XI. Produits orientés
Luc Illusie
version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

On fixe un univers $\mathscr{U}$. Sauf mention du contraire, les sites (resp. topos) considérés seront des $\mathscr{U}$-sites (resp. topos), et « petit » signifiera $\mathscr{U}$-petit.

1. Construction des produits orientés

La construction suivante est due à Deligne [**Laumon, 1983**] :

1.1. — Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de topos. On suppose que X, Y, S ont des sites de définition C_1, C_2, D, admettant des limites projectives finies, et que $f^\star$, $g^\star$ prolongent des foncteurs continus entre sites, et commutant aux limites projectives finies. Soit C le site suivant :

(i) C est la catégorie des couples de morphismes $U \to V \leftarrow W$ au-dessus de $X \to S \leftarrow Y$, où $U \to V$ (resp. $V \leftarrow W$) désigne un morphisme $U \to f^\star V$ (resp. $g^\star V \leftarrow W$) de C_1 (resp. C_2) et V est un objet de D.

(ii) C est muni de la topologie engendrée (cf. [**SGA 4** II 1.1.6]) par les familles couvrantes $(U_i \to V_i \leftarrow W_i) \to (U \to V \leftarrow W)$ $(i \in I)$ du type suivant :

(a) $V_i = V$, $W_i = W$ pour tout i, et la famille $(U_i \to U)$ est couvrante ;

(b) $U_i = U$, $V_i = V$ pour tout i, et la famille $(W_i \to W)$ est couvrante ;

(c) $(U' \to V' \leftarrow W') \to (U \to V \leftarrow W)$, où $U' = U$ et $W' \to W$ est déduit par changement de base d'un morphisme $V' \to V$ de D.

Remarquons que les limites projectives finies sont représentables dans C.

On note $\widetilde{C}$ le topos des faisceaux sur C.

Lemme 1.2. — *Soit F un préfaisceau sur C. Pour que F soit un faisceau il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) pour toute famille couvrante $(Z_i \to Z)$ de C du type (a) ou (b), la suite $F(Z) \to \prod_{i\in I} F(Z_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} F(Z_i \times_Z Z_j)$ est exacte ;

(ii) pour toute famille couvrante $(U' \to V' \leftarrow W') \to (U \to V \leftarrow W)$ du type (c), l'application

$$F(U \to V \leftarrow W) \to F(U' \to V' \leftarrow W')$$

est bijective.

En particulier, si l'on note $(-)^a$ le foncteur faisceau associé, pour toute famille couvrante $(Z' \to Z)$ du type (c), le morphisme de faisceaux associés $Z'^a \to Z^a$ est un isomorphisme.

La nécessité est triviale pour (i), et pour (ii), il suffit d'observer que le morphisme diagonal

$$(U \to V' \leftarrow W') \to (U \to V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W')$$

est un morphisme couvrant (du type (c)), qui égalise la double flèche

$$(U \to V' \times_V V' \leftarrow W' \times_W W') \rightrightarrows (U \to V' \leftarrow W').$$

Pour la suffisance, on note que les familles couvrantes $(Z_i \to Z)$ de type (a), (b), ou (c) sont stables par changement de base $Z' \to Z$, et on applique [**SGA 4** II 2.3].

1.3. — Notons e_X (resp. e_Y, e_S) l'objet final de C_1 (resp. C_2, D). On a des projections naturelles

$$p_1 : \widetilde{C} \to X, p_2 : \widetilde{C} \to Y$$

données par

$$p_1^\star(U) = (U \to e_S \leftarrow e_Y), p_2^\star(W) = (e_X \to e_S \leftarrow W).$$

On a par ailleurs un morphisme canonique

$$\tau : gp_2 \to fp_1$$

donné par le morphisme de foncteurs $\tau : (gp_2)_\star \to (fp_1)_\star$ défini de la façon suivante : pour un faisceau F sur C, et un objet V de S,

$$\tau : ((gp_2)_\star F)(V) \to ((fp_1)_\star F)(V)$$

est le composé

$$F(e_X \to e_S \leftarrow g^\star V) \to F(f^\star V \to V \leftarrow g^\star V) \to F(f^\star V \to e_S \leftarrow e_Y),$$

où la première flèche est induite par la localisation $(f^\star V \to V \leftarrow g^\star V) \to (e_X \to e_S \leftarrow g^\star V)$, et la seconde est l'inverse de l'isomorphisme donné par 1.2, relativement au morphisme de type (c) $(f^\star V \to V \leftarrow g^\star V \to (f^\star V \to e_S \leftarrow e_Y)$.

Théorème 1.4. — *Soit* T *un topos muni de morphismes* $a : T \to X$, $b : T \to Y$ *et d'un morphisme* $t : gb \to fa$. *Il existe alors un triplet* $(h : T \to \widetilde{C}, \alpha : p_1 h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2 h \xrightarrow{\sim} b)$, *unique à isomorphisme unique près, tel que le composé*

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2 h \xrightarrow{\tau} fp_1 h \xrightarrow{\alpha} fa$$

soit égal à t.

Nous aurons besoin, pour la démonstration, du lemme suivant :

Lemme 1.5. — *Soit* $Z = (U \to V \leftarrow W)$ *un objet de* C. *Avec la notation de 1.2, le carré suivant est cartésien :*

(1.5.1)
$$\begin{tikzcd} Z^a \arrow[r] \arrow[d] & (p_2^\star W)^a \arrow[d, "v"] \\ (p_1^\star U)^a \arrow[r, "u"] & ((gp_2^\star)V)^a \end{tikzcd} .$$

Dans ce carré, v *et les flèches issues de* Z^a *sont les flèches évidentes, et* u *est la flèche composée*

$$(p_1^\star U)^a \longrightarrow ((fp_1)^\star V)^a \xrightarrow{\tau} ((gp_2)^\star V)^a ,$$

où τ *est le composé*

$$(f^\star V \to e_S \leftarrow e_Y)^a \xrightarrow{r^{-1}} (f^\star V \to V \leftarrow g^\star V)^a \longrightarrow (e_X \to e_S \leftarrow g^\star V)^a ,$$

r *désignant l'isomorphisme* $(f^\star V \to V \leftarrow g^\star V)^a \xrightarrow{\sim} (f^\star V \to e_S \leftarrow e_Y)^a$ *de 1.2.*

Soit $z : Z \to Z' = (f^\star V \to V \leftarrow g^\star V)$ la projection canonique. Le composé $Z \to p_1^\star U \to (fp_1)^\star V$ se factorise à travers z. Par suite, et par définition de τ, le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z^a \arrow[r, "z"] \arrow[d] & Z'^a \arrow[d, "r"] \arrow[dr] & \\ (p_1^\star U)^a \arrow[r] & ((fp_1^\star)V)^a \arrow[r, "\tau"] & ((gp_2)^\star V)^a \end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme le composé $Z \to p_2^\star W \to (gp_2)^\star V$ se factorise aussi à travers z, le carré 1.5.1 est donc commutatif. Celui-ci est le pourtour du diagramme suivant, où les flèches autres que τ sont les flèches évidentes :

$$\begin{tikzcd} (U \to V \leftarrow W)^a \arrow[r] \arrow[d] & (f^\star V \to V \leftarrow W)^a \arrow[r] \arrow[d] & (e_X \to e_S \leftarrow W)^a \arrow[d] \\ (U \to V \leftarrow g^\star V)^a \arrow[r] \arrow[d] & (f^\star V \to V \leftarrow g^\star V)^a \arrow[r] \arrow[d, "r"] & (e_X \to e_S \leftarrow g^\star V)^a \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ (U \to e_S \leftarrow e_Y)^a \arrow[r] & (f^\star V \to e_S \leftarrow e_Y)^a \arrow[r, "\tau"] & (e_X \to e_S \leftarrow g^\star V)^a \end{tikzcd} .$$

Chacun des carrés qui le composent est cartésien. Il en est donc de même de 1.5.1.

