V. Algébrisation partielle
Fabrice Orgogozo
version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

1. Préparatifs (rappels)

1.1. Le théorème de préparation de Weierstraß. — On trouvera dans [**Bourbaki**, **AC**, VII, §3, n°7-8] une démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.1.1. — *Soient A un anneau local séparé complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $d \geq 0$ un entier et $f \in A[[\underline{X}, T]]$ une série formelle, où l'on pose $\underline{X} = (X_1, \dots, X_d)$.*

i. *Soit ρ un entier naturel tel que f soit ρ-**régulière** relativement à T, c'est-à-dire congrue à $(u \in A[[T]]^\times) \cdot T^\rho$ modulo $(\mathfrak{m}, \underline{X})$. Alors, pour tout $g \in A[[\underline{X}, T]]$, il existe un unique couple $(q, r) \in A[[\underline{X}, T]] \times A[[\underline{X}]][T]$ tel que $g = qf + r$ et $\deg_T(r) < \rho$. De plus, il existe un unique polynôme $P = T^\rho + \sum_{i<\rho} p_i T^i$, où les coefficients p_i appartiennent à $(\mathfrak{m}, \underline{X})A[[\underline{X}]]$, et une unité $u \in A[[\underline{X}, T]]^\times$ tels que $f = uP$.*
ii. *Si f est* non nulle modulo $\mathfrak{m}$, *il existe un entier naturel ρ et un automorphisme $A[[T]]$-linéaire c de $A[[\underline{X}, T]]$, tel que $c(X_i) = X_i + T^{N_i}$ ($N_i > 0$) et la série entière $c(f)$ soit ρ-régulière.*

1.1.2. — Signalons que l'on peut satisfaire la condition (ii) simultanément pour un nombre *fini* d'éléments : cf. *loc. cit.*, n°7, lemme 2 où l'on considérera un produit (fini) de séries formelles.

Nous ferons usage de la propriété suivante des polynômes comme en (i) ci-dessus.

Lemme 1.1.3. — *Soient B un anneau local complet nœthérien et $P \in B[X]$ un polynôme de la forme $X^\rho + \sum_{i<\rho} b_i X^i$, où $b_i \in \mathfrak{m}_B$ et $\rho > 0$. Alors, le complété (P)-adique de $B\{X\}$ s'identifie à $B[[X]]$.*

Rappelons que $B\{X\}$ désigne l'hensélisé en l'origine de l'anneau $B[X]$. Un polynôme P comme ci-dessus est parfois dit **de Weierstraß**.

Démonstration. — Soient N un entier naturel et $Q = P^N$. Il résulte de 1.1.1 (i), que l'anneau quotient $B[[X]]/(Q)$ est isomorphe comme B-module à $B[X]/(X^{\deg(Q)})$ et en particulier fini sur B. Par fidèle platitude du morphisme $B\{X\} \to B[[X]]$, on a $QB[[X]] \cap B\{X\} = QB\{X\}$ de sorte que le B-morphisme $B\{X\}/Q \to B[[X]]/Q$ est *injectif*. L'anneau $B\{X\}/Q$ est donc également fini sur l'anneau complet B ; il est donc isomorphe à son complété $B[[X]]/Q$. En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que le séparé-complété (P)-adique de $B\{X\}$ est isomorphe à celui de $B[[X]]$; ce dernier est isomorphe à $B[[X]]$ puisque $\deg(P) > 0$. □

1.2. Le théorème d'algébrisation d'Elkik. —

Définition 1.2.1. — Une paire (C, J), où J est un idéal d'un anneau C, est dite **hensélienne** si pour tout polynôme $f \in C[T]$, toute racine β de f dans C/J telle que $f'(\beta)$ soit une unité de C/J se relève en une racine dans C.

Remarques 1.2.2. — La notion de *racine simple* introduite dans la définition est plus forte que celle de [**Bourbaki**, **A**, IV, §2, n°1, déf. 1] et le relèvement ci-dessus est nécessairement unique. D'autre part, la définition ci-dessus ne dépend que du fermé $F = V(J)$. En effet, si $I \subset \sqrt{J}$ et (C, J) est hensélienne, il en est de même de la paire (C, I) ; voir [**Kurke et al., 1975**, 2.2.1] et le lemme ci-dessous pour un cas particulier. Ceci nous autorise à dire qu'une paire (X, F), où $X = \mathrm{Spec}(C)$ et $F = \mathrm{Spec}(J)$, est hensélienne lorsque la paire (C, J) l'est.

