XIV. Fonctions de dimension
Vincent Pilloni et Benoît Stroh
version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

Nous définissons la notion de fonction de dimension sur un schéma $X$ et nous montrons l'existence de telles fonctions localement pour la topologie étale si $X$ est quasi-excellent.

## 1. Universelle caténarité des schémas henséliens

Dans cette partie, nous rappelons les notions de *caténarité* et d'*universelle caténarité*. Le lecteur pourra consulter l'exposé I pour plus de détails.

**1.1. Schémas universellement caténaires. —** Soient $S$ un espace topologique et $X \subset Y$ des fermés irréductibles de $S$. Notons $\mathrm{codim}(X, Y)$ la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles $X \subset Z \subset Y$ (cf. [**ÉGA** $0_{\mathrm{IV}}$ 14.2.1 & 14.1.1]). Si $S$ est un schéma, $X$ et $Y$ des sous-schémas fermés intègres et $x$ le point générique de $X$, on a

$$\mathrm{codim}(X, Y) = \dim(\mathscr{O}_{Y,x}).$$

***Définition 1.1.1* ([ÉGA $0_{\mathrm{IV}}$ 14.3.2]). —** Un schéma $S$ est **caténaire** s'il est localement nœthérien et si pour toute chaîne $X \subset Y \subset Z$ de fermés irréductibles de $S$, on a

$$\mathrm{codim}(X, Z) = \mathrm{codim}(Y, Z) + \mathrm{codim}(X, Y).$$

Un schéma $S$ est **universellement caténaire** si tout schéma de type fini sur $S$ est caténaire.

La notion de caténarité est stable par localisation et par restriction à des sous-schémas fermés. Ainsi, $S$ est universellement caténaire si et seulement si pour tout entier $n \geq 0$, le schéma $\mathbf{A}^n_S$ est caténaire.

***Lemme 1.1.2*. —** *Un schéma de Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

*Démonstration*. — Si $S$ est Cohen-Macaulay, il est caténaire d'après [**Matsumura, 1980a**, 16.B]. Comme pour tout $n \geq 0$, le schéma $\mathbf{A}^n_S$ reste Cohen-Macaulay, le schéma $S$ est bien universellement caténaire. □

***Exemple 1.1.3*. —** Tout schéma régulier est universellement caténaire car Cohen-Macaulay. En particulier, le spectre d'un corps, un trait et le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un corps ou sur un anneau de valuation discrète sont universellement caténaires. Tout schéma de type fini sur un schéma régulier est universellement caténaire.

***Proposition 1.1.4* ([Matsumura, 1980a], 28.P). —** *Un schéma local complet nœthérien est universellement caténaire.*

*Démonstration*. — Le théorème de structure de Cohen [**ÉGA** $0_{\mathrm{IV}}$ 19.8.8] permet d'écrire tout schéma local complet nœthérien comme fermé dans le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un anneau de Cohen. L'universelle caténarité résulte de l'exemple précédent et de la stabilité de cette notion par passage à un fermé. □

**1.2. Un théorème de Ratliff. —** On dit qu'un schéma nœthérien est **équidimensionnel** si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension (finie). Soit $S$ un schéma local nœthérien. On note $\widehat{S}$ le spectre du complété de l'anneau de $S$ en son idéal maximal.

***Définition 1.2.1*. —** Le schéma local $S$ est **formellement équidimensionnel** si $\widehat{S}$ est équidimensionnel. Il est **formellement caténaire** si pour tout $s \in S$, l'adhérence $\overline{\{s\}}$ est formellement équidimensionnelle.

***Proposition 1.2.2*. —** *Soit $S$ un schéma local nœthérien. Le schéma $S$, son complété $\widehat{S}$, son hensélisé $S^h$ et son hensélisé strict ont tous la même dimension.*

*Démonstration*. — Ceci résulte de l'énoncé général suivant : si $A \to A'$ est un morphisme local et plat entre anneaux locaux nœthériens d'idéaux maximaux respectifs $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ et que $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$, alors pour tout entier naturel $n$, les longueurs $\mathrm{lg}_A(A/\mathfrak{m}^n)$ et $\mathrm{lg}_{A'}(A'/\mathfrak{m}'^n)$ sont égales. L'égalité de ces fonctions de Hilbert-Samuel implique l'égalité $\dim A = \dim A'$ (cf. [**Zariski & Samuel, 1975**, chap. VIII, §9]). □

D'après cette proposition, si $S$ est un schéma local nœthérien intègre, les composantes irréductibles de $\widehat{S}$ sont de dimension $\leq \dim(S)$ et une d'entre elles est de dimension $\dim(S)$. Le schéma $S$ est donc formellement équidimensionnel si et seulement si toutes les composantes irréductibles de $\widehat{S}$ sont de dimension $\dim(S)$.

Soit $S$ un schéma local nœthérien. Ratliff a démontré le théorème fondamental suivant, qui a déjà été mentionné dans la proposition exp. **I**, 7.1.1.

***Théorème 1.2.3*** **([Matsumura, 1989], 31.7).** — *Pour un schéma local nœthérien $S$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

– *$S$ est formellement caténaire,*
– *$S$ est universellement caténaire,*
– *$\mathbf{A}^1_S$ est caténaire,*
– *$S$ est caténaire et pour tout $s \in S$, tout schéma intègre $S'$ muni d'une flèche finie et dominante $S' \to \overline{\{s\}}$ et tout point fermé $s'$ de $S'$, on a $\dim(\mathscr{O}_{S',s'}) = \dim \overline{\{s\}}$.*

On a ajouté une quatrième condition équivalente à l'énoncé [**Matsumura, 1989**, Theorem 31.7]. Il résulte de [**ÉGA** IV$_2$ 5.6.10] que les trois premières conditions équivalentes impliquent la quatrième. La réciproque est démontrée au cours de la démonstration de [**Matsumura, 1989**, Theorem 31.7] (au second paragraphe de la page 255).