1.6. — Prouvons 1.4. On peut supposer que a et b sont donnés par des morphismes de sites ([**SGA 4** IV 4.9.4]). Par 1.5 l'unicité est claire : pour $Z = (U \to V \leftarrow W)$ dans C, on doit avoir

(1.6.1)
$$h^\star Z = a^\star U \times_{(gb)^\star V} b^\star W,$$

où $a^\star U \to (gb)^\star V$ est le composé $a^\star U \longrightarrow (fa)^\star V \xrightarrow{t} (gb)^\star V$. Les isomorphismes α et β sont alors tautologiques, nous les négligerons dans le reste de la démonstration. Vérifions que le foncteur $h^\star$ donné par 1.6.1 définit un morphisme de topos h vérifiant la propriété énoncée en 1.4. Comme $h^\star$ commute aux limites projectives finies, pour vérifier que $h^\star$ induit un morphisme de topos, il suffit de vérifier que $h^\star$ est continu

([**SGA 4** IV 4.9.1, 4.9.2]). Il est trivial que $h^\star$ transforme familles couvrantes du type (a) ou (b) en familles couvrantes. Par ailleurs, si $(U' \to V' \leftarrow W') \to (U \to V \leftarrow W)$ est une famille couvrante du type (c), le carré

$$\begin{tikzcd} b^\star W' \arrow[r] \arrow[d] & b^\star W \arrow[d] \\ (gb)^\star V' \arrow[r] & (gb)^\star V \end{tikzcd}$$

est cartésien, et par suite

$$a^\star U \times_{(gb)^\star V'} b^\star W' \to a^\star U \times_{(gb)^\star V} b^\star W$$

est un isomorphisme. Il reste à vérifier que τ induit t. Mais par définition, le morphisme de faisceaux défini par $h^\star(\tau)$ appliqué à V est le composé

$$((fa)^\star V)^a \xrightarrow{r^{-1}} ((fa)^\star V \times_{(gb)^\star V} (gb)^\star V)^a \longrightarrow ((gb)^\star V)^a \ ,$$

donc est égal à celui défini par t appliqué à $(fa)^\star V$, ce qui achève la démonstration.

Définition 1.7. — Le topos $\widetilde{C}$ construit en 1.1 s'appelle le **produit orienté (gauche) de** X **et** Y **au-dessus de** S, et se note $X \overleftarrow{\times}_S Y$. Les morphismes du diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \overleftarrow{\times}_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

sont reliés par la 2-flèche $\tau : gp_2 \to fp_1$. Il découle de 1.4 que le quadruplet $(X \overleftarrow{\times}_S Y, p_1, p_2, \tau)$ est indépendant (à isomorphisme unique près) du choix des sites de définition C_1, C_2, D.

Pour un objet $Z = (U \to V \leftarrow W)$ de C, on notera parfois $U \overleftarrow{\times}_V W$ l'objet Z^a de $X \overleftarrow{\times}_S Y$.

On définit de même le **produit orienté droit** $X \overrightarrow{\times}_S Y$, avec ses projections canoniques $p_1 : X \overrightarrow{\times}_S Y \to X$, $p_2 : X \overrightarrow{\times}_S Y \to Y$ et la 2-flèche $\tau' : fp_1 \to gp_2$, qui possède la propriété universelle de 1.4, avec X et Y échangés.

1.8. — Désignons par pt un topos ponctuel (catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace réduit à un point). Soient $x : pt \to X$, $y : pt \to Y$ des points de X et Y respectivement, et $u : gy \to fx$ une 2-flèche. Par 1.4, le triplet (x, y, u) définit un point $z : pt \to X \overleftarrow{\times}_S Y$ tel que $p_1 z \simeq x$, $p_2 z \simeq y$. Ce point sera noté (x, y, u) (ou parfois (x, y) s'il n'y a pas de confusion à craindre). Tout point de $X \overleftarrow{\times}_S Y$ est de cette forme.

1.9. — Considérons un diagramme de 1-morphismes de topos

(1.9.1)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"] & S' \arrow[d, "h"] & Y' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "f"] & S & Y \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

et des 2-flèches $a : hf' \to fu$, $b : gv \to hg'$. Notons $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$, $T' = X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y'$, $p_1 : T \to X$, $p_2 : T \to Y$, $p'_1 : T' \to X'$, $p'_2 : T' \to Y'$ les projections canoniques, $\tau : gp_2 \to fp_1$, $\tau' : g'p'_2 \to f'p'_1$ les 2-flèches canoniques. Considérons la 2-flèche composée

$$c : \ gvp'_2 \xrightarrow{b} hg'p'_2 \xrightarrow{\tau'} hf'p'_1 \xrightarrow{a} fup'_1 \ .$$

D'après 1.4, c définit un diagramme de 1-morphismes

(1.9.2)
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "u"] & T' \arrow[l, "p'_1"'] \arrow[r, "p'_2"] \arrow[d, "t"] & Y' \arrow[d, "v"] \\ X & T \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \end{tikzcd}$$

et des 2-isomorphismes $\alpha : p_1 t \xrightarrow{\sim} u p'_1$, $\beta : p_2 t \xrightarrow{\sim} v p'_2$ rendant commutatif le carré

(1.9.3)
$$\begin{tikzcd} g p_2 t \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\beta"] & f p_1 t \arrow[d, "\alpha"] \\ g v p'_2 \arrow[r, "a\tau' b"] & f u p'_1 \end{tikzcd} .$$

On dit que le triplet (t, α, β) (ou simplement $t : T' \to T$) de 1.9.2 est déduit de 1.9.1 par *fonctorialité*. On notera

$$t = u \overleftarrow{\times}_h v.$$

On a une compatibilité évidente pour un composé de deux données 1.9.1.

1.10. — Voici quelques exemples.

(a) Dans la situation de 1.4, le triplet (a, b, t) définit un diagramme de type 1.9.1

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "a"] & T \arrow[d, "fa"] & T \arrow[l, "Id"'] \arrow[d, "b"] \\ X \arrow[r, "f"] & S & Y \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd} ,$$

avec $t : gb \to fa$, d'où un morphisme

$$a \overleftarrow{\times}_{fa} b : T \overleftarrow{\times}_T T \to X \overleftarrow{\times}_S T.$$

Par ailleurs, d'après 1.4, les flèches identiques de T définissent un morphisme canonique, dit **diagonal**

$$\Delta : T \to T \overleftarrow{\times}_T T.$$

La 1-flèche h de 1.4 est la composée

$$h = (a \overleftarrow{\times}_{fa} b)\Delta : T \to X \overleftarrow{\times}_S Y.$$

En particulier, prenant pour T un topos ponctuel, de sorte que Δ est un isomorphisme, on a, avec les notations de 1.8

$$(x, y, u) = x \overleftarrow{\times}_{fx} y : pt \to X \overleftarrow{\times}_S Y.$$

(b) Dans la situation de 1.7, soient X', S', Y' des objets de X, S, Y respectivement, et $f' : X' \to S'$, (resp. $g' : Y' \to S'$) une flèche au-dessus de f (resp. g), *i.e.* une flèche $f' : X' \to f^\star(S')$, (resp. $g' : Y' \to g^\star(S')$). Notons $X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y'$ l'objet $(X' \to S' \leftarrow Y')^a = p_1^\star(X') \times_{(gp_2)^\star(S')} p_2^\star Y'$ de $X \overleftarrow{\times}_S Y$, cf. 1.5. On en déduit un diagramme 2-commutatif de 1-flèches naturelles

(1.10.1)
$$\begin{tikzcd} & (X \overleftarrow{\times}_S Y)_{/(X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y')} \arrow[dl, "p'_1"'] \arrow[dr, "p'_2"] & \\ X_{/X'} \arrow[r, "f_{/S'}"] \arrow[d] & S_{/S'} \arrow[d] & Y_{/Y'} \arrow[l, "g_{/S'}"'] \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S & Y \arrow[l] \end{tikzcd} ,$$

où la notation $(-)_{/-}$ désigne un topos localisé, et la 2-flèche $\tau' : g_{/S'} p'_2 \to f_{/S'} p'_1$ est déduite par localisation de la 2-flèche $\tau : gp_2 \to fp_1$. D'après 1.4, τ' définit donc un 1-morphisme

(1.10.2)
$$m : (X \overleftarrow{\times}_S Y)_{/(X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y')} \to X_{/X'} \overleftarrow{\times}_{S_{/S'}} Y_{/Y'}.$$

On montre (cf. ([**Abbes & Gros, 2011b**, 3.15]) que m est une équivalence, par laquelle, dans la suite, nous identifierons les deux membres. D'autre part, les carrés 2-commutatifs de 1.10.1 définissent, d'après 1.9, une flèche de fonctorialité

$$X_{/X'} \overleftarrow{\times}_{S_{/S'}} Y_{/Y'} \to X \overleftarrow{\times}_S Y,$$

Celle-ci, ou son composé avec m,

$$(X \overleftarrow{\times}_S Y)_{/(X' \overleftarrow{\times}_{S'} Y')} \to X \overleftarrow{\times}_S Y \tag{1.10.3}$$

s'appelle **flèche de localisation**.