Lemme 1.2.3. — *Soient C un anneau* local *hensélien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $J \subset \mathfrak{m}$ un idéal. La paire $(\mathrm{Spec}(C), V(J))$ est hensélienne.*

En particulier, pour B et P comme dans le lemme 1.1.3, la paire $(\mathrm{Spec}(B\{X\}), V(P))$ est hensélienne.

Démonstration. — Soient f et β comme ci-dessus. L'anneau C étant local hensélien, l'image γ de β dans le corps résiduel $C/\mathfrak{m}$ se relève en une racine α de P. Notons β' son image dans C/J et vérifions que $\beta = \beta'$. Remarquons tout d'abord que puisque $P'(\alpha)$ est une unité de C, $P'(\beta')$ est une unité de C/J. De plus, l'égalité $P(\beta) = P(\beta') + (\beta - \beta')P'(\beta') + (\beta - \beta')^2 b$ où $b \in B/J$ se réduit à $\beta - \beta' = (\beta - \beta')^2 \frac{-b}{P'(\beta')}$; si l'on pose $x = \beta - \beta'$, on a donc $x(1 - ax) = 0$ pour un $a \in C/J$. Comme x appartient à $\mathfrak{m}$ (car β et β' ont pour image γ dans $C/\mathfrak{m}$), on a $x = 0$. □

1.2.4. — La définition donnée ci-dessus — tirée de *op. cit.* § 2.2 et [**Gabber, 1992**, p. 59] — est équivalente aux définitions usuelles : une paire (X, F) est hensélienne au sens précédent si et seulement si elle satisfait la propriété de relèvement des idempotents de [**ÉGA** IV 18.5.5] ou encore si elle satisfait le théorème des fonctions implicites au-dessus de F (voir p. ex. [**Gruson, 1972**, définition]). Pour la démonstration de ces équivalences, voir par exemple [**Kurke et al., 1975**, 2.6.1], [**Crépeaux, 1967**, prop. 2] et [**Raynaud, 1970**, chap. XI, § 2, prop. 1].

1.2.5. — Signalons que dans ces deux dernières références, il est supposé que J est contenu dans le radical de Jacobson de A ; c'est ici automatique, comme on le voit en considérant les polynômes de degré 1 adéquats (cf. [**Kurke et al., 1975**, 2.2.1]). Notons d'ailleurs que dans [**Crépeaux, 1967**] et [**Raynaud, 1970**], ne sont considérés que des polynômes *unitaires*. L'équivalence entre les deux points de vue peut se vérifier de la façon suivante. Soit $f = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n \in C[T]$ avec $a_0 \in J$ et $a_1 \in C^\times$; ce polynôme a, modulo J, une racine simple en 0. Cherchons une racine de f dans C de la forme a_0/u, avec $u \in C^\times$. Par substitution, il suffit de montrer que l'équation $g = 0$, où $g = U^n + a_1 U^{n-1} + a_2 a_0 U^{n-2} + \cdots + a_0^{n-1} a_n$ est un polynôme *unitaire*, possède une racine inversible. Or, ce polynôme a, modulo J, la classe de $-a_1$ pour racine simple.

Terminons ces rappels par l'énoncé du théorème d'algébrisation de Renée Elkik ([**Elkik, 1973**, théorème 5]).

Théorème 1.2.6. — *Soient $(X = \mathrm{Spec}(A), F)$ une paire hensélienne avec A nœthérien, et U le sous-schéma ouvert complémentaire de F dans X. Notons $X_{\widehat{F}}$ le complété de X le long de F, $\widehat{F}$ le fermé correspondant à F et $\widehat{U}$ son complémentaire dans $X_{\widehat{F}}$. Le foncteur $X' \mapsto X' \times_X X_{\widehat{F}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des X-schémas finis, étales sur U, et la catégorie des $X_{\widehat{F}}$-schémas finis, étales sur $\widehat{U}$.*

2. Algébrisation partielle en égale caractéristique

2.1. Énoncé. —

2.1.1. — Soient A un anneau local nœthérien complet et $\{I_e\}_{e \in E}$ une collection d'idéaux de A. On dit que la paire $(A, \{I_e\}_{e \in E})$ est **partiellement algébrisable** s'il existe un anneau local nœthérien complet B de dimension strictement inférieure à celle de A, une B-algèbre de type fini C, un idéal maximal $\mathfrak{n}$ au-dessus de l'idéal maximal de B, et un isomorphisme $A \simeq \widehat{C_\mathfrak{n}}$ tel que les idéaux I_e $(e \in E)$ proviennent d'idéaux de $C_\mathfrak{n}$.

