XVII. Dualité

Joël Riou

version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

Table des matières

Ce texte vise à fournir une rédaction des résultats annoncés par Ofer Gabber dans [**Gabber, 2005**] concernant les complexes dualisants dans le contexte étale sur les schémas noethériens excellents.

On fixe un entier naturel $n \geq 2$, on note $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$: ce sera notre anneau de coefficients. Si X est un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien, on note $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ la sous-catégorie de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée des complexes ayant des faisceaux de cohomologie constructibles, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{tf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ formée des complexes de tor-dimension finie et $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda) := \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \cap \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{tf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Définition 0.1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien. Un **complexe dualisant** sur X est un objet $K \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ tel que le foncteur de dualité $D_K = \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-, K)$ préserve $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et que pour tout $L \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme de bidualité $L \to D_K\, D_K\, L$ (cf. exp. **XVI**, 4.7.7 et aussi §E) soit un isomorphisme.

Cette définition diffère de celle de [**SGA 5** I 1.7] dans la mesure où on ne demande pas à un complexe dualisant d'être de dimension quasi-injective finie.

Le théorème suivant récapitule l'essentiel des résultats de Gabber que nous allons établir dans ces notes :

Théorème 0.2. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension (cf. définition 2.1.1). Alors, X admet un complexe dualisant K, unique à produit tensoriel avec un objet inversible près (cf. proposition B.2). Ce complexe dualisant K appartient à $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$; il est de dimension quasi-injective finie (autrement dit est un complexe dualisant au sens de* [**SGA 5** I 1.7]*) si et seulement si X est de dimension de Krull finie.*

Par ailleurs, on a les résultats suivants :

- *si X est régulier, le faisceau constant Λ est un complexe dualisant ;*
- *si $f\colon Y \to X$ est un morphisme plat et à fibres géométriquement régulières avec Y noethérien excellent, alors $f^!K$ est un complexe dualisant ;*
- *si $f\colon Y \to X$ est un morphisme de type fini compactifiable, alors $f^!K$ est un complexe dualisant.*

La démonstration s'appuie sur la notion de complexe dualisant potentiel (définition 2.1.2) sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent X muni d'une fonction de dimension δ : il s'agit de la donnée d'un complexe $K \in \mathsf{D}^{+}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ muni d'isomorphismes (appelés épinglages) $\mathrm{R}\Gamma_x(K) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$ pour tous les points $x \in X$, qui soient compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates de points géométriques de X (cf. section 1). Gabber montre dans [**Gabber, 2004**, lemma 8.1][(i)] que si un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien admet un complexe dualisant, alors il admet une fonction de dimension ; cette hypothèse du théorème 0.2 est donc bien nécessaire.

Dans la section 2, nous verrons notamment que sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien régulier excellent, le faisceau constant Λ est un complexe dualisant potentiel pour la fonction de dimension $-\mathrm{codim}$ (cf. proposition 2.4.4.1). Pour ce faire, nous utiliserons de manière essentielle le théorème de pureté cohomologique absolue démontré par Gabber, ainsi que les propriétés des morphismes de Gysin établies dans exp. **XVI**, 2.

Dans la section 3, nous construirons un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ où X est un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent local strictement hensélien normal de dimension d et de point fermé x, vérifierons que cet isomorphisme est compatible aux spécialisations immédiates et nous servirons de ce résultat pour construire des morphismes de transition $H^i_{\overline{y}}(X, K) \to H^{i+2c}_{\overline{x}}(X, K(c))$ pour une spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$ de codimension c arbitraire entre points géométriques d'un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent X, pour tout $K \in \mathsf{D}^{+}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Nous utiliserons notamment la résolution des singularités pour les schémas noethériens excellents de dimension 2.

(i) Dans *loc. cit.*, il faut remplacer l'hypothèse « $n > 0$ » par « $n >$ » : lorsque l'anneau de coefficients $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est nul, les entiers $n(x)$ ne sont pas définis.

Dans la section 5, nous montrerons l'existence et l'unicité à isomorphisme unique près d'un complexe dualisant potentiel sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension. Dans le cas d'un schéma normal, nous nous appuierons sur les résultats de la section 3 et sur les résultats généraux de Gabber sur l'existence de t-structures définies par des fonctions de perversité. Nous montrerons aussi que les complexes dualisants potentiels vérifient de bonnes propriétés de stabilité par rapport aux morphismes plats et à fibres géométriquement régulières et aux morphismes de type fini.

Dans la section 6, nous montrerons qu'un complexe dualisant potentiel est un complexe dualisant. Une fois les propriétés de finitude établies, nous procéderons par récurrence sur la dimension, en utilisant d'une part une généralisation d'un argument de [**SGA 4½** [Th. finitude] 4.3] et d'autre part le théorème d'algébrisation partielle exp. **V**, 3.1.3.

Dans la section 7, nous montrons qu'à partir d'un complexe dualisant à coefficients Λ, on peut construire des complexes dualisants pour des anneaux de coefficients plus généraux. Ces résultats sont essentiellement indépendants des sections précédentes. Cependant, ce n'est qu'en combinant les résultats des sections précédentes sur les complexes dualisants potentiels avec le résultat d'unicité des complexes dualisants de la proposition 7.5.1.1 que l'on peut déduire le théorème 0.2. En vertu de ce théorème 0.2, les constructions de cette section donnent en particulier des complexes dualisants pour des anneaux de coefficients généraux sur les schémas noethériens excellents munis de fonctions de dimension. Il semble très probable qu'il soit possible d'étendre les résultats d'Ofer Gabber à des énoncés de dualité avec des coefficients ℓ-adiques. Toutefois, le rédacteur a renoncé à les rédiger.

Enfin, les sections A, B, C, D et E contiennent quelques résultats nécessaires à ce qui précède. On y décrit notamment une construction du produit tensoriel dérivé sur la catégorie dérivée toute entière des faisceaux de modules sur un topos annelé (commutatif).

1. Le morphisme de transition en codimension 1

1.1. Notations. —

Définition 1.1.1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma, soit $x \in X$, soit $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. On pose $\mathrm{R}\Gamma_x(K) = i_x^! K_{|X_{(x)}} \in \mathsf{D}^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ où i_x est l'inclusion du point fermé du localisé $X_{(x)}$ [(ii)]. Si $\overline{x}$ est un point géométrique de X au-dessus de x [(iii)], on note $\mathrm{R}\Gamma_{\overline{x}}(K) = \mathrm{R}\Gamma_x(K)_{\overline{x}} \in \mathsf{D}^+(\Lambda)$; cet objet s'identifie à la cohomologie à supports dans le point fermé de la restriction de K à l'hensélisé strict $X_{(\overline{x})}$. Les objets de cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma_{\overline{x}}(K)$ seront notés $\mathrm{H}^i_{\overline{x}}(K)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Définition 1.1.2 **([SGA 4** VIII 7.2], **exp. XIV, 2.1.1, exp. XIV, 2.1.2)**. — Si $\overline{y}$ et $\overline{x}$ sont deux points géométriques d'un schéma X, une **spécialisation** $\overline{y} \to \overline{x}$ est un X-morphisme $X_{(\overline{y})} \to X_{(\overline{x})}$ entre les hensélisés stricts correspondants, ce qui revient à la donnée d'un X-morphisme $\overline{y} \to X_{(\overline{x})}$. On définit la **codimension d'une spécialisation** comme étant la dimension de l'adhérence du point de $X_{(\overline{x})}$ en-dessous de $\overline{y}$. On dit qu'une spécialisation est **immédiate** si elle est de codimension 1.

On se propose ici de définir un morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}} \colon \mathrm{R}\Gamma_{\overline{y}}(K) \to \mathrm{R}\Gamma_{\overline{x}}(K)(1)[2]$ dans $\mathsf{D}^+(\Lambda)$ pour toute spécialisation immédiate $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma excellent X, quel que soit $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

1.2. Cas d'un trait strictement hensélien. — Soit X un trait strictement hensélien de point générique η et de point fermé s. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. On va définir le morphisme de transition

$$\mathrm{R}\Gamma_{\overline{\eta}}(K) \to \mathrm{R}\Gamma_s(K)(1)[2]$$

pour tout $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

On note p l'exposant caractéristique du corps résiduel de X, que l'on suppose inversible dans Λ. On dispose d'une suite exacte canonique de groupes profinis :

$$1 \to S \to \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \to G \to 1\ ,$$

[(ii)] On obtiendrait une définition équivalente en remplaçant le schéma local $X_{(x)}$ par son hensélisé.

[(iii)] Dans la suite, pour ne pas alourdir inutilement le texte, si on fixe un point x d'un schéma X, $\overline{x}$ désignera un point géométrique au-dessus de x et inversement, si on fixe un point géométrique $\overline{x} \to X$, on notera x le point de l'espace topologique sous-jacent à X au-dessus duquel $\overline{x}$ se trouve. Dans cet exposé, on fera toujours l'hypothèse implicite que l'extension de corps $\kappa(\overline{x})/\kappa(x)$ est algébrique et séparable, autrement dit que $\kappa(\overline{x})$ est une clôture séparable de $\kappa(x)$.

où G est le groupe d'inertie modérée, canoniquement isomorphe à $\widehat{\mathbf{Z}}'(1)$ [(iv)] et où S, le groupe de ramification sauvage, est un pro-p-groupe (cf. [**Gabber & Ramero, 2003**, proposition 6.2.12]).

On rappelle que l'ordre d'un groupe profini est un nombre surnaturel (cf. [**Serre, 1994**, § 1.3, chapitre I]). On peut alors énoncer que l'ordre de G est multiple de $(\#\Lambda)^\infty$: ce fait sera utile au lecteur scrupuleux qui voudrait vérifier en exercice les détails passés sous silence dans cette sous-section.

1.2.1. Algèbre du groupe $\widehat{\mathbf{Z}}'(1)$. —

Définition 1.2.1.1. — L'algèbre de groupe $\Lambda[[G]]$ est l'anneau des endomorphismes du foncteur d'oubli de la catégorie des Λ-modules discrets munis d'une action continue de G vers celle des Λ-modules. Cette algèbre est naturellement topologisée : elle est munie de la topologie la moins fine qui soit telle que pour tout Λ-module discret M muni d'une action continue de G et tout élément $m \in M$, l'application $\Lambda[[G]] \to M$ qui à $a \in \Lambda[[G]]$ associe le résultat $a.m$ de son action sur m soit continue.

On a un isomorphisme canonique d'anneaux topologiques

$$\Lambda[[G]] \xrightarrow{\sim} \lim \Lambda[G/H] \ ,$$

où H parcourt l'ensemble ordonné des sous-groupes ouverts distingués de G et où $\Lambda[G/H]$ est l'algèbre de groupe usuelle (discrète) du groupe fini G/H. On peut identifier les Λ-modules discrets munis d'une action continue de G aux $\Lambda[[G]]$-modules discrets.

L'action naturelle de $\Lambda[[G]]$ sur Λ muni de l'action triviale de G définit un morphisme continu d'augmentation $\varepsilon\colon \Lambda[[G]] \to \Lambda$. On note I_G le noyau de ε : c'est l'idéal d'augmentation.

Proposition 1.2.1.2. — *Le $\Lambda[[G]]$-module I_G est libre de rang 1, engendré par $1-\sigma$ si σ est un générateur topologique de G. (Plus généralement, si $d \geq 1$ est un entier premier à p, le noyau du morphisme d'anneaux canonique $\Lambda[[G]] \to \Lambda[\mu_d]$ est un $\Lambda[[G]]$-module libre engendré par $1-\sigma^d$.)*

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice au lecteur.

Le lemme suivant nous sera utile au §1.2.2 :

Lemme 1.2.1.3. — *Soit M un objet injectif dans la catégorie des $\Lambda[[G]]$-modules discrets. Le morphisme évident $M \to \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M)$ (qui à x associe $a \longmapsto ax$) est surjectif.*

Notons σ un générateur topologique de G. Soit $\varphi\colon I_G \to M$ un morphisme de $\Lambda[[G]]$-modules. Notons $m := \varphi(1-\sigma)$. Comme M est discret, il existe un entier $d \geq 1$ premier à p tel que $\sigma^d(m) = m$. Notons $C_d \in GL_{1+d}(\Lambda)$ la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On introduit un Λ-module libre V_d de rang $1+d$ dont une base est notée $\mathscr{B} = (f, e_0, e_1, \dots, e_{d-1})$. On note $c \in \mathsf{Aut}_\Lambda(V_d)$ l'automorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ soit C, c'est-à-dire que $c(f) = f + e_0$, $c(e_i) = e_{i+1}$ si $0 \leq i \leq d-2$ et $c(e_{d-1}) = e_0$. On en déduit l'identité suivante :

$$C^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si on note $d' := d \cdot \#\Lambda$, il vient ensuite que $C^{d'} = \mathrm{Id}$ et que $c \in \mathsf{Aut}_\Lambda(V_d)$ est d'ordre d'. L'entier d' étant premier à p, on en déduit une structure de $\Lambda[[G]]$-module discret sur le Λ-module V_d telle que le générateur topologique $\sigma \in G$ agisse par $c\colon V_d \to V_d$. Notons $V'_d \subset V_d$ le sous-Λ-module engendré par $(e_0, \dots, e_{d-1})$. C'est aussi un sous-$\Lambda[[G]]$-module discret et on peut considérer l'application Λ-linéaire $\psi\colon V'_d \to M$ qui à e_i associe $\sigma^i(m)$. On a ainsi construit un morphisme $\psi\colon V'_d \to M$ de $\Lambda[[G]]$-modules discrets. L'injectivité de M

[(iv)] Pour qu'il n'y ait aucune ambiguité de signe, $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ est le groupe $\mathsf{Aut}_{\kappa(\eta)}(\kappa(\overline{\eta}))$ et pour tout entier n inversible dans X, le morphisme composé $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta) \to \widehat{\mathbf{Z}}'(1) \to \mu_n$ envoie $\sigma \in \mathsf{Aut}_{\kappa(\eta)}(\kappa(\overline{\eta}))$ sur $\frac{\sigma(\pi')}{\pi'}$ où $\pi' \in \kappa(\overline{\eta})$ est une racine n-ième d'une uniformisante de X.

fait que ce morphisme se prolonge en un morphisme $\tilde{\psi}\colon V_d \to M$. Posons $\tilde{m} := \tilde{\psi}(f)$; la $\Lambda[[G]]$-linéarité de $\tilde{\psi}$ implique que $\varphi(1-\sigma) = m = \psi(e_0) = \tilde{\psi}(e_0) = \tilde{\psi}(\sigma(f)-f) = \sigma(\tilde{m}) - \tilde{m}$. D'après la proposition 1.2.1.2), l'idéal I_G est engendré par $1-\sigma$; on a donc plus généralement $\varphi(a) = a\tilde{m}$ pour tout $a \in I_G$.

Remarque 1.2.1.4. — La proposition 1.2.1.2 permet de montrer que le $\Lambda[[G]]$-module V_d intervenant dans la démonstration précédente est isomorphe au quotient $\Lambda[[G]]/J_d$ où J_d est l'idéal de $\Lambda[[G]]$ engendré par $(1-\sigma)(\sigma^d-1)$, l'isomorphisme envoyant la base $(f, e_0, e_1, \dots, e_{d-1})$ de V_d sur $(1, \sigma-1, \sigma^2-\sigma, \dots, \sigma^d-\sigma^{d-1})$. L'inclusion $V'_d \to V_d$ s'identifie alors à l'inclusion $I_G/J_d \to \Lambda[[G]]/J_d$.

1.2.2. Description de la cohomologie à supports. — Il est clair que la catégorie des faisceaux (d'ensembles) sur $X_{\text{ét}}$ est naturellement équivalente à la catégorie des flèches de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$-ensembles (discrets) $\mathscr{M}_s \to \mathscr{M}_{\overline{\eta}}$ telles que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ sur $\mathscr{M}_s$ soit triviale.

Pour tout faisceau de Λ-modules $\mathscr{M}$ sur $X_{\text{ét}}$, on pose $F^0\mathscr{M} := \mathscr{M}_s$, $F^1\mathscr{M} := \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$, $F^2\mathscr{M} := \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S)$ où $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$ désigne le sous-groupe des points-fixes sous S de l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ sur la fibre $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}$. Le morphisme canonique $\overline{\eta} \to X$ induit un morphisme $\alpha\colon F^0\mathscr{M} \to F^1\mathscr{M}$. On définit un morphisme $\beta\colon F^1\mathscr{M} \to F^2\mathscr{M}$ de telle sorte que si $m \in \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$ et $a \in I_G$, alors $\beta(m)(a) = am$. En posant, $F^q\mathscr{M} = 0$ pour $q \notin \{0,1,2\}$, on définit ainsi un complexe $F\mathscr{M}$ dans la catégorie des Λ-modules :

$$\dots \to 0 \to \mathscr{M}_s \xrightarrow{\alpha} \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S) \to 0 \to \dots$$

où $\mathscr{M}_s$ est placé en degré 0. On notera que le foncteur qui à $\mathscr{M}$ associe $F\mathscr{M}$ est additif.

Pour tout complexe K dans la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$, on note $FK := \mathrm{Tot}((F^qK^p)_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2})$ où $(F^qK^p)_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2}$ est le bicomplexe évident (cf. exp. **XVI**, 4.4 pour les conventions de signes sur le complexe simple). Autrement dit, $(FK)^n := F^0K^n \oplus F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2}$ et la différentielle $d_{FK}\colon (FK)^n \to (FK)^{n+1}$ est décrite par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} d_K & 0 & 0 \\ (-1)^n\alpha & d_K & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1}\beta & d_K \end{pmatrix}$$

On définit ainsi un foncteur F de la catégorie des complexes de faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ vers celle des complexes de Λ-modules. Les conventions de signes font que pour tout K, on dispose d'un isomorphisme canonique de complexes $F(K[1]) \simeq (FK)[1]$ (dont la définition ne fait pas intervenir de signe). Si $K \xrightarrow{f} L$ est un morphisme de complexes, l'image par F du triangle distingué $K \xrightarrow{f} L \to \mathrm{cône}(f) \to K[1]$ s'identifie (sans intervention de signes supplémentaires) à $FK \xrightarrow{F(f)} FL \to \mathrm{cône}(F(f)) \to F(K)[1]$. On observe en outre que, les foncteurs F^q pour $q \in \{0,1,2\}$ étant exacts, si K est acyclique, alors FK aussi. De ces remarques, il résulte que F préserve les quasi-isomorphismes et induit un foncteur triangulé $F\colon D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to D^+(\Lambda)$.

Observons enfin que si $\mathscr{M}$ est un faisceau de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$, alors on a une égalité $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, \mathscr{M}) = \mathrm{Ker}(\alpha\colon F^0\mathscr{M} \to F^1\mathscr{M})$. Ainsi, pour tout complexe K de faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$, si on note $\Gamma_s(X, K)$ le complexe obtenu en appliquant $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, -)$ aux faisceaux constituant le complexe K, on dispose d'une transformation naturelle $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \to FK$.

Proposition 1.2.2.1. — *La transformation naturelle $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \to FK$ induit pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ un isomorphisme*

$$R\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \xrightarrow{\sim} FK$$

dans $D^+(\Lambda)$.

Il s'agit de montrer que si K est un complexe borné inférieurement formé d'objets injectifs, alors le morphisme $\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \to FK$ est un quasi-isomorphisme. Cet énoncé se ramène aussitôt au cas où K est constitué d'un unique faisceau de Λ-modules injectif $\mathscr{M}$ placé en degré 0. Compte tenu du fait que $\Gamma_s(X, \mathscr{M}) = H^0(F\mathscr{M})$ pour tout faisceau de Λ-modules, il suffit de montrer que $H^q(F\mathscr{M}) = 0$ pour $q \in \{1,2\}$ si $\mathscr{M}$ est injectif.

On remarque que $\mathrm{Ker}(\beta)$ s'identifie à $\Gamma(\eta, \mathscr{M})$ puis que l'on a un isomorphisme $H^1(F\mathscr{M}) \simeq \mathrm{Coker}(\Gamma(X, \mathscr{M}) \to \Gamma(\eta, \mathscr{M}))$ pour tout faisceau de Λ-modules. Un faisceau injectif étant flasque, on obtient bien que $H^1(F\mathscr{M}) = 0$ si $\mathscr{M}$ est injectif.

Il reste à montrer que $H^2(F\mathscr{M}) = 0$ si $\mathscr{M}$ est injectif. Le foncteur de restriction des faisceaux de Λ-modules de $X_{\text{ét}}$ à $\eta_{\text{ét}}$ admettant un adjoint à gauche exact, si $\mathscr{M}$ est injectif, alors $\mathscr{M}_{|\eta}$ aussi. De même, le foncteur image directe associé au morphisme de topos évident $u\colon \eta_{\text{ét}} \to \mathbf{B}G$ (cf. [**SGA 4** IV 4.5.2]) préserve les injectifs. Comme $u_\star\mathscr{M}_{|\eta} = \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$, si $\mathscr{M}$ est injectif, alors $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$ est injectif dans la catégorie des $\Lambda[[G]]$-modules discrets et on peut conclure que $H^2(F\mathscr{M}) = \mathrm{Coker}(\beta)$ est nul en utilisant le lemme 1.2.1.3.