Proposition 1.11. — *Supposons que X' soit l'objet final de X et que g' soit cartésien au-dessus de g*, i.e. $g' : Y' \xrightarrow{\sim} g^\star(S')$. *Alors la flèche 1.10.3 est une équivalence.*

En effet, avec les notations de 1.10.1, il résulte de 1.2 que la flèche $e_X \overleftarrow{\times}_{S'} Y' \to e_X \overleftarrow{\times}_{e_S} e_Y$ de $X \overleftarrow{\times}_S Y$ est un isomorphisme.

1.12. — Considérons en particulier le cas où $S = Y$ est un schéma muni de la topologie étale, $g = \mathrm{Id}$ et $f : X \to S = Y$ est l'inclusion d'un sous-schéma fermé de Y. Le topos $T = X \overleftarrow{\times}_Y Y$ joue le rôle d'un *voisinage tubulaire étale* de X dans Y. Les points de T sont les triplets (x, y, t), où x (resp. y) est un point géométrique de X (resp. Y) et $t : y \to x$ une flèche de spécialisation (cf. [**SGA 4** VIII 7.9]). En d'autres termes, (x, y, t) est la donnée d'un point géométrique x de X, d'une générisation y_0 du point fermé (noté encore par abus x) du localisé strict $X_{(x)}$ de X en x et d'un point géométrique de $Y_{(x)}$ localisé en y_0, ou encore d'une extension séparablement close $y \to y_0$ du point générique de $\overline{\{y_0\}}$. Par ailleurs, si $v : Y' \to Y$ est un voisinage étale de X dans Y, *i.e.* un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[ur] \arrow[r] & Y \end{tikzcd},$$

où v est étale, alors, d'après 1.11 le morphisme canonique

$$X \overleftarrow{\times}_{Y'} Y' \to X \overleftarrow{\times}_Y Y$$

est une équivalence. Ainsi, T ne dépend que du hensélisé de Y le long de X (lorsque celui-ci est défini, en particulier, pour Y affine, cf. [**Raynaud, 1970**]). Nous verrons au numéro suivant et dans l'exposé XII_A d'autres propriétés de T précisant cette analogie avec un voisinage tubulaire.

1.13. — Voici un dernier exemple de fonctorialité de produits orientés, qui ne sera utilisé qu'en 2.7. Soit I une petite catégorie cofiltrante et soient

$$(X_i \xrightarrow{f_i} S_i \xleftarrow{g_i} Y_i)_{i \in I}$$

des morphismes de topos fibrés au-dessus de I. On en déduit un diagramme de topos limites projectives ([**SGA 4** VI 8.1.3])

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Limproj}\,(X_i \overleftarrow{\times}_{S_i} Y_i) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathrm{Limproj}\, X_i \arrow[dr, "f"] & & \mathrm{Limproj}\, Y_i \arrow[dl, "g"'] \\ & \mathrm{Limproj}\, S_i & \end{tikzcd},$$

où $f = \mathrm{Limproj}\, f_i$, $g = \mathrm{Limproj}\, g_i$, avec une 2-flèche $\tau : gp_2 \to fp_1$ déduite des flèches $\tau_i : g_i p_1 \to f_i p_2$, et par suite, un morphisme

$$\mathrm{Limproj}\,(X_i \overleftarrow{\times}_{S_i} Y_i) \to \mathrm{Limproj}\, X_i \overleftarrow{\times}_{\mathrm{Limproj}\, S_i} \mathrm{Limproj}\, Y_i. \tag{1.13.1}$$

Il résulte des définitions que 1.13.1 est une équivalence.

2. Tubes et changement de base

2.1. — Soit (S, s) un topos ponctué, *i.e.* un couple formé d'un topos S et d'un point $s : \mathrm{pt} \to S$ de S. Si (S, s) et (T, t) sont des topos ponctués, un morphisme (ponctué) de (S, s) dans (T, t) est un couple (f, a) d'un morphisme $f : S \to T$ et d'une 2-flèche $a : fs \to t$. Une 2-flèche $c : (f, a) \to (g, b)$ est une 2-flèche $c : f \to g$ telle que $b(cs) = a$. Si (S, s) est un topos ponctué, on note $F \mapsto F_s = s^\star F$ le foncteur fibre en s.

Rappelons qu'un topos ponctué (S, s) est dit **local de centre** s ([**SGA 4** VI 8.4.6]) si, pour tout objet F de S, la flèche naturelle $\Gamma(S, F) \to F_s$ est bijective. Un morphisme $(f, a) : (S, s) \to (T, t)$ de topos ponctués est dit **local** si la 2-flèche $a : fs \to t$ est un isomorphisme.

2.2. — La construction qui suit est due à Gabber. Soit (S, s) un topos local de centre s. Notons $\varepsilon : S \to \mathrm{pt}$ la projection. Par définition la flèche canonique $\varepsilon_\star \to s^\star$ est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme

$$\varepsilon^\star \varepsilon_\star \xrightarrow{\sim} (s\varepsilon)^\star. \tag{2.2.1}$$

La flèche d'adjonction $\varepsilon^\star \varepsilon_\star \to \mathrm{Id}$ s'identifie donc, par 2.2.1, à un morphisme $(s\varepsilon)^\star \to \mathrm{Id}$, *i.e.* à une 2-flèche

$$c_s : \mathrm{Id} \to s\varepsilon \tag{2.2.2}$$

entre les 1-morphismes $\mathrm{Id} : S \to S$ et $s\varepsilon : S \to S$. Si F est un objet de S, $(s\varepsilon)^\star F$ est le faisceau constant sur S de valeur $F_s = \varepsilon_\star F = \Gamma(S, F)$. Si U est un objet connexe de S, le morphisme $(s\varepsilon)^\star F \to F$ induit sur $\Gamma(U, -)$ le morphisme de restriction $\Gamma(S, F) \to \Gamma(U, F)$. Le composé $c_s s : s \to s$ est l'identité : $(s\varepsilon)^\star F \to F$ induit l'identité sur les fibres en s.

Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de topos, $x : \mathrm{pt} \to X$ un point de X, $s = fx : \mathrm{pt} \to S$ son image dans S. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pt} \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "x"] & \mathrm{pt} \arrow[d, "s"] & Y \arrow[l, "\varepsilon g"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ X \arrow[r, "f"] & S & Y \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}, \tag{2.2.3}$$

(où le carré de gauche est 2-commutatif) et la 2-flèche

$$c_s g : g \to s\varepsilon g \tag{2.2.4}$$

sont une donnée de type 1.9.1. Pour un objet F de S, $(s\varepsilon g)^\star F$ est le faisceau constant sur Y de valeur $F_s = \Gamma(S, F)$, et la flèche $(s\varepsilon g)^\star F \to g^\star F$ est la composée $\Gamma(S, F)_Y \to \Gamma(Y, g^\star F)_Y \to g^\star F$. Notons que, par 1.4, le produit orienté $\mathrm{pt} \overleftarrow{\times}_{\mathrm{pt}} Y$ s'identifie canoniquement à Y, avec $p_1 = \mathrm{Id} : Y \to Y$. De 2.2.3 et 2.2.4 on déduit donc un diagramme de type 1.9.2 :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pt} \arrow[d, "x"] & Y \arrow[l, "\varepsilon g"'] \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\sigma"] & Y \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ X & X \overleftarrow{\times}_S Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \end{tikzcd}, \tag{2.2.5}$$

en d'autres termes, une section $\sigma : Y \to X \overleftarrow{\times}_S Y$ de p_2 telle que $p_1 \sigma = x\varepsilon g$. On peut voir cette section comme étant définie, via 1.4 par le couple de morphismes $x\varepsilon g : Y \to X$, $\mathrm{Id} : Y \to Y$ et la 2-flèche $c_s g : g \to fx\varepsilon g = s\varepsilon g$. On dit que σ est la **section canonique** définie par le point x. Par composition avec $p_{2\star}$, la flèche d'adjonction $\mathrm{Id} \to \sigma_\star \sigma^\star$ donne une flèche canonique

$$\gamma : p_{2\star} \to \sigma^\star. \tag{2.2.6}$$

Le résultat suivant est dû à Gabber :