Théorème 2.1.2. — *Soit A un anneau local nœthérien complet réduit d'égale caractéristique qui ne soit pas un corps. Alors, A muni d'un ensemble* fini *quelconque d'idéaux est partiellement algébrisable.*

2.2. Démonstration. —

2.2.1. — Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $I_1, \ldots, I_n \subset A$ comme dans l'énoncé. Il résulte de la définition 2.1.1 que si un idéal I de A est de la forme $J_1 \cap \cdots \cap J_r$ et que les J_i sont simultanément partiellement algébrisables (c'est-à-dire : la paire $(A, \{J_i\}_{1,\ldots,r})$ est partiellement algébrisable au sens de la définition précédente), l'idéal I l'est également. D'après le théorème de décomposition primaire des idéaux, on peut supposer les I_i *primaires*.

2.2.2. — Notons k le corps résiduel de A et $d > 0$ sa dimension. D'après exp. **IV**, 2.1.1 si X est équidimensionnel ou bien d'après exp. **IV**, 2.2.2 (avec $G = \{1\}$) dans le cas général, il existe un morphisme fini génériquement étale $\pi : X \to X_0$, où $X_0 = \mathrm{Spec}(k[[t_1, \ldots, t_d]])$.

2.2.3. — Soit I l'un des I_i. Deux cas se présentent.

i. $\dim(A/I) = d$. L'idéal I est donc un idéal premier minimal de A.
ii. $\dim(A/I) < d$. L'image de $V(I)$ dans X_0 est donc de dimension au plus $d-1$ donc contenue dans un fermé $V(g_I)$ où $g_I \in A_0 = \Gamma(X_0, \mathscr{O}_{X_0}) - \{0\}$.

Soient $g = \prod_{I_i} g_{I_i}$ où $I_i \in \{I_1, \ldots, I_n\}$ parcourt le sous-ensemble des idéaux du second type, et $f \in A_0 - \{0\}$ telle que le lieu de ramification de π soit contenu dans $V(f)$. Posons $h = gf$. D'après 1.1.1 (ii) et (i), quitte à changer de base par un automorphisme (c'est-à-dire changer les coordonnées), on peut supposer que h est un polynôme de Weierstraß en t_d. (Si h est une unité, on le remplace par t_d.) Considérons le sous-anneau $\widetilde{A_0} = k[[t_1, \ldots, t_{d-1}]]\{t_d\}$ de A_0. Il est hensélien et contient h. D'après les lemmes 1.1.3 et 1.2.3, la paire $(\widetilde{X_0} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A_0}), V(h))$ est hensélienne. On est donc en mesure d'appliquer le théorème 1.2.6 et d'en déduire qu'il existe un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[d] \\ X_0 \arrow[r] & \widetilde{X_0} \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est, par hypothèse, étale hors de $V(h)$ et les flèches horizontales sont des morphismes de complétion (à la fois pour la topologie h-adique et celle définie par leurs idéaux maximaux respectifs).

Les idéaux I du premier type (c'est-à-dire premiers minimaux) se descendent à $\widetilde{X}$ d'après le lemme suivant.

Lemme 2.2.4. — *Soit B un anneau local hensélien quasi-excellent de complété noté $\widehat{B}$. Tout idéal premier minimal de $\widehat{B}$ provient par extension d'un idéal premier minimal de B.*

Démonstration. — Par restriction à l'adhérence du point générique du fermé, il suffit de démontrer que le complété d'un anneau intègre hensélien quasi-excellent est intègre. Ce fait est bien connu et résulte d'ailleurs immédiatement du théorème d'approximation de Popescu, appliqué à l'équation $xy = 0$. □

2.2.5. — Quant aux idéaux I du second type, il suffit d'observer que chaque $V(I)$ est fini sur $\mathrm{Spec}(k[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$, donc sur $\widetilde{X} = \mathrm{Spec}(\widetilde{A})$, et d'appliquer le

Lemme 2.2.6. — *Soient B un anneau local nœthérien, $J \subset \mathfrak{m}_B$ un idéal, et $\widehat{B}$ le complété J-adique de B. Tout quotient de $\widehat{B}$ fini sur B se descend à B.*

2.2.7. — Admettons momentanément ce lemme et achevons la démonstration de 2.1.2. Comme on l'a vu, les idéaux $I_1, \dots, I_n$ proviennent d'idéaux de $\widetilde{A}$. Cet anneau est fini — donc *a fortiori* de présentation finie par nœthérianité — sur l'anneau $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]\{t_d\}$. Ce dernier est l'hensélisé en l'origine de $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]][t_d]$; il est isomorphe à la colimite filtrante d'anneaux de type fini sur $k[[t_1, \dots, t_{d-1}]][t_d]$ donc sur l'anneau $B = k[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$. La conclusion résulte de [**ÉGA** IV 8.8.2] qui assure l'existence d'une B-algèbre C comme en 2.1.1 dont proviennent les idéaux I_i.