1.2.3. Définition du morphisme de transition. — Soit σ un générateur topologique de G. Soit M un $\Lambda[[G]]$-module discret. On observe que l'on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens $M(-1) \simeq \mathrm{Hom}(G, M)$. On définit un morphisme de groupes abéliens $M(-1) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M)$ *via* les isomorphismes suivants, cf. proposition 1.2.1.2 :

$$M(-1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G, M) \underset{\sim}{\xrightarrow{\mathrm{ev}_\sigma}} M \underset{\sim}{\xleftarrow{\mathrm{ev}_{1-\sigma}}} \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, M)\ .$$

Si $\mathscr{M}$ est un faisceau de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$, on peut appliquer la construction ci-dessus au $\Lambda[[G]]$-module discret $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$, ce qui fournit un morphisme $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S(-1) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S) = F^2\mathscr{M}$. Le groupe profini S étant un pro-p-groupe et p étant inversible dans Λ, on dispose d'un projecteur canonique $\mathscr{M}_{\overline{\eta}} \to \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S$ qui après torsion fournit un morphisme $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \to \mathscr{M}_{\overline{\eta}}^S(-1)$ que l'on peut composer avec celui précédemment construit pour obtenir un morphisme $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \to F^2\mathscr{M}$ et donc un morphisme de complexes $s_\sigma\colon \mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \to F\mathscr{M}[2]$. En tensorisant ce morphisme avec $\Lambda(1)$ (ou en appliquant s_σ au faisceau $\mathscr{M}(1)$, cela revient au même), on obtient un morphisme de complexes $s_\sigma(1)\colon \mathscr{M}_{\overline{\eta}} \to F(\mathscr{M})(1)[2]$. Sans ajout de signe supplémentaire, on en déduit un morphisme $s_\sigma(1)\colon K_{\overline{\eta}} \to F(K)(1)[2]$ pour tout complexe de faisceaux de Λ-modules K sur $X_{\text{ét}}$. Compte tenu de la proposition 1.2.2.1, on peut procéder à la définition suivante :

Définition 1.2.3.1. — On note $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}\colon R\Gamma_{\overline{\eta}}(K) \to R\Gamma_s(K)(1)[2]$ le morphisme dans $D^+(\Lambda)$ défini par $s_\sigma(1)$ fonctoriellement pour tout objet $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. D'après le lemme suivant, ce morphisme $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}$ est indépendant du générateur σ de G : c'est le morphisme de transition associé à la spécialisation $\overline{\eta} \to s$ de points géométriques de X.

Lemme 1.2.3.2. — *Si σ et σ' sont deux générateurs topologiques de G, il existe une unique homotopie fonctorielle en le faisceau $\mathscr{M}$ reliant les deux morphismes $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \to F(\mathscr{M})[2]$ donnés par s_σ et $s_{\sigma'}$*

On voit aussitôt qu'on peut se limiter aux $\mathscr{M}$ tels que $\mathscr{M}_s = 0$ et que S agisse trivialement sur $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}$. On peut identifier cette catégorie de faisceaux à celle des $\Lambda[[G]]$-modules discrets.

Soit M un $\Lambda[[G]]$-module discret. Notons $\mathscr{M}$ le faisceau sur $X_{\text{ét}}$ correspondant. On note $F_\sigma(M)$ le complexe

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{1-\sigma} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

concentré en les degrés 1 et 2. On note $\Psi_\sigma\colon F\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} F_\sigma(M)$ l'isomorphisme de complexes défini de façon évidente à partir de σ :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
F\mathscr{M} & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathscr{M}_{\overline{\eta}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mathscr{M}_{\overline{\eta}}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\Psi_\sigma \downarrow \wr & & & & \downarrow & & \| & & \wr\downarrow \mathrm{ev}_{1-\sigma} & & \downarrow & & \\
F_\sigma(M) & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Notons $\varphi_\sigma\colon \mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \xrightarrow{\sim} M$ l'isomorphisme défini par l'évaluation en σ *via* l'isomorphisme canonique $\mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathscr{M}_{\overline{\eta}})$. Notons $t_\sigma\colon M \to F_\sigma(M)[2]$ le morphisme de complexes représenté par les flèches verticales ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
M & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow t_\sigma & & & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
F_\sigma(M)[2] & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{1-\sigma} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

On dispose ainsi d'un carré commutatif de complexes, fonctoriel en M :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) & \xrightarrow{s_\sigma} & F(\mathscr{M})[2] \\
\wr\downarrow \varphi_\sigma & & \wr\downarrow \Psi_\sigma \\
M & \xrightarrow{t_\sigma} & F_\sigma(M)[2]
\end{array}$$

On a ainsi $t_\sigma = \Psi_\sigma \circ s_\sigma \circ \varphi_\sigma^{-1}$. Posons $f_{\sigma,\sigma'} = \Psi_\sigma \circ s_{\sigma'} \circ \varphi_\sigma^{-1}$. Les flèches verticales du diagramme ci-dessus étant des isomorphismes de complexes, montrer que les morphismes $s_\sigma, s_{\sigma'}\colon \mathscr{M}_{\overline{\eta}}(-1) \to F(\mathscr{M})[2]$ sont (fonctoriellement) homotopes revient à vérifier que les deux morphismes $t_\sigma, f_{\sigma,\sigma'}\colon M \to F_\sigma(M)[2]$ le sont.

On peut ainsi représenter la situation de façon plus concrète :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\mathrm{Id}"'] \arrow[d, bend left, "g"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "1-\sigma"] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

où g est la transformation naturelle induite par $f_{\sigma,\sigma'}$.

Comme $\Lambda[[G]]$ désigne précisément l'anneau des transformations naturelles $M \to M$, on peut identifier Id et g à des éléments 1 et g de $\Lambda[[G]]$ respectivement. Montrer l'existence et l'unicité de l'homotopie fonctorielle entre s_σ et $s_{\sigma'}$ se ramène donc à montrer l'existence et l'unicité de $h \in \Lambda[[G]]$ tel que $(1-\sigma)\cdot h = 1-g$. D'après la proposition 1.2.1.2, cela revient à montrer que $\varepsilon(g) = 1$. Par définition de $f_{\sigma,\sigma'}$, si on note u l'unité de $\Lambda[[G]]$ telle que $(1-\sigma') = u\cdot(1-\sigma)$ et qu'on note α l'élément de $\widehat{\mathbf{Z}}'^{\times}$ tel que $\sigma' = \sigma^\alpha$, alors on a la relation $u\cdot g = \alpha$. Pour montrer $\varepsilon(g) = 1$, on est donc ramené à montrer que $\varepsilon(u) = \varepsilon(\alpha)$. Pour cela, on utilise la formule suivante :

$$\frac{1-\sigma^\beta}{1-\sigma} = \sum_{i=0}^{\beta-1} \sigma^i \; .$$

Cette formule est évidemment juste pour $\beta \in \mathbf{N}$; on peut lui donner un sens pour tout $\beta \in \widehat{\mathbf{Z}}$ en prolongeant chacun des membres par continuité. En appliquant cette formule avec $\beta = \alpha$, on obtient le résultat voulu :

$$\varepsilon(u) = \varepsilon\left(\sum_{i=0}^{\alpha-1} \sigma^i\right) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} 1 = \varepsilon(\alpha) \; ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

1.2.4. Compatibilité avec la classe du point fermé. —

Proposition 1.2.4.1. — *Dans le cas du faisceau Λ, l'image de $1 \in \Lambda$ par le morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\eta\to s}\colon \Lambda \to \mathrm{R}\Gamma_s(X_{\text{ét}}, \Lambda(1))[2]$ est la classe $\mathrm{Cl}_{s\to X} \in H^2_{s,\text{ét}}(X, \Lambda(1))$ de exp.* ***XVI****, 2.3.1.*

Le seul enjeu de la démonstration de cette proposition est de s'assurer que le signe est correct. C'est ce qui justifie la précision des conventions de signes discutées dans exp. **XVI**, 4, puisqu'elles permettent de donner un sens précis à l'énoncé ci-dessus.

Définition 1.2.4.2. — Pour les besoins de la démonstration de la proposition 1.2.4.1, on introduit un foncteur E de la catégorie des complexes de faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ vers celle des Λ-modules de la façon suivante. Pour tout complexe de faisceaux K, on note $E^{p,0}K := F^1K^p = (K^p_{\overline{\eta}})^S$, $E^{p,1}K := F^2K^p = \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, (K^p_{\overline{\eta}})^S)$ et $E^{p,q}K = 0$ pour $q \notin \{0,1\}$. On définit un bicomplexe $(E^{p,q}K)_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2}$ en notant $d_h\colon E^{p,q}K \to E^{p+1,q}K$ pour $q \in \{0,1\}$ les morphismes induits par les différentielles sur K et $d_v\colon E^{p,0}K \to E^{p,1}K$ le morphisme $\beta\colon F^1K^p \to F^2K^p$. On pose $EK := \mathrm{Tot}((E^{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2})$. Autrement dit, $(EK)^n := F^1K^n \oplus F^2K^{n-1}$ et la différentielle $d_{EK}\colon (EK)^n \to (EK)^{n+1}$ est décrite par la matrice :

$$\begin{pmatrix} d_K & 0 \\ (-1)^n\beta & d_K \end{pmatrix}$$

Pour tout faisceau de Λ-modules $\mathscr{M}$ sur $X_{\text{ét}}$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le noyau de $\beta\colon F^1\mathscr{M} \to F^2\mathscr{M}$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(\eta_{\text{ét}}, \mathscr{M})$. On en déduit une transformation naturelle $\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K) \to EK$ pour tout complexe K de faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$. De même que dans le §1.2.2, E commute au foncteur [1] (sans introduction de signe supplémentaire), préserve les quasi-isomorphismes, induit un foncteur triangulé $E\colon D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to D^+(\Lambda)$ et le morphisme canonique $\mathrm{R}\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K) \to EK$ est un isomorphisme dans $D^+(\Lambda)$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. (Comme la construction ne dépend que de la restriction de K à η, on pourra se permettre d'utiliser cette construction pour $K \in D^+(\eta_{\text{ét}}, \Lambda)$.)

Définition 1.2.4.3. — On définit une transformation naturelle $\Psi\colon EK[-1] \to FK$ pour tout complexe K de faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ de la façon suivante. En degré $n \in \mathbf{Z}$, elle est donnée par le morphisme $F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2} \to F^0K^n \oplus F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2}$ décrit par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Via les isomorphismes canoniques $\mathrm{E}K \simeq \mathrm{R}\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)$ et $\mathrm{F}K \simeq \mathrm{R}\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K)$ (cf. proposition 1.2.2.1), Ψ induit un morphisme $\Psi\colon \mathrm{R}\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)[-1] \to \mathrm{R}\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K)$ pour tout $K \in \mathrm{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Lemme 1.2.4.4. — *Pour tout* $K \in \mathrm{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, *le morphisme* $\Psi\colon \mathrm{R}\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)[-1] \to \mathrm{R}\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K)$ *induit pour tout* $n \in \mathbf{Z}$ *le morphisme bord* $\delta\colon H^{n-1}_{\text{ét}}(\eta, K) \to H^n_{s,\text{ét}}(X, K)$ *(cf. exp.* ***XVI****, 4.7.6).*

On peut supposer que K est un complexe borné inférieurement formé d'objets injectifs. Soit $[\gamma] \in H^{n-1}_{\text{ét}}(\eta, K)$ une classe de cohomologie représentée par un élément $\gamma \in \Gamma(\eta, K^{n-1})$ tel que $d\gamma = 0$. (Dans cette démonstration, on notera simplement d les différentielles induites par les différentielles d_K de K.) On peut calculer $\delta([\gamma]) \in H^n_{s,\text{ét}}(X, K)$ en utilisant exp. **XVI**, 4.7.6. Le faisceau K^{n-1} étant flasque, on peut choisir $\tilde{\gamma} \in \Gamma(X, K^{n-1})$ tel que $\tilde{\gamma}_{|\eta} = \gamma$. On a alors $d\tilde{\gamma} \in \Gamma_s(X, K^{n-1})$ et $\delta([\gamma]) = [d\tilde{\gamma}] \in H^n_{s,\text{ét}}(X, K)$. *Via* l'isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma_s(X_{\text{ét}}, K) \simeq \mathrm{F}K$, la classe $\delta([\gamma]) = [d\tilde{\gamma}] \in H^n_{s,\text{ét}}(X, K)$ est décrite par le cocycle $(d\tilde{\gamma}, 0, 0) \in F^0K^n \oplus F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2} = (\mathrm{F}K)^n$. La classe $[\gamma] \in H^{n-1}_{\text{ét}}(\eta, K)$ étant représentée *via* l'isomorphisme $\mathrm{E}K \simeq \mathrm{R}\Gamma(\eta_{\text{ét}}, K)$ par le $(n-1)$-cocycle $(\gamma_{\overline{\eta}}, 0) \in F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2} = (\mathrm{E}K)^{n-1}$ de $\mathrm{E}K$, la classe $\Psi([\gamma]) \in H^n_{s,\text{ét}}(X, K)$ est décrite par le n-cocycle $(0, (-1)^n\gamma_{|\overline{\eta}}, 0) \in (\mathrm{F}K)^n$. Pour conclure, il suffit d'observer que les deux n-cocycles $(d\tilde{\gamma}, 0, 0)$ et $(0, (-1)^n\gamma_{|\overline{\eta}}, 0)$ du complexe $\mathrm{F}K$ sont cohomologues, ce qui vient de la relation

$$d_{\mathrm{F}K}(\tilde{\gamma}, 0, 0) = (d\tilde{\gamma}, (-1)^{n-1}\gamma_{|\overline{\eta}}, 0) \in F^0K^n \subset F^0K^n \oplus F^1K^{n-1} \oplus F^2K^{n-2} = (\mathrm{F}K)^n .$$

Définition 1.2.4.5. — On choisit une uniformisante π de X et un élément $\pi' \in \kappa(\overline{\eta})$ tel que $\pi'^n = \pi$ (on rappelle que $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.). On note R le sous-groupe de $\kappa(\overline{\eta})^\times$ engendré par μ_n et π'. On pose $\overline{R} := R \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, c'est-à-dire que $\overline{R}$ est le quotient de R par le sous-groupe engendré par π. (On notera $\overline{R}$ additivement.) L'action de $\mathrm{Gal}(\kappa(\overline{\eta})/\kappa(\eta))$ sur R se factorise en une action du groupe d'inertie modérée G. On en déduit une structure de $\Lambda[[G]]$-module discret sur $\overline{R}$ et on dispose d'une suite exacte évidente de $\Lambda[[G]]$-modules discrets :

$$0 \to \mu_n \to \overline{R} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0 .$$

(Le morphisme $p\colon \overline{R} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ envoie la classe $\overline{\pi'}$ de π' sur 1.)

Lemme 1.2.4.6. — *Il existe un unique morphisme de* $\Lambda[[G]]$*-modules* $Z\colon I_G \to \mu_n$ *tel que pour tout* $\sigma \in G$, $Z(1-\sigma) = \frac{\pi'}{\sigma(\pi')}$. *En particulier, si* σ *est un générateur topologique de* G *et que* $\zeta \in \mu_n$ *est l'image de* σ *par* $G \simeq \widehat{\mathbf{Z}}'(1) \to \mu_n$, *alors* $Z(1-\sigma) = \zeta^{-1}$.

Soit $\tau \in I_G$. En tant qu'élément de $\Lambda[[G]]$, τ induit un endomorphisme de $\overline{R}$. Que $\tau \in I_G$ signifie que $\tau(\overline{\pi'}) \in \mu_n \subset \overline{R}$. On peut donc poser $Z(\tau) := \tau(\overline{\pi'})$. On vérifie facilement que $Z\colon I_G \to \mu_n$ est un morphisme de $\Lambda[[G]]$-modules et que c'est le seul à satisfaire la relation $Z(1-\sigma) = \frac{\pi'}{\sigma(\pi')}$ pour tout $\sigma \in G$ (cf. proposition 1.2.1.2).

Lemme 1.2.4.7. — *Grâce aux définitions* $(\mathrm{E}\mu_n)^1 = F^2\mu_n = \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$, *l'élément* Z *du lemme 1.2.4.6 peut-être considéré comme un* 1*-cocycle du complexe* $\mathrm{E}\mu_n$. Via *l'isomorphisme canonique* $\mathrm{R}\Gamma(\eta_{\text{ét}}, \mu_n) \simeq \mathrm{E}\mu_n$, *l'élément* Z *correspond à la classe dans* $H^1_{\text{ét}}(\eta, \mu_n)$ *du torseur* $\mathscr{T}$ *des racines* n*-ièmes de l'unité de* π.

Le torseur $\mathscr{T}$ des racines n-ièmes de π s'identifie au faisceau d'ensembles sur $\eta_{\text{ét}}$ muni de l'action de μ_n correspondant à l'image inverse de 1 par le morphisme $p\colon \overline{R} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On note $\delta\colon H^0_{\text{ét}}(\eta, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \to H^1_{\text{ét}}(\eta, \mu_n)$ le morphisme de bord associé à la suite exacte

$$0 \to \mu_n \to \overline{R} \xrightarrow{p} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0$$

de la définition 1.2.4.5 ; on peut en effet identifier cette suite exacte courte de $\Lambda[[G]]$-modules discrets à une suite exacte courte de faisceaux de Λ-modules sur $\eta_{\text{ét}}$. Grâce à la construction exp. **XVI**, 4.3.1, il vient que la classe du torseur $\mathscr{T}$ est $\delta(1) \in H^1_{\text{ét}}(\eta, \mu_n)$. Pour conclure, il va s'agir de décrire δ en termes du foncteur triangulé $E \simeq \mathrm{R}\Gamma(\eta, -)$. Le morphisme de bord δ est en effet celui provenant de la construction habituelle appliquée à la suite exacte courte de complexes de Λ-modules $0 \to \mathrm{E}\mu_n \to \mathrm{E}\overline{R} \to \mathrm{E}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 0$. On part de $1 \in (\mathrm{E}\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^0 = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ que l'on relève en $\pi' \in (\mathrm{E}\overline{R})^0 = \overline{R}$. La différentielle $d\pi' := \beta(\pi') \in (\mathrm{E}\overline{R})^1 = \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \overline{R})$ est par construction l'image de $Z \in \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n) = (\mathrm{E}\mu_n)^1$ par la composition avec l'inclusion $\mu_n \to \overline{R}$. On en déduit que $\delta(1) = [Z] \in H^1(\mathrm{E}\mu_n)$.

Nous pouvons enfin démontrer la proposition 1.2.4.1. Pour déterminer l'image de $1 \in \Gamma(\overline{\eta}_{\text{ét}}, \Lambda)$ par $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}$, il s'agit d'utiliser la définition de s_σ appliquée à $\Lambda(1) = \mu_n$ pour σ un générateur topologique de G. Si on suit la construction du §1.2.3, on fait d'abord correspondre à $1 \in \Lambda \simeq \mu_n(-1)$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$ qui est $-Z$. On considère alors $-Z$ comme un élément de $(\mathrm{F}\mu_n)^2 = F^2\mu_n = \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$ et il vient donc que $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}(1) = [-Z] \in H^2(\mathrm{F}\mu_n) \simeq H^2_s(X, \mu_n)$. Le morphisme $-Z$ peut aussi être pensé comme un élément de $(E\mu_n)^1 = F^2\mu_n = \mathrm{Hom}_{\Lambda[[G]]}(I_G, \mu_n)$ et on a bien $\Psi(-Z) = -Z$ où Ψ est le morphisme $\Psi\colon E\mu_n[-1] \to F\mu_n$ de la définition 1.2.4.3. En combinant les énoncés des lemmes 1.2.4.4 et 1.2.4.7, on obtient que $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}(1) = [-Z] = [\Psi(-Z)] = \delta([-Z]) = -\delta([\mathscr{T}])$ où $\delta\colon H^1_{\text{ét}}(\eta, \mu_n) \to H^2_{s,\text{ét}}(X, \mu_n)$ est le morphisme bord et $\mathscr{T}$ le torseur des racines n-ièmes de π. Le calcul fait au cours de la démonstration de exp. **XVI**, 3.4.8 permet de conclure que $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}(1) = -\delta([\mathscr{T}]) = \mathrm{Cl}_{s\to X}$.

Remarque 1.2.4.8. — Si $\mathscr{M}$ est un faisceau de Λ-modules sur le trait strictement hensélien X, le morphisme $\mathscr{H}^0(\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s})\colon \mathscr{M}_{\overline{\eta}} \to H^2_s(X, \mathscr{M}(1))$ induit un isomorphisme $(\mathscr{M}_{\overline{\eta}})_{\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)} \xrightarrow{\sim} H^2_s(X, \mathscr{M}(1))$ où l'on a noté $-_{\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)}$ les co-invariants sous le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.

1.3. Cas d'un schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1. Soit η le point générique de X. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. Soit s le point fermé de X. Soit $\tilde{X} \xrightarrow{f} X$ la normalisation de X. Le schéma $\tilde{X}$ est un trait strictement hensélien (de point fermé $\tilde{s}$). L'extension finie $\tilde{s}/s$ ne peut être que purement inséparable, ce qui permet de remarquer que f est un homéomorphisme universel et donc que le foncteur image inverse $f^\star$ induit une équivalence entre les catégories des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$ et $\tilde{X}_{\text{ét}}$ (cf. [**SGA 4** VIII 1.1]).