Proposition 2.3. — *Soient $f : (X, x) \to (S, s)$ un morphisme local de topos locaux ($fx = s$), et $g : Y \to S$ un morphisme de topos. Soit $y : \mathrm{pt} \to Y$ un point de Y. Pour tout objet F de $X \overleftarrow{\times}_S Y$, γ (2.2.6) induit un isomorphisme*

$$\gamma_y : (p_{2\star} F)_y \xrightarrow{\sim} (\sigma^\star F)_y.$$

Soit $t = \sigma y : \mathrm{pt} \to T$ le point de $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$ image de y par σ. Ce point est défini (cf. 1.4) par le triplet (x, y, u), où $u : gy \to fx = fx\varepsilon gy = s\varepsilon gy = s$ est déduit de 2.2.4. On a $(\sigma^\star F)_y = F_t$. Choisissons des sites de définition C_1, C_2, D comme en 1.1. Par définition,

$$F_t = \mathrm{colim}_z\, F(U \to V \leftarrow W),$$

où $z : \mathrm{pt} \to (U \to V \leftarrow W)$ parcourt les voisinages de t dans T, avec $(U \to V \leftarrow W)$ dans C. Comme X et S sont locaux, les voisinages de t de la forme $\sigma w : \mathrm{pt} \to (e_X \to e_S \leftarrow W)$, où $w : \mathrm{pt} \to W$ est un voisinage de y dans Y forment un système cofinal. Donc

$$F_t = \mathrm{colim}_w\, F(e_X \to e_S \leftarrow W),$$

où $z = \sigma w : \mathrm{pt} \to (e_X \to e_S \leftarrow W)$ parcourt les voisinages précédents, avec $U = e_X$, $V = e_S$. Par ailleurs,

$$(p_{2\star}F)_y = \mathrm{colim}_w\, F(e_X \to e_S \leftarrow W),$$

où $w : \mathrm{pt} \to W$ parcourt les voisinages de y dans Y. La flèche γ_y est la restriction naturelle. C'est donc un isomorphisme.

Corollaire 2.3.1. — *Sous les hypothèses de 2.3, si Y a assez de points, en particulier, si Y est localement cohérent ([**SGA 4** VI 9.0]), γ (2.2.6) est un isomorphisme.*

Il est plausible que l'hypothèse d'existence d'assez de points soit superflue. Celle-ci sera cependant satisfaite dans les applications que nous avons en vue.

Corollaire 2.3.2. — *Sous les hypothèses de 2.3, supposons Y local de centre y. Alors $X \overleftarrow{\times}_S Y$ est local de centre $\sigma(y)$.*

En effet, on a alors $(p_{2\star}F)_y = \Gamma(Y, p_{2\star}F) = \Gamma(X \overleftarrow{\times}_S Y, F)$, et γ_y s'identifie à la restriction $\Gamma(X \overleftarrow{\times}_S Y, F) \to F_{\sigma(y)}$.

Notons que, si $f : X \to S$ est un morphisme local de schémas strictement locaux, $g : Y \to S$ un morphisme de schémas strictement locaux, le produit fibré schématique $X \times_S Y$ n'est pas en général strictement local, ni même local, même si g est local.

Le résultat ci-après est dû également à Gabber :

Théorème 2.4. — *Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de topos, $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$, $p_1 : T \to X$, $p_2 : T \to Y$ les projections canoniques, $\tau : gp_2 \to fp_1$ la 2-flèche canonique. On suppose X, Y, S cohérents et f, g cohérents ([**SGA 4** VI 2.3, 2.4.5, 3.1]). Soit Λ un anneau. Alors, pour tout $F \in D^+(Y, \Lambda)$, la flèche de changement de base, déduite de τ,*

$$f^\star R g_\star F \to R p_{1\star} p_2^\star F \tag{2.4.1}$$

est un isomorphisme (de $D^+(X, \Lambda)$).

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui généralise [**Orgogozo, 2006**, 9.1] :

Lemme 2.5. — *Sous les hypothèses de 2.4, T est cohérent, et les projections p_1, p_2 sont des morphismes cohérents.*

Le topos X (resp. Y, resp. S) admet une (petite) famille génératrice C_1 (resp. C_2, resp. D) formée d'objets cohérents, stable par limites projectives finies ([**SGA 4** VI 2.4.5]). Comme f et g sont cohérents, $f^\star V$ (resp. $g^\star V$) est cohérent si V est dans D ([**SGA 4** VI 3.2]). On peut donc supposer que $f^\star D \subset C_1$, $g^\star D \subset C_2$. La sous-catégorie pleine de X (resp. Y, resp. S) correspondante, munie de la topologie induite, est un site de définition de X (resp. Y, resp. S). Soit C la catégorie définie comme en 1.1, munie de la topologie définie par la prétopologie $\mathscr{P}$ engendrée par les familles *finies* de type (a) et (b) et les familles de type (c). Elle est stable par limites projectives finies, et est un site de définition de T, puisque toute famille couvrante de C de type (a) ou (b) est raffinée par une famille couvrante finie. Il suffit donc de montrer que tout objet de C est quasi-compact ([**SGA 4** VI 2.4.5]). Décrivons $\mathscr{P}$. Pour chaque objet $Z = (U \to V \leftarrow W)$ de C, notons $\mathrm{Cov}(Z)$ l'ensemble des familles $(Z_i \to Z)_{i \in I}$ obtenues par composition d'un nombre fini de familles de type (c) et de familles (finies) de type (a) et (b). En particulier, l'ensemble I est fini. Par définition, la donnée des $\mathrm{Cov}(Z)$ vérifie les axiomes PT0, PT2 et PT3 de [**SGA 4** II 1.3]. L'axiome PT1 (stabilité par changement de base) est également vérifié, les familles de type (c), ainsi que les familles finies de type (a) (resp. (b)) étant stables par changement de base, et le changement de base commutant à la composition des familles. La donnée des $\mathrm{Cov}(Z)$ est donc une prétopologie, et par définition, c'est la prétopologie $\mathscr{P}$. Comme les familles appartenant à $\mathrm{Cov}(Z)$ sont finies, tout objet de C est automatiquement quasi-compact, comme annoncé. La cohérence des projections p_1 et p_2 en découle.

Remarques 2.6. — (a) Gabber sait montrer que la conclusion de 2.5 vaut sous les seules hypothèses que X, Y, S et g sont cohérents. Nous n'aurons pas besoin de cette généralisation. (b) Le lecteur trouvera dans exp. **XII$_A$**, 2.3.3 une autre application de 2.3 à des théorèmes de changement de base, dans le cadre des schémas et de la topologie étale.

2.7. — Prouvons 2.4. Comme X est cohérent, donc possède assez de points, il suffit de vérifier que, pour tout point $x : \mathrm{pt} \to X$ de X, la fibre en x de 2.4.1

$$(f^\star Rg_\star F)_x \to (Rp_{1\star}p_2^\star F)_x \tag{2.7.1}$$

est un isomorphisme. Soit $s : \mathrm{pt} \to S$ l'image de x par f. Soit $X_{(x)}$ (resp. $S_{(s)}$) le localisé de X (resp. S) en x (resp. s). Rappelons ([**SGA 4** VI 8.4.2]) que $X_{(x)}$ (resp. $Y_{(y)}$) (noté $\mathrm{Loc}_x(X)$ (resp. $\mathrm{Loc}_s(S)$) dans *loc. cit.*) est la limite projective

$$X_{(x)} = \mathrm{Limtop}_{U \in \mathrm{Vois}(x)} X_{/U}$$

(resp.

$$S_{(s)} = \mathrm{Limtop}_{V \in \mathrm{Vois}(s)} S_{/V}),$$

où U (resp. V) parcourt la catégorie cofiltrante $\mathrm{Vois}(x)$ (resp. $\mathrm{Vois}(s)$) des voisinages de x (resp. s) dans X (resp. S). Comme X (resp. S) est cohérent, on peut d'ailleurs se borner aux U (resp. V) qui sont cohérents, les morphismes de transition étant alors automatiquement cohérents. C'est ce que nous ferons dans la suite, notant encore $\mathrm{Vois}(x)$ (resp. $\mathrm{Vois}(s)$) la sous-catégorie pleine formée des U (resp. V) cohérents. Le topos $X_{(x)}$ (resp. $S_{(s)}$) est un topos local, au-dessus de X (resp. S), dont l'image du centre est x (resp. s) ([**SGA 4** VI 8.4.6]). Le morphisme f induit un morphisme local $f_{(x)} : X_{(x)} \to S_{(s)}$. Définissons de même

$$T_{(x)} = \mathrm{Limtop}_{U \in \mathrm{Vois}(x)} T_{/p_1^\star U},$$

$$Y_{(s)} = \mathrm{Limtop}_{V \in \mathrm{Vois}(s)} Y_{/g^\star V},$$

de sorte qu'on obtient un carré

$$\begin{tikzcd} T_{(x)} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y_{(s)} \arrow[d, "g"] \\ X_{(x)} \arrow[r, "f"] & S_{(s)} \end{tikzcd}, \tag{2.7.2}$$

avec une 2-flèche $\tau : gp_2 \to fp_1$. Par la compatibilité de la formation des produits orientés à la localisation (1.10.2) et aux limites projectives (1.13.1), la flèche