2.2.8. — Revenons à la démonstration du lemme 2.2.6 ci-dessus. Soit $I \subset \widehat{B}$ tel que $\widehat{B}/I$ soit fini sur B. Quitte à remplacer B par $B/\mathrm{Ker}(B \to \widehat{B}/I)$, c'est-à-dire $\mathrm{Spec}(B)$ par l'image schématique de $V(I)$, on peut supposer $B \to \widehat{B}/I$ injectif, c'est-à-dire $V(I) \to \mathrm{Spec}(B)$ schématiquement dominant. Le B-module $\widehat{B}/I$ étant fini, la topologie J-adique sur $\widehat{B}/I$ induit la topologie J-adique sur B. Puisque l'application $B \to \widehat{B}/I$ est injective, d'image dense, et continue, il en résulte que $\widehat{B}/I$ est le *séparé-complété* de B pour la topologie J-adique. On a donc $I = (0)$; il se descend tautologiquement à B.

3. Algébrisation partielle première à ℓ en caractéristique mixte

3.1. Énoncé. —

Théorème 3.1.1. — *Soient A un anneau local nœthérien complet normal de caractéristique mixte $(0, p)$ de dimension $d \geq 2$ et $\ell \neq p$ un nombre premier. Il existe un morphisme injectif fini $A \to A'$ de degré générique premier à ℓ, où A' est un anneau normal intègre dont toute famille* finie *d'idéaux est partiellement algébrisable.*

Remarque 3.1.2. — Signalons qu'il suffit pour démontrer exp. **XIII**, 1.1.1 d'établir la variante affaiblie de l'énoncé précédent selon laquelle — en reprenant les notations de 2.1.1 — tout fermé rare de $\mathrm{Spec}(A') \simeq \mathrm{Spec}(\widehat{C_n})$ est ensemblistement contenu dans l'image inverse d'un *diviseur* de $\mathrm{Spec}(C_n)$.

3.1.3. Reformulation géométrique. — Soient X un schéma local nœthérien complet de caractéristique mixte, de dimension $d \geq 2$ et ℓ un nombre premier inversible sur X. Il existe schéma local normal X' et un morphisme fini $\pi : X' \to X$ de degré générique premier à ℓ tel que pour chaque famille finie $\{Z'_i\}_{i \in I}$ de fermés de X', il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "a"] & Y \arrow[d, "f"] \\ & & S \end{tikzcd}$$

où :

- S est un schéma nœthérien régulier complet de caractéristique mixte et de dimension $d - 1$;
- f est un morphisme de type fini ;
- a induit un isomorphisme entre X' et le complété de Y en un point fermé de la fibre spéciale de f,

et des fermés F_i de Y tels que $Z'_i = a^{-1}(F_i)$ pour tout $i \in I$.

Remarque 3.1.4. — Il découle de 2.1.2 que le résultat précédent est également vrai en égale caractéristique, et que l'on peut alors supposer $X = X'$.

3.2. Démonstration. —

3.2.1. — Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ de dimension $d \geq 2$ et ℓ comme dans l'énoncé. D'après le théorème exp. **IV**, 4.3.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V[[t_1, \dots, t_{d-1}]] = B_0 \arrow[r] & B & A' = \mathrm{Fix}_H(B) \arrow[l] \\ & A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où V est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}_V$, et H est un ℓ-groupe agissant sur l'anneau normal B, son sous-anneau V, et trivialement sur les variables t_i $(1 \leq i \leq d-1)$. De plus, $A \to A'$ est une injection finie de rang générique premier à ℓ et $\pi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B_0)$ est fini, p-génériquement étale.

3.2.2. — Nous allons montrer que toute famille finie d'idéaux de A' est partiellement algébrisable. Soit $I'_1, \cdots, I'_n$ une telle famille, que l'on peut supposer constituée d'idéaux primaires (cf. § 2.2.1).