Définition 1.3.1. — *Via* les identifications ci-dessus, le morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to s}$ est induit par $\frac{1}{[\tilde{s}:s]}\mathrm{sp}^{\tilde{X}}_{\overline{\eta}\to\tilde{s}}$ (cf. définition 1.2.3.1).

1.4. Cas général. —

Définition 1.4.1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma excellent. Soit $\overline{y} \to \overline{x}$ une spécialisation immédiate de points géométriques de X. Pour définir le morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}}\colon R\Gamma_{\overline{y}}(K) \to R\Gamma_{\overline{x}}(K)(1)[2]$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, quitte à remplacer K par son image inverse *via* le morphisme canonique $X_{(\overline{x})} \to X$, on peut supposer que X est local strictement hensélien (excellent) de point fermé $\overline{x}$. On note alors Z l'adhérence du point de X en-dessous de $\overline{y}$ et $i\colon Z \to X$ son immersion dans X. Ce $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma Z est local strictement hensélien intègre excellent de dimension 1, le morphisme de transition $\mathrm{sp}^Z_{\overline{y}\to\overline{z}}$ a été introduit dans la définition 1.3.1. Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on définit le morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}}$ de façon à faire commuter le diagramme suivant où les flèches verticales sont les isomorphismes évidents :

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_{\overline{y}}(K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}}"] \arrow[d, "\sim"] & R\Gamma_{\overline{x}}(K)(1)[2] \arrow[d, "\sim"] \\
R\Gamma_{\overline{y}}(i^!K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^Z_{\overline{y}\to\overline{x}}"] & R\Gamma_{\overline{x}}(i^!K)(1)[2]
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.4.2. — Pour toute spécialisation $\overline{x}' \to \overline{x}$ de codimension 0 entre points géométriques de X (essentiellement, un élément du groupoïde de Galois absolu du corps résiduel d'un des points de X), on a un isomorphisme évident $R\Gamma_{\overline{x}'}(K) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\overline{x}}(K)$, que l'on note $\mathrm{sp}^X_{\overline{x}'\to\overline{x}}$. Il est évident que si $\overline{z} \to \overline{y}$ et $\overline{y} \to \overline{x}$ sont des spécialisations composables telles que la codimension c de $\overline{z} \to \overline{x}$ soit 0 ou 1, on a une égalité de morphismes

$$\mathrm{sp}^X_{\overline{z}\to\overline{x}} = \mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}} \circ \mathrm{sp}^X_{\overline{z}\to\overline{y}}\colon R\Gamma_{\overline{z}}(K) \to R\Gamma_{\overline{x}}(K)(c)[2c]\ .$$

Ainsi, les morphismes de transition associés aux spécialisations se composent bien dans l'étendue où ces constructions ont été faites jusqu'à présent. Nous définirons plus tard des morphismes de transition en codimension arbitraire et ce de façon compatible à la composition, mais seulement au niveau des groupes de cohomologie (cf. théorème 3.1.2).

2. Complexes dualisants putatifs et potentiels

2.1. Définition des complexes dualisants putatifs et potentiels. —

Définition 2.1.1. — Une **fonction de dimension** sur un schéma localement noethérien X est une fonction $\delta\colon X \to \mathbf{Z}$ telle que pour toute spécialisation immédiate $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques de X, on ait $\delta(y) = \delta(x) + 1$.

Localement pour la topologie de Zariski, un schéma excellent admet une fonction de dimension, cf. exp. **XIV**, 2.2.1.

Définition 2.1.2. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Un **complexe dualisant putatif** consiste en la donnée de $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et pour tout $x \in X$ d'un isomorphisme (appelé **épinglage** en x) $\mathrm{R}\Gamma_x(K) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$ dans $\mathsf{D}^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$. Un complexe dualisant putatif est un complexe dualisant potentiel si pour toute spécialisation immédiate $\overline{y} \to \overline{x}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_{\overline{y}}(K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \mathrm{R}\Gamma_{\overline{x}}(K)(1)[2] \arrow[d, "\sim"] \\
& \Lambda(\delta(y))[2\delta(y)]
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, les épinglages sont compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates. (On notera que puisque les objets apparaissant sur le diagramme ci-dessus n'ont qu'un seul objet de cohomologie non nul, il suffit d'énoncer la commutativité du diagramme après passage aux groupes de cohomologie de degré $-2\delta(y)$.)

Les notions de complexes dualisants putatifs et potentiels (à coefficients Λ) ne sont définis que pour les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents munis d'une fonction de dimension. Certains des énoncés à venir contiendront donc implicitement ces hypothèses sur les schémas. La fonction de dimension ne sera pas non plus systématiquement mentionnée dans les énoncés.

Remarque 2.1.3. — Si X est connexe et que $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est muni de deux structures de complexe dualisant potentiel, pour vérifier que les épinglages sont les mêmes en tous les points de X, il suffit de le faire en un seul point.

L'objectif de cette section est de montrer que sur un schéma régulier excellent muni de la fonction de dimension $-\operatorname{codim}$, le faisceau constant Λ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel.

2.2. Fonctorialité par rapport aux morphismes étales. — Des propriétés de stabilité importantes des complexes dualisants potentiels par rapport à certaines classes de morphismes seront obtenues dans la section 4. Pour le moment, mentionnons simplement la compatibilité suivante pour les morphismes étales :

Proposition 2.2.1. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme étale entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents. On suppose que X est muni d'une fonction de dimension δ_X. On définit une fonction de dimension δ_Y sur Y en posant $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y))$ pour tout $y \in Y$. Soit K un complexe dualisant putatif sur X. Alors, $f^\star K$ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif et c'est un complexe dualisant potentiel si K en est un.*

Si y est un point de Y, que $x = f(y)$ et que l'on note $g\colon y \to x$ le morphisme induit par f, on a un isomorphisme canonique $g^\star \mathrm{R}\Gamma_x(K) \simeq \mathrm{R}\Gamma_y(f^\star K)$. Ceci permet de définir les épinglages sur $f^\star K$. On vérifie aussitôt que si K est un complexe dualisant potentiel, alors $f^\star K$ aussi.

La construction de cette proposition passe évidemment à la limite : le résultat vaut aussi pour des localisations $X_{(x)} \to X$, $X^h_{(x)} \to X$ ou $X_{(\overline{x})} \to X$. Nous utiliserons librement ces observations simples dans la suite.

2.3. Compléments sur les spécialisations. —

Définition 2.3.1. — Soit $X' \to X$ un morphisme de schémas. Soit $\overline{y'} \to \overline{x'}$ et $\overline{y} \to \overline{x}$ des spécialisations de points géométriques de X' et X respectivement. Si l'on se donne des X-morphismes $\overline{y'} \to \overline{y}$ et $\overline{x'} \to \overline{x}$ tels que le diagramme évident ci-dessous commute, alors on dit que $\overline{y'} \to \overline{x'}$ est **au-dessus** de $\overline{y} \to \overline{x}$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{y'} \arrow[r] \arrow[d] & X'_{(\overline{x}')} \arrow[d] \\
\overline{y} \arrow[r] & X_{(\overline{x})}
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.3.2. — *Soit $X' \to X$ un morphisme de schémas. Soit $\overline{y'} \to \overline{x'}$ une spécialisation de points géométriques de X'. Alors, à des isomorphismes uniques près, il existe une unique spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques de X en-dessous de $\overline{y'} \to \overline{x'}$.*

C'est évident.

Proposition 2.3.3. — *Soit* $X' \to X$ *un morphisme fini et* $\overline{y} \to \overline{x}$ *une spécialisation de points géométriques de* X. *Soit* $\overline{y'} \to X'$ *un point géométrique de* X' *au-dessus de* $\overline{y}$ *(i.e. on s'est donné un* X*-morphisme* $\overline{y'} \to \overline{y}$*). Alors, à des isomorphismes uniques près, il existe une unique spécialisation de points géométriques de* X' *au-dessus de* $\overline{y} \to \overline{x}$ *de la forme* $\overline{y'} \to \overline{x'}$.

On peut supposer que X est local strictement hensélien de point fermé $\overline{x}$. Le schéma X' étant fini sur X, c'est une réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens. Quitte à remplacer X' par la composante connexe contenant $\overline{y'}$, on peut supposer que X' est lui-aussi local strictement hensélien. Il n'y a alors manifestement plus d'alternative : $\overline{x'}$ est le point fermé de X'.

2.4. Construction d'un complexe dualisant potentiel dans le cas régulier. —

2.4.1. Un complexe dualisant putatif. —

Proposition 2.4.1.1. — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien régulier excellent muni de la fonction de dimension* $-\operatorname{codim}$. *Alors* Λ *est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif.*

Soit $x \in X$. Pour définir l'épinglage en x, on peut supposer que X est local de point fermé x. On note $i\colon x \to X$ l'inclusion de ce point fermé. Le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)] \to i^!\Lambda = \mathrm{R}\Gamma_x(\Lambda)$ est un isomorphisme d'après le théorème de pureté cohomologique absolue (cf. exp. **XVI**, 3.1.1). L'épinglage en x est l'isomorphisme inverse.

2.4.2. Cas d'un trait. —

Proposition 2.4.2.1. — *Soit* X *un trait excellent, muni de la fonction de dimension* $\delta = -\operatorname{codim}$. *On suppose que* X *est un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma.*

(a) *Le complexe dualisant putatif* Λ *de la proposition 2.4.1.1 pour* X *est un complexe dualisant potentiel.*
(b) *Si* K *est un complexe dualisant putatif sur* X*, il existe un unique morphisme* $\Lambda \to K$ *compatible aux épinglages au point générique.*
(c) *Si* K *est un complexe dualisant potentiel sur* X*, le morphisme* $\Lambda \to K$ *défini ci-dessus est un isomorphisme (compatible aux épinglages).*

Notons $i\colon s \to X$ l'inclusion du point fermé s de X et $j\colon \eta \to X$ l'inclusion de son point générique η. La proposition 1.2.4.1 énonce précisément la compatibilité (a) dans le cas où S est strictement hensélien ; le cas général en résulte puisque la classe de cohomologie Cl_i du point fermé s dans $H^2_s(X, \Lambda(1))$ induit la classe de $\overline{s}$ dans le hensélisé strict $X_{(\overline{s})}$ (cf. exp. **XVI**, 2.3.2). Établissons (b). Soit K un complexe dualisant putatif sur X. On a un triangle distingué canonique, que l'on peut récrire en présence d'épinglages :

$$\begin{tikzcd}
i_\star i^! K \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & Rj_\star j^\star K \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & i_\star i^! K[1] \arrow[d, "\sim"] \\
i_\star \Lambda(-1)[-2] \arrow[r] & K \arrow[r] & Rj_\star \Lambda \arrow[r] & i_\star \Lambda(-1)[-1]
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur i-ème faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^i$, on obtient l'annulation de $\mathscr{H}^i K$ pour $i < 0$ et un isomorphisme canonique $\mathscr{H}^0 K \simeq \Lambda$. En vertu des propriétés élémentaires de la t-structure canonique sur $\mathrm{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on obtient un unique morphisme $\Lambda \simeq \mathscr{H}^0 K \to K$ compatible à l'épinglage au point générique.

Pour obtenir (c), supposons que K soit un complexe dualisant potentiel. On considère le diagramme commutatif induit par le morphisme canonique $\Lambda \to K$ de (b) et la fonctorialité du morphisme de spécialisation associé à un choix de spécialisation $\overline{\eta} \to \overline{s}$ au-dessus des points η et s :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Gamma_{\overline{\eta}}(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to\overline{s}}"] & \mathrm{R}\Gamma_{\overline{\eta}}(K) \arrow[d, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to\overline{s}}"] \\
\mathrm{R}\Gamma_{\overline{s}}(\Lambda)(1)[2] \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma_{\overline{s}}(K)(1)[2]
\end{tikzcd}$$

Comme Λ et K sont des complexes dualisants potentiels, les flèches verticales sont des isomorphismes. Par construction, le morphisme du haut est un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme du bas aussi. Par conséquent le morphisme $\Lambda \to K$ induit un isomorphisme après application de $j^\star$ et de $i^!$: c'est un isomorphisme.

2.4.3. Fonctorialité par rapport aux morphismes quasi-finis. —

Proposition 2.4.3.1. — *Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme quasi-fini. Soit* K *un complexe dualisant putatif sur* X *pour une certaine fonction de dimension* δ_X *sur* X*. Alors* $f^!K$ *est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif pour la fonction de dimension* δ_Y *sur* Y *définie par* $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y))$ *pour tout* $y \in Y$ *(cf. exp.* ***XIV****, 2.5.2).*

Soit $y \in Y$. Notons $x = f(y)$ et $\pi\colon y \to x$ le morphisme fini induit par f. On a un isomorphisme canonique dans $D^+(y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$R\Gamma_y(f^!K) \simeq \pi^! R\Gamma_x(K) .$$

L'épinglage en x donne un isomorphisme $R\Gamma_x(K) \simeq \Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)]$. Pour obtenir l'isomorphisme voulu $R\Gamma_y(f^!K) \simeq \Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)]$, il suffit de définir un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \pi^!\Lambda$: on utilise le morphisme de Gysin Cl_π.

Remarque 2.4.3.2. — Soit $g\colon Z \to Y$ un autre morphisme quasi-fini. *Via* l'isomorphisme de transitivité $g^!f^! \simeq (f \circ g)^!$, la structure de complexe dualisant putatif sur $g^!(f^!K)$ obtenue en appliquant cette construction à f puis à g est la même que celle obtenue en appliquant directement la construction à $f \circ g$: cela résulte aussitôt des propriétés de composition des morphismes de Gysin.

Proposition 2.4.3.3. — *Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme fini et surjectif et* K *un complexe dualisant putatif sur* X*. Alors* K *est un complexe dualisant potentiel si et seulement si le complexe dualisant putatif* $f^!K$ *de la proposition 2.4.3.1 est un complexe dualisant potentiel.*

En vertu des propositions 2.3.2 et 2.3.3, on peut supposer que X et Y sont des schémas locaux strictement henséliens intègres de dimension 1 et que les fonctions de dimension prennent les valeurs 0 et -1. Compte tenu de la remarque 2.4.3.2, il vient alors qu'il suffit de traiter deux cas :

(1) Y est le normalisé de X ;
(2) X et Y sont des traits.

On obtient la conclusion dans le cas (1) en utilisant le fait que le morphisme de transition pour X et K est défini à partir de celui pour Y et $f^\star K$ (cf. définition 1.3.1) et que si M/L est une extension finie purement inséparable de corps, le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_\pi\colon \Lambda \to \pi^!\Lambda$ associé au morphisme $\pi\colon \mathrm{Spec}(M) \to \mathrm{Spec}(L)$ s'identifie à la multiplication par le degré de M/L *via* les isomorphismes tautologiques $\pi^!\Lambda \simeq \pi^\star\Lambda \simeq \Lambda$.

La démonstration dans le cas (2) va utiliser le lemme général suivant :

Lemme 2.4.3.4. — *Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme quasi-fini entre* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schémas noethériens excellents réguliers de dimension relative virtuelle* $-c$*. On munit* X *de la fonction de dimension* $\delta_X = -\mathrm{codim}$ *et* Y *de la fonction de dimension* δ_Y *définie par composition avec* f *comme dans la proposition 2.4.3.1. Compte tenu de la relation* $\delta_Y(y) = -\mathrm{codim}_Y(y) - c$ *pour tout* $y \in Y$*, la proposition 2.4.1.1 munit* $\Lambda(-c)[-2c]$ *d'une structure de complexe dualisant putatif pour la fonction de dimension* δ_Y *sur* Y*. La proposition 2.4.1.1 donne une structure de complexe dualisant putatif sur* Λ *sur* X*, dont on déduit, par la proposition 2.4.3.1, une structure de complexe dualisant putatif sur* $f^!\Lambda$ *sur* Y *pour la fonction de dimension* δ_Y*. Alors, l'isomorphisme de pureté* $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda(-c)[-2c] \xrightarrow{\sim} f^!\Lambda$ *est compatible aux épinglages de ces deux complexes dualisants putatifs.*

Étudions les épinglages en un point $y \in Y$. Notons $x = f(y)$. On peut supposer que X et Y sont locaux (strictement henséliens) de points fermés respectifs x et y. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & Y \arrow[d, "f"] \\ x \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Les schémas apparaissant sur ce diagramme sont affines et réguliers et les morphismes entre eux sont de type fini. Ces morphismes sont donc localement d'intersection complète (lissifiables), on peut leur appliquer la théorie des morphismes de Gysin (cf. exp. **XVI**, 2.5). Le résultat du lemme découle alors aussitôt de leur compatibilité à la composition, puisqu'elle donne un diagramme commutatif dans $D^+(y_{\text{ét}}, \Lambda)$, où l'on a noté

c' la codimension de y dans Y :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[rr, "\mathrm{Cl}_g"] \arrow[d, "\mathrm{Cl}_j"] \arrow[drr, "\mathrm{Cl}_h"] & & g^!\Lambda \arrow[d, "g^!(\mathrm{Cl}_i)"] \\
j^!\Lambda(c')[2c'] \arrow[rr, "j^!(\mathrm{Cl}_f)"] & & h^!\Lambda(c+c')[2c+2c']
\end{tikzcd}$$

Revenons à la démonstration de la proposition 2.4.3.3. Supposons que K soit un complexe dualisant potentiel. D'après la proposition 2.4.2.1 appliquée à X, K est canoniquement isomorphe à Λ (avec les épinglages de la proposition 2.4.1.1). On suppose donc $K = \Lambda$. On a un isomorphisme de pureté $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \xrightarrow{\sim} f^!\Lambda$. D'après le lemme 2.4.3.4, cet isomorphisme est compatible avec les épinglages de la proposition 2.4.1.1 pour Λ et ceux de la proposition 2.4.3.1 pour $f^!\Lambda$. D'après la proposition 2.4.2.1 (a) appliquée à Y, il vient que $f^!\Lambda$ est bien un complexe dualisant potentiel.

Inversement, supposons que $f^!K$ soit un complexe dualisant potentiel. La proposition 2.4.2.1 (b) pour X donne un morphisme canonique $\Lambda \to K$ compatible aux épinglages au point générique de X. Le morphisme $f^!\Lambda \to f^!K$ qui s'en déduit est un morphisme entre deux complexes dualisants potentiels compatible aux épinglages au point générique de Y. D'après la proposition 2.4.2.1 (c), $f^!\Lambda \to f^!K$ est un isomorphisme. Le foncteur $f^!$ étant conservatif, il en résulte que le morphisme canonique $\Lambda \to K$ est un isomorphisme. On peut donc supposer que $K = \Lambda$ (de façon compatible aux épinglages au point générique). L'épinglage de K au point fermé x ne peut qu'être de la forme $\lambda \cdot \mathrm{Cl}_{x\subset X}^{-1}\colon \mathrm{R}\Gamma_x(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \Lambda(-1)[-2]$ pour $\lambda \in \Lambda^\times$. Compte tenu de ce qui précède, il vient aussitôt que le complexe dualisant putatif $f^!K$ sur Y s'identifie à Λ, épinglé trivialement au point générique et par $\lambda \cdot \mathrm{Cl}_{y\subset Y}^{-1}$ au point fermé y de Y. Compte tenu de la proposition 2.4.2.1 (a), ce complexe dualisant putatif sur Y ne peut évidemment être un complexe dualisant potentiel que si $\lambda = 1$. Ainsi, K est bien un complexe dualisant potentiel sur X, puisqu'il s'identifie à Λ de façon compatible aux épinglages.

2.4.4. Un complexe dualisant potentiel. —

Proposition 2.4.4.1. — *Soit X un schéma régulier excellent, muni de la fonction de dimension $-\mathrm{codim}$. Le complexe dualisant putatif Λ de la proposition 2.4.1.1 est un complexe dualisant potentiel.*

Soit $\overline{y} \to \overline{x}$ une spécialisation immédiate de points géométriques de X. On veut montrer que les épinglages sur Λ sont compatibles au morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}}$. Pour cela, on peut supposer que X est local strictement hensélien de point fermé $\overline{x}$. Soit C l'adhérence de l'image de $\overline{y}$ dans X. Notons $i\colon C \to X$ l'immersion fermée de C dans X. Soit $n\colon \tilde{C} \to C$ le normalisé de C. Montrer la compatibilité des épinglages avec le morphisme de transition associé à $\overline{y} \to \overline{x}$ revient à montrer que le complexe dualisant putatif $i^!\Lambda$ de la proposition 2.4.3.1 est un complexe dualisant potentiel, ce qui, d'après la proposition 2.4.3.3, revient encore à dire que $n^!i^!\Lambda$ en est un. D'après le lemme 2.4.3.4, le complexe dualisant putatif $n^!i^!\Lambda$ s'identifie au complexe dualisant putatif $\Lambda(-c)[-2c]$ obtenu par torsion et décalage à partir du complexe dualisant putatif Λ de la proposition 2.4.1.1 appliquée au trait $\tilde{C}$. En vertu de la proposition 2.4.2.1 (a), il s'agit bien d'un complexe dualisant potentiel, ce qui achève la démonstration.