$$T_{(x)} \to X_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S_{(s)}} Y_{(s)}, \tag{2.7.3}$$

déduite de ce carré par 1.4 est une équivalence. En fait, comme l'observe le rapporteur, pour tout $V \in \mathrm{Vois}(s)$, la flèche $X_{(x)} \overleftarrow{\times}_{S_{/V}} Y_{/g^\star V} \to X_{(x)} \overleftarrow{\times}_S Y$ est une équivalence, de sorte que la localisation sur S est superflue. D'après 2.5, les topos $X_{/U}$, $S_{/V}$, $T_{/p_1^\star U}$, $Y_{/g^\star V}$ sont cohérents, les flèches de transition des systèmes projectifs $X_{/U}$, $S_{/V}$ sont cohérentes, et les morphismes $g : Y_{/g^\star V} \to S_{/V}$, $p_1 : T_{/p_1^\star U} \to X_{/U}$ sont cohérents. On est donc dans les conditions d'application de [**SGA 4** VI 8.7.3], qui, compte tenu de ce que $S_{(s)}$ et $X_{(x)}$ sont locaux, implique que les flèches canoniques

$$(Rg_\star F)_s \to R\Gamma(S_{(s)}, Rg_\star F) \to R\Gamma(Y_{(s)}, F), \tag{2.7.4}$$

$$(Rp_{1\star}p_2^\star F)_x \to R\Gamma(X_{(x)}, Rp_{1\star}p_2^\star F) \to R\Gamma(T_{(x)}, p_2^\star F) \tag{2.7.5}$$

sont des isomorphismes. Avec les identifications 2.7.3, 2.7.4 et 2.7.5, la flèche 2.7.1 s'identifie à la fibre en x de la flèche de changement de base (déduite de τ) du carré 2.7.2. Cette flèche s'écrit

$$R\Gamma(Y_{(s)}, F) \to R\Gamma(T_{(x)}, p_2^\star F). \tag{2.7.6}$$

On a :

$(*)$: *La flèche 2.7.6 s'identifie canoniquement à la flèche de fonctorialité définie par* p_2.

Pour le vérifier, on peut supposer S et X locaux, de centres respectifs s et x, et f local. Par définition, 2.7.6 est la flèche composée

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(S, Rg_\star F) \arrow[r, "2.7.6"] \arrow[d, "\alpha"] & R\Gamma(T, p_2^\star F) \\ R\Gamma(S, Rg_\star Rp_{2\star}p_2^\star F) \arrow[r, "R\Gamma(S,\tau)"] & R\Gamma(S, Rf_\star Rp_{1\star}p_2^\star F) \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}, \tag{}$$

où la flèche α est définie par la flèche d'adjonction $\mathrm{adj} : F \to Rp_{2\star}p_2^\star F$ (et donc est la flèche de fonctorialité $R\Gamma(Y, F) \to R\Gamma(T, p_2^\star F)$ définie par p_2), et β est l'isomorphisme canonique de transitivité relatif à $fp_1 : T \to S$. Or, par définition de τ (1.3), pour tout faisceau G sur T, la flèche

$$\Gamma(S, \tau) : \Gamma(S, (gp_2)_\star G) \to \Gamma(S, (fp_1)_\star G)$$

est l'identité. Il en est donc de même de la flèche horizontale inférieure du diagramme ci-dessus, ce qui prouve $(*)$. Il reste à prouver que 2.7.6 est un isomorphisme. En fait, la flèche

$$\mathrm{adj} : F \to Rp_{2\star}p_2^\star F \tag{2.7.7}$$

est un isomorphisme. Pour le voir, il suffit d'observer que, compte tenu de la description de γ donnée en 2.3.2, le composé

$$F \xrightarrow{\mathrm{adj}} Rp_{2\star}p_2^\star F \xrightarrow{\gamma} \sigma^\star p_2^\star F = F\ ,$$

où σ est la section de p_2 définie en 2.2.5 et γ l'isomorphisme de 2.3.1, est l'identité. Ceci achève la démonstration de 2.4.

Remarques 2.8. — 1. Supposons que les données de 2.4 proviennent de morphismes de schémas, munis de la topologie étale, avec X, S, Y cohérents et f et g cohérents. Les points x, s sont des points géométriques, et les localisés $X_{(x)}$, $S_{(s)}$ des localisés stricts. Si f est une immersion fermée, la flèche d'adjonction 2.7.7 est un isomorphisme (on peut en effet supposer S strictement local, et il en et alors de même de X). Supposons de plus que $Y = S$, $g = \mathrm{Id}_S$ comme en 1.12. On a vu en *loc. cit.* que $T = X \overleftarrow{\times}_S S$ joue le rôle d'un voisinage tubulaire de X dans S. Soient $j : S^\star = S - X \to S$ l'ouvert complémentaire de X, et $T^\star = X \overleftarrow{\times}_S S^\star = T_{/(e_X \to e_S \leftarrow S^\star)}$ le topos induit. Alors $T^\star$ joue le rôle d'un *voisinage tubulaire épointé* de X dans S : pour $F \in D^+(S^\star, \Lambda)$, on a, par 2.4,

$$f^\star Rj_\star F \xrightarrow{\sim} Rp_{1\star}p_2^\star F.$$

2. Sans l'hypothèse de cohérence sur g, la conclusion de 2.4 peut être en défaut, comme le montre l'exemple suivant, dû à Gabber. Soient X un espace topologique connexe, non vide, $i : Y \to X$ l'inclusion d'un fermé non vide distinct de X, $j : U = X - Y \to X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire. Alors $i^\star j_\star \mathbf{Z}$ est non nul. Mais, si tout point de U a un voisinage dont l'adhérence dans X ne rencontre pas Y, alors le produit orienté $Y \overleftarrow{\times}_X U$ est vide. C'est le cas par exemple, si X est le segment $[0, 1]$ et Y le point $\{0\}$.
3. Sous les hypothèses de 2.4, on montre de manière analogue que :
   (a) Pour tout faisceau d'ensembles F sur Y, la flèche de changement de base
   $$f^\star g_\star F \to p_{1\star}p_2^\star F$$
   est un isomorphisme.
   On peut espérer des variantes non abéliennes supérieures :
   (b) Pour tout faisceau en groupes F sur Y, la flèche de changement de base
   $$f^\star R^1 g_\star F \to R^1 p_{1\star}p_2^\star F,$$
   est un isomorphisme (de faisceaux d'ensembles pointés).
   (c) Plus généralement, pour tout champ F sur Y, la flèche de changement de base
   $$f^\star g_\star F \to p_{1\star}p_2^\star F$$
   est une équivalence.

   La vérification de (b) et (c) semble requérir, outre les techniques de réduction des champs aux gerbes de [**Giraud, 1971**, III 2.1.5], des résultats de passage à la limite pour la cohomologie non abélienne analogues à ceux de [**SGA 4** VI 8.7], pour lesquels nous ne connaissons pas de référence.
4. Gabber sait démontrer la généralisation suivante de 2.4. Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de topos, $T = X \overleftarrow{\times}_S Y$. On suppose que Y et S sont localement cohérents, et que, pour tout objet cohérent algébrique V de S, $g^\star V$ est cohérent algébrique ([**SGA 4** VI 2.1, 2.3]). Alors, pour tout $F \in D^+(Y, \Lambda)$, la flèche de changement de base 2.4.1 est un isomorphisme, et on devrait avoir des résultats analogues dans le cas non abélien, comme en (3) (a), (b), (c) ci-dessus. Gabber déduit ces résultats d'un théorème général de changement de base pour certains topos fibrés.

3. Produits fibrés

Les compléments donnés dans ce numéro et le suivant ne seront pas utilisés dans le reste du volume.

3.1. — Les produits fibrés de topos ont été construits par Giraud [**Giraud, 1972**, 3.4]. La construction suivante est due à Gabber. Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de topos comme en 1.1. Soit D le site suivant :

i. La catégorie sous-jacente à D est la catégorie C considérée en 1.1 (i).
ii. D est munie de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes $(U_i \to V_i \leftarrow W_i) \to (U \to V \leftarrow W)$ $(i \in I)$ de la forme (a), (b), (c) de 1.1 (ii) et de la forme
(d) $(U' \to V' \leftarrow W') \to (U \to V \leftarrow W)$, où $W' = W$ et $U' \to U$ est déduit par changement de base d'un morphisme $V' \to V$ du site de définition de S.

En d'autres termes, la topologie sur D est la borne supérieure des topologies sur C définissant les produits orientés $X \overleftarrow{\times}_S Y$ et $X \overrightarrow{\times}_S Y$.