3.2.3. — Soit I' l'un des I'_i. Deux cas se présentent.

i. $\dim(A'/I' + (p)) = d - 1$. Supposons $I' \neq (0)$ et notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier, nécessairement de hauteur un, pour lequel I' est primaire. Par hypothèse, l'idéal premier $\mathfrak{p}$ contient p ; c'est un idéal premier minimal de $A'/(p)$. D'autre part, A' est normal car B l'est. Il résulte par exemple de **[Serre, 1965]**, chap. III, C, § 1] que I' est une *puissance symbolique* de $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire l'image inverse dans A' d'une puissance de l'idéal (principal) $\mathfrak{p}A'_{\mathfrak{p}}$.

ii. $\dim(A'/(I' + (p))) < d - 1$. L'image de $V(I')$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-1}]])$ est donc contenue dans un fermé $V(g_{I'})$ où $g_{I'} \in \mathrm{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$ est *non nulle modulo* $\mathfrak{m}_{\mathrm{Fix}_H(V)}$.

Soient $g = \prod_{I'_i} g_{I'_i}$ où $I'_i \in \{I'_1, \dots, I'_n\}$ parcourt le sous-ensemble des idéaux du second type, et une équation $f \in V[[t_1, \dots, t_{d-1}]]$ non nulle modulo $\mathfrak{m}_V$ telle que le lieu de ramification de π soit contenu dans $V(f)$. On peut supposer que f n'est pas une unité. D'autre part, quitte à la multiplier par ses H-conjugués, on peut supposer que l'équation f est H-invariante. Posons $h = gf$. D'après le théorème de préparation (1.1.1), on peut supposer que h est un polynôme de Weierstraß (non inversible) en t_{d-1}, invariant sous l'action de H. (Rappelons que H agit trivialement sur les variables). Comme en § 2, le morphisme $B_0 \to B$ se descend donc d'après 1.2.6 en un morphisme $\widetilde{B_0} \to \widetilde{B}$, où $\widetilde{B_0} = V[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\}$. Le groupe H préservant l'ouvert $D(h)$ de $\mathrm{Spec}(B_0)$, son action se descend. Le diagramme ci-dessus se complète donc en un diagramme

$$\begin{tikzcd} V[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-1}\} = \widetilde{B_0} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{B} \arrow[d] & \widetilde{A'} = \mathrm{Fix}_H(\widetilde{B}) \arrow[l] \arrow[d] \\ B_0 \arrow[r] & B & A' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes de complétion et les flèches horizontales sont finies.

3.2.4. — Les idéaux I' du second type se descendent de A' à $\widetilde{A'}$ car A'/I' est fini sur $\mathrm{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$ donc *a fortiori* sur $\widetilde{A'}$ (cf. 2.2.6). Quant aux idéaux du premier type (puissances symboliques), il suffit d'appliquer le lemme 2.2.4 à la paire constituée de $\widetilde{A'}/(p)$ et de son complété $A'/(p)$. Comme en § 2, on utilise le fait que $\widetilde{A'}$ soit fini — de type fini suffirait — sur $\mathrm{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-2}]]\{t_{d-2}\}$ pour descendre, par passage à la limite, les idéaux à un anneau de type fini sur $\mathrm{Fix}_H(V)[[t_1, \dots, t_{d-2}]]$.

Références

[Crépeaux, 1967] Crépeaux, E. (1967). Une caractérisation des couples henséliens. *Enseignement math.*, 13, 273–279. ↑ 2

[Elkik, 1973] Elkik, R. (1973). Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. sci. École norm. sup.*, 6, 553–603. ↑ 2

[Gabber, 1992] Gabber, O. (1992). K-theory of Henselian local rings and Henselian pairs. In *Algebraic K-theory, commutative algebra, and algebraic geometry (Santa Margherita Ligure, 1989)*, volume 126 des *Contemp. Math.* (pp. 59–70). Amer. Math. Soc. ↑ 2

[Gruson, 1972] Gruson, L. (1972). Une propriété des couples henséliens. In *Colloque d'algèbre commutative (Rennes, 1972), exp. n°10*. Université de Rennes. ↑ 2

[Kurke et al., 1975] Kurke, H., Pfister, G., & Roczen, M. (1975). *Henselsche Ringe und algebraische Geometrie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Mathematische Monographien. ↑ 1, 2

[Raynaud, 1970] Raynaud, M. (1970). *Anneaux locaux henséliens*, volume 169 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 2

[Serre, 1965] Serre, J.-P. (1965). *Algèbre locale. Multiplicités*, volume 11 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 4