VII. Démonstration du théorème d'uniformisation locale (faible)
Fabrice Orgogozo
version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

1. Énoncé

L'objet de cet exposé est de démontrer le théorème exp. **II**, 4.3.1 (voir aussi **Introduction**, 4), dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous :

Théorème 1.1. — *Soient* X *un schéma nœthérien quasi-excellent et* Z *un fermé rare de* X. *Il existe une famille finie de morphismes* $(X_i \to X)_{i \in I}$, *couvrante pour la topologie des altérations et telle que pour tout* $i \in I$ *on ait :*

i. *le schéma* X_i *est régulier et intègre ;*
ii. *l'image inverse de* Z *dans* X_i *est le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

2. Réductions : rappel des résultats antérieurs

2.1. Réduction au cas local, normal de dimension finie. — Nous avons vu en exp. **II**, 4.3.3 qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque le schéma X est local nœthérien normal hensélien excellent. Faisons cette hypothèse supplémentaire. Un tel schéma est nécessairement de dimension finie, que nous noterons ici d. De plus, on a vu en *loc. cit.* que si le théorème est établi pour chaque schéma local nœthérien hensélien excellent de dimension au plus d, il en est de même pour les schémas nœthériens quasi-excellents de dimension au plus d.

2.2. Réduction au cas complet. — Il résulte de la proposition exp. **III**, 6.2 qu'il suffit de démontrer le théorème pour le schéma local nœthérien complet $\widehat{X}$, ce dernier étant de même dimension que X et également normal.

2.3. Récurrence. — Il résulte de ce qui précède que l'on peut supposer le schéma X local nœthérien complet normal de dimension d et le théorème connu pour chaque schéma nœthérien quasi-excellent de dimension au plus $d-1$. Lorsque $d = 1$, le théorème est bien connu ; nous supposerons dorénavant $d \geq 2$.

3. Fibration en courbes et application d'un théorème de A. J. de Jong

3.1. — Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local nœthérien complet normal comme en 2.3 et Z un fermé rare. Quitte à remplacer X (resp. Z) par un X-schéma fini également local nœthérien normal excellent de dimension d (resp. par son image inverse), on peut supposer d'après exp. **V**, 3.1.3, qu'il existe un schéma local nœthérien régulier S de dimension $d-1$, un S-schéma de type fini dominant X' intègre et affine, un point fermé x' de la fibre spéciale de $f : X' \to S$, un fermé rare Z' de X', et enfin un morphisme $c : X \to X'$ satisfaisant les conditions suivantes :

— le morphisme c induit un isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_{X',x'}})$;
— l'image inverse $c^{-1}(Z')$ de Z' coïncide avec Z.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] & X' \arrow[d, "f"] \\ & S \end{tikzcd}$$

3.2. — Supposons l'existence d'une famille $(X'_i \to X')$ couvrante pour la topologie des altérations (exp. **II**, 2.3) telle que chaque X'_i soit régulier et chaque image inverse Z'_i de Z' dans X'_i soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict. Il résulte de exp. **II**, 4.1.2 que la famille $(X_i \to X)$ obtenue par changement de base (plat) $X \to X'$ est également alt-couvrante. D'autre part, l'hypothèse d'excellence faite sur les schémas garantit que le morphisme de complétion c est *régulier* (exp. **I**, 2.10). La régularité d'un morphisme étant stable par changement de base localement de type fini ([**ÉGA** IV$_2$ 6.8.3]), et préservant la régularité des schémas ([**ÉGA** IV$_2$ 6.5.2 (ii)]) il en résulte que chaque X_i est régulier. De même, l'image inverse Z_i de Z'_i dans X_i — qui coïncide avec l'image inverse de Z dans X_i par le morphisme évident — est le support d'un diviseur à croisements normaux strict pour chaque indice i.

3.3. — Quitte à remplacer X par X', ce qui est licite d'après ce qui précède, nous pouvons supposer le schéma X intègre de dimension d, équipé d'un morphisme dominant de type fini $f : X \to S$, de fibre générique de dimension 1, où S est local nœthérien régulier de dimension $d-1$. Quitte à compactifier f, on peut le supposer *propre* ; quitte à éclater, on peut supposer que le fermé Z est un *diviseur* (c'est-à-dire le support d'un diviseur de Cartier effectif).

3.4. — Nous sommes dans les conditions d'application du théorème [**de Jong, 1997**, 2.4], d'après lequel, quitte à altérer S et X, on peut supposer les faits suivants :

— le morphisme f est une courbe nodale ;

— le diviseur Z est contenu dans la réunion d'un diviseur D étale sur S, contenu dans le lieu lisse de f, et de l'image inverse $f^{-1}(T)$ d'un fermé rare T de S.

4. Résolution des singularités

4.1. Résolution des singularités de la base. — Les altérations précédentes conduisent à une situation où les schémas X et S ne sont pas nécessairement locaux (ni même affines) et S n'est plus nécessairement régulier. Il est cependant excellent de dimension $d-1$ donc justiciable de l'hypothèse de récurrence 2.3. Ainsi, on peut supposer que la paire (S, T) est régulière, c'est-à-dire que le schéma S est régulier et que T est un diviseur à croisements normaux. Il en est en effet ainsi localement pour la topologie des altérations.

4.2. — D'après exp. **VI**, 1.9, la paire $(X, D \cup f^{-1}(T))$ est log régulière au sens de exp. **VI**, 1.2. Qu'un diviseur contenu dans un diviseur à croisements normaux strict soit également un diviseur à croisements normaux strict nous permet de supposer que $Z = D \cup f^{-1}(T)$. La conclusion résulte alors du théorème suivant de Katô K. ([**Kato, 1994**, 10.3, 10.4]), complété par W. Nizioł ([**Nizioł, 2006**, 5.7]). (Voir aussi [**Gabber & Ramero, 2013**, 9.6.32 & 53] et exp. **VIII**, 3.4.)

Théorème 4.3. — *Soit (X, Z) une paire log régulière, où X est un schéma nœthérien. Il existe un schéma nœthérien régulier Y et un morphisme projectif birationnel $\pi : Y \to X$ tels que l'image inverse ensembliste $\pi^{-1}(Z)$ soit le support d'un diviseur à croisements normaux strict.*

(On utilise le procédé [**de Jong, 1996**, 7.2] permettant de rendre strict un diviseur à croisements normaux.)

Références

[de Jong, 1996] de Jong, A. J. (1996). Smoothness, semistability and alterations. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 83, 51–93. ↑ 2

[de Jong, 1997] de Jong, A. J. (1997). Families of curves and alterations. *Ann. Inst. Fourier*, 47(2), 599–621. ↑ 2

[Gabber & Ramero, 2013] Gabber, O. & Ramero, L. (2013). Foundations for almost ring theory. arXiv:math/0409584v8. ↑ 2

[Kato, 1994] Kato, K. (1994). Toric singularities. *Amer. J. Math.*, 116(5), 1073–1099. ↑ 2

[Nizioł, 2006] Nizioł, W. (2006). Toric singularities: log-blow-ups and global resolutions. *J. Algebraic Geom.*, 15(1), 1–29. ↑ 2