3. Morphismes de transition généraux et classe de cohomologie en degré maximal

3.1. Énoncés des théorèmes principaux. —

Théorème 3.1.1. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma local normal strictement hensélien excellent de dimension d et de point fermé x. Alors, $\mathrm{H}^q_{x,\text{ét}}(X,\Lambda(d)) = 0$ pour $q > 2d$ et on a un isomorphisme $[x]\colon \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{2d}_{x,\text{ét}}(X,\Lambda(d))$ compatible aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates.*

Théorème 3.1.2. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent. Pour toute spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques de X de codimension c, on peut définir, pour tout $K \in \mathrm{D}^+(X_{\text{ét}},\Lambda)$ et $i \in \mathbf{Z}$, un morphisme de transition $\mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to\overline{x}}\colon \mathrm{H}^i_{\overline{y}}(K) \to \mathrm{H}^{i+2c}_{\overline{x}}(K(c))$, compatible à la composition des spécialisations et induit par les définitions de la section 1 pour $c \leq 1$. Par ailleurs, ces morphismes de transition généralisés vérifient une compatibilité avec les morphismes finis énoncée dans la proposition 3.5.4.*

Remarque 3.1.3. — Localement pour la topologie étale, un schéma quasi-excellent est excellent (cf. exp. **XIV**, 2.3.1 et exp. **XIV**, 2.2.6). Il est donc évident que dans l'énoncé du théorème 3.1.2, on peut remplacer l'hypothèse « excellent » par « quasi-excellent ».

3.2. Dimension cohomologique. — On énonce ici deux résultats de dimension cohomologique qui se déduisent du théorème de Lefschetz affine de Gabber, cf. exp. **XV**, 1.2.2. Voir $\mathrm{XVIII}_{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{XVIII}_{\mathrm{B}}$ pour des variantes de ces résultats sans hypothèse d'excellence.

Proposition 3.2.1. — *Soit ℓ un nombre premier. Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schéma local strictement hensélien excellent de point fermé x. On note $U = X - x$. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$-modules sur U. Soit $d \in \mathbf{N}$. On suppose que si $u \in U$ est tel que $\mathscr{M}_{\overline{u}} \neq 0$, alors la dimension de l'adhérence de u dans X est $\leq d$. Alors $H^q_{\text{ét}}(U, \mathscr{M}) = 0$ pour $q \geq 2d$.*

En particulier, si $d = \dim X$, on a $\mathrm{cd}_\ell\, U \leq 2d - 1$ (cf. [**SGA 4** x 1]*) et pour tout faisceau de ℓ-torsion $\mathscr{M}$ sur $X_{\text{ét}}$, les groupes $H^q_{x,\text{ét}}(X, \mathscr{M})$ sont nuls pour $q > 2d$.*

Par passage à la limite inductive filtrante sur les sous-faisceaux constructibles de $\mathscr{M}$, on peut supposer que $\mathscr{M}$ est constructible. Quitte à remplacer X par l'adhérence dans X du support de $\mathscr{M}$, on peut alors supposer que $d = \dim X$. On est alors ramené à montrer que $\mathrm{cd}_\ell\, U \leq 2d - 1$. Comme le schéma (séparé) U peut être recouvert par d ouverts affines (cf. [**Serre, 1965**, § B.3, Chapitre III]), et qu'un ouvert affine de X est de dimension cohomologique au plus d (cf. exp. **XV**, 1.2.4), en utilisant convenablement les suites exactes de Mayer-Vietoris, on obtient bien que $\mathrm{cd}_\ell\, U \leq 2d - 1$.

Proposition 3.2.2. — *Soit ℓ un nombre premier. Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schéma local strictement hensélien intègre excellent de dimension d, de point générique η. Alors $\mathrm{cd}_\ell\, \eta \leq d$.*

Le point générique η s'identifie à limite projective du système projectif formé par les ouverts affines non vides de X. Comme chacun de ces ouverts affines est de ℓ-dimension cohomologique au plus d, il en va de même pour η.

3.3. Morphismes finis. —

Proposition 3.3.1. — *Soit $f\colon X' \to X$ un morphisme fini entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents. Soit $\overline{y'} \to \overline{x'}$ une spécialisation immédiate de points géométriques de X' au-dessus d'une spécialisation immédiate $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques de X (cf. définition 2.3.1). Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $i \in \mathbf{Z}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
H^i_{\overline{y'}}(f^!K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^{X'}_{\overline{y'}\to\overline{x'}}"] & H^{i+2}_{\overline{x'}}(f^!K(1)) \\
H^i_{\overline{y}}(K) \arrow[u, "\mathrm{Cl}_{y'\to y}", "\sim"'] \arrow[r, "\mathrm{sp}^{X}_{\overline{y}\to\overline{x}}"] & H^{i+2}_{\overline{x}}(K(1)) \arrow[u, "\sim", "\mathrm{Cl}_{x'\to x}"']
\end{tikzcd}$$

On peut supposer que f est un morphisme dominant entre schémas locaux strictement henséliens intègres de dimension 1. Comme dans la démonstration de la proposition 2.4.3.3, il y a deux cas à traiter :

(1) X' est le normalisé de X ;
(2) X et X' sont des traits.

Le cas (1) étant trivial, on se concentre sur le cas où X et X' sont des traits. Pour vérifier la compatibilité, on peut évidemment supposer que $i = 0$. Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, comme les flèches verticales sont des isomorphismes, on peut noter $\delta_K\colon H^0_{\overline{y}}(K) \to H^2_{\overline{x}}(K(1))$ la différence des flèches obtenues en suivant les deux chemins possibles. Il s'agit de monter que pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a $\delta_K = 0$.

Les résultats de la section 2 montrent que $\delta_\Lambda = 0$. La suite de la démonstration va consister à se ramener à ce cas-là.

Comme $\overline{y}$ est au-dessus du point générique de X, $H^0_{\overline{y}}$ s'identifie à la fibre en $\overline{y}$ du faisceau de cohomologie de K en degré 0. Si on note $\tau_{\leq 0}K \to K$ le morphisme canonique déduit de la t-structure canonique sur $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ [(v)], on obtient un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^0_{\overline{y}}(\tau_{\leq 0}K) \arrow[r, "\delta_{\tau_{\leq 0}K}"] \arrow[d, "\sim"] & H^2_{\overline{x}}(\tau_{\leq 0}K(1)) \arrow[d] \\
H^0_{\overline{y}}(K) \arrow[r, "\delta_K"] & H^2_{\overline{x}}(K(1))
\end{tikzcd}$$

Il résulte de ce diagramme que si $\delta_{\tau_{\leq 0}K} = 0$, alors $\delta_K = 0$.

(v) L'auteur pense qu'il eût été plus cohérent de noter cette troncature $\tau^{\leq 0}$ pour respecter la convention qui veut que les degrés cohomologiques soient indiqués en exposant, mais la tradition ayant consacré l'usage inverse, il s'y plie avec répugnance.

Notons $\mathscr{H}^0 K$ le faisceau de cohomologie de K en degré zéro. Pour des raisons de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1), le morphisme canonique $\tau_{\leq 0} K \to \mathscr{H}^0 K$ induit un isomorphisme après application du foncteur $H^2_x(-(1))$ (et aussi du foncteur H^0_y). Par conséquent, en considérant un carré commutatif du type précédent, on obtient cette fois-ci que $\delta_{\mathscr{H}^0 K} = 0$ équivaut à $\delta_{\tau_{\leq 0} K} = 0$.

Il résulte de ces remarques que pour montrer que $\delta_K = 0$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut supposer que K est concentré en degré 0.

On suppose maintenant que $K = \mathscr{M}$ où $\mathscr{M}$ est un faisceau de Λ-modules sur X. Notons $j\colon y \to X$ l'inclusion du point générique de X. En utilisant la description du foncteur H^2_x de la proposition 1.2.2.1, on obtient que le morphisme canonique $j_!j^\star\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ induit des isomorphismes après application de H^0_y et $H^2_x(-(1))$: $\delta_K = 0$ équivaut à $\delta_{j_!j^\star K} = 0$. La propriété, pour un faisceau K sur X, d'être tel que $\delta_K = 0$ ne dépend donc que de sa restriction au point générique y.

Pour tout faisceau de Λ-modules $\mathscr{L}$ sur y, on note $\delta_{\mathscr{L}} = \delta_{j_!\mathscr{L}}$. Il s'agit de montrer que $\delta_{\mathscr{L}} = 0$ pour tout faisceau de Λ-modules sur y. Notons $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_{\text{constant}}$ le plus grand quotient constant de $\mathscr{L}$: formellement, le foncteur $\mathscr{L} \longmapsto \mathscr{L}_{\text{constant}}$ est le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de la catégorie des faisceaux constants de Λ-modules dans la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur y. D'après la remarque 1.2.4.8, il vient que le morphisme canonique $\mathscr{L} \to \mathscr{L}_{\text{constant}}$ induit un isomorphisme après application de $H^2_x(j_! - (1))$ (et une surjection après application de H^0_y). D'où $\delta_{\mathscr{L}} = 0$ si et seulement si $\delta_{\mathscr{L}_{\text{constant}}} = 0$. Il en résulte que l'on peut supposer que $\mathscr{L}$ est un faisceau constant de Λ-modules. Par ailleurs, on peut évidemment supposer que $\mathscr{L}$ est constructible. Si $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ est un épimorphisme de faisceaux constants constructibles de Λ-modules, il vient aussitôt que $\delta_{\mathscr{L}} = 0$ implique $\delta_{\mathscr{L}'} = 0$. Il en résulte que l'on peut supposer que $\mathscr{L} = \Lambda^r$ pour un certain $r \in \mathbf{N}$, puis, par additivité, que $r = 1$. Bref, on s'est bien ramené au cas du faisceau constant Λ, ce qui achève la démonstration de cette proposition.

3.4. Le cas de la dimension 2. — Compte tenu des résultats établis jusqu'à présent, les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 peuvent être considérés comme ayant été établis en dimension 0 et 1. Cette sous-section se concentre sur le cas de la dimension 2 qui est l'étape cruciale pour passer au cas général.

On fixe un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma local strictement hensélien excellent normal X de dimension 2. On note x le point fermé de X et on pose $U = X - x$. En s'aidant d'une résolution des singularités $X' \to X$, nous allons définir au paragraphe 3.4.1 une classe dans $H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2))$, puis nous démontrerons au paragraphe 3.4.2 qu'elle est indépendante de la résolution. Enfin, nous établirons au paragraphe 3.4.3 une compatibilité entre cette classe, les classes définies pour les localisés stricts en X en les points de codimension 1 et les morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates correspondantes.

3.4.1. Construction d'une classe. — D'après le résultat principal de [**Lipman, 1978**], il existe un morphisme propre birationnel $p\colon X' \to X$ avec X' régulier. Le morphisme p induit alors automatiquement un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$. On peut supposer de plus que $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$ est un diviseur à croisements normaux stricts (dont on note $D_1, \dots, D_n$ les composantes irréductibles).

En effet, on peut dans un premier temps supposer que les composantes irréductibles $D_1, \dots, D_n$ sont de dimension 1 : si ce n'est pas le cas, on peut éclater le point fermé correspondant (ceci ne se peut produire que si X est déjà régulier et que p est un isomorphisme). Dans un deuxième temps, on peut s'arranger pour que les composantes irréductibles de $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$ soient régulières en itérant le processus consistant à éclater les points singuliers (cf. [**Šafarevič, 1966**, page 38]). Dans un dernier temps, on peut contraindre les croisements à devenir normaux en éclatant les points fermés récalcitrants ; comme des invariants numériques décroissent strictement dans cette opération (cf. [**Šafarevič, 1966**, page 21]), ce processus termine.

Proposition 3.4.1.1. —

(a) *Le morphisme de bord* $H^{q-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(2)) \to H^q_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2))$ *est un isomorphisme pour* $q \geq 2$ *et ces groupes sont nuls pour* $q \geq 5$ *;*

(b) *Le morphisme évident* $H^q_{\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \to H^q_{\text{ét}}(p^{-1}(x), \Lambda(2))$ *est un isomorphisme pour tout* $q \in \mathbf{Z}$ *et ces groupes sont nuls pour* $q \geq 3$ *;*

(c) *Le morphisme de bord* $H^{q-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(2)) \to H^q_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ *est un isomorphisme pour* $q \geq 4$ *;*

(d) *Le morphisme évident* $H^q_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \to H^q_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ *est un isomorphisme pour* $q \geq 4$ *et ces groupes sont nuls pour* $q \geq 5$.

(a) s'obtient en utilisant la suite exacte canonique :

$$H^{q-1}_{\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \to H^{q-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(2)) \to H^q_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \to H^q_{\text{ét}}(X, \Lambda(2)) .$$

En effet, X étant local strictement hensélien, on a $H^i_{\text{ét}}(X, \Lambda(2))$ pour $i > 0$. On conclut en utilisant le fait que $\text{cd}_\ell\, U \leq 3$ (cf. proposition 3.2.1).

(b) résulte du théorème de changement de base pour un morphisme propre et du fait que $p^{-1}(x)$ soit une courbe propre et donc de dimension cohomologique 2.

(c) se déduit aussitôt de (b).

(d) résulte de (a), de (c) et de la commutativité du diagramme évident suivant :

$$\begin{tikzcd} H^{q-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(2)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^q_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \arrow[d] \\ H^{q-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(2)) \arrow[r] & H^q_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \end{tikzcd}$$

Proposition 3.4.1.2. — *On a une suite exacte*

$$\bigoplus_{i<j} H^4_{D_i \cap D_j,\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \to \bigoplus_i H^4_{D_i,\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \to H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \to 0\,,$$

où les flèches sont induites par des morphismes d'agrandissement du support, et leurs différences.

Pour tout fermé F de X', on note Λ_F le faisceau $i_{F\star}\Lambda$ où i_F est l'immersion de F dans X'. On a une suite exacte courte évidente de faisceaux de Λ-modules sur X' :

$$0 \to \Lambda_{p^{-1}(x)} \to \bigoplus_i \Lambda_{D_i} \to \bigoplus_{i<j} \Lambda_{D_i \cap D_j} \to 0\,.$$

En appliquant $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-, \Lambda(2))$ au triangle distingué de $\mathsf{D}^+(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ associé à cette suite exacte courte, on peut obtenir la suite exacte voulue, pourvu que l'on sache montrer que $H^5_{D_i \cap D_j,\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ est nul pour $i < j$. D'après le théorème de pureté absolue, ce groupe s'identifie à $H^1_{\text{ét}}(D_i \cap D_j, \Lambda)$ qui est bien nul puisque $D_i \cap D_j$ est une union disjointe finie de spectres de corps séparablement clos.

Proposition 3.4.1.3. — *La suite exacte de la proposition 3.4.1.2 se récrit sous la forme :*

$$\bigoplus_{i<j} \bigoplus_{y \in D_i \cap D_j} \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda^n \xrightarrow{\varepsilon} H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \to 0\,.$$

Si on note $(\chi_y)_{i<j, y \in D_i \cap D_j}$ la base canonique du groupe de gauche et $\chi_{D_1}, \dots, \chi_{D_n}$ celle de Λ^n, la différentielle δ vérifie la formule

$$\delta(\chi_y) = [y : x] \cdot \left(\chi_{D_i} - \chi_{D_j}\right)\,.$$

En outre, $\varepsilon(\chi_{D_i}) \in H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ est obtenu par agrandissement du support à partir de la classe $\frac{1}{[z:x]}\mathrm{Cl}_{z \to X'} \in H^4_{z,\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ pour tout point fermé z de D_i.

Le théorème de pureté cohomologique absolue donne des isomorphismes

$$\mathrm{Cl}_{D_i \cap D_j \to X'} \colon H^0_{\text{ét}}(D_i \cap D_j, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^4_{D_i \cap D_j,\text{ét}}(X', \Lambda(2))\,,$$

ce qui permet de décrire le groupe de gauche dans la suite exacte de la proposition 3.4.1.2. Le même théorème donne aussi des isomorphismes

$$\mathrm{Cl}_{D_i \to X'} \colon H^2_{\text{ét}}(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} H^4_{D_i,\text{ét}}(X', \Lambda(2))\,.$$

En outre, on dispose du morphisme trace (relativement à x) $\mathrm{Tr}\colon H^2_{\text{ét}}(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\sim} \Lambda$. Celui-ci est caractérisé par le fait que pour tout point fermé z de D_i, l'image de $\mathrm{Cl}_{z \to D_i} \in H^2_{z,\text{ét}}(D_i, \Lambda(1))$ par le morphisme composé

$$H^2_{z,\text{ét}}(D_i, \Lambda(1)) \to H^2_{\text{ét}}(D_i, \Lambda(1)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \Lambda$$

soit $[z : x]$ (qui est inversible dans Λ parce que $\kappa(y)/\kappa(x)$ est purement inséparable). La description des morphismes δ et ε donnée dans l'énoncé s'obtient alors aussitôt à partir des propriétés de composition des morphismes de Gysin.

Proposition 3.4.1.4. — *La suite suivante est exacte :*

$$\bigoplus_{i<j} \bigoplus_{y \in D_i \cap D_j} \Lambda \xrightarrow{\delta} \bigoplus_i \Lambda \xrightarrow{\Sigma} \Lambda \to 0\,,$$

où Σ est défini par $\Sigma(\chi_{D_i}) = 1$ pour tout i.

Tout d'abord, à partir de la formule donnée pour δ dans la proposition 3.4.1.3, il est clair que $\Sigma \circ \delta = 0$. Σ induit donc un morphisme $\mathrm{Coker}(\delta) \to \Lambda$. Comme les degrés $[y : x]$ qui interviennent sont inversibles dans Λ, on voit que si i et j sont tels que $D_i \cap D_j$ soit non vide, alors χ_{D_i} et χ_{D_j} ont la même classe dans $\mathrm{Coker}(\delta)$. La fibre $p^{-1}(x)$ étant connexe (Main Theorem), on en déduit que tous les éléments χ_{D_i} ont la même classe dans $\mathrm{Coker}(\delta)$. Il existe donc un morphisme $\Lambda \to \mathrm{Coker}(\delta)$ envoyant 1 sur χ_{D_i} pour tout i ; ce morphisme est l'isomorphisme inverse de $\mathrm{Coker}(\delta) \to \Lambda$.

Corollaire 3.4.1.5. — *Les suites exactes des propositions 3.4.1.3 et 3.4.1.4 donnent naissance à un isomorphisme* $\Lambda \xrightarrow{\sim} H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2))$.

Corollaire 3.4.1.6. — Via *l'isomorphisme canonique* $H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ *de la proposition 3.4.1.1 (d), l'isomorphisme du corollaire précédent donne un isomorphisme* $\Lambda \xrightarrow{\sim} H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2))$.

Définition 3.4.1.7. — On note $[x]_{X'} \in H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2))$ le générateur défini par l'isomorphisme du corollaire précédent.

3.4.2. Indépendance en la résolution. — Dans ce paragraphe, nous allons montrer que si $q \colon X'' \to X$ est une autre résolution du type envisagé dans le paragraphe 3.4.1, alors $[x]_{X'} = [x]_{X''}$. Quitte à introduire une désingularisation de la composante irréductible dominant X du produit fibré de X'' de X' au-dessus de X, on peut supposer qu'une des deux désingularisations X' et X'' considérées coiffe l'autre. On suppose donc par exemple qu'il existe un (unique) X-morphisme $\pi \colon X'' \to X'$. Le morphisme π est projectif et birationnel entre deux schémas réguliers de dimension 2, il induit donc un isomorphisme au-dessus d'un ouvert U' de X' tel que le fermé $X' - U'$ soit de dimension 0. Il existe donc certainement un point fermé y' de $p^{-1}(y)$ tel que le morphisme induit soit un isomorphisme $\pi^{-1}(y') \to y'$. On note y'' l'unique point fermé de $\pi^{-1}(y')$. La compatibilité des classes de Gysin au changement de base (cf. exp. **XVI**, 2.3.2) implique que la classe $\mathrm{Cl}_{y' \to X'}$ est envoyée sur $\mathrm{Cl}_{y'' \to X''}$ par le morphisme de restriction $\pi^\star \colon H^4_{y',\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \to H^4_{y'',\text{ét}}(X'', \Lambda(2))$. Cette compatibilité vaut encore après élargissement du support à $p^{-1}(x)$ et à $q^{-1}(x)$. En considérant la composition suivante :

$$H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{q^{-1}(x),\text{ét}}(X'', \Lambda(2)) \,,$$

on obtient aussitôt que $[y' : x] \cdot [x]_{X'} = [y'' : x] \cdot [x]_{X''}$, ce qui permet de conclure que $[x]_{X'} = [x]_{X''}$.

Remarque 3.4.2.1. — En utilisant des arguments semblables aux précédents, on peut montrer que si $p \colon X' \to X$ est un morphisme projectif birationnel avec X' régulier, alors, même sans supposer que $p^{-1}(x)_{\text{réd}}$ soit un diviseur à croisements normaux strict, l'application $H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \to H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2))$ est un isomorphisme et la classe $[x]$ s'envoie bien sur l'élément induit par $\frac{1}{[x':x]}\mathrm{Cl}_{x' \to X'}$ pour tout point fermé x' de $p^{-1}(x)$.