***Corollaire 1.2.4*** **([Matsumura, 1989], 31.2).** — *Tout schéma nœthérien de dimension $\leq 2$ est caténaire. Tout schéma nœthérien de dimension $\leq 1$ est universellement caténaire.*

**1.3. Schémas henséliens et caténarité. —** Nous avons vu que tout schéma local complet nœthérien est universellement caténaire dans la proposition 1.1.4. Les schémas locaux henséliens jouissent également de bonnes propriétés de caténarité :

***Proposition 1.3.1.*** — *Tout schéma local hensélien caténaire est universellement caténaire.*

*Démonstration.* — Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local hensélien caténaire, soit $P$ un idéal premier de $A$, soit $L$ une extension finie de $\mathrm{Frac}(A/P)$ et soit $B$ une extension finie de $A/P$ contenue dans $L$. D'après le théorème 1.2.3, il suffit de prouver que la dimension du localisé de $B$ en chacun de ses idéaux maximaux est égale à la dimension de $A/P$. Toute algèbre finie sur un anneau hensélien est semi-locale d'après [**ÉGA** IV$_4$ 18.5] et [**ÉGA** IV$_4$ 18.6]. Comme le schéma $B$ est intègre, il est local. Le théorème du « going-up » ([**Matsumura, 1989**, 9.3 et 9.4]) montre qu'on a bien $\dim(B) = \dim(A/P)$. □

Rappelons également le résultat suivant, conséquence du corollaire exp. **I**, 6.3 (ii).

***Proposition 1.3.2.*** — *Tout schéma local hensélien quasi-excellent est universellement caténaire.*

Ainsi, tout schéma local hensélien quasi-excellent est excellent.

## 2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension

**2.1. Définitions. —** Soit $X$ un schéma. Pour tout point $x$ de $X$ et tout point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de $x$, on note $X_{(x)}$, $X^h_{(x)}$ et $\widehat{X}_{(x)}$ le localisé, l'hensélisé et le complété de $X$ en $x$. De même, on note $X_{(\bar{x})}$ l'hensélisé strict de $X$ en $\bar{x}$.

Soient $x$ et $y$ deux points de $X$, et $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux points géométriques au-dessus de $x$ et $y$.

***Définition 2.1.1*** **([SGA 4 VII 7.2]).** — Un **morphisme de spécialisation** $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est la donnée d'un $X$-morphisme $X_{(\bar{x})} \to X_{(\bar{y})}$ entre hensélisés stricts.

D'après [**SGA 4** VII 7.4], la donnée d'une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est équivalente à la donnée d'un $X$-morphisme $\bar{x} \to X_{(\bar{y})}$.

***Définition 2.1.2.*** — Soit $r \in \mathbf{N}$. On dit qu'une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est une **spécialisation de codimension** $r$ si l'adhérence de l'image de $\bar{x}$ dans $X_{(\bar{y})}$ est un schéma de dimension $r$.
On dit que $y$ est une **spécialisation étale immédiate** de $x$ s'il existe une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ qui soit de codimension 1.
On dit que $y$ est une **spécialisation Zariski immédiate** de $x$ si $y \in \overline{\{x\}}$ et si le localisé en $y$ de l'adhérence de $x$ est de dimension 1.

*2.1.3.* — Si $y$ est une spécialisation étale immédiate de $x$, on dit également que $x$ est une **générisation étale immédiate** de $y$. Désignons par $f : X_{(\bar{y})} \to X_{(y)}$ le morphisme d'hensélisation stricte. Les générisations étales immédiates de $y$ sont alors les images par $f$ des points $x' \in X_{(\bar{y})}$ tels que $\dim \overline{\{x'\}} = 1$.

Avant d'examiner plus en détail ces notions, on rappelle le fait facile suivant (exp. **II**, 1.1.3) que nous utiliserons implicitement plus bas : si $f\colon X \to S$ est un morphisme plat, $f$ envoie les points maximaux de $X$ sur des points maximaux de $S$, autrement dit toute composante irréductible de $X$ domine une composante irréductible de $S$.

*2.1.4.* — Si $x$ et $y$ sont deux points d'un schéma nœthérien $X$ tels que $y \in \overline{\{x\}}$ (au sens habituel, c'est-à-dire que $y$ est une spécialisation de $x$ ou encore que $x$ est une générisation de $y$), alors $y$ est une spécialisation Zariski (resp. étale) immédiate de $x$ si et seulement si c'est le cas dans $\overline{\{x\}}_{(y)}$. Pour certaines considérations, ceci permet de supposer que $X$ est local intègre de point générique $x$ et de point fermé $y$. Dans ce cas, $y$ est une spécialisation Zariski immédiate de $x$ si et seulement si $\dim(X) = 1$. Dans le cas étale, cela se lit sur l'hensélisé strict :

***Proposition 2.1.5.*** — *Si $x$ et $y$ sont deux points d'un schéma nœthérien $X$, le point $y$ est une spécialisation étale immédiate de $x$ si et seulement si $y \in \overline{\{x\}}$ et l'hensélisé strict en un point géométrique au-dessus de $y$ de l'adhérence de $x$ possède une composante irréductible de dimension 1.*

*Démonstration.* — On se ramène au cas particulier $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$ envisagé plus haut. Le point $y$ est une spécialisation étale immédiate si et seulement s'il existe un point $\tilde{x}$ de $X_{(\bar{y})}$ au-dessus de $x$ tel que l'adhérence de $\tilde{x}$ dans $X_{(\bar{y})}$ soit de dimension 1. Comme énoncé ici, cela est équivalent au fait que $X_{(\bar{y})}$ possède une composante irréductible $C$ de dimension 1. En effet, si on note $\tilde{x}$ le point générique de $C$, par l'argument de platitude énoncé plus haut, $C$ domine $X$, c'est-à-dire que $\tilde{x}$ est au-dessus de $x$. Inversement, si $\tilde{x}$ est un point au-dessus de $x$ dont l'adhérence dans $X_{(\bar{y})}$ soit de dimension 1, on peut noter $C$ une composante irréductible de $X_{(\bar{y})}$ contenant $\tilde{x}$. Le point générique de $C$ et $\tilde{x}$ étant tous les deux au-dessus de $x$, ils sont égaux puisque l'un est une générisation de l'autre et que les fibres de $X_{(\bar{y})} \to X$ sont discrètes. □

***Proposition 2.1.6.*** — *Soit $X$ un schéma nœthérien. Une spécialisation Zariski immédiate entre points de $X$ est une spécialisation étale immédiate, et la réciproque est vraie si $X$ est universellement caténaire.*

On peut supposer que $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$ comme précédemment. Pour l'implication, on suppose que $\dim(X) = 1$ et on veut montrer que $X_{(\bar{y})}$ possède une composante irréductible de dimension 1. D'après la proposition 1.2.2, $X_{(\bar{y})}$ est de dimension 1 et il est évident que les composantes irréductibles d'un schéma local de dimension 1 sont toutes de dimension 1.