D'après 1.2, pour qu'un préfaisceau F sur D soit un faisceau, il faut et il suffit que F vérifie les conditions d'exactitude habituelles relatives aux familles couvrantes de type (a) et (b), et que, pour toute famille couvrante $Z' \to Z$ de type (c) ou (d), $F(Z) \to F(Z')$ soit un isomorphisme.

Soit $\widetilde{D}$ le topos des faisceaux sur D. On a des projections naturelles

$$p_1 : \widetilde{D} \to X, p_2 : \widetilde{D} \to Y$$

données par les mêmes formules qu'en 1.3, et la construction de τ en *loc. cit.* donne un *isomorphisme*

$$\varepsilon : gp_2 \xrightarrow{\sim} fp_1. \tag{3.1.1}$$

Théorème 3.2. — *Soit T un topos muni de morphismes $a : T \to X$, $b : T \to Y$ et d'un isomorphisme $t : gb \xrightarrow{\sim} fa$. Il existe alors un triplet $(h : T \to \widetilde{D}, \alpha : p_1 h \xrightarrow{\sim} a, \beta : p_2 h \xrightarrow{\sim} b)$, unique à isomorphisme unique près, tel que le composé*

$$gb \xrightarrow{\beta^{-1}} gp_2 h \xrightarrow{\varepsilon} fp_1 h \xrightarrow{\alpha} fa$$

soit égal à t.

La démonstration est analogue à celle de 1.4. Le foncteur $h^\star$ est encore donné par la formule 1.6.1. Comme t est un isomorphisme, on a

$$a^\star U \times_{(gb)^\star V} b^\star W = a^\star U \times_{(fa)^\star V} b^\star W,$$

où $b^\star V \to (fa)^\star V$ est le composé $b^\star V \longrightarrow (gb)^\star V \xrightarrow{t^{-1}} (fa)^\star V$. Il s'ensuit que $h^\star$ transforme famille couvrante de type (d) en famille couvrante, et l'on conclut comme dans 1.6.

Définition 3.3. — Le topos $\widetilde{D}$ s'appelle **produit fibré de** X **et** Y **au-dessus de** S, et se note $X \times_S Y$. Les morphismes du diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

sont reliés par le 2-isomorphisme $\varepsilon : gp_2 \to fp_1$.

Exemples 3.4. — 1. *Espaces topologiques*. Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des applications continues entre espaces topologiques. On a un morphisme canonique

$$\widetilde{X \times_S Y} \to \widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Y}, \tag{3.4.1}$$

où $\widetilde{Z}$ désigne le topos des faisceaux sur un espace topologique Z. Si X, Y, S sont sobres, (3.4.1) induit une bijection sur les classes d'isomorphisme de points ([**SGA 4** IV 4.2.3]). Si l'on suppose de plus que $\widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Y}$ a assez de points (condition vérifiée par exemple si X, Y, S, f, g sont cohérents, cf. 2.5), alors, comme la famille des sous-objets de l'objet final de $\widetilde{X} \times_{\widetilde{S}} \widetilde{Y}$ est génératrice, il résulte de [**SGA 4** IV 7.1.9] que (3.4.1) est une équivalence de topos. On ignore si cette seconde hypothèse est nécessaire.

2. *Schémas*. Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de schémas. Désignons par l'indice zar (resp. ét) le topos zariskien resp. étale) associé. Du fait de (1), le morphisme naturel $(X \times_S Y)_{zar} \to X_{zar} \times_{S_{zar}} Y_{zar}$ n'est pas une équivalence en général. De même, le morphisme naturel $(X \times_S Y)_{ét} \to X_{ét} \times_{S_{ét}} Y_{ét}$ n'est pas une équivalence en général, même si X, Y, S sont les spectres de corps : si $S = \operatorname{Spec} k$, $S_{ét}$ est équivalent au

topos classifiant BG du groupe profini $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$, où $\overline{k}$ est une clôture séparable de k, et la formation de BG commute aux produits fibrés.

4. Topos évanescents et co-évanescents

4.1. — Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ des morphismes de topos comme en 1.1. Le produit orienté

$$X \overleftarrow{\times}_S S, \tag{4.1.1}$$

où $S \to S$ est le morphisme identique, s'appelle le **topos évanescent** de f. Il est étudié dans [**Laumon, 1983**] et [**Orgogozo, 2006**]. Le produit orienté

$$S \overleftarrow{\times}_S Y, \tag{4.1.2}$$

où $S \to S$ est le morphisme identique, joue un rôle important dans les travaux de Faltings sur les théorèmes de comparaison p-adiques et la correspondance de Simpson p-adique (**topos de Faltings**) (cf. [**Faltings, 2002**], [**Faltings, 2005**], [**Abbes & Gros, 2011a**], [**Deligne, 1995**], [**Abbes & Gros, 2011b**]). On propose ici de l'appeler **topos co-évanescent** de g. Du topos évanescent de Id_S,

$$\overleftarrow{S} = S \overleftarrow{\times}_S S, \tag{4.1.3}$$

qui est aussi le topos co-évanescent de Id_S, les produits orientés $X \overleftarrow{\times}_S Y$ se déduisent par changement de base. Considérons en effet le produit fibré itéré

$$Z = X \times_S \overleftarrow{S} \times_S Y, \tag{4.1.4}$$

où la flèche de gauche (resp. droite) de $\overleftarrow{S}$ vers S est p_1 (resp. p_2). On a des projections naturelles $q_1 : Z \to X$, $q_2 : Z \to Y$ et $m : Z \to \overleftarrow{S}$, avec des isomorphismes $p_1 m \xrightarrow{\sim} f q_1$, $g q_2 \xrightarrow{\sim} p_2 m$. Par composition avec la flèche structurale $\tau : p_2 \to p_1$ de $\overleftarrow{S}$, on en déduit une flèche $z : g q_2 \to f p_1$. D'après1.4, le triplet (q_1, q_2, z) définit donc une flèche

$$h : Z \to X \overleftarrow{\times}_S Y \tag{4.1.5}$$

et des isomorphismes $p_1 h \xrightarrow{\sim} q_1$, $p_2 h \xrightarrow{\sim} q_2$, par lesquels z s'identifie à τh, où p_1, p_2 désignent les projections canoniques de $X \overleftarrow{\times}_S Y$ sur X et Y.

Proposition 4.2. — *Le morphisme h (4.1.5) est un isomorphisme. En particulier, il définit des isomorphismes canoniques*

$$X \times_S \overleftarrow{S} \xrightarrow{\sim} X \overleftarrow{\times}_S S, \tag{4.2.1}$$

$$\overleftarrow{S} \times_S Y \xrightarrow{\sim} S \overleftarrow{\times}_S Y. \tag{4.2.2}$$

Il suffit de montrer que Z, muni de (q_1, q_2, z) vérifie la propriété universelle du produit orienté. Soit T un topos muni de morphismes $a : T \to X$, $b : T \to Y$, et d'une 2-flèche $t : gb \to fa$. Par la propriété universelle de $\overleftarrow{S}$, on en déduit d'abord un unique triplet, formé d'un morphisme $k : T \to \overleftarrow{S}$ et d'isomorphismes $p_1 k \to fa$, $p_2 k \to gb$ tels que $t = \tau k$ modulo ces identifications. Puis, par la propriété universelle des produits fibrés, on en déduit un unique quadruplet formé d'un morphisme $s : T \to Z$ et d'isomorphismes $ms \xrightarrow{\sim} k$, $q_1 s \xrightarrow{\sim} a$, $q_2 s \xrightarrow{\sim} b$ tel que $zs = t$ modulo ces identifications.

4.3. — Soit $f : X \to S$ un morphisme de topos. D'après 1.4, les morphismes Id_X et f définissent un morphisme

$$\Psi : X \to X \overleftarrow{\times}_S S \tag{4.3.1}$$

tel que

$$p_1 \Psi = \mathrm{Id}_X, p_2 \Psi = f, \tau \Psi = \mathrm{Id}_f, \tag{4.3.2}$$

où $\tau : p_2 \to fp_1$ est la 2-flèche structurale de $X \overleftarrow{\times}_S S$:

(4.3.3)
$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\mathrm{Id}_X"'] \arrow[d, "\Psi"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X \overleftarrow{\times}_S S \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & S \\
 & S \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "\mathrm{Id}_S"'] &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $\Psi_\star$ s'appelle **foncteur cycles proches**. Pour un objet $(U \to V \leftarrow W)$ du site C définissant $X \overleftarrow{\times}_S S$, on a $\Psi^\star(U \to V \leftarrow W) = U \times_V W$, où $U \times_V W := U \times_{f^\star(V)} f^\star W$. Si Λ est un anneau et $F \in D^+(X, \Lambda)$, le complexe $R\Psi_\star F \in D^+(X \overleftarrow{\times}_S S, \Lambda)$ (noté aussi $R\Psi F$) s'appelle **complexe des cycles proches** (de f relatif à F).