3.4.3. Compatibilité aux morphismes de transition. — Soit $\overline{y} \to X$ un point géométrique au-dessus d'un point y de codimension 1. Autrement dit, on a une spécialisation immédiate $\overline{y} \to x$ de points géométriques de X. Nous allons montrer que si $\overline{\eta} \to \overline{y}$ est une spécialisation immédiate, alors on a l'égalité

$$[x] = \mathrm{sp}^X_{\overline{y} \to x}(\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta} \to \overline{x}}(1))$$

dans $H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2))$, ce qui achèvera la démonstration du théorème 3.1.1 jusqu'en dimension 2.

On note C l'adhérence de y dans X. Il existe une désingularisation $X' \to X$ du type envisagé dans le paragraphe 3.4.1 telle que l'adhérence C' de y dans X' soit un trait. Plus précisément, le morphisme évident $C' \to C$ identifie C' au normalisé de C. Le morphisme $C' \to C$ étant un homéomorphisme universel, on peut noter x' le point fermé de C' (celui de C est bien entendu x) et $U' = X' - x'$. On dispose d'immersions fermées évidentes $i \colon C \to X$, $i' \colon C' \to X'$, $k \colon y \to U$ et $k' \colon y \to U'$.

Lemme 3.4.3.1. — *Avec les notations ci-dessus, le diagramme évident qui suit est commutatif (les flèches marquées comme étant des isomorphismes devant être considérées comme bidirectionnelles) :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H^4_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(2)) \arrow[r, equal] \arrow[dl, "\sim"'] & H^4_{x,\text{ét}}(C, i^!\Lambda(2)) & \\
H^4_{p^{-1}(x),\text{ét}}(X', \Lambda(2)) & & & H^3_{\text{ét}}(y, k^!\Lambda(2)) \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[dl] \\
 & H^4_{x',\text{ét}}(X', \Lambda(2)) \arrow[r, equal] \arrow[ul, "\sim"] & H^4_{x',\text{ét}}(C', i'^!\Lambda(2)) &
\end{tikzcd}$$

Ceci équivaut à la commutativité du diagramme évident :

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{ét}}(U,\Lambda(2)) \arrow[r, "\sim"] & H^4_{x,\text{ét}}(X,\Lambda(2)) \arrow[r, equal] & H^4_{x,\text{ét}}(C,i^!\Lambda(2)) & H^3_{\text{ét}}(y,k^!\Lambda(2)) \arrow[l] \\
H^3_{\text{ét}}(U',\Lambda(2)) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & H^4_{x',\text{ét}}(X',\Lambda(2)) \arrow[r, equal] & H^4_{x',\text{ét}}(C',i'^!\Lambda(2)) & H^3_{\text{ét}}(y,k'^!\Lambda(2)) \arrow[l] \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

On peut identifier le carré externe de ce diagramme-ci au suivant, où les flèches horizontales sont les flèches d'oubli du support :

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{ét}}(U,\Lambda(2)) & H^3_{y,\text{ét}}(U,\Lambda(2)) \arrow[l] \\
H^3_{\text{ét}}(U',\Lambda(2)) \arrow[u, "\sim"'] & H^3_{y,\text{ét}}(U',\Lambda(2)) \arrow[l] \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme-là est bien évidemment commutatif, ce qui achève la démonstration du lemme 3.4.3.1.

On peut prolonger sur la droite le diagramme commutatif du lemme :

$$\begin{tikzcd}
H^4_{x,\text{ét}}(C,i^!\Lambda(2)) & H^2_{\overline{y}}(C,i^!\Lambda(1)) \arrow[l, "\mathrm{sp}^C_{\overline{y}\to x}"'] & & \\
H^3_{\text{ét}}(y,k^!\Lambda(2)) \arrow[u, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & & (\mathscr{H}^2k^!\Lambda(1))_{\overline{y}} \arrow[ul, "\sim"', "{[x':x]}"] \arrow[dl, "\sim", "1"'] & \Lambda \arrow[l, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to\overline{y}}"', "\sim"] \\
H^4_{x',\text{ét}}(C',i'^!\Lambda(2)) & H^2_{\overline{y}}(C',i'^!\Lambda(1)) \arrow[l, "\mathrm{sp}^{C'}_{\overline{y}\to x'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Du groupe $(\mathscr{H}^2k^!\Lambda(1))_{\overline{y}}$ partent deux isomorphismes canoniques vers des groupes de cohomologie à supports de C et de C' ; ici, on les a multipliés respectivement par $[x' : x]$ et 1 de façon à rendre le diagramme commutatif (cf. définition 1.3.1).

On peut partir de l'élément 1 dans le groupe Λ tout à droite et considérer son image dans le groupe $H^4_{x,\text{ét}}(X,\Lambda(2))$ figurant sur le diagramme du lemme. En suivant le chemin du bas, on obtient $[x' : x]\cdot[x]_{X'}$. En suivant le chemin du haut, on obtient $[x' : x]\cdot \mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to x}(\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to\overline{y}}(1))$. On peut ainsi conclure que l'on a bien l'égalité

$$[x]_{X'} = \mathrm{sp}^X_{\overline{y}\to x}(\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to\overline{y}}(1))$$

dans $H^4_{x,\text{ét}}(X,\Lambda(2))$.

3.5. Morphismes de transition en codimension arbitraire. — Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.1.2 en nous appuyant sur le théorème 3.1.1 établi pour le moment jusqu'en dimension 2. Ce résultat nous permettra ensuite d'établir le théorème 3.1.1 en toute généralité.

Définition 3.5.1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent. Soit $\overline{y} = \overline{x_0} \to \cdots \to \overline{x_n} = \overline{x}$ une suite de spécialisations de points géométriques de X telle que pour tout $0 \leq i < n$, la spécialisation $\overline{x}_i \to \overline{x}_{i+1}$ soit de codimension 0 ou 1. On note c la codimension de la spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$. Pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)$, on note $\mathrm{sp}^X_{\overline{x}_0\to\cdots\to\overline{x}_n} \colon H^p_{\overline{y}}(K) \to H^{p+2c}_{\overline{x}}(K(c))$ le morphisme de transition obtenu par la composition $\mathrm{sp}^X_{\overline{x}_{n-1}\to\overline{x}_n}\circ\cdots\circ \mathrm{sp}^X_{\overline{x}_0\to\overline{x}_1}$.

Définition 3.5.2. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent. Soit $\overline{y} \to \overline{x}$ une spécialisation de points géométriques de X de codimension c. Soit $K \in D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)$. On dit que la propriété $(C)^c_{\overline{y}\to\overline{x},K}$ est satisfaite si le morphisme $\mathrm{sp}^X_{\overline{x_0}\to\cdots\to\overline{x_n}} \colon H^0_{\overline{y}}(K) \to H^{2c}_{\overline{x}}(K(c))$ ne dépend pas du choix de la factorisation de $\overline{y} \to \overline{x}$ en $\overline{x_0} \to \cdots \to \overline{x_n}$.

Définition 3.5.3. — On dira que la propriété $(C)^{\leq c}$ est satisfaite si toutes les propriétés $(C)^{c'}_{\overline{y}\to\overline{x},K}$ envisagés dans la définition 3.5.2 le sont pour $c' \leq c$. On dira que la propriété $(C)^{\leq c}_{\text{loc.}}$ est vérifiée si les propriétés $(C)^{c'}_{\overline{\eta}\to x,K}$ sont vérifiées dans la situation, dite locale, où le schéma X est supposé local strictement hensélien intègre de dimension $\leq c$ de point fermé x et où $\overline{\eta}$ est au-dessus du point générique de X. Enfin, on dira que la propriété $(C)^{\leq c}_{\text{loc.},\text{normal},\Lambda}$ est satisfaite si on suppose de plus que X est normal et que $K = \Lambda$.

Il s'agit donc d'établir la propriété $(C)^{\leq c}$ pour tout $c \geq 0$. D'après la remarque 1.4.2, on peut considérer que la propriété $(C)^{\leq 1}$ est connue. En outre, notons que le théorème 3.1.1 affirme en particulier $(C)^{\leq c}_{\text{loc.},\text{normal},\Lambda}$ pour tout $c \geq 0$. Les résultats de la sous-section 3.4 montrent que $(C)^{\leq 2}_{\text{loc.},\text{normal},\Lambda}$ est satisfaite.

Proposition 3.5.4. — *Soit $f\colon X' \to X$ un morphisme fini entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents. Soit $\overline{y'} \to \overline{x'}$ une spécialisation de points géométriques de X' de codimension c au-dessus d'une spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques de X (cf. définition 2.3.1). Pour toute factorisation $\overline{x'_0} \to \dots \overline{x'_n}$ de $\overline{y'} \to \overline{x'}$ en une suite de spécialisations de codimension 0 ou 1, si on note $\overline{x_0} \to \dots \overline{x_n}$ la factorisation de $\overline{y} \to \overline{x}$ en-dessous de la précédente, pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $i \in \mathbf{Z}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
H^i_{\overline{y'}}(f^!K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^{X'}_{\overline{x'_0}\to\dots\to\overline{x'_n}}"] & H^{i+2c}_{\overline{x'}}(f^!K(c)) \\
H^i_{\overline{y}}(K) \arrow[u, "\mathrm{Cl}_{y'\to y}", "\sim"'] \arrow[r, "\mathrm{sp}^{X}_{\overline{x_0}\to\dots\to\overline{x_n}}"] & H^{i+2c}_{\overline{x}}(K(c)) \arrow[u, "\sim", "\mathrm{Cl}_{x'\to x}"']
\end{tikzcd}$$

En outre, on a l'équivalence $(C)^c_{\overline{y}\to\overline{x},K} \iff (C)^c_{\overline{y'}\to\overline{x'},f^!K}$.

La commutativité du diagramme se déduit aussitôt de la proposition 3.3.1. L'équivalence annoncée résulte de la commutativité du diagramme et du fait qu'il est essentiellement équivalent de se donner une factorisation de la spécialisation $\overline{y'} \to \overline{x'}$ ou de s'en donner une de $\overline{y} \to \overline{x}$ (cf. propositions 2.3.2 et 2.3.3).

Lemme 3.5.5. — *Pour tout entier $c \geq 0$, on a l'équivalence $(C)^{\leq c} \iff (C)^{\leq c}_{\text{loc.}}$.*

Supposons $(C)^{\leq c}_{\text{loc.}}$ et montrons $(C)^{\leq c}$. Il suffit évidemment de montrer $(C)^{c'}_{\overline{y}\to\overline{x},K}$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, avec X un schéma local strictement hensélien de point fermé $\overline{x}$ et une spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$ de codimension $c' \leq c$. Il s'agit de vérifier que l'on peut supposer que X est intègre et que $\overline{y}$ est au-dessus du point générique. Pour cela, on introduit l'immersion fermée $i\colon Z \to X$ où $Z = \overline{\{y\}}$. La proposition 3.5.4 montre que $(C)^{c'}_{\overline{y}\to\overline{x},i^!K}$ implique $(C)^{c'}_{\overline{y}\to\overline{x},K}$. Pour conclure, il suffit d'observer que $(C)^{c'}_{\overline{y}\to\overline{x},i^!K}$ est un cas particulier de $(C)^{\leq c}_{\text{loc.}}$.

Lemme 3.5.6. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent local strictement hensélien intègre de dimension c, de point fermé x et de point générique η. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. Soit $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

(a) $(C)^c_{\overline{\eta}\to x,\tau_{\leq 0}K} \implies (C)^c_{\overline{\eta}\to x,K}$;
(b) $(C)^c_{\overline{\eta}\to x,\tau_{\leq 0}K} \iff (C)^c_{\overline{\eta}\to x,\mathscr{H}^0K}$;
(c) *Soit $j\colon U \to X$ l'inclusion d'un ouvert dense et $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux faisceaux de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ tels que $j^\star\mathscr{M} \simeq j^\star\mathscr{N}$, alors $(C)^c_{\overline{\eta}\to x,\mathscr{M}} \iff (C)^c_{\overline{\eta}\to x,\mathscr{N}}$.*

L'implication (a) résulte du fait que le morphisme canonique $\tau_{\leq 0}K \to K$ induise un isomorphisme $H^0_{\overline{\eta}}(\tau_{\leq 0}K) \xrightarrow{\sim} H^0_{\overline{\eta}}(K)$.

On considère ensuite le morphisme canonique $\tau_{\leq 0}K \to \mathscr{H}^0K$. Il induit évidemment un isomorphisme après application de $H^0_{\overline{\eta}}$, mais aussi après celle de H^{2c}_x, pour des raisons de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1). L'équivalence (b) en résulte aussitôt.

Pour montrer (c), on peut supposer que $\mathscr{N} = j_!j^\star\mathscr{M}$. On a alors un monomorphisme canonique $j_!j^\star\mathscr{M} \to \mathscr{M}$, dont le conoyau est $i_\star i^\star\mathscr{M}$, où $i\colon Z \to X$ désigne une immersion fermée complémentaire. La proposition 3.2.1 montre alors que $H^q_{\text{ét}}(X - x, (i_\star i^\star\mathscr{M})_{|X-x}) = 0$ pour $q \geq 2c - 2$. Ainsi, le morphisme $j_!j^\star\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ induit un isomorphisme non seulement après application de $H^0_{\overline{\eta}}$, mais aussi celle de $H^{2c}_{x,\text{ét}}$, ce qui permet de conclure.

Lemme 3.5.7. — *Pour tout entier $c \geq 0$, on a l'implication $(C)^{\leq c}_{\text{loc.},\text{normal},\Lambda} \implies (C)^{\leq c}_{\text{loc.}}$.*

Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent local strictement hensélien intègre de dimension $c' \leq c$, de point fermé x et de point générique η. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. D'après le lemme 3.5.6, pour montrer $(C)^{c'}_{\overline{\eta}\to x,K}$ pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, il suffit de montrer $(C)^{c'}_{\overline{\eta}\to x,\mathscr{M}}$ pour tout faisceau de Λ-modules $\mathscr{M}$ sur X. On peut évidemment supposer que $\mathscr{M}$ est constructible. Mais alors, il existe un ouvert dense de X au-dessus duquel $\mathscr{M}$ soit localement constant. Il existe évidemment un morphisme fini surjectif $f\colon \tilde{X} \to X$, avec $\tilde{X}$ normal intègre, et un ouvert dense U de X tel que f induise un revêtement fini étale $\tilde{U} = f^{-1}(U) \to U$ et que $(f^\star\mathscr{M})_{|\tilde{U}}$ soit isomorphe à un faisceau constant de valeur un certain Λ-module N. Choisissons une spécialisation $\tilde{\overline{\eta}} \to \tilde{x}$ au-dessus de $\overline{\eta} \to x$. La propriété $(\mathrm{C})^{\leq c}_{\mathrm{loc.,normal},\Lambda}$ contient $(\mathrm{C})^{c'}_{\tilde{\overline{\eta}}\to\tilde{x},\Lambda}$ comme cas particulier. Cette dernière propriété implique à son tour la propriété $(\mathrm{C})^{c'}_{\tilde{\overline{\eta}}\to\tilde{x},\mathrm{N}}$. On observe que l'on a un isomorphisme canonique $(f^!\mathscr{M})_{|\tilde{\mathrm{U}}} \simeq \mathrm{N}$. L'assertion (c) du lemme 3.5.6 permet d'obtenir la propriété $(\mathrm{C})^{c'}_{\tilde{\overline{\eta}}\to\tilde{x},\mathscr{H}^0(f^!\mathscr{M})}$, et les assertions (a) et (b) d'en déduire $(\mathrm{C})^{c'}_{\tilde{\overline{\eta}}\to\tilde{x},f^!\mathscr{M}}$. Enfin, la proposition 3.5.4 permet de vérifier $(\mathrm{C})^{c'}_{\overline{\eta}\to x,\mathscr{M}}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 3.5.8. — *Pour tout entier* $c \geq 3$*, on a l'implication* $(\mathrm{C})^{\leq c-1} \Longrightarrow (\mathrm{C})^{\leq c}_{\mathrm{loc.,normal},\Lambda}$.

Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma noethérien excellent local strictement hensélien normal de dimension c, de point fermé x et de point générique η. On choisit un point géométrique $\overline{\eta}$ au-dessus de η. On note $s\colon \overline{\eta} \to x$ la spécialisation canonique. Nous allons montrer la propriété $(\mathrm{C})^{c}_{s,\Lambda}$.

Soit $\overline{z} \to X$ un point géométrique tel que $z \neq x$ et $z \neq \eta$. On a une spécialisation canonique $t\colon \overline{z} \to x$. On peut choisir une spécialisation $u\colon \overline{\eta} \to \overline{z}$. On n'obtient peut-être pas ainsi une factorisation de la spécialisation $\overline{\eta} \to x$ fixée plus haut, mais il existe certainement $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$ faisant commuter le diagramme suivant de spécialisations de points géométriques de X :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\eta} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\sigma", "\sim"'] & x \\
\overline{\eta} \arrow[r, "u"] & \overline{z} \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}$$

Les spécialisations σ, u et t sont de codimension $\leq c-1$, les morphismes de transitions associés sont donc bien définis. On peut considérer l'image de $1 \in \mathrm{H}^0_{\overline{\eta}}(X,\Lambda)$ par le composé de ces morphismes de transition :

$$\gamma_{\sigma,u,t} := (\mathrm{sp}^X_t \circ \mathrm{sp}^X_u \circ \mathrm{sp}^X_\sigma)(1) \in \mathrm{H}^{2c}_{x,\text{ét}}(X,\Lambda(c))\ .$$

Bien entendu, on a $\mathrm{sp}^X_\sigma(1) = 1$. On note donc simplement $\gamma_{u,t}$ l'élément $\gamma_{\sigma,u,t} = (\mathrm{sp}^X_t \circ \mathrm{sp}^X_u)(1)$. J'affirme que cette classe $\gamma_{u,t}$ ne dépend que du point z de X en-dessous duquel $\overline{z}$ se trouve. En effet, soit $\overline{z'}$ un autre point géométrique au-dessus de z, et $t'\colon \overline{z'} \to x$ la spécialisation canoniquement associée. On choisit une spécialisation $u'\colon \overline{\eta} \to \overline{z'}$. On peut choisir un z-isomorphisme $\sigma'\colon \overline{z} \xrightarrow{\sim} \overline{z'}$. Le schéma X étant géométriquement unibranche, on peut montrer facilement qu'il existe un η-isomorphisme $\sigma''\colon \overline{\eta} \to \overline{\eta}$ induisant un diagramme commutatif de spécialisations de points géométriques de X :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\eta} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\sigma''", "\sim"'] & \overline{z} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\sigma'", "\sim"'] & x \arrow[d, equal] \\
\overline{\eta} \arrow[r, "u'"] & \overline{z'} \arrow[r, "t'"] & x
\end{tikzcd}$$

En utilisant cette fois-ci que σ'' agit trivialement sur $1 \in \mathrm{H}^0_{\overline{\eta}}(X,\Lambda)$, on montre que $\gamma_{u,t} = \gamma_{u',t'}$. On peut donc noter simplement γ_z cette classe.

Il s'agit de montrer que la classe γ_z est indépendante de $z \in X - \{\eta, x\}$. Par construction, si $z' \in X - \{\eta, x\}$ est tel qu'il existe une spécialisation (Zariski) $z \to z'$, on a $\gamma_z = \gamma_{z'}$.

Comme A est local normal excellent de dimension ≥ 3, d'après [**SGA 2** XIII 2.1] appliqué au complété de A, si $f \in A - \{0\}$, le schéma $\mathrm{Spec}\,(A/(f)) - \{x\}$ est connexe. Il en résulte aussitôt que les classes γ_z pour $z \in \mathrm{Spec}\,(A/(f)) - \{x\}$ sont égales. Maintenant, si z et z' sont deux éléments de $X - \{\eta, x\}$, il existe bien évidemment $f \in A - \{0\}$ tel que z et z' appartiennent à l'hypersurface définie par f. On obtient donc bien $\gamma_z = \gamma_{z'}$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.1.2. Il s'agit d'établir la propriété $(\mathrm{C})^{\leq c}$ pour tout $c \geq 0$. Elle équivaut à la propriété $(\mathrm{C})^{\leq c}_{\mathrm{loc.}}$ d'après le lemme 3.5.5. D'après le lemme 3.5.7, elle équivaut encore à la propriété $(\mathrm{C})^{\leq c}_{\mathrm{loc.,normal},\Lambda}$. Compte tenu de ces équivalences, le lemme 3.5.8 montre que pour $c \geq 3$, $(\mathrm{C})^{\leq c-1}_{\mathrm{loc.,normal},\Lambda}$ implique $(\mathrm{C})^{\leq c}_{\mathrm{loc.,normal},\Lambda}$. Un raisonnement par récurrence permet donc de conclure puisque la propriété $(\mathrm{C})^{\leq 2}_{\mathrm{loc.,normal},\Lambda}$ a été établie plus haut.

3.6. Fin de la démonstration. —

Proposition 3.6.1. — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent local hensélien normal de dimension* d*, de point fermé* x *et de point générique* η*. Soit* $\overline{x}$ *un point géométrique au-dessus de* x*. Soit* $\overline{\eta}$ *un point géométrique au-dessus de* η*. Soit* $\overline{\eta} \to \overline{x}$ *une spécialisation. Alors, l'image de* 1 *par le morphisme de transition* $\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to\overline{x}}\colon \mathrm{H}^0_{\overline{\eta}}(X,\Lambda) \to \mathrm{H}^{2d}_{\overline{x}}(X,\Lambda(d))$

est invariante par $\mathrm{Gal}(\overline{x}/x)$, *et indépendante de la spécialisation choisie* $\overline{\eta} \to \overline{x}$ *; on la note* $[x]$. *On obtient ainsi un morphisme* $\Lambda[-2d] \to \tau_{\geq 2d} R\Gamma_x(\Lambda(d))$ *dans* $D(x_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Ceci résulte aussitôt du théorème 3.1.2 et du fait que $1 \in H^0_{\overline{\eta}}(X, \Lambda)$ est fixé par $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$.