Pour la réciproque, nous utiliserons deux lemmes :

***Lemme 2.1.7.*** — *Soit $X$ un schéma local nœthérien hensélien de point fermé $y$. Soit $\bar{y}$ un point géométrique au-dessus de $y$. Alors, $X$ possède une composante irréductible de dimension 1 si et seulement si le hensélisé strict $X_{(\bar{y})}$ en possède une.*

*Démonstration.* — Si $C$ est une composante irréductible de dimension 1 de $X_{(\bar{y})}$, son image ensembliste dans $X$ est fermée car $p\colon X_{(\bar{y})} \to X$ est entier. Comme $p$ est plat, $p(C)$ est une composante irréductible de $X$ contenant exactement deux points donc $\dim(p(C)) = 1$. Inversement, la surjectivité et la platitude de $p$ impliquent que si $D \subset X$ est une composante irréductible de dimension 1, il existe une composante irréductible $C$ de $X_{(\bar{y})}$ telle que $p(C) = D$. On a bien sûr $\dim(C) \geq 1$. Soit $z \in C$ un point qui ne soit pas le point générique de $C$. Le point $p(z)$ ne peut pas être le point générique de $D$ car sinon la fibre générique de $p$ ne serait pas discrète. C'est donc que $p(z)$ est le point fermé de $C$. Le fait que $p^{-1}(y)$ soit discret implique alors que $z$ ne peut être que le point fermé de $C$. Le schéma local intègre $C$ possède donc exactement deux points : $\dim(C) = 1$. □

***Lemme 2.1.8.*** — *Soit $X$ un schéma local nœthérien. Si $X$ possède une composante irréductible de dimension 1, alors son complété $\widehat{X}$ aussi et la réciproque est vraie si $X$ est universellement caténaire.*

*Démonstration.* — Commençons par le cas où $X$ est intègre. Si $\dim(X) = 1$, de même qu'au début de la démonstration de la proposition 2.1.6, $\dim(\widehat{X}) = \dim(X) = 1$ et toutes les composantes irréductibles de $\widehat{X}$ sont de dimension 1. Inversement, si $X$ est universellement caténaire, d'après le théorème 1.2.3, les composantes irréductibles de $\widehat{X}$ ont toutes la même dimension. Si l'une d'entre elles est de dimension 1, le schéma $\widehat{X}$ est lui aussi de dimension 1, et alors $\dim(X) = \dim(\widehat{X}) = 1$.

Dans le cas général, notons $X_i$ les composantes irréductibles de $X$. Pour tout $i$, le produit fibré $X_i \times_X \widehat{X}$ s'identifie à $\widehat{X_i}$ (voir [**SGA 1** IV 3]). C'est un fait que les composantes irréductibles des différents $\widehat{X_i}$ sont exactement les composantes irréductibles de $\widehat{X}$ : ce sont des parties fermées irréductibles recouvrant $\widehat{X}$ et aucune d'entre elles n'est contenue dans une autre (ceci se déduit du fait que chaque composante irréductible de $\widehat{X_i}$ domine $X_i$). Il est dès lors évident que l'énoncé pour $X$ résulte de l'énoncé pour les schémas locaux intègres $X_i$. □

Montrons la réciproque énoncée dans la proposition 2.1.6. Comme observé ci-dessus (2.1.4), il suffit de montrer que si $X$ est un schéma local nœthérien intègre universellement caténaire de point fermé $y$ et de point générique $x$ (c'est-à-dire $X = \overline{\{x\}}$), et si $x$ est une générisation étale immédiate de $y$, alors $\dim(X) = 1$. D'après la proposition 2.1.5, l'hensélisé strict de $X$ en un point géométrique au-dessus de $y$ possède une composante irréductible de dimension 1, ce qui équivaut d'après le lemme 2.1.7 à dire que le hensélisé $X^h$ de $X$ possède une composante irréductible de dimension 1. Le complété $\widehat{X}$ de $X$ étant aussi celui de $X^h$, le sens facile du lemme 2.1.8 appliqué à $X^h$ montre que $\widehat{X}$ possède une composante irréductible de dimension 1. La réciproque de ce lemme appliquée au schéma universellement caténaire $X$ montre que $X$ possède une composante irréductible de dimension 1 ; on a donc $\dim(X) = 1$ et $y$ est une spécialisation Zariski immédiate de $x$.

On peut lire les spécialisations étales d'un point $x$ de $X$ dans le complété de $X$ en $x$ :

***Proposition 2.1.9***. — *Soit $X$ un schéma nœthérien. Soient $x$ et $y$ deux points de $X$. On suppose que $y \in \overline{\{x\}}$. Notons $c : \widehat{X}_{(y)} \to X_{(y)}$ le morphisme de complétion. Le point $y$ est une spécialisation étale immédiate de $x$ si et seulement si $c^{-1}(\overline{\{x\}})$ possède une composante irréductible de dimension 1.*

*Démonstration*. — On peut supposer que $X = \overline{\{x\}}_{(y)}$. Le point $y$ est une spécialisation étale immédiate de $X$ si et seulement si $X_{(\bar{y})}$ possède une composante irréductible de dimension 1, c'est-à-dire, d'après le lemme 2.1.7 que $X^h_{(y)}$ en possède une. On veut montrer que ceci équivaut à ce que le complété $\widehat{X}$ en possède une.

