellent et $Z_{(x)}$ est un fermé rare de $X_{(x)}$. Il existe donc une famille finie de diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & Y_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{(x)} & \longleftarrow & X_i \end{array}$$

dans $\mathrm{alt}/X_{(x)}$, où Y est intègre, propre et surjectif (resp. et de degré générique premier à ℓ) sur $X_{(x)}$, $(Y_i \to Y)$ est une famille couvrante pour la topologie de Zariski (resp. complètement décomposée) et la famille $(X_i \to X_{(x)})$ satisfait les conclusions (i) et (ii) ci-dessus. Il résulte de la démonstration de la proposition 4.1.5 que cette famille de diagrammes s'étend en une famille du même type sur un voisinage étale complètement décomposé U de x dans X. Il reste à vérifier que les propriétés (i) et (ii) sont bien conservées. Si un morphisme $T \to X_{(x)}$ de type fini, avec T *régulier*, est le changement de base d'un morphisme $V \to U$ de type fini où U est un voisinage étale de x, le schéma V est régulier en les points de l'image du morphisme $T \to V$. (Un schéma local est régulier si et seulement si son hensélisé l'est.) En particulier, V est régulier en les points de la fibre V_x. Le lieu régulier étant ouvert, on peut supposer d'après 4.1.1 — quitte à rétrécir le voisinage U de x — que V est régulier. Enfin, il résulte de [**ÉGA** IV 19.8.1 (ii)] que la propriété d'être un diviseur à croisements normaux strict se descend si elle est satisfaite à la limite. On conclut par quasi-compacité de X pour la topologie étale complètement décomposée (qui est moins fine que les topologies alt et $\mathrm{alt}_{\ell'}$). Le cas respé de la proposition 4.3.3 est un corollaire immédiat de la démonstration du cas non respé. □

Références

[Gabber, 2005] Gabber, O. (2005). Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes. Conférence en l'honneur de Pierre Deligne à l'occasion de son soixante-et-unième anniversaire, Institute for Advanced Study, Princeton. (Voir annexe B). ↑ 8

[Goodwillie & Lichtenbaum, 2001] Goodwillie, T. G. & Lichtenbaum, S. (2001). A cohomological bound for the h-topology. *Amer. J. Math.*, 123(3), 425–443. ↑ 8

[Kelly, 2012] Kelly, S. (2012). *Triangulated categories of motives in positive characteristic*. Thèse, Australian National University. arXiv:1305.5349v1. ↑ 5

[Nisnevič, 1989] Nisnevič, Y. A. (1989). The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory. In *Algebraic* K*-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, 1987)*, volume 279 des *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* (pp. 241–342). Kluwer Acad. Publ. ↑ 3

[Orgogozo, 2006] Orgogozo, F. (2006). Modifications et cycles évanescents sur une base de dimension supérieure à un. *Int. Math. Res. Notices*, 2006, 1–38. ↑ 5

[Raynaud & Gruson, 1971] Raynaud, M. & Gruson, L. (1971). Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d'un module. *Invent. math.*, 13, 1–89. ↑ 6

[Zariski & Samuel, 1975] Zariski, O. & Samuel, P. (1975). *Commutative algebra*, volumes 28 & 29. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. ↑ 8