Par construction, les classes $[x]$ sont compatibles aux morphismes de transition. Pour finir de démontrer le théorème 3.1.1, il reste à montrer que dans la situation de la proposition précédente, le morphisme $\Lambda[-2d] \to \tau_{\geq 2d} R\Gamma_x(\Lambda(d))$ est un isomorphisme, ou encore, dans la situation où X est strictement hensélien, que le morphisme $\Lambda \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ induit par $[x]$ est un isomorphisme. En effet, des considérations de dimension cohomologique (cf. proposition 3.2.1) expliquent alors l'annulation de $H^q_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ pour $q > 2d$.

Lemme 3.6.2. — *Soit* $d \geq 3$. *On suppose le résultat du théorème 3.1.1 connu jusqu'en dimension* $d-1$. *Alors, pour tout* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent* X *local strictement hensélien normal de dimension* d, *de point fermé* x, *le morphisme* $\Lambda \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ *induit par* $[x]$ *est surjectif.*

On utilise la suite spectrale de coniveau calculant la cohomologie de l'ouvert $U = X - x$ à coefficients dans $\Lambda(d)$:

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{y \in U^p} H^{p+q}_{y,\text{ét}}(X_{(y)}, \Lambda(d)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(U, \Lambda(d)) \,,$$

où U^p désigne l'ensemble des points de codimension p de U. La topologie étale étant plus fine que la topologie de Nisnevich, dans l'expression du terme E_1, on peut remplacer les localisés $X_{(y)}$ par leurs hensélisés $X^h_{(y)}$ pour tout $y \in U^p$ avec $0 \leq p \leq d-1$. On obtient ainsi un isomorphisme canonique :

$$R\Gamma_y(X_{(y)}, \Lambda(d)) \simeq R\Gamma(y, R\Gamma_y(\Lambda(p))(d-p)) \,.$$

La structure de $\tau_{\geq 2p} R\Gamma_y(\Lambda(p))$ est connue par notre connaissance limitée du théorème 3.1.1 puisque $p \leq d-1$. D'après la proposition 3.2.2, on a une majoration de la ℓ-dimension cohomologique de y pour tout nombre premier ℓ divisant n : $\mathrm{cd}_\ell\, y \leq d-p$. En appliquant la suite spectrale de composition des foncteurs dérivés au calcul de $R\Gamma_y(X_{(y)}, \Lambda(d))$, on obtient d'une part que $H^i_{y,\text{ét}}(X_{(y)}, \Lambda(d)) = 0$ pour $i > d+p$, c'est-à-dire que $H^{p+q}_{y,\text{ét}}(X_{(y)}, \Lambda(d)) = 0$ pour $q > d$, et d'autre part que $H^{p+d}_{y,\text{ét}}(X_{(y)}, \Lambda(d)) \simeq H^{d-p}_{\text{ét}}(y, \Lambda(d-p))$.

On a donc montré que $E_1^{p,q} = 0$ pour $q \geq d+1$, et par ailleurs, il est évident que $E_1^{p,q} = 0$ si $p \geq d$. On en déduit aussitôt que l'on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{Coker}(E_1^{d-2,d} \to E_1^{d-1,d}) \xrightarrow{\sim} H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$. En particulier, le morphisme canonique $E_1^{d-1,d} \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ est surjectif. D'après le calcul ci-dessus, on connaît la structure de $E_1^{d-1,d}$:

$$E_1^{d-1,d} \simeq \bigoplus_{y \in U^{d-1}} H^1_{\text{ét}}(y, \Lambda(1)) \,.$$

Pour tout $y \in U^{d-1}$, on a un isomorphisme évident $H^1_{\text{ét}}(y, \Lambda(1)) \simeq \Lambda$ (induit par une spécialisation immédiate $\overline{y} \to x$ de points géométriques de X). Il n'est pas difficile de vérifier que l'image du morphisme canonique $\Lambda \simeq H^1_{\text{ét}}(y, \Lambda(1)) \subset E_1^{d-1,d} \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ est le sous-groupe engendré par $[x]$. Par conséquent, l'image du morphisme surjectif $E_1^{d-1,d} \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ est le sous-groupe engendré par $[x]$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 3.6.3. — *Soit* $d \geq 3$. *On suppose le résultat du théorème 3.1.1 connu jusqu'en dimension* $d-1$. *Alors, pour tout* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent* X *local strictement hensélien normal de dimension* d, *de point fermé* x, *le morphisme* $\Lambda \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ *induit par* $[x]$ *est un isomorphisme, autrement dit, l'énoncé du théorème 3.1.1 vaut jusqu'en dimension* d.

En vertu du lemme 3.6.2, il ne s'agit plus que de déterminer la structure du Λ-module $H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$. Compte tenu du théorème de changement de base formel (cf. [**Fujiwara, 1995**, corollary 6.6.4]), on peut supposer que X est complet. Les théorèmes de structure des anneaux locaux noethériens complets (cf. [**ÉGA** 0_{IV} 19.8.8]) montrent que X est alors isomorphe à un sous-schéma fermé d'un schéma régulier. Notons $i \colon X \to Y$ une immersion fermée de X dans un schéma régulier excellent Y. Compte tenu de ce que l'on sait déjà sur les complexes dualisants potentiels sur les schémas réguliers, il existe un complexe dualisant potentiel pour $(Y, -\mathrm{codim})$ grâce à la proposition 2.4.4.1 et on peut en déduire l'existence d'un complexe dualisant potentiel sur X pour la fonction de dimension induite en utilisant par exemple la construction de la proposition 2.4.3.1. Quitte à décaler et tordre, si on note δ la fonction de dimension sur X telle que $\delta(\eta) = 0$ où η est le point générique de X, on obtient qu'il existe un complexe dualisant K pour (X, δ). Nous allons utiliser le lemme général suivant :

Lemme 3.6.4. — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent normal intègre de point générique* η. *On suppose* X *muni de la fonction de dimension* δ *telle que* $\delta(\eta) = 0$. *Soit* K *un complexe dualisant potentiel pour* (X, δ). *Alors, les faisceaux de cohomologie* $\mathscr{H}^q K$ *sont nuls pour* $q < 0$ *et l'épinglage en* η *s'étend en un isomorphisme* $\mathscr{H}^0 K \simeq \Lambda$. *Autrement dit, on a un isomorphisme canonique* $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} K$.

Pour obtenir le résultat pour X, il suffit de l'avoir pour ses hensélisés stricts. On peut donc supposer que X est strictement hensélien de dimension d et de point fermé x. On procède par récurrence sur d. Si $d = 0$, le résultat est évident. On suppose donc que $d \geq 1$ et que le résultat est connu pour l'ouvert $U = X - x$. Notons $j\colon U \to X$ et $i\colon x \to X$ les immersions évidentes. On a un triangle distingué dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_\star i^! K \to K \to Rj_\star j^\star K \to i_\star i^! K[1] \,.$$

Grâce à l'épinglage en x, il vient que $\mathscr{H}^q i^! K = 0$ pour $q \leq 1$. L'hypothèse sur U montre que $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} j^\star K$. On en déduit que $\mathscr{H}^q K = 0$ pour $q < 0$ et que $\mathscr{H}^0 K \simeq j_\star \Lambda$. Comme X est normal, le morphisme canonique $\Lambda \to j_\star \Lambda$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons à la démonstration du lemme 3.6.3, on considère le morphisme canonique $\Lambda \to K$ déduit du lemme 3.6.4. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique au-dessus de η. Choisissons une spécialisation $\overline{\eta} \to x$. On considère le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont induites par $\Lambda \to K$ et les flèches horizontales par les morphismes de transition associés à la spécialisation $\overline{\eta} \to x$:

$$\begin{tikzcd} H^0_{\overline{\eta}}(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d)) \arrow[d] \\ H^0_{\overline{\eta}}(K) \arrow[r] & H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K(d)) \end{tikzcd}$$

Le morphisme de gauche est évidemment un isomorphisme. Celui du bas aussi puisque K est un complexe dualisant potentiel. Le morphisme du haut est donc injectif, mais on sait déjà qu'il est surjectif. Le Λ-module $H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d))$ est donc isomorphe à Λ, ce qui permet de conclure.

4. Compléments sur les complexes dualisants potentiels

4.1. Énoncés. — Grâce aux résultats de la section 3, nous allons pouvoir poursuivre l'étude de certaines propriétés des complexes dualisants potentiels. Le résultat principal de la section 2 était la construction d'un complexe dualisant potentiel sur les schémas réguliers (cf. proposition 2.4.1.1). Les deux propositions suivantes établissent des propriétés de stabilité des complexes dualisants potentiels par rapport aux morphismes de type fini et aux morphismes réguliers [**ÉGA** IV 6.8.1].

Proposition 4.1.1. — *Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme régulier entre* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schémas noethériens excellents. On suppose* X *muni d'une fonction de dimension* δ_X. *On munit* Y *de la fonction de dimension* δ_Y *définie par l'égalité* $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) - \mathrm{codim}_{f^{-1}(f(y))}(y)$ *pour tout* $y \in Y$ *(cf. exp.* ***XIV****, 2.5.4).*

Si K *est un complexe dualisant putatif sur* X*, alors* $f^\star K$ *est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif sur* Y*, et c'est un complexe dualisant potentiel si* K *en est un.*

Proposition 4.1.2. — *Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme de type fini compactifiable entre* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schémas noethériens excellents. On suppose* X *muni d'une fonction de dimension* δ_X. *On munit* Y *de la fonction de dimension* δ_Y *définie par l'égalité* $\delta_Y(y) = \delta_X(f(y)) + \mathrm{deg.\,tr.}(y/f(y))$ *pour tout* $y \in Y$ *(cf. exp.* ***XIV****, 2.5.2).*

Si K *est un complexe dualisant putatif sur* X*, alors* $f^! K$ *est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant putatif sur* Y*, et c'est un complexe dualisant potentiel si* K *en est un.*

Remarque 4.1.3. — Au cours des démonstrations, on observera que les constructions des propositions 4.1.1 et 4.1.2 sont compatibles à la composition des morphismes : si $g\colon Z \to Y$ est un autre morphisme du type envisagé et K un complexe dualisant putatif sur X, l'isomorphisme de transitivité $g^\star f^\star K \simeq (f \circ g)^\star K$ (resp. $g^! f^! K \simeq (f \circ g)^! K$) est compatible aux épinglages. La proposition 4.1.1 généralise la construction de la proposition 2.2.1 (cas où f est étale).

Nous verrons plus bas que la proposition 4.1.2 résulte facilement de la proposition 4.1.1. Nous allons donc nous intéresser plus particulièrement aux morphismes réguliers. La sous-section suivante sur le théorème de changement de base par un morphisme régulier nous permettra de définir une structure de complexe dualisant putatif sur $f^\star K$ dans la situation de la proposition 4.1.1. Dans le cas d'un complexe dualisant potentiel, ce sont les résultats de la section 3 qui vont nous permettre de vérifier que les épinglages sur $f^\star K$ sont compatibles aux spécialisations.

4.2. Changement de base par un morphisme régulier. — Dans ce numéro, on étudie quelques conséquences du théorème de changement de base par un morphisme régulier exp. **XIV**, 2.5.3 dont on rappelle l'énoncé :

Proposition 4.2.1. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas localement noethériens. Soit $g\colon X' \to X$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. On constitue le carré cartésien de schémas :*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Alors, pour tout $K \in D^+(X'_{ét}, \Lambda)$, le morphisme de changement de base $f^\star Rg_\star K \to Rg'_\star f'^\star K$ est un isomorphisme dans $D^+(Y_{ét}, \Lambda)$.

Proposition 4.2.2. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens. Soit $K \in D^b_c(X_{ét}, \Lambda)$. Soit $L \in D^+(X_{ét}, \Lambda)$. Alors, le morphisme évident est un isomorphisme dans $D^+(Y_{ét}, \Lambda)$:*

$$f^\star R\,\mathbf{Hom}(K, L) \xrightarrow{\sim} R\,\mathbf{Hom}(f^\star K, f^\star L)\ .$$

Avant de la démontrer, signalons un corollaire de cette proposition (cas où $K := i_\star\Lambda$ et $L := M$) :

Corollaire 4.2.3. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens. Soit $i\colon Z \to X$ une immersion fermée. Notons $i'\colon f^{-1}(Z) \to Y$ l'immersion fermée déduite par changement de base, et $f'\colon f^{-1}(Z) \to Z$ la projection. Alors, pour tout $M \in D^+(X_{ét}, \Lambda)$, le morphisme évident $f'^\star i^! M \to i'^! f^\star M$ est un isomorphisme dans $D^+(f^{-1}(Z)_{ét}, \Lambda)$.*

Pour démontrer la proposition 4.2.2, commençons par constater que ce corollaire est un cas particulier de la proposition 4.2.1 (l'appliquer avec pour g l'immersion ouverte complémentaire de i).

Lemme 4.2.4. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens. Soit $i\colon Z \to X$ une immersion fermée. On constitue le carré cartésien suivant :*

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Soit $K \in D^b_c(Z_{ét}, \Lambda)$. On suppose que pour tout $L \in D^+(Z_{ét}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f'^\star R\,\mathbf{Hom}(K, L) \to R\,\mathbf{Hom}(f'^\star K, f'^\star L)$ est un isomorphisme. Alors, pour tout $L \in D^+(X_{ét}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f^\star R\,\mathbf{Hom}(i_\star K, L) \to R\,\mathbf{Hom}(f^\star i_\star K, f^\star L)$ est un isomorphisme.

Ce lemme-ci résulte aussitôt du corollaire 4.2.3.

Lemme 4.2.5. — *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens. Soit $j\colon U \to X$ une immersion ouverte. On constitue le carré cartésien suivant :*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

Soit $K \in D^b_c(U_{ét}, \Lambda)$. On suppose que pour tout $L \in D^+(U_{ét}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f'^\star R\,\mathbf{Hom}(K, L) \to R\,\mathbf{Hom}(f'^\star K, f'^\star L)$ est un isomorphisme. Alors, pour tout $L \in D^+(X_{ét}, \Lambda)$, le morphisme canonique $f^\star R\,\mathbf{Hom}(j_! K, L) \to R\,\mathbf{Hom}(f^\star j_! K, f^\star L)$ est un isomorphisme.

Ce lemme-là résulte de l'isomorphisme $f^\star Rj_\star \simeq Rj'_\star f'^\star$ qui est un cas particulier de la proposition 4.2.1.

Démontrons la proposition 4.2.2. Les lemmes 4.2.4 et 4.2.5 permettent de supposer que K est un faisceau localement constant constructible de Λ-modules sur X. En utilisant que le résultat est trivial si f est étale, on se ramène au cas où K est un faisceau constant de valeur M où M est un Λ-module de type fini. En introduisant une résolution projective (éventuellement infinie) de M, on peut se ramener au cas trivial où M est libre de type fini sur Λ.

4.3. Démonstration de la proposition 4.1.1. —

4.3.1. Structure de complexe dualisant putatif sur $f^\star K$. —

Lemme 4.3.1.1. — *Dans la situation de la proposition 4.1.1, si* K *est un complexe dualisant putatif sur* X*, on peut munir* $f^\star K$ *d'une structure de complexe dualisant putatif sur* Y.

Soit K un complexe dualisant putatif sur X. Soit $x \in X$. Introduisons le localisé $X' = X_{(x)}$ de X en x et $Y' = Y \times_X X'$. Notons $i\colon f^{-1}(x) \to Y'$ l'immersion de la fibre au-dessus de x, $g\colon f^{-1}(x) \to x$ la projection et $j\colon Y' \to Y$ le morphisme canonique. D'après le corollaire 4.2.3, on a un isomorphisme canonique $g^\star R\Gamma_x(K) \simeq i^! j^\star f^\star K$. Définir des épinglages sur $f^\star K$ en les points de $f^{-1}(x)$ revient à définir une structure de complexe dualisant putatif sur $i^! j^\star f^\star K$ pour la fonction de dimension $\delta_{Y|f^{-1}(x)}$. On vient de voir que cet objet s'identifie à $g^\star R\Gamma_x(K)$ qui s'identifie lui-même à $\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)]$ en vertu de l'épinglage donné de K en x. La fibre $f^{-1}(x)$ étant régulière, le faisceau constant Λ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel pour la fonction de dimension $-\operatorname{codim}$ (cf. proposition 2.4.4.1). Vu la définition de δ_Y, on en déduit aussitôt une structure de complexe dualisant potentiel sur $\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)] \in D^+(f^{-1}(x)_{\text{ét}}, \Lambda)$ pour la fonction de dimension $\delta_{Y|f^{-1}(x)}$. On a ainsi obtenu des épinglages pour $f^\star K$ en tous les points de $f^{-1}(x)$. Grâce à cette construction fibre à fibre, on a défini une structure de complexe dualisant putatif sur $f^\star K$.

Lemme 4.3.1.2. — *Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme régulier entre* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schémas noethériens excellents réguliers. On munit* X *et* Y *des fonctions de dimension* $\delta_X = -\operatorname{codim}$ *et* $\delta_Y = -\operatorname{codim}$*. On munit les faisceaux constants* Λ *sur* X *et* Y *des structures de complexes dualisants putatifs définies dans la proposition 2.4.1.1 ; le lemme 4.3.1.1 munit* $f^\star\Lambda$ *d'une structure de complexe dualisant putatif sur* Y *pour la fonction de dimension* δ_Y*. Alors, l'isomorphisme canonique* $\Lambda \simeq f^\star\Lambda$ *sur* Y *est compatible aux épinglages.*

Vérifions la compatibilité de l'isomorphisme canonique $\Lambda \simeq f^\star\Lambda$ aux épinglages en un point y de Y. Quitte à localiser, on peut supposer que X est local de point fermé $x = f(y)$ et que y est un point fermé dans la fibre $F = f^{-1}(y)$. Notons $c = \operatorname{codim}_X x$ et $d = \operatorname{codim}_F y$. L'épinglage de $f^\star\Lambda$ en y est donné par le produit des classes $f^\star(\mathrm{Cl}_{x\to X}) \in H^{2c}_{F,\text{ét}}(Y, \Lambda(c))$ et $\mathrm{Cl}_{y\to F} \in H^{2d}_{y,\text{ét}}(F, \Lambda(d))$, ce produit trouvant demeure dans $H^{2c+2d}_{y,\text{ét}}(Y, \Lambda(c+d))$. La compatibilité des classes de Gysin au changement de base (cf. exp. **XVI**, 2.3.2) implique que $f^\star(\mathrm{Cl}_{x\to X})$ est la classe de Gysin $\mathrm{Cl}_{F\to Y} \in H^{2c}_{F,\text{ét}}(Y, \Lambda(c))$. En utilisant la compatibilité des classes de Gysin à la composition, le produit considéré plus haut est $\mathrm{Cl}_{y\to Y}$, qui est précisément la classe qui définit l'épinglage de Λ en y.

Remarque 4.3.1.3. — Supposons que l'on dispose de deux morphismes réguliers composables $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents. Si K est un complexe dualisant putatif sur X, alors appliquer la construction du lemme 4.3.1.1 à f, puis à g, revient à l'appliquer directement à $f \circ g$, autrement dit l'isomorphisme évident $g^\star f^\star K \simeq (f \circ g)^\star K$ dans $D^+(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ est compatible aux épinglages. En effet, les constructions s'effectuant fibre à fibre, on peut supposer que X est le spectre d'un corps et, quitte à modifier la fonction de dimension, que $K = \Lambda$; en particulier, X, Y et Z sont réguliers, les faisceaux constants Λ sur X, Y et Z sont naturellement munis de structures de complexes dualisants putatifs (et même potentiels, cf. proposition 2.4.4.1) pour les fonctions de dimension considérées, la compatibilité requise est obtenue en appliquant le lemme 4.3.1.2 aux morphismes f, g et $f \circ g$.

4.3.2. Compatibilité aux spécialisations. — Supposons maintenant que K soit un complexe dualisant potentiel. Par définition des complexes dualisants potentiels, il s'agit maintenant de montrer que les épinglages sur $f^\star K$ sont compatibles aux morphismes de transition associés aux spécialisations immédiates. D'après le théorème 3.1.2, on peut donner un sens à cette compatiblité pour toute spécialisation $\overline{y'} \to \overline{y}$ de points géométriques de Y, quelle que soit sa codimension ; c'est l'objet de la définition suivante :

Définition 4.3.2.1. — Soit L un complexe dualisant putatif sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent Y muni d'une fonction de dimension δ. Soit $\overline{y'} \to \overline{y}$ une spécialisation de points géométriques de Y. On dit que les épinglages de L sont **compatibles à la spécialisation** $\overline{y'} \to \overline{y}$ si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^{-2\delta(y')}_{\overline{y'}}(L(-\delta(y'))) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{y'}\to\overline{y}}"] \arrow[dr, "\sim"'] & H^{-2\delta(y)}_{\overline{y}}(L(-\delta(y))) \arrow[d, "\sim"] \\ & \Lambda \end{tikzcd}$$

(Les isomorphismes avec Λ sont induits par les épinglages en y et y'.)