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $X$ est quasi-excellent (donc universellement caténaire d'après la proposition 1.3.2), l'équivalence voulue résulte du lemme 2.1.8. Montrons cette équivalence sans l'hypothèse de quasi-excellence. Si $\dim(X) = 0$, $X_{(\bar{y})}$ et $\widehat{X}$ sont aussi de dimension 0, donc aucun de ces schémas ne possède de composante irréductible de dimension 1. Si $\dim(X) = 1$, toutes les composantes irréductibles de $X_{(\bar{y})}$ et de $\widehat{X}$ sont de dimension 1. On peut donc supposer $\dim(X) = \dim(X_{(\bar{y})}) = \dim(\widehat{X}) \geq 2$. L'inexistence d'une composante irréductible de dimension 1 de $X_{(\bar{y})}$ (resp. de $\widehat{X}$) équivaut à dire que toutes les composantes irréductibles de $X_{(\bar{y})}$ (resp. de $\widehat{X}$) sont de dimension $\geq 2$. L'équivalence voulue résulte alors de exp. **XX**, 3.3 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) appliqué à l'inclusion du point fermé de $X$. □

***Définition 2.1.10***. — On appelle **fonction de dimension** sur $X$ toute fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ telle que pour toute spécialisation étale immédiate $x \rightsquigarrow y$ entre points de $X$, on ait

$$\delta(y) = \delta(x) - 1.$$

La notion de fonction de dimension ne voit pas les éléments nilpotents : $\delta$ est une fonction de dimension sur $X$ si et seulement si elle induit une fonction de dimension sur le sous-schéma réduit $X^{\text{réd}}$. De plus si $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est un morphisme étale et $\delta$ est une fonction de dimension sur $X$, $\delta \circ i$ définit une fonction de dimension sur $U$. Plus précisément, l'ensemble des fonctions de dimension sur les $X$-schémas étales définit un faisceau étale sur $X$. La différence entre deux fonctions de dimension sur $X$ est une fonction invariante par spécialisations quelconques, donc une fonction localement constante. Nous montrerons plus loin que si $X$ est quasi-excellent, des fonctions de dimension existent localement pour la topologie étale sur $X$ de sorte que les fonctions de dimension forment un $\mathbf{Z}$-torseur étale.

***Proposition 2.1.11***. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme entre schémas nœthériens. Supposons donnés $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ deux points géométriques de $X$. Notons $\bar{y}$ (resp. $\bar{y}'$) le point géométrique de $Y$ au-dessus duquel $\bar{x}$ (resp. $\bar{x}'$) se trouve. À toute spécialisation étale $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x}'$ est canoniquement associée une spécialisation étale $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{y}'$. Si $f$ est quasi-fini, les spécialisations $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x}'$ et $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{y}'$ ont la même codimension.*

*Démonstration*. — La première partie de l'énoncé est triviale (voir aussi exp. **XVII**, 2.3). Il n'y a qu'à montrer l'égalité des codimensions dans le cas où $f$ est quasi-fini. Pour cela, d'après le Main Theorem de Zariski, on peut supposer que $f$ est fini et que $X$ et $Y$ sont locaux strictement henséliens de points fermés respectifs $\bar{x}'$ et

$\bar{y}'$. On peut supposer en outre que X et Y sont intègres de points génériques respectifs $x$ et $y$ où $x$ et $y$ sont les images respectives des points géométriques $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Énoncer l'égalité des codimensions de $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{x}'$ et de $\bar{y} \rightsquigarrow \bar{y}'$ revient alors à dire que X et Y sont de même dimension, ce qui résulte du « going-up » (cf. [**Matsumura, 1980a**, 13.C]). □

***Corollaire 2.1.12***. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme quasi-fini entre schémas nœthériens. Si $\delta\colon Y \to \mathbf{Z}$ est une fonction de dimension sur $Y$, alors $f^\star\delta := \delta \circ f\colon X \to \mathbf{Z}$ est une fonction de dimension sur $X$.*

**2.2. Fonctions de dimension et universelle caténarité.** — Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

***Théorème 2.2.1***. — *Un schéma nœthérien est universellement caténaire si et seulement s'il possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

Le théorème résulte de la conjonction du corollaire 2.2.4 et de la proposition 2.2.6 ci-dessous.

***Proposition 2.2.2***. — *Soit $X$ un schéma intègre universellement caténaire. La fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension sur $X$.*

*Démonstration*. — En vertu de la proposition 2.1.6, comme X est universellement caténaire, il suffit de montrer que $\delta(y) = \delta(x) - 1$ pour toute spécialisation Zariski immédiate $x \rightsquigarrow y$. Comme X est caténaire intègre, on a

$$\dim(\mathscr{O}_{X,y}) = \dim(\mathscr{O}_{X,x}) + \dim(\mathscr{O}_{\overline{\{y\}},x}) = \dim(\mathscr{O}_{X,x}) + 1.$$

□

***Remarque 2.2.3***. — Si X n'est pas supposé intègre, la fonction $\delta(x) = -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ n'est pas forcément une fonction de dimension comme le montre l'exemple où X est obtenu par recollement en un point d'une droite et d'un plan.

***Corollaire 2.2.4***. — *Tout schéma universellement caténaire admet des fonctions de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

*Démonstration*. — Soit X un schéma universellement caténaire. Soit $x \in X$. Il s'agit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert de $x$ pouvant être muni d'une fonction de dimension. L'espace topologique X est réunion de ses composantes irréductibles $X_1, \dots, X_n$. Quitte à remplacer X par l'ouvert complémentaire des composantes $X_i$ ne contenant pas $x$, on peut supposer que $x$ appartient à toutes les composantes $X_i$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons $\mathscr{F}_i$ l'ensemble des fonctions de dimension sur $X_i$. D'après la proposition 2.2.2, cet ensemble est non vide et est un torseur sous $\mathbf{Z}$. On choisit un élément $\delta_i \in \mathscr{F}_i$ qui vaut $0$ sur le point $x$. Pour tous $1 \leq i,\ j \leq n$, la fonction $\delta_i - \delta_j$ est localement constante sur $X_i \cap X_j$ et vaut $0$ au point $x$. Soit $F_{i,j}$ le fermé de X, réunion des composantes connexes de $X_i \cap X_j$ ne contenant pas $x$. Soit U le complémentaire dans X de la réunion des $F_{i,j}$. Les fonctions $\delta_i$ se recollent en une fonction de dimension sur U. □

Démontrons une réciproque partielle du corollaire 2.2.4.

***Lemme 2.2.5***. — *Un schéma nœthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est caténaire.*

*Démonstration*. — Pour montrer la caténarité, on peut supposer que le schéma S possède une fonction de dimension $\delta$. Supposons que $X \subset Y$ sont des fermés irréductibles de points génériques respectifs $x$ et $y$. Choisissons une chaîne de spécialisations Zariski immédiates $y = x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow x_d = x$ de longueur maximale. Par définition de la codimension, on a $\operatorname{codim}(X, Y) = d$ et par définition des fonctions de dimension, compte tenu du sens facile de la proposition 2.1.6, on obtient $\delta(x) = \delta(y) - d$, d'où $\operatorname{codim}(X, Y) = \delta(y) - \delta(x)$.