L'identité $p_{1\star}\Psi_\star = \mathrm{Id}$ définit, par adjonction, un morphisme canonique

(4.3.4)
$$p_1^\star \to \Psi_\star.$$

Pour $F \in D^+(X, \Lambda)$, le cône du morphisme $p_1^\star F \to R\Psi F$ qui s'en déduit s'appelle le **complexe des cycles évanescents** (de f relatif à F) et se note $R\Phi F$. Dans le cas des schémas (munis de la topologie étale), ces foncteurs, qui généralisent les foncteurs $R\Psi$ et $R\Phi$ de Grothendieck ([**SGA 7** XIII]), sont étudiés dans [**Laumon, 1983**] et [**Orgogozo, 2006**].

Considérons le morphisme de changement de base

(4.3.5)
$$p_{1\star} \to \Psi^\star$$

déduit de l'identité $p_1\Psi = \mathrm{Id}_X$, en d'autres termes, le morphisme déduit, par application de $p_{1\star}$, de la flèche d'adjonction $\mathrm{Id} \to \Psi_\star\Psi^\star$, compte tenu de ce que $p_{1\star}\Psi_\star = \mathrm{Id}$. Le résultat suivant est donné sans démonstration dans [**Laumon, 1983**] :

Proposition 4.4. — *Le morphisme 4.3.5 est un isomorphisme.*

On va définir un morphisme

(4.4.1)
$$\Psi^\star \to p_{1\star},$$

dont on montrera qu'il est inverse de 4.3.5. Pour cela, on définit un morphisme

(4.4.2)
$$\mathrm{Id} \to \Psi_\star p_{1\star}$$

de la façon suivante. Pour un faisceau F sur $X \overleftarrow{\times}_S S$ et un objet $Z = (U \to V \leftarrow W)$ du site C de 1.1, la flèche $F(Z) \to (\Psi_\star p_{1\star}F)(Z)$ est la composée

(4.4.3)
$$F(Z) \to F(U \times_{f^\star V} f^\star W \to W \leftarrow W) \to F(U \times_{f^\star V} f^\star W \to e_S \leftarrow e_S),$$

où $W \to W$ est l'identité, la première flèche est la restriction et la seconde, l'inverse de l'isomorphisme relatif au recouvrement de type (c)

$$(U \times_{f^\star V} f^\star W \to W \leftarrow W) \to (U \times_{f^\star V} f^\star W \to e_S \leftarrow e_S).$$

Le morphisme 4.4.1 est adjoint de 4.4.2. Notons u (resp. v) le morphisme 4.3.5 (resp. 4.4.1). On va montrer que u et v sont inverses l'un de l'autre. L'argument qui suit est dû à Orgogozo. Il s'agit de montrer que, pour tout faisceau F sur $X \overleftarrow{\times}_S S$ et tout faisceau G sur X, les applications $\alpha(F, G) = \mathrm{Hom}(u(F), G) : \mathrm{Hom}(\Psi^\star F, G) \to \mathrm{Hom}(p_{1\star}F, G)$ et $\beta(F, G) = \mathrm{Hom}(v(F), G) : \mathrm{Hom}(p_{1\star}F, G) \to \mathrm{Hom}(\Psi^\star F, G)$ sont inverses l'une de l'autre.

L'application

$$\alpha(F, G) : \mathrm{Hom}(\Psi^\star F, G) = \mathrm{Hom}(F, \Psi_\star G) \to \mathrm{Hom}(p_{1\star}F, G)$$

envoie $a : F \to \Psi_\star G$ sur $p_{1\star}a : p_{1\star}F \to p_{1\star}\Psi_\star G = G$. L'application a est la donnée d'une famille compatible d'applications $a_{(U \to V \leftarrow W)} : F(U \to V \leftarrow W) \to G(U \times_V W)$, pour $(U \to V \leftarrow W)$ parcourant les objets de C, "compatible" voulant dire compatible aux flèches de restriction. L'application $\alpha(a)$ est la famille $a_{(U \to e_S \leftarrow e_S)} : F(U \to e_S \leftarrow e_S) \to G(U)$, U parcourant les objets de X.

L'application

$$\beta(F, G) : \mathrm{Hom}(p_{1\star}F, G) \to \mathrm{Hom}(\Psi_\star F, G) = \mathrm{Hom}(F, \Psi_\star G)$$

envoie $b : p_{1\star}F \to G$ sur le composé $F \to \Psi_\star p_{1\star}F \to \Psi_\star G$, où la première flèche est 4.4.2 et la seconde $\Psi_\star b$. L'application $\beta(b)$ est la famille des $\beta(b)_{(U\to V\leftarrow W)} : F(U \to V \leftarrow W) \to G(U \times_V W)$, où $\beta(b)_{(U\to V\leftarrow W)}$ est la composée de 4.4.3 et de

$$(\Psi_\star b)(U \times_V W \to e_S \leftarrow e_S) : F(U \times_V W \to e_S \leftarrow e_S) = (p_{1\star}F)(U \times_V W) \to G(U \times_V W).$$

Pour chaque $a : F \to \Psi_\star G$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F(U \to V \leftarrow W) \arrow[r, "a_{(U\to V\leftarrow W)}"] \arrow[d] & G(U \times_V W) \\ F(U \times_V W \to W \leftarrow W) \arrow[r] & F(U \times_V W \to e_S \leftarrow e_S) \arrow[u, "a_{(U\times_V W\to e_S\leftarrow e_S)}"'] \end{tikzcd},$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme figurant dans 4.4.3. Dans ce diagramme, le composé des flèches autres que la flèche horizontale supérieure est $\beta\alpha(a)_{(U\to V\leftarrow W)}$, donc $\beta\alpha = \mathrm{Id}$. La vérification de $\alpha\beta = \mathrm{Id}$ est triviale également.

Remarque 4.5. — Lorsque les topos X et S sont localement cohérents et $f : X \to S$ est localement cohérent, donc en particulier dans le cas des schémas, on peut prouver 4.4 plus simplement, en se ramenant au cas local. Comme X a assez de points, il suffit de montrer que, pour tout point $x : \mathrm{pt} \to X$, et tout faisceau F sur $X \overleftarrow{\times}_S S$, la fibre en x de 4.3.5, est un isomorphisme. Quitte à remplacer X par son localisé en x (cf. 1.10.2 et 1.13.1), on peut supposer X local de centre x. Soit $s : \mathrm{pt} \to S$ l'image de x par f. Soit F un faisceau sur $T = X \overleftarrow{\times}_S S$. On doit montrer que

$$(p_{1\star}F)_x = \Gamma(T, F) \to (\Psi_\star F)_x = F_{(x,s)}$$

est un isomorphisme. Soient $S_{(s)}$ le localisé de S en s et $T_{(s)} = X \overleftarrow{\times}_{S_{(s)}} S_{(s)}$. D'après les résultats de passage à limite invoqués dans 2.7, on a

$$\Gamma(T_{(s)}, F) = \operatorname{colim} \Gamma(T_U, F),$$

où U parcourt les voisinages cohérents de s et $T_U = X \overleftarrow{\times}_{S_{/U}} S_{/U}$. D'après 1.11, les flèches de restriction $\Gamma(T, F) \to \Gamma(T_U, F)$ sont des isomorphismes (en fait, $T_U \to T$ est une équivalence). On peut donc supposer S local de centre s. D'après 2.3.2, T est alors local, de centre (x, s), et $\Gamma(T, F) = F_{(x,s)} = (\Psi^\star F)_x$.

4.6. — Soit $g : Y \to S$ un morphisme de topos. Les faisceaux sur le topos co-évanescent $T = S \overleftarrow{\times}_S Y$ (4.1.2) ont une description simple, due à Deligne [**Deligne, 1995**]. Pour un faisceau F sur T, la flèche de restriction $F(U \to V \leftarrow W) \to F(U \to U \to U \times_V W)$ est un isomorphisme. Cela suggère de considérer le site C_0 suivant. La catégorie C_0 est celle des flèches $(V \leftarrow W)$ au-dessus de g, i.e. des flèches $W \to g^\star V$ de Y. On munit C_0 de la topologie définie par la prétopologie engendrée par les familles couvrantes des types (a) et (b) ci-après :

(a) $(V \leftarrow W_i)_{i\in I} \to (V \leftarrow W)$, où la famille $(W_i \to W)_{i\in I}$ est couvrante,

(b) $(V_i \leftarrow W_i)_{i\in I} \to (V \leftarrow W)$, où la famille $(V_i \to V)_{i\in I}$ est couvrante, et $W_i = V_i \times_V W$.