Il est évident qu'un complexe dualisant putatif est un complexe dualisant potentiel (cf. définition 2.1.2) si et seulement si ses épinglages sont compatibles aux spécialisations immédiates au sens ci-dessus et si c'est le cas, la construction du théorème 3.1.2 montre qu'ils sont compatibles à toutes les spécialisations.

Lemme 4.3.2.2. — *Plaçons nous dans la situation de la proposition 4.1.1. Soit K un complexe dualisant potentiel sur X. Soit $\overline{y'} \to \overline{y}$ une spécialisation de points géométriques de Y au-dessus d'une spécialisation $\overline{x'} \to \overline{x}$ de points géométriques de X. Si $\overline{x'} \to \overline{x}$ est de codimension 0 ou 1, alors les épinglages sur $f^\star K$ sont compatibles à la spécialisation $\overline{y'} \to \overline{y}$.*

Étant entendu que la construction de la structure de complexe dualisant putatif sur $f^\star K$ a été réalisée fibre à fibre, on peut supposer que X est local strictement hensélien intègre, de point générique x' et de point fermé x. Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que dans ce cas $f^\star K$ est un complexe dualisant potentiel. On peut supposer que $\delta_X(x') = 0$. Le schéma X étant de dimension ≤ 1, si on note $n\colon \tilde{X} \to X$ la normalisation de X, le schéma $\tilde{X}$ est régulier. On constitue le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[r, "n'"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & Y \arrow[d, "f"] \\ \tilde{X} \arrow[r, "n"] & X \end{tikzcd}$$

Les morphismes n et n' sont finis surjectifs radiciels. Pour eux, on dispose des constructions $n^!$ et $n'^!$ sur les complexes dualisants putatifs (cf. proposition 2.4.3.1). Pour les morphismes réguliers f et $\tilde{f}$, on a les constructions $f^\star$ et $\tilde{f}^\star$. On peut donc considérer les complexes dualisants putatifs $\tilde{f}^\star n^! K$ et $n'^! f^\star K$. D'après le lemme 4.3.2.3 à suivre, on a un isomorphisme canonique de complexes dualisant putatifs $\tilde{f}^\star n^! K \simeq n'^! f^\star K$. En outre, la proposition 2.4.3.3 montre que pour montrer que $f^\star K$ est un complexe dualisant potentiel, il suffit de montrer que $n'^! f^\star K$ en est un. Comme il s'identifie à $\tilde{f}^\star n^! K$ et que la proposition 2.4.3.3 nous dit aussi que $n^! K$ est un complexe dualisant potentiel, on peut finalement remplacer f par $\tilde{f}$ et supposer que X est régulier de dimension ≤ 1. On peut alors supposer que $K = \Lambda$, épinglé comme il convient de le faire. Le complexe $f^\star\Lambda$ s'identifie à Λ dont on sait qu'il peut-être muni d'une structure de complexe dualisant potentiel (cf. proposition 2.4.4.1). Il s'agit de montrer que les épinglages sur $f^\star\Lambda$ et sur Λ sont compatibles : c'est le sens du lemme 4.3.1.2.

Lemme 4.3.2.3. — *Plaçons nous dans la situation de la proposition 4.1.1. Soit $g\colon X' \to X$ un morphisme fini surjectif radiciel. On constitue le carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Soit K un complexe dualisant putatif sur X. Alors, l'isomorphisme évident $f'^\star g^! K \simeq g'^! f^\star K$ dans $D^+(Y'_{\text{ét}}, \Lambda)$ est compatible aux épinglages.

Les constructions envisagées se réalisant fibre à fibre, on peut supposer que X et X' sont les spectres de corps notés respectivement E et E'. Les morphismes f et f' étant plats et à fibres géométriquement régulières, les schémas Y et Y' sont réguliers. Dans cette situation, compte tenu de la proposition 2.4.3.3 et de la construction du lemme 4.3.1.1, il est manifeste que les complexes dualisants putatifs $f'^\star g^! K$ et $g'^! f^\star K$ sont des complexes dualisant potentiels. Pour montrer que l'isomorphisme évident $f'^\star g^! K \simeq g'^! f^\star K$ est compatible aux épinglages, il suffit donc de le faire aux points maximaux de Y'. Bref, on peut supposer que Y est lui aussi le spectre d'un corps F. Comme Y' est régulier et homéomorphe à Y, le schéma Y' est à son tour le spectre d'un corps F'. Compte tenu de la construction de la proposition 2.4.3.1 faisant intervenir les morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète $Y' \to Y$ et $X' \to X$, la comparaison des deux structures de complexes dualisants putatifs envisagées sur Y' se ramène à l'égalité des degrés $[F':F]=[E':E]$, qui résulte aussitôt de la définition de Y' : $F'=E'\otimes_E F$.

Pour finir la démonstration de la proposition 4.1.1, il nous reste à établir des compatibilités entre les épinglages sur $f^\star K$ et les spécialisations de points géométriques de Y. Les lemmes suivants sur les spécialisations nous seront utiles.

Lemme 4.3.2.4. — *Soit $f\colon Y\to X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. On suppose que f est un morphisme local entre schémas locaux strictement henséliens. Soit $\overline{x}\to X$ un point géométrique de X. Alors, $f^{-1}(\overline{x})=Y_{\overline{x}}=Y\times_X\overline{x}$ est un schéma intègre.*

Notons $Y_x:=Y\times_X x$. Soit x'/x une extension finie séparable. Notons plus généralement $Y\times_x x':=Y_x\times_x x'\simeq Y\times_X x'$. Si $n\geq 2$ est un entier inversible en x, en appliquant la proposition 4.2.1 au faisceau constant $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au morphisme $x'\to X$ et au changement de base régulier $Y\to X$, on obtient un isomorphisme $H^0_{\text{ét}}(x',\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})\xrightarrow{\sim}H^0_{\text{ét}}(Y_{x'},\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. On en déduit que $Y_{x'}$ est connexe. Le morphisme $f\colon Y\to X$ étant régulier, le schéma $Y_{x'}$ est régulier et connexe, donc intègre. Le schéma $Y_{\overline{x}}$ étant une limite projective filtrante de ces schémas affines intègres $Y_{x'}$, on obtient que $Y_{\overline{x}}$ est intègre.

Lemme 4.3.2.5. — *Soit $f\colon Y\to X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. Soit $\overline{x'}\to\overline{x}$ une spécialisation de points géométriques de X. Soit $\overline{\eta}$ un point géométrique de Y au-dessus de $\overline{x}$ tel que η soit de codimension 0 dans sa fibre pour f. Alors, à un isomorphisme non nécessairement unique près, il existe une unique spécialisation $\overline{\eta'}\to\overline{\eta}$ au-dessus de $\overline{x'}\to\overline{x}$ telle que η' soit de codimension 0 dans sa fibre. La codimension de $\overline{\eta'}\to\overline{\eta}$ est la même que celle de $\overline{x'}\to\overline{x}$.*

On peut supposer que f est un morphisme local entre schémas locaux strictement henséliens Y et X de points fermés respectifs $\overline{\eta}$ et $\overline{x}$. Établir le lemme dans ce cas précis revient à montrer qu'à isomorphisme près, la fibre géométrique $Y_{\overline{x'}}$ n'a qu'un seul point géométrique au-dessus d'un point maximal de $Y_{\overline{x'}}$, ce qui résulte du lemme 4.3.2.4. Il résulte de [**ÉGA** IV 6.1.2] que la codimension de la spécialisation de $\overline{\eta'}\to\overline{\eta}$ est la même que celle de $\overline{x'}\to\overline{x}$.

Lemme 4.3.2.6. — *Soit $f\colon Y\to X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. Soit $\overline{\eta'}\to\overline{\eta}$ une spécialisation de points géométriques de Y au-dessus d'une spécialisation $\overline{x'}\to\overline{x}$ de points géométriques de X. On suppose que η et η' sont de codimension 0 dans leur fibre pour f. Soit $\overline{x_0}\to\cdots\to\overline{x_n}$ une factorisation de la spécialisation $\overline{x'}\to\overline{x}$ en une suite de spécialisations immédiates. Alors, on peut décomposer $\overline{\eta'}\to\overline{\eta}$ en une suite de spécialisations immédiates $\overline{\eta_0}\to\cdots\to\overline{\eta_n}$ au-dessus de $\overline{x_0}\to\cdots\to\overline{x_n}$, chacun des points η_i étant de codimension 0 dans sa fibre pour f.*

Ceci résulte aussitôt du lemme 4.3.2.5.

Lemme 4.3.2.7. — *Soit $f\colon Y\to X$ un morphisme régulier entre schémas noethériens. Soit $\overline{y'}\to\overline{y}$ une spécialisation de points géométriques de Y au-dessus de $\overline{x'}\to\overline{x}$. Alors, il existe un diagramme commutatif de spécialisations de points géométriques de Y :*

$$\begin{tikzcd}
\overline{\eta'} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{\eta} \arrow[d] \\
\overline{y'} \arrow[r] & \overline{y}
\end{tikzcd}$$

où les points géométriques $\overline{\eta'}$ et $\overline{\eta}$ sont respectivement au-dessus de $\overline{x'}$ et de $\overline{x}$, et où η' et η sont de codimension 0 dans leur fibre pour f.

On peut supposer que X et Y sont locaux strictement henséliens de points fermés respectifs $\overline{y}$ et $\overline{x}$. On choisit une spécialisation $\overline{\eta}\to\overline{y}$ de points géométriques de la fibre $Y_{\overline{x}}$ avec η de codimension 0 dans cette fibre. D'après le lemme 4.3.2.5, il existe une spécialisation $\overline{\eta'}\to\overline{\eta}$ de points géométriques de Y au-dessus de $\overline{x'}\to\overline{x}$, avec η' de codimension 0 dans sa fibre pour f. Par ailleurs, la fibre géométrique $Y_{\overline{x'}}$ étant intègre, on peut en choisir un point géométrique $\overline{\eta''}$ au-dessus du point générique. Le point géométrique $\overline{y'}$ de Y étant au-dessus de $\overline{x'}$, il définit un point géométrique de $Y_{\overline{x'}}$; on dispose donc d'une spécialisation $\overline{\eta''}\to\overline{y'}$ de points géométriques au-dessus de $\overline{x'}$. La fibre géométrique $Y_{\overline{x'}}$ étant intègre, il existe un isomorphisme $\overline{\eta'}\simeq\overline{\eta''}$, ce qui donne le diagramme commutatif souhaité.

4.3.3. Fin de la démonstration. — Finissons la démonstration de la proposition 4.1.1, il s'agit de montrer que pour tout complexe dualisant potentiel K sur X, les épinglages sur le complexe dualisant putatif $f^\star K$ sont compatibles aux spécialisations de points géométriques de Y. Soit $\overline{y'} \to \overline{y}$ une telle spécialisation. Le lemme 4.3.2.7 s'applique et on obtient un diagramme commutatif de spécialisations comme ci-dessus. Pour montrer la compatibilité pour la spécialisation $\overline{y'} \to \overline{y}$, il suffit de l'obtenir pour les trois autres spécialisations qui interviennent dans le carré commutatif. Pour les spécialisations $\overline{\eta'} \to \overline{y'}$ et $\overline{\eta} \to \overline{y}$, cela résulte aussitôt des faits observés dans la construction même du lemme 4.3.1.1, à savoir que chaque fibre de f est munie d'un complexe dualisant potentiel. On peut appliquer le lemme 4.3.2.6 pour obtenir une factorisation de $\overline{\eta'} \to \overline{\eta}$ en une suite de spécialisations immédiates $\overline{\eta_0} \to \cdots \to \overline{\eta_n}$ au-dessus d'une composition de spécialisations immédiates $\overline{x_0} \to \cdots \to \overline{\eta_n}$ de points géométriques de X. On peut appliquer le lemme 4.3.2.2 aux spécialisations $\overline{\eta_i} \to \overline{\eta_{i+1}}$ pour obtenir la compatibilité souhaitée pour $\overline{\eta'} \to \overline{\eta}$, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.1.1.

4.4. Démonstration de la proposition 4.1.2. —

Lemme 4.4.1. — *Dans la situation de la proposition 4.1.2, si K est un complexe dualisant putatif sur X, on peut munir $f^!K$ d'une structure de complexe dualisant putatif sur Y.*

Définir la structure de complexe dualisant putatif sur $f^!K$ peut se faire fibre à fibre. On suppose donc que $X = x$ est le spectre d'un corps. Soit $y \in Y$. Soit U un ouvert non vide de régularité de l'adhérence (réduite) $\overline{\{y\}}$. On note $j\colon U \to Y$ l'immersion de U dans Y et $\pi\colon U \to x$ la projection. On a des isomorphismes canoniques induits par le morphisme de Gysin Cl_π et l'épinglage de K en x :

$$\Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)] \xrightarrow{\sim} \pi^!\Lambda(\delta_X(x))[2\delta_X(x)] \xleftarrow{\sim} \pi^! R\Gamma_x(K) \simeq j^!f^!K\,.$$

En passant au point générique de U, on obtient l'isomorphisme voulu : $R\Gamma_y(f^!K) \simeq \Lambda(\delta_Y(y))[2\delta_Y(y)]$. Il ne dépend évidemment pas de l'ouvert U, ce qui permet de définir l'épinglage souhaité de $f^!K$ en y.

On peut vérifier que la construction de cette structure de complexe dualisant putatif sur $f^!K$ est compatible à la composition des morphismes de type fini (pour le sens de cette affirmation, cf. remarque 4.1.3). Par ailleurs, il est évident que dans le cas où f est quasi-fini, les épinglages définis ici sont les mêmes que ceux de la proposition 2.4.3.1. Enfin, dans le cas où f est lisse de dimension relative d, *via* l'isomorphisme canonique $f^\star K \simeq f^!K(d)[2d]$, les épinglages sont compatibles avec ceux de la proposition 4.1.1, compte tenu du décalage entre les deux fonctions de dimension envisagées sur Y.

Montrons la proposition 4.1.2. La question étant de nature locale, on peut supposer que $f\colon X \to Y$ est un morphisme de type fini entre schémas affines. Il existe donc une factorisation $f = p \circ i$ avec i une immersion fermée et p un morphisme lisse. Soit K un complexe dualisant potentiel sur X. Les remarques précédentes montrent que $p^!K$, puis $i^!p^!K$ sont des complexes dualisants potentiels et que ce dernier s'identifie à $f^!K$. Par conséquent, $f^!K$ est un complexe dualisant potentiel, ce qui achève la démonstration.

5. Existence et unicité des complexes dualisants potentiels

5.1. Énoncé du théorème. — L'objectif de cette section est d'établir le théorème suivant :

Théorème 5.1.1. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Alors (X, δ) admet un complexe dualisant potentiel K_X, unique à isomorphisme unique près, et le morphisme évident $\Lambda \to \tau_{\leq 0} R\,\mathbf{Hom}(K_X, K_X)$ est un isomorphisme dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. De plus, $K_X \in \mathrm{Perv}^{-2\delta}(X, \Lambda)$ (cf. sous-section 5.2).*

5.2. Préliminaires sur les faisceaux pervers. — Si X est un schéma noethérien et $p\colon X \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ une fonction de perversité (c'est-à-dire que pour toute spécialisation $\overline{y} \to \overline{x}$ de points géométriques de X, on a $p(x) \geq p(y)$), Gabber a défini dans **[Gabber, 2004]** une t-structure $(D^{\leq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda), D^{\geq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda))$ sur $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ de sorte que pour tout $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on ait :

$$K \in D^{\leq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \iff \forall x \in X, K_{|x} \in D^{\leq p(x)}(x_{\text{ét}}, \Lambda)\,,$$

$$K \in D^{\geq p}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \iff \forall x \in X, R\Gamma_x(K) \in D^{\geq p(x)}(x_{\text{ét}}, \Lambda)\,,$$

où l'on a muni chacune des catégories $D^+(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ de sa t-structure canonique.

On note $\mathrm{Perv}^p(X, \Lambda) \subset D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ le cœur de cette t-structure, les foncteurs de troncature étant notés $\tau_{\leq p}$ et $\tau_{\geq p}$.

Définition 5.2.1. — Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme de schémas. On dit que f est une **pseudo-immersion ouverte** si f induit un homéomorphisme sur son image et que le morphisme induit $f^{-1}\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$ est un isomorphisme.

Cette classe de morphismes est stable par composition ; elle contient les immersions ouvertes et les localisations.

Proposition 5.2.2. — *Soit* $p\colon X \to \mathbf{Z}\cup\{+\infty\}$ *une fonction de perversité. Soit* $f\colon Y \to X$ *une pseudo-immersion ouverte.*

(a) *La fonction* $p \circ f\colon Y \to \mathbf{Z}\cup\{+\infty\}$ *est une fonction de perversité (encore notée* p*) et pour les* t*-structures définies par* p, $f^\star\colon D^+(X_{\text{ét}},\Lambda) \to D^+(Y_{\text{ét}},\Lambda)$ *est* t*-exact et* $Rf_\star\colon D^+(Y_{\text{ét}},\Lambda) \to D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)$ t*-exact à gauche ;*

(b) *Le foncteur* $f^\star$ *induit un foncteur exact* $f^\star\colon \mathrm{Perv}^p(X,\Lambda) \to \mathrm{Perv}^p(Y,\Lambda)$ *qui admet un adjoint à droite* $f^p_\star\colon \mathrm{Perv}^p(Y,\Lambda) \to \mathrm{Perv}^p(X,\Lambda)$ *défini par la formule* $f^p_\star K = \tau_{\leq p} Rf_\star K$ *;*

(c) *Le morphisme d'adjonction* $f^\star f^p_\star \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Perv}^p(Y,\Lambda)}$ *est un isomorphisme et le foncteur* $f^p_\star\colon \mathrm{Perv}^p(Y,\Lambda) \to \mathrm{Perv}^p(X,\Lambda)$ *est pleinement fidèle.*

(d) *Si* $g\colon Z \to Y$ *est une pseudo-immersion ouverte composable avec* f*, on dispose d'un isomorphisme de transitivité* $f^p_\star \circ g^p_\star \simeq (f\circ g)^p_\star$.

La t-exactitude de $f^\star$ est triviale. En particulier, $f^\star$ est t-exact à droite ; par adjonction, $Rf_\star$ est t-exact à gauche. (b) résulte aussitôt de (a). (c) en résulte aussi compte tenu du fait que le morphisme d'adjonction $f^\star Rf_\star \to \mathrm{Id}_{\mathrm{Perv}^p(Y,\Lambda)}$ est un isomorphisme. L'isomorphisme du (d) se déduit par adjonction de l'isomorphisme de transitivité des foncteurs images inverses.

5.3. Cas d'un schéma normal. —

Proposition 5.3.1. — *L'énoncé du théorème 5.1.1 est vrai si on suppose de plus que le schéma* X *est normal. Plus précisément, soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent irréductible normal de point générique* η*, muni d'une fonction de dimension* δ *telle que* $\delta(\eta) = 0$*. On note* $j\colon \eta \to X$ *l'inclusion du point générique et on pose* $T = j^\varphi_\star\Lambda$ *où* $\varphi\colon X \to \mathbf{N}$ *est la fonction de perversité définie par l'égalité :*

$$\varphi(x) = \max(0, 2\dim \mathscr{O}_{X,x} - 2)$$

pour tout $x \in X$.

(a) *Le morphisme d'adjonction* $\Lambda \to j^\varphi_\star j^\star\Lambda$ *définit un morphisme évident* $\Lambda \to T$ *tel que pour tout point géométrique* $\overline{x} \to X$*, l'application induite*

$$H^{-2\delta(x)}_{\overline{x}}(\Lambda) \to H^{-2\delta(x)}_{\overline{x}}(T)$$

soit un isomorphisme et que $H^q_{\overline{x}}(T) = 0$ *si* $q \neq -2\delta(x)$*. Le théorème 3.1.1 fournit alors un épinglage de* T *en* x*. Avec ces épinglages,* T *est un complexe dualisant potentiel pour* (X,δ)*.*

(b) *Si* K *est un complexe dualisant potentiel pour* (X,δ)*, alors* K *appartient à* $\mathrm{Perv}^\varphi(X,\Lambda)$ *(et à* $\mathrm{Perv}^{-2\delta}(X,\Lambda)$*) et le morphisme* $K \to T$ *qui s'en déduit aussitôt est un isomorphisme compatible aux épinglages.*

(c) *Si* K *est un complexe dualisant potentiel sur* X*, alors le morphisme évident* $\Lambda \to \tau_{\leq 0} R\,\mathbf{Hom}(K,K)$ *est un isomorphisme.*

Établissons (a). Le point essentiel est de montrer que pour tout $x \in X$, le morphisme évident $H^{-2\delta(x)}_{\overline{x}}(\Lambda) \to H^{-2\delta(x)}_{\overline{x}}(T)$ est un isomorphisme et que $H^q_{\overline{x}}(T)$ est nul si $q \neq -2\delta(x)$. Le fait que T soit un complexe dualisant potentiel résultera alors aussitôt du théorème 3.1.1. Pour établir le résultat voulu, on peut supposer que X est local strictement hensélien de point fermé x. Par récurrence sur $d = \dim X$, on peut supposer (a) connu sur l'ouvert $U = X - x$. Si $d = 0$, le résultat est évident. On suppose donc $d \geq 1$, de sorte que U contienne le point générique de X. Posons $L = T_{|U}$. D'après la proposition 5.2.2, si on note $g\colon U \to X$ l'immersion ouverte évidente, on a un isomorphisme canonique $T = g^\varphi_\star L$. On en déduit aussitôt un isomorphisme canonique $T = \tau_{\leq\varphi(x)} Rg_\star L$.