Maintenant, si $X \subset Y \subset Z$ sont des fermés irréductibles, on a :

$$\begin{aligned} \delta(y) - \delta(x) &= \operatorname{codim}(X, Y), \\ \delta(z) - \delta(y) &= \operatorname{codim}(Y, Z), \\ \delta(z) - \delta(x) &= \operatorname{codim}(X, Z). \end{aligned}$$

On en déduit $\operatorname{codim}(X, Z) = \operatorname{codim}(X, Y) + \operatorname{codim}(Y, Z)$ d'où la caténarité. □

Grâce au théorème 1.2.3, on peut remplacer « caténaire » par « universellement caténaire » dans le lemme 2.2.5 :

***Proposition 2.2.6***. — *Un schéma nœthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est universellement caténaire.*

*Démonstration*. — On peut supposer que S est local et muni d'une fonction de dimension $\delta$, laquelle induit une fonction de dimension $\delta^h$ sur le hensélisé $S^h$, qui est donc caténaire d'après le lemme 2.2.5, puis universellement caténaire grâce à la proposition 1.3.1 et enfin formellement caténaire d'après le théorème 1.2.3.

Montrons que S est formellement caténaire. Soit Z un sous-schéma fermé intègre de S. Il s'agit de montrer que Z est formellement équidimensionnel. Les schémas locaux Z et $Z^h$ ayant le même complété, il suffit pour cela de montrer que les composantes irréductibles C de $Z^h$ sont formellement équidimensionnelles et toutes de la même dimension. Comme $Z^h$ est un sous-schéma fermé de $S^h$ qui est formellement caténaire, toute composante irréductible C de $Z^h$ est bien formellement équidimensionnelle. Exprimons maintenant la dimension de C en utilisant les fonctions de dimension. Notons $s$ le point fermé de S, $\eta_C$ (resp. $\eta_Z$) le point générique de C (resp. Z). On a $\dim(C) = \delta^h(\eta_C) - \delta^h(s) = \delta(\eta_Z) - \delta(s) = \dim(Z)$. La dimension $\dim(C)$ est donc indépendante de C. On a ainsi montré que Z est formellement équidimensionnel. Finalement, S est formellement caténaire et le théorème 1.2.3 montre que S est universellement caténaire. □

**2.3. Existence locale pour la topologie étale. —** Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème suivant.

***Théorème 2.3.1***. — *Tout schéma quasi-excellent possède des fonctions de dimension localement pour la topologie étale.*

Une application répétée du lemme suivant (variante de l'argument du corollaire 2.2.4) permet de montrer que si l'énoncé du théorème est vrai pour les composantes irréductibles d'un schéma nœthérien X, alors le théorème vaut aussi pour X. Plus loin, on pourra ainsi supposer que X est intègre.

***Lemme 2.3.2***. — *Soit X un schéma nœthérien dont l'espace topologique sous-jacent soit réunion de deux sous-schémas fermés $X_1$ et $X_2$. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de $X_1 \cap X_2$. On suppose que pour tout $i \in \{1, 2\}$, il existe un voisinage étale $U_i$ de $\overline{x}$ dans $X_i$ tel que $U_i$ admette une fonction de dimension. Alors, il existe un voisinage étale U de $\overline{x}$ dans X tel que U admette une fonction de dimension.*

*Démonstration*. — Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on choisit un voisinage étale $U_i$ de $\overline{x}$ dans $X_i$ tel que $U_i$ admette une fonction de dimension $\delta_i$. On se donne un point géométrique distingué $\overline{u}_i$ au-dessus de $\overline{x}$ et on peut supposer que $\delta_i(u_i) = 0$. D'après [**ÉGA** IV$_4$ 18.1.1], quitte à remplacer $U_i$ par un voisinage ouvert de $u_i$, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $\widetilde{U_i} \to X$ et un isomorphisme $\widetilde{U_i} \times_X X_i \simeq U_i$. On peut former le produit fibré $V = \widetilde{U_1} \times_X \widetilde{U_2}$. Notons $\pi\colon V \to X$ la projection et $\overline{v}$ un point géométrique de V au-dessus de $\overline{u}_1$ et $\overline{u}_2$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, la projection de V sur le facteur $\widetilde{U_i}$ induit un morphisme étale $\pi^{-1}(X_i) \to U_i$. Par composition avec ce morphisme étale, la fonction de dimension $\delta_i$ sur $U_i$ induit une fonction de dimension $\tilde{\delta}_i$ sur le sous-schéma fermé $\pi^{-1}(X_i)$ de V et elle vérifie $\tilde{\delta}_i(v) = 0$. Ces fonctions de dimensions $\tilde{\delta}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ se recollent sur l'ouvert U complémentaire dans V de la réunion des composantes connexes de $\pi^{-1}(X_1 \cap X_2)$ ne contenant pas $v$. □

Avant de traiter le cas des schémas intègres, commençons par celui des schémas normaux :

***Proposition 2.3.3***. — *Soit X un schéma normal quasi-excellent. La fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension.*

*Démonstration*. — On peut supposer de plus que X est local. Notons Y son hensélisé et $h\colon Y \to X$ le morphisme de hensélisation. D'après le théorème exp. **I**, 8.1 et les commentaires subséquents, Y est lui aussi quasi-excellent. D'après la proposition 1.3.2, Y est universellement caténaire. Par ailleurs, comme le morphisme $Y \to X$ est régulier, la normalité de X implique celle de Y (cf. [**ÉGA** IV$_2$ 6.5.4]). Le schéma local Y est donc intègre et universellement caténaire, et l'opposé de la codimension définit une fonction de dimension $\delta'\colon Y \to \mathbf{Z}$. Comme une spécialisation étale immédiate entre points de X se relève pour ainsi dire par définition en une spécialisation étale immédiate de points de Y, pour montrer que $\delta$ est une fonction de dimension sur X, il suffit de montrer que pour tout $y \in Y$, si on note $x = h(y)$, on a $\delta(x) = \delta'(y)$, ce qui résulte de la proposition 1.2.2. □