On montre ([**Abbes & Gros, 2011b**, 4.10]) que C_0 est un site de définition de T. Un objet F de $S \overleftarrow{\times}_S Y$, décrit comme un faisceau sur C_0, s'interprète comme la donnée d'une famille de faisceaux $F_V : W \mapsto F(V \leftarrow W)$ sur $g^\star V$ et de flèches de restriction $F_V \to j_{V'V\star}F_{V'}$ pour $V' \to V$, définissant $j_{V'V} : g^\star V' \to g^\star V$, satisfaisant la condition de descente que, pour une famille couvrante $(V_i \to V)_{i\in I}$, la suite

$$F_V \to \prod_i j_{V_iV\star}F_{V_i} \rightrightarrows \prod_{ii'} j_{V_{ii'}V\star}F_{V_{ii'}}$$

soit exacte, où $V_{ii'} = V_i \times_V V_{i'}$. D'après 1.4, les morphismes $g : Y \to S$ et Id_Y définissent un morphisme

$$\Psi : Y \to S \overleftarrow{\times}_S Y \tag{4.6.1}$$

tel que

$$p_1\Psi = g, p_2\Psi = \mathrm{Id}_Y, \tau\Psi = \mathrm{Id}_g, \tag{4.6.2}$$

où $\tau : gp_2 \to p_1$ est la 1-flèche structurale de $S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$:

(4.6.3)
$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\Psi"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_Y"] & \\
S \arrow[dr, "\mathrm{Id}_S"'] & S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & S &
\end{tikzcd}.$$

Le foncteur $\Psi_\star$, qu'on pourrait appeler **foncteur cycles co-proches**, se comporte de manière très différente du foncteur cycles proches de 4.3.1. En effet, de l'identité $p_2\Psi = \mathrm{Id}_Y$ on déduit, par adjonction, un morphisme canonique

(4.6.4)
$$p_2^\star \to \Psi_\star,$$

analogue de 4.3.4, et l'on a :

Proposition 4.7. — *Le morphisme 4.6.4 est un isomorphisme.*

En particulier, *le foncteur $\Psi_\star$ est exact.* Ici, c'est la flèche de changement de base, déduite de l'identité $p_2\Psi = \mathrm{Id}_Y$,

(4.7.1)
$$p_{2\star} \to \Psi^\star,$$

analogue de 4.3.5, qui n'est pas, en général, un isomorphisme. On peut donner de 4.7 une démonstration analogue à celle de 4.4. Il est plus simple de déduire ce résultat des descriptions explicites suivantes des foncteurs $p_1^\star, p_2^\star, \Psi$ et du morphisme τ. Ces descriptions sont dues à Deligne [**Deligne, 1995**] (voir [**Abbes & Gros, 2011b**, 4.12, 4.14] pour les détails).

4.8. — (a) *Description de* $p_1^\star$. On a $p_1^\star V = (V \leftarrow g^\star V)$ (l'objet $(V \to e_S \leftarrow e_Y)$ de C correspondant à l'objet $(V \leftarrow g^\star V)$ de C_0). Si F est un faisceau sur S, $p_1^\star F$ est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en $(V \leftarrow W)$ est la limite inductive des $F(V')$ suivant la catégorie des flèches $(V \leftarrow W) \to p_1^\star V'$. Cette catégorie ayant $(V \leftarrow W) \to (V \leftarrow g^\star V)$ pour objet initial, cette limite est égale à $F(V)$. En d'autres termes, $p_1^\star F$ est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en $(V \leftarrow W)$ est $F(V)$. Dans la description donnée plus haut d'un faisceau sur $S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ en termes d'une famille de faisceaux sur les $g^\star V$, $p_1^\star F$ est le faisceau associé à la famille des faisceaux constants G_V sur $g^\star V$ de valeur $F(V)$.

(b) *Description de* $p_2^\star$. On a $p_2^\star W = (e_S \leftarrow W)$. Si F est un faisceau sur Y, $p_2^\star F$ est le faisceau associé au préfaisceau dont la valeur en $(V \leftarrow W)$ est la limite inductive des $F(W')$ suivant la catégorie des flèches $(V \leftarrow W) \to p_2^\star W'$. Cette catégorie ayant $(V \leftarrow W) \to (e_S \leftarrow W)$ pour objet initial, cette limite est égale à $F(W)$. En d'autres termes, $p_2^\star F$ est le faisceau associé à la famille des faisceaux H_V sur $g^\star V$, où H_V est le faisceau $W \mapsto F(W)$ (en fait, cette famille est déjà un faisceau, la condition de descente étant automatiquement satisfaite).

(c) *Description de* τ. Si F est un faisceau sur S, le morphisme $\tau : p_1^\star F \to (gp_2)^\star F$ est déduit du morphisme de préfaisceaux qui, pour $(V \leftarrow W)$ dans C_0, envoie $F(V)$ dans $(gp_2)^\star F(V \leftarrow W) = (g^\star F)(W)$ par le morphisme composé $F(V) \to (g^\star F)(g^\star V) \to (g^\star F)(W)$. On le voit à l'aide de (a) et (b), en explicitant le morphisme $(fp_1)^\star \to (gp_2)^\star$ adjoint du morphisme τ décrit en 1.3.

(d) *Description de* $\Psi_\star$. Si F est un faisceau sur Y, et $(U \to V \leftarrow W)$ un objet de C, on a $(\Psi_\star F)(U \to V \leftarrow W) = F(U \times_V W$. Dans la description de $S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ à l'aide du site C_0, on a donc
$$(\Psi_\star F)(V \leftarrow W) = F(W).$$
Compte tenu de (b), on a donc
$$\Psi_\star F = p_2^\star F$$
Cette identification est celle donnée par 4.6.4, ce qui prouve 4.7.

Notons encore que les points de $T = S \overset{\leftarrow}{\times}_S Y$ sont les flèches $s \leftarrow y$, où s (resp. y) est un point de S (resp. Y), et que, pour un faisceau F sur Y, si $(s \leftarrow y)$ est un point de T, on a
$$(p_2^\star F)_{(s \leftarrow y)} = F_y = (\Psi_\star F)_{(s \leftarrow y)}.$$

Remarque 4.9. — Comme l'observe Gabber, l'isomorphisme 4.6.4 implique le théorème de changement de base 2.4 pour $X = S$, $f = \mathrm{Id}_S$ sans hypothèse de cohérence sur S, Y, et g (voir [**Abbes & Gros, 2011b**, 4.15]).

Références

[Abbes & Gros, 2011a] Abbes, A. & Gros, M. (2011a). Sur la correspondance de Simpson p-adique. I : étude locale. arXiv:1102.5466. ↑ 11

[Abbes & Gros, 2011b] Abbes, A. & Gros, M. (2011b). Topos co-évanescents et généralisations. arXiv:1107.2380. ↑ 5, 11, 13, 14

[Deligne, 1995] Deligne, P. (1995). Lettre à L. Illusie du 31 mars 1995. ↑ 11, 13, 14

[Faltings, 2002] Faltings, G. (2002). Almost étale extensions. In P. Berthelot, J.-M. Fontaine, L. Illusie, K. Kato, & M. Rapoport (éds), *Cohomologies* p*-adiques et applications arithmétiques*, volume 279 des *Astérisque* (pp. 185–270). Société mathématique de France. ↑ 11

[Faltings, 2005] Faltings, G. (2005). A p-adic Simpson correspondence. *Adv. Math.*, 198, 847–862. ↑ 11

[Giraud, 1971] Giraud, J. (1971). *Cohomologie non abélienne*, volume 179 des *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag. ↑ 9

[Giraud, 1972] Giraud, J. (1972). Classifying topos. In *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, volume 274 des *Lecture Notes in Mathematics* (pp. 43–56). Springer-Verlag. ↑ 10

[Laumon, 1983] Laumon, G. (1983). Vanishing cycles over a base of dimension ≥ 1. In M. Raynaud & T. Shioda (éds), *Algebraic Geometry, Proceedings, Tokyo/Kyoto 1982*, volume 1016 des *Lecture Notes in Mathematics* (pp. 143–150). Springer-Verlag. ↑ 1, 11, 12

[Orgogozo, 2006] Orgogozo, F. (2006). Modifications et cycles évanescents sur une base de dimension supérieure à un. *Int. Math. Res. Notices*, 2006, 1–38. ↑ 7, 11, 12

[Raynaud, 1970] Raynaud, M. (1970). *Anneaux locaux henséliens*, volume 169 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 5

Luc Illusie