Revenons au cas du théorème 2.3.1 où X est supposé intègre et quasi-excellent, et notons Y son normalisé. Le morphisme $p : Y \to X$ est fini et surjectif, donc de descente cohomologique universelle. Notons $\delta$ une fonction de dimension sur Y ; son existence est assurée par la proposition 2.3.3. Soient $p_1$ et $p_2$ les deux projections $Y \times_X Y \to Y$. D'après le corollaire 2.1.12 appliqué aux morphismes $p_1$ et $p_2$, il vient que $p_i^\star\delta := \delta \circ p_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ sont deux fonctions de dimension sur $Y \times_X Y$. La différence $p_1^\star\delta - p_2^\star\delta\colon Y \times_X Y \to \mathbf{Z}$ est une fonction localement constante qui définit un 1-cocycle de Čech, donc une classe $[p_1^\star\delta - p_2^\star\delta]$ dans $H^1_{\text{Čech}}(Y \to X, \mathbf{Z})$. D'après la théorie de la descente cohomologique, il existe une injection naturelle

$$H^1_{\text{Čech}}(Y \to X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{Z}).$$

La classe $[p_1^\star\delta - p_2^\star\delta]$ définit donc une classe d'isomorphisme de $\mathbf{Z}$-torseurs étales sur X. Il résulte alors immédiatement de la proposition suivante que X admet une fonction de dimension localement pour la topologie étale :

***Proposition 2.3.4***. — *Soit* U *un schéma étale sur* X *(quasi-excellent). L'annulation de la classe* $[p_1^\star\delta - p_2^\star\delta]|_U$ *dans* $H^1(U, \mathbf{Z})$ *entraîne l'existence d'une fonction de dimension sur* U.

*Démonstration*. — En utilisant la compatibilité des constructions au changement de base étale $U \to X$, on peut supposer que $U = X$. L'annulation de $[p_1^\star\delta - p_2^\star\delta]$ dans $H^1_{\text{Čech}}(Y \to X, \mathbf{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbf{Z})$ signifie qu'il existe une fonction *localement constante* $\gamma : Y \to \mathbf{Z}$ telle que $p_1^\star\delta - p_2^\star\delta = p_1^\star\gamma - p_2^\star\gamma$. Autrement dit, quitte à remplacer $\delta$ par $\delta - \gamma$, on peut supposer que $p_1^\star\delta = p_2^\star\delta$. Ainsi, $\delta : Y \to \mathbf{Z}$ se descend en une fonction $\delta' : X \to \mathbf{Z}$.

Pour conclure, il s'agit de montrer que si $p : Y \to X$ est un morphisme fini surjectif entre schémas quasi-excellents, que $\delta' : X \to \mathbf{Z}$ est une fonction et $\delta = \delta' \circ p$, alors $\delta'$ est une fonction de dimension sur X si $\delta$ est une fonction de dimension sur Y. Pour cet énoncé, on peut supposer que X est local hensélien quasi-excellent, donc universellement caténaire (cf. proposition 1.3.2). D'après le corollaire 2.2.4, il existe une fonction de dimension $\delta''$ sur X. On dispose de deux fonctions de dimension $\delta$ et $p^\star\delta'' := \delta'' \circ p$ sur Y. La différence $\delta - p^\star\delta'' : Y \to \mathbf{Z}$ est donc une fonction localement constante. Comme $\delta - p^\star\delta'' = (\delta' - \delta'') \circ p$ et que p est fini surjectif, on en déduit facilement que la fonction $\delta' - \delta'' : X \to \mathbf{Z}$ est localement constante. Comme $\delta''$ est une fonction de dimension, on en déduit que $\delta'$ est une fonction de dimension.

□

**2.4. Existence globale de fonctions de dimension.** — Suivant [**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 14.2.1], on dit qu'un schéma nœthérien X est **équicodimensionnel** si ses points fermés ont tous la même codimension (qui est alors égale à $\dim(X)$).

***Exemple 2.4.1***. — Les schémas de type fini équidimensionnels sur un corps k ou sur $\mathbf{Z}$ sont équicodimensionnels : il est classique que dans cette situation, on a $\dim(X) = \dim(\mathscr{O}_{X,x})$ pour tout point fermé x. Les schémas locaux sont équicodimensionnels car ils possèdent un unique point fermé. Si $S = \operatorname{Spec}(R)$ est un trait d'uniformisante $\pi$, le schéma $\mathbf{A}^1_S$ n'est pas équicodimensionnel. En effet, il existe un point fermé de $\mathbf{A}^1_S$ au-dessus du point générique de S : il suffit d'écrire $\mathbf{A}^1_S = \operatorname{Spec}(R[t])$ et de considérer $\mathfrak{m} = (\pi t - 1)$, qui est un idéal maximal de corps résiduel Frac(R).

Le lemme suivant est inspiré de [**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 14.3.3] [(i)].

***Lemme 2.4.2***. — *Soit* X *un schéma nœthérien équidimensionnel caténaire dont les composantes irréductibles sont équicodimensionnelles. Pour tout* $x \in X$, *on a*

$$\dim(X) = \dim \overline{\{x\}} + \dim(\mathscr{O}_{X,x}).$$

***Remarque 2.4.3***. — En particulier, cette égalité est vérifiée pour tout schéma intègre local caténaire. D'après [**Matsumura, 1989**, th. 31.4], si X est intègre local nœthérien et si pour tout $x \in X$, on a $\dim(X) = \dim \overline{\{x\}} + \dim(\mathscr{O}_{X,x})$, alors X est caténaire.

Le lemme 2.4.2 et la proposition 2.2.2 impliquent le résultat suivant.

***Corollaire 2.4.4***. — *Soit* X *un schéma nœthérien intègre, équicodimensionnel et universellement caténaire. La fonction* $\delta : X \to \mathbf{Z}$ *définie par* $\delta(x) = \dim \overline{\{x\}}$ *est une fonction de dimension sur* X.

Les conclusions du corollaire sont prises en défaut si X n'est pas équicodimensionnel. Soient par exemple $S = \operatorname{Spec}(R)$ un trait d'uniformisante $\pi$ et $X = \mathbf{A}^1_S = \operatorname{Spec}(R[t])$. Si l'on note x le point fermé de X correspondant à l'idéal maximal $(\pi t - 1)$ et $\eta$ le point générique de $\mathbf{A}^1_S$, alors la spécialisation $\eta \rightsquigarrow x$ est immédiate et pourtant $\dim \overline{\{x\}} = 0$ et $\dim \overline{\{\eta\}} = 2$.

(i) Gabber remarque que la proposition [**ÉGA** $0_{\text{IV}}$ 14.3.3] est fausse. Les assertions a, c et d de *loc. cit.* sont équivalentes entre elles et impliquent b mais ne lui sont pas équivalentes. Il faut remplacer b par la condition « X est caténaire équidimensionnel et ses composantes irréductibles sont équicodimensionnelles ». Gabber donne comme contre-exemple le spectre du localisé de $k[x, y, z, w]/(xz, xw)$ en le complémentaire de l'union des idéaux premiers $(x - 1, y)$ et $(x, z, w)$ avec k un corps. La même erreur a été relevée, indépendamment, par Huayi Chen (courrier à Luc Illusie du 2005-9-26).

***Corollaire 2.4.5.*** — *Soit $X$ un schéma qui est soit de type fini sur un corps, soit de type fini sur $\mathbf{Z}$, ou soit local universellement caténaire. La fonction définie par $\delta(x) = \dim \overline{\{x\}}$ est une fonction de dimension sur $X$.*

*Démonstration.* — Le schéma $X$ est universellement caténaire. D'après le corollaire 2.4.4, la fonction $\delta$ est une fonction de dimension sur chaque composante irréductible de $X$. Cette fonction est définie globalement donc est une fonction de dimension sur $X$. □

**2.5. Fonction de dimension induite.** — Soient $Y \to X$ un morphisme de schémas et $\delta_X$ une fonction de dimension sur $X$. Dans certains cas nous pouvons construire une fonction de dimension $\delta_Y$ induite sur $Y$. On admet la proposition suivante.

***Proposition 2.5.1*** **([Matsumura, 1980a], 14.C).** — *Soient $X$ un schéma nœthérien intègre universellement caténaire, $Y$ un schéma intègre et $Y \to X$ un morphisme de type fini dominant. Soient $k(X)$ et $k(Y)$ les corps de fractions respectifs de $X$ et $Y$, soient $y$ un point de $Y$ et $x$ son image dans $X$, et soient $k(y)$ et $k(x)$ leurs corps résiduels. On a*

$$\dim(\mathscr{O}_{Y,y}) - \operatorname{deg.tr.}(k(Y)/k(X)) = \dim(\mathscr{O}_{X,x}) - \operatorname{deg.tr.}(k(y)/k(x)).$$

***Corollaire 2.5.2.*** — *Soient $X$ un schéma nœthérien qui possède une fonction de dimension $\delta_X$ et $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. La fonction $\delta_Y : Y \to \mathbf{Z}$ définie par*

$$\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) + \operatorname{deg.tr.}(k(f(y))/k(y))$$

*est une fonction de dimension sur $Y$.*

*Démonstration.* — On peut supposer que $X$ et $Y$ sont intègres et que $f$ est dominant. D'après la proposition 2.2.6, $X$ est universellement caténaire et d'après la proposition 2.2.2, $x \mapsto -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension sur $X$. Comme les fonctions de dimension forment un $\mathbf{Z}$-torseur, on peut supposer que $\delta_X(x) = -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ pour tout $x \in X$.

Le corollaire 2.5.1 montre que $\delta_Y(y) = -\dim(\mathscr{O}_{Y,y}) + \operatorname{deg.tr.}(k(Y)/k(X))$ et la proposition 2.2.2 montre que $y \mapsto -\dim(\mathscr{O}_{Y,y})$ est une fonction de dimension sur $Y$. Ainsi, $\delta_Y$ est une fonction de dimension sur $Y$. □

Avant d'établir la fonctorialité des fonctions de dimension vis-à-vis des morphismes réguliers entre schémas excellents, démontrons un énoncé de changement de base par un morphisme régulier en cohomologie étale. Ce lemme est une simple conséquence du théorème de Popescu exp. **I**, 10.3 et du théorème de changement de base par un morphisme lisse [**SGA 4** XVI 1.2].

***Lemme 2.5.3.*** — *Soient*

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{g'} & T \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

*un diagramme cartésien de schémas, $n$ un entier inversible sur $S$ et $\mathscr{F}$ un faisceau étale en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur $T$. Supposons que $f$ est cohérent et que $g$ est un morphisme régulier entre schémas nœthériens. La flèche naturelle de changement de base*

$$g^\star Rf_\star(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} Rf'_\star g'^\star(\mathscr{F})$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — La question étant locale sur $S$ et $S'$, on peut supposer que $S$ et $S'$ sont affines. D'après le théorème de Popescu, il existe un ensemble ordonné filtrant $I$ (non vide) et une famille de schémas affines $S_i$ indexée par $I$, tels que $S_i$ soit lisse sur $S$ pour tout $i \in I$ et que $S' = \lim_i S_i$. Il existe donc pour tout $i \in I$ un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} T' & \xrightarrow{h'_i} & T_i & \xrightarrow{g'_i} & T \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow{h_i} & S_i & \xrightarrow{g_i} & S \end{array}$$

On conclut grâce à la suite d'isomorphismes suivante pour tout $q \geq 0$ :

$$\begin{aligned} R^q f'_\star g'^\star(\mathscr{F}) &\xleftarrow{\sim} \mathrm{colim}_i h_i^\star R^q f_{i\star} g_i'^\star(\mathscr{F}) \\ &\xleftarrow{\sim} \mathrm{colim}_i g^\star R^q f_\star(\mathscr{F}) \\ &\xleftarrow{\sim} g^\star R^q f_\star(\mathscr{F}) \end{aligned}$$

Le premier de ces isomorphismes résulte du théorème de passage à la limite [**SGA 4** VII 5.11], et le second du théorème de changement de base par le morphisme lisse $g_i$ [**SGA 4** XVI 1.2]. □

Nous prouvons à présent qu'un morphisme régulier entre schémas excellents permet d'induire des fonctions de dimension.

***Proposition 2.5.4.*** — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme régulier entre schémas quasi-excellents et $\delta_X$ une fonction de dimension sur $X$. La fonction $\delta_Y : Y \to \mathbf{Z}$ définie par*

$$\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) - \dim(\mathscr{O}_{Y_{f(y)},y})$$

*est une fonction de dimension sur $Y$.*

*Démonstration.* — Comme la vérification est locale, il n'y a pas de mal à supposer $X$ et $Y$ strictement locaux et $f$ local. Les schémas quasi-excellents $X$ et $Y$ sont alors excellents (cf. proposition 1.3.2). Soit $\delta$ une fonction de dimension sur $Y$ ; son existence est assurée par le théorème 2.2.1. Il suffit de montrer que $\delta_Y - \delta$ est une fonction constante sur $Y$. Les fibres de $f$ sont régulières donc universellement caténaires d'après 1.1.3. La proposition 2.2.2 montre que la fonction qui à $y \in Y$ associe $-\dim(\mathscr{O}_{Y_{f(y)},y})$ induit une fonction de dimension sur chacune des fibres de $f$. La fonction $\delta_Y - \delta$ est donc localement constante sur chaque fibre de $f$. Il résulte du lemme 2.5.3 que ces fibres sont connexes : en effet, on a $H^0(f^{-1}(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = H^0(x, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour tout $x \in X$ et tout entier $n$ inversible sur $X$. La fonction $\delta_Y - \delta$ est donc constante sur les fibres de $f$ et descend à $X$. Il suffit de montrer que $\gamma = \delta_Y - \delta$ est localement constante sur $X$. Une façon de calculer la valeur de $\gamma$ en un point $s$ de $X$ consiste à considérer le point générique $\eta_s$ du schéma régulier connexe $f^{-1}(s)$, de sorte que $\gamma(s) = \delta_X(s) - \delta(\eta_s)$. Soit $s' \rightsquigarrow s$ une spécialisation Zariski immédiate entre deux points de $X$. Il s'agit de montrer que $\gamma(s) = \gamma(s')$. Vu que $\delta_X$ et $\delta$ sont des fonctions de dimension sur $X$ et $Y$ respectivement, pour montrer cela, il suffit de savoir que $\eta_{s'}$ est une spécialisation immédiate de $\eta_s$. Pour montrer cela, quitte à remplacer $X$ par le localisé en $s$ de l'adhérence de $s'$, on peut supposer que $X$ est local intègre de dimension 1, de point générique $s'$ et de point fermé $s$. Il s'agit alors de montrer que la fibre $f^{-1}(s)$ est de codimension 1 dans $Y$, ce qui résulte facilement du *Hauptidealsatz*. □

### 2.6. Contre-exemple. —

*2.6.1.* — Rappelons l'exemple de [**ÉGA** IV$_2$ 5.6.11] d'un schéma caténaire non universellement caténaire. Soient $k_0$ un corps et $k$ une extension purement transcendante de $k_0$ de degré de transcendance infini. Notons $S = k[X]_{(X)}$ le localisé de l'anneau de la droite affine sur $k$ en l'origine et $V = S[T]$. Les idéaux maximaux $\mathfrak{m} = (X, T)$ et $\mathfrak{m}' = (XT - 1)$ de $V$ sont respectivement de hauteur 2 et 1, et il existe un isomorphisme $\phi : V/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} V/\mathfrak{m}'$. On note $v$ et $v'$ les points fermés de $\mathrm{Spec}(V)$ correspondant aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$. Posons $C = \{f \in V \mid \phi(f \mod \mathfrak{m}) = f \mod \mathfrak{m}'\}$. C'est un sous-anneau de $V$ qui n'est pas de type fini sur $k$. Le morphisme $\mathrm{Spec}(V) \to \mathrm{Spec}(C)$ est fini et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense $\mathrm{Spec}(C) - \{c\}$ où $c$ est le point fermé de $C$ correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}' \subset C$. L'espace topologique $\mathrm{Spec}(C)$ s'identifie au quotient de $\mathrm{Spec}(V)$ pour la relation d'équivalence qui identifie $v$ et $v'$.

***Proposition 2.6.2.*** — *Le schéma* $\mathrm{Spec}(C)$ *est nœthérien, quasi-excellent, caténaire mais non universellement caténaire. Le point fermé correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $C$ est une spécialisation étale immédiate mais non Zariski immédiate du point générique de* $\mathrm{Spec}(C)$.

*Démonstration.* — Le caractère nœthérien est montré dans [**ÉGA** IV$_2$ 5.6.11] et le caractère quasi-excellent dans [**ÉGA** IV$_2$ 7.8.4 (ii)]. Le schéma $\mathrm{Spec}(C)$ est caténaire d'après le corollaire 1.2.4 car il est de dimension 2. Les points $v$ et $v'$ s'identifient aux deux points fermés de $\mathrm{Spec}(V \otimes_C C_\mathfrak{n})$ et les localisés correspondants $\mathrm{Spec}(V_\mathfrak{m})$ et $\mathrm{Spec}(V_{\mathfrak{m}'})$ sont de dimensions respectives 2 et 1, ce qui met en défaut la dernière condition du théorème 1.2.3 : l'anneau local $C_\mathfrak{n}$ n'est pas universellement caténaire.

L'anneau local $C_\mathfrak{n}$ étant de dimension 2, le point $c \in \mathrm{Spec}(C)$ n'est pas spécialisation Zariski immédiate du point générique. En revanche, c'en est une spécialisation étale immédiate grâce à la proposition 2.1.11 appliquée au morphisme fini $\mathrm{Spec}(V) \to \mathrm{Spec}(C)$ et à la spécialisation étale immédiate évidente $\bar{\eta}_{\mathrm{Spec}(V)} \rightsquigarrow \bar{v}'$ de points géométriques de $\mathrm{Spec}(V)$. □

## Références

[Matsumura, 1980a] Matsumura, H. (1980a). *Commutative algebra*, volume 56 des *Mathematics Lecture Note Series*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, seconde édition. ↑ 1, 5, 8

[Matsumura, 1980b] Matsumura, H. (1980b). 可換環論. 共立出版. ↑ 10

[Matsumura, 1989] Matsumura, H. (1989). *Commutative ring theory*, volume 8 des *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, seconde édition. Traduction anglaise de [**Matsumura, 1980b**]. ↑ 2, 7

[Zariski & Samuel, 1975] Zariski, O. & Samuel, P. (1975). *Commutative algebra*, volumes 28 & 29. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. ↑ 1