Si $d = 1$, $\varphi(\eta) = 0$, donc $T = g_\star\Lambda = \Lambda$. La proposition 2.4.2.1 permet de conclure que T est bien un complexe dualisant potentiel avec les épinglages envisagés ici. On suppose donc que $d \geq 2$. Dans ce cas, on a $\varphi(x) = 2d - 2$ et $T = \tau_{\leq 2d-2} Rg_\star L$.

D'après le lemme 3.6.4, la structure des objets de cohomologie $\mathscr{H}^q L$ pour $q \leq 0$ est connue. Notons $i\colon x \to X$ l'immersion du point fermé de X. Utilisons le triangle distingué canonique :

$$i_\star i^! T \to T \to Rg_\star L \to i_\star i^! T[1] \,.$$

Il en résulte une suite exacte longue :

$$\cdots \to H^{q-1}_{\text{ét}}(U,L) \to H^q_{x,\text{ét}}(X,T) \to (\mathscr{H}^q T)_x \to H^q_{\text{ét}}(U,L) \to \ldots$$

Par construction, $(\mathscr{H}^q T)_x \xrightarrow{\sim} H^q_{\text{ét}}(U,L)$ si $q \leq 2d-2$ et $(\mathscr{H}^q T)_x = 0$ si $q \geq 2d-1$. Il en résulte que $H^q_{x,\text{ét}}(X,T) = 0$ si $q \leq 2d-1$ et que l'on a des isomorphismes $H^{q-1}_{\text{ét}}(U,L) \xrightarrow{\sim} H^q_{x,\text{ét}}(X,T)$ pour $q \geq 2d$. Il vient aussi que

$\mathscr{H}^q T = 0$ si $q < 0$ et que l'on a un isomorphisme canonique $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0 T$. Ainsi, on a un morphisme canonique $\Lambda \to T$ induisant un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} T$.

***Lemme* 5.3.2.** — *Soit* U *le complémentaire du point fermé dans un schéma local strictement hensélien excellent normal* X *de dimension* $d \geq 2$. *Soit* $M \in D^{\leq \varphi}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. *On suppose qu'il existe un isomorphisme* $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} M$. *Alors, pour tout* $q \geq 2d$, *le morphisme évident est un isomorphisme :*

$$H^{q-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{q-1}_{\text{ét}}(U, M) .$$

On note M^+ un cône du morphisme évident $\Lambda \to M$. Il suffit de montrer que $H^q_{\text{ét}}(U, M^+) = 0$ pour $q \geq 2d-2$. Les hypothèses impliquent que les objets de cohomologie de M^+ sont nuls en dehors de l'intervalle $[1, 2d-4]$. On peut aussi observer que pour tout $1 \leq i \leq d-2$, si $y \in U$ est tel que $(\mathscr{H}^{2i-1} M^+)_{\overline{y}}$ ou $(\mathscr{H}^{2i} M^+)_{\overline{y}}$ soit non nul, alors l'adhérence (dans X) de y est de dimension $\leq d-i-1$. D'après la proposition 3.2.1 et la suite spectrale d'hypercohomologie, on obtient bien que $H^q_{\text{ét}}(U, M^+) = 0$ si $q \geq 2d-2$.

On peut appliquer le lemme 5.3.2 avec $M = L$. Il résulte alors de ce qui précède et du théorème 3.1.1 que $H^q_{x,\text{ét}}(X, T) = 0$ si $q \neq 2d$, que l'on a un isomorphisme canonique $H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, T(d))$, et que l'on peut ainsi définir des épinglages sur T qui en font un complexe dualisant potentiel sur X.

Montrons maintenant (b). Soit K un complexe dualisant potentiel sur X. Il est évident que $K \in D^{\geq -2\delta}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset D^{\geq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Pour montrer que $K \in D^{\leq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \subset D^{\leq -2\delta}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut supposer que X est local strictement hensélien de dimension d. On note $i \colon x \to X$ l'inclusion du point fermé et $g \colon U \to X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire $X - x$. Le cas où $d = 0$ étant trivial et celui où $d = 1$ ayant été traité dans la proposition 2.4.2.1, on peut supposer que $d \geq 2$. Par récurrence sur d, on peut supposer (b) connu pour l'ouvert U. On note $L = K_{|U} \in D^{\leq \varphi}(U_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Comme K est un complexe dualisant potentiel, la structure des faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^q K$ pour $q \leq 0$ est connue (cf. lemme 3.6.4). On peut donc appliquer le lemme 5.3.2 avec $M = L$. Ainsi, le morphisme évident est un isomorphisme $H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, L)$, et $H^q_{\text{ét}}(U, L) = 0$ pour $q \geq 2d$ (cf. proposition 3.2.1).

De même que pour établir (a), on utilise le triangle distingué canonique :

$$i_\star i^! K \to K \to Rg_\star L \to i_\star i^! K[1] ,$$

et la suite exacte longue qui s'en déduit :

$$\cdots \to H^{q-1}_{\text{ét}}(U, L) \to H^q_{x,\text{ét}}(X, K) \to (\mathscr{H}^q K)_x \to H^q_{\text{ét}}(U, L) \to \dots$$

La structure de $H^q_{x,\text{ét}}(X, K)$ étant connue pour tout $q \in \mathbf{Z}$, il vient aussitôt que $(\mathscr{H}^q K)_x = 0$ pour $q \geq 2d+1$ et que l'on a une suite exacte

$$0 \to (\mathscr{H}^{2d-1} K)_x \to H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, L) \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K) \to (\mathscr{H}^{2d} K)_x \to 0 .$$

Pour montrer que $K \in D^{\leq \varphi}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, il reste donc à montrer que le morphisme canonique $H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, L) \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K)$ est un isomorphisme. Choisissons une spécialisation $\overline{\eta} \to x$. On peut considérer le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont induites par le morphisme canonique $\Lambda \to K$:

$$\begin{tikzcd}
H^0_{\overline{\eta}}(X, \Lambda) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta} \to x}"] \arrow[d, "\sim"] & H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d)) \arrow[d] & H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, \Lambda(d)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] \\
H^0_{\overline{\eta}}(X, K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta} \to x}"] & H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K(d)) & H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, L(d)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Les flèches de la colonne de gauche vers celle du milieu sont les morphismes de transition introduits au théorème 3.1.2. Ici, ce sont des isomorphismes : pour la flèche du haut, cela résulte du théorème 3.1.1 et pour la flèche du bas, du fait que K soit un complexe dualisant potentiel. On en déduit que le morphisme du milieu $H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, \Lambda(d)) \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K(d))$ est un isomorphisme. Compte tenu des autres isomorphismes connus, il vient que le morphisme évident $H^{2d-1}_{\text{ét}}(U, L(d)) \to H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K(d))$ est un isomorphisme, ce qui achève de montrer que $K \in \mathrm{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$.

On a alors un morphisme d'adjonction $K \to j^\varphi_\star j^\star K = T$ dans $\mathrm{Perv}^\varphi(X, \Lambda)$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut se placer dans la situation locale précédente, et faire une récurrence sur la dimension pour pouvoir supposer que le morphisme induit $K_{|U} \to T_{|U}$ est un isomorphisme. Choisissons une spécialisation $\overline{\eta} \to x$. On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^0_{\overline{\eta}}(X, K) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to x}"] \arrow[d] & H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, K(d)) \arrow[d] \\ H^0_{\overline{\eta}}(X, T) \arrow[r, "\mathrm{sp}^X_{\overline{\eta}\to x}"] & H^{2d}_{x,\text{ét}}(X, T(d)) \end{tikzcd}$$

La flèche de gauche est évidemment un isomorphisme. Les flèches horizontales aussi puisque K et T sont des complexes dualisants potentiels. Il vient donc que le morphisme induit $i^! K \to i^! T$ est un isomorphisme. Il en découle que $K \to T$ est un isomorphisme (compatible aux épinglages au point générique, donc à tous les épinglages), ce qui achève la démonstration de (b).

Montrons (c). Soit K un complexe dualisant potentiel sur X. Pour montrer que le morphisme canonique $\Lambda \to \tau_{\leq 0} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K, K)$ est un isomorphisme, quitte à remplacer X par des schémas connexes étales sur lui, il suffit de montrer que $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)}(K, K)$ et que $\mathrm{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)}(K, K[q]) = 0$ pour $q < 0$. L'annulation de $\mathrm{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)}(K, K[q])$ pour $q < 0$ résulte aussitôt du fait que K appartienne au cœur de la t-structure définie par φ. D'après (b), on a un isomorphisme canonique $K = j^{\varphi}_{\star}\Lambda$. L'isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)}(K, K)$ résulte alors de ce que $j^{\varphi}_{\star} \colon \mathrm{Perv}^{\varphi}(\eta, \Lambda) \to \mathrm{Perv}^{\varphi}(X, \Lambda)$ soit pleinement fidèle (cf. proposition 5.2.2).

5.4. Un résultat de recollement. — La proposition suivante est un résultat de recollement qui nous permettra de passer du cas normal au cas général :

Proposition 5.4.1. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. On suppose donné un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p'"] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

où i est une immersion fermée d'ouvert complémentaire U et où p est un morphisme fini surjectif induisant un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$. On note $q = p \circ i'$. On suppose que l'énoncé du théorème 5.1.1 est connu pour X', Y et Y' (relativement aux fonctions de dimensions déduites de celle sur X par le procédé de la proposition 2.4.3.1). Alors, cet énoncé est également vrai pour X, et si on note K_X, $K_{X'}$, K_Y et $K_{Y'}$ les complexes dualisants potentiels de X, X', Y et Y' respectivement, on a un triangle distingué canonique dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$q_\star K_{Y'} \to i_\star K_Y \oplus p_\star K_{X'} \to K_X \to q_\star K_{Y'}[1]\ .$$

Dans un premier temps, supposons que X admette un complexe dualisant potentiel K_X et montrons que l'on peut définir un triangle distingué canonique de la forme souhaitée. Pour cela, considérons la suite exacte courte évidente de faisceaux sur X :

$$0 \to \Lambda \overset{(+,+)}{\to} i_\star\Lambda \oplus p_\star\Lambda \overset{(+,-)}{\to} q_\star\Lambda \to 0\ .$$

En appliquant $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-, K_X)$ au triangle distingué correspondant, on obtient un triangle distingué :

$$q_\star q^! K_X \overset{(+,-)}{\to} i_\star i^! K_X \oplus p_\star p^! K_X \overset{(+,+)}{\to} K_X \to q_\star q^! K_X[1]\ ,$$

qui, compte tenu de la proposition 4.1.2 et de la vertu d'unicité des complexes dualisants potentiels sur X', Y et Y', se récrit sous la forme :

$$q_\star K_{Y'} \overset{(+,-)}{\to} i_\star K_Y \oplus p_\star K_{X'} \overset{(+,+)}{\to} K_X \to q_\star K_{Y'}[1]\ .$$

Revenant aux hypothèses de la proposition, nous allons montrer qu'inversement, si on définit K_X de façon à avoir un tel triangle distingué (mais *a priori* pas de façon canonique), on obtient bien un complexe dualisant potentiel sur X. On suppose donc le théorème 5.1.1 connu seulement pour X', Y et Y' et on note $K_{X'}$, K_Y et $K_{Y'}$ les complexes dualisants potentiels correspondants. La propriété d'unicité pour les complexes dualisants potentiels sur Y' donne des isomorphismes canoniques $K_{Y'} \simeq p'^! K_Y$ et $K_{Y'} \simeq i'^! K_{X'}$. Par adjonction, on en déduit des morphismes canoniques $p'_\star K_{Y'} \to K_Y$ et $i'_\star K_{Y'} \to K_{X'}$, puis en appliquant respectivement $i_\star$ et $p_\star$, on obtient des morphismes canoniques $q_\star K_{Y'} \to i_\star K_Y$ et $q_\star K_{Y'} \to p_\star K_{X'}$. On peut considérer leur différence et constituer un triangle distingué dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$q_\star K_{Y'} \overset{(+,-)}{\to} i_\star K_Y \oplus p_\star K_{X'} \to K_X \to q_\star K_{Y'}[1] \ .$$

On obtient ainsi un objet $K_X \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et deux morphismes privilégiés $i_\star K_Y \to K_X$ et $p_\star K_{X'} \to K_X$.

Notons $j\colon U \to X$ et $j'\colon U \to X'$ les immersions ouvertes évidentes. En appliquant $j^\star$ au triangle distingué ci-dessus, on peut commencer par observer que le morphisme évident $j'^\star K_{X'} \simeq j^\star p_\star K_{X'} \to j^\star K_X$ est un isomorphisme. Par conséquent, on peut munir K_X d'épinglages en les points de l'ouvert U de façon compatible avec la structure de complexe dualisant potentiel obtenue sur $j'^\star K_{X'}$.

Considérons le morphisme canonique $q_\star K_{Y'} \to p_\star K_{X'}$. J'affirme qu'il induit un isomorphisme après application du foncteur $i^!$. En effet, on a des isomorphismes évidents de foncteurs $i^! q_\star i'^! \simeq i^! i_\star p'_\star i'^! \simeq p'_\star i'^! \simeq i^! p_\star$ et, compte tenu de l'isomorphisme canonique $K_{Y'} \simeq i'^! K_{X'}$, on obtient bien que le morphisme évident $i^! q_\star K_{Y'} \to i^! p_\star K_{X'}$ est un isomorphisme. En appliquant $i^!$ au triangle distingué de définition de K_X, il vient alors que le morphisme canonique $i_\star K_Y \to K_X$ induit un isomorphisme $K_Y \xrightarrow{\sim} i^! K_X$ après application de $i^!$. Ceci permet de définir des épinglages pour K_X en tous les points de Y.

Finalement, on a obtenu une structure de complexe dualisant putatif sur K_X. D'après la proposition 2.4.3.3, pour montrer que K_X est un complexe dualisant potentiel, il suffit de montrer que $p^! K_X$ en est un. Nous allons bien évidemment le comparer à $K_{X'}$. Par construction de K_X, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & i_\star K_Y \arrow[dr] & \\
q_\star K_{Y'} \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_X \\
 & p_\star K_{X'} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Par adjonction, on obtient que deux définitions concurrentes d'un morphisme $K_{Y'} \to q^! K_X$ coïncident :

$$\begin{tikzcd}
 & p'^! K_Y \arrow[r] & p'^! i^! K_X \arrow[dr, equal] & \\
K_{Y'} \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & & q^! K_X \\
 & i'^! K_{X'} \arrow[r] & i'^! p^! K_X \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

On a déjà montré que le morphisme canonique $K_Y \to i^! K_X$ était un isomorphisme. Par conséquent, sur le diagramme ci-dessus, toutes les flèches sont des isomorphismes. Ainsi, le morphisme évident $K_{X'} \to p^! K_X$ induit un isomorphisme non seulement après application de $j'^\star$, mais aussi après celle de $i'^!$. Il en résulte que ce morphisme $K_{X'} \to p^! K_X$ est un isomorphisme. En outre, sur le diagramme ci-dessus, tous les objets sont naturellement munis d'une structure de complexe dualisant putatif et tous les isomorphismes, sauf peut-être celui du bas, sont compatibles aux épinglages. Cet isomorphisme $i'^! K_{X'} \to i'^! p^! K_X$ est donc lui aussi compatible aux épinglages. Par conséquent, l'isomorphisme $K_{X'} \xrightarrow{\sim} p^! K_X$ est compatible aux épinglages non seulement sur U mais aussi sur Y'. Il en résulte que $p^! K_X$ est un complexe dualisant potentiel ; d'après la proposition 2.4.3.3, on peut en conclure que K_X est aussi un complexe dualisant potentiel.

En outre, l'hypothèse selon laquelle les complexes dualisants potentiels sur X', Y et Y' sont pervers pour la fonction de perversité -2δ implique par construction que K_X est aussi pervers pour -2δ.

Pour conclure, il s'agit de montrer que si K et L sont deux complexes dualisants potentiels sur X, on a un isomorphisme privilégié $\Lambda \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K, L)$ qui donne naissance à un morphisme $\psi\colon K \to L$ qui soit un isomorphisme de complexes dualisants potentiels. En effet, cela montrera que si $\phi\colon K \to L$ est un autre isomorphisme, alors $\phi = \lambda \cdot \psi$ où $\lambda\colon X \to \Lambda^\times$ est une fonction localement constante. Demander que ϕ soit compatible aux épinglages impliquant que $\lambda = 1$, on aura bien un unique isomorphisme $K \xrightarrow{\sim} L$ de complexes dualisants potentiels.

D'après la propriété d'unicité des complexes dualisants potentiels sur X', Y et Y', on a des isomorphismes de complexes dualisants potentiels $p^! K \xrightarrow{\sim} p^! L$ et $i^! K \xrightarrow{\sim} i^! L$ induisant le même isomorphisme $q^! K \xrightarrow{\sim} q^! L_Y$. On a construit plus haut un triangle distingué canonique :

$$q_\star q^! K \overset{(+,-)}{\to} i_\star i^! K \oplus p_\star p^! K \overset{(+,+)}{\to} K \to q_\star q^! K[1] \,.$$

En lui appliquant $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-, L)$, on obtient un autre triangle distingué :

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K, L) \overset{(+,+)}{\to} i_\star \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(i^! K, i^! L) \oplus p_\star \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(p^! K, p^! L) \overset{(+,-)}{\to} q_\star \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(q^! K, q^! L) \overset{+}{\to}$$

L'énoncé du théorème 5.1.1 pour X', Y et Y' implique aussitôt que les objets de cohomologie $\mathscr{H}^q \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K, L)$ sont nuls pour $q < 0$, et, compte tenu de la suite exacte canonique de faisceaux :

$$0 \to \Lambda \overset{(+,+)}{\to} i_\star \Lambda \oplus p_\star \Lambda \overset{(+,-)}{\to} q_\star \Lambda \to 0 \,,$$

que l'on a un isomorphisme privilégié $\Lambda \overset{\sim}{\to} \mathscr{H}^0 \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(K, L)$. Le morphisme $K \to L$ correspondant induit bien entendu les uniques isomorphismes de complexes dualisants potentiels $i^! K \overset{\sim}{\to} i^! L$ et $p^! K \overset{\sim}{\to} p^! L$. Ce morphisme $K \to L$ est donc compatible aux épinglages sur Y et sur U : c'est un isomorphisme de complexes dualisants potentiels. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.4.1.

5.5. Cas général. — Montrons le théorème 5.1.1 dans le cas général. Pour le montrer pour tous les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents munis d'une fonction de dimension, par récurrence noethérienne, on peut supposer le résultat connu pour les schémas finis sur un fermé d'intérieur vide de X. On peut supposer que X est réduit. Notons $p \colon X' \to X$ la normalisation de X. Le morphisme p est fini surjectif et induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert dense de normalité U du schéma excellent X. Posons $Y = (X - U)_{\text{réd}}$ et formons le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p'"] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Comme X' est normal, la proposition 5.3.1 montre que l'énoncé du théorème 5.1.1 est connu pour X'. L'hypothèse de récurrence noethérienne montre que c'est aussi le cas pour Y et Y'. La proposition 5.4.1 donne la conclusion souhaitée pour X.

6. Le théorème de dualité locale

6.1. Énoncé du théorème. —

Théorème 6.1.1. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Soit K le complexe dualisant potentiel de (X, δ) (cf. théorème 5.1.1). Alors*

- $K \in \mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{ctf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
- *K est de dimension quasi-injective finie si et seulement si X est de dimension de Krull finie ;*
- *le foncteur $\mathrm{D}_K = \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-, K)$ préserve $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;*
- *pour tout $M \in \mathsf{D}^{\mathsf{b}}_{\mathsf{c}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme de bidualité $M \to \mathrm{D}_K\,\mathrm{D}_K\,M$ est un isomorphisme.*

En particulier, si X est de dimension de Krull finie, K est un complexe dualisant au sens de [**SGA 5** I 1.7].

6.2. Constructibilité, tor-dimension, dimension quasi-injective. —

6.2.1. Changement de coefficients. —

Proposition 6.2.1.1. — *Soit $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Soit m un diviseur de n. Soit $\Lambda' = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. L'anneau Λ' est une Λ-algèbre. Soit $K \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ un complexe dualisant potentiel sur X relativement à l'anneau de coefficients Λ. Alors $K' = \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\Lambda', K) \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda')$ est naturellement muni d'une structure de complexe dualisant potentiel relativement à l'anneau de coefficients Λ'. De plus, si $M \in \mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda')$, on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(M, K) \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\Lambda'}(M, K') \,.$$

Ceci résulte facilement de la commutation des foncteurs de cohomologie à supports avec le foncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\Lambda', -)$. (On utilise aussi un isomorphisme privilégié $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\Lambda', \Lambda) \simeq \Lambda'$: *via* cet isomorphisme, le générateur canonique de Λ' correspond au morphisme $\Lambda' \to \Lambda$ envoyant $1 \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ sur $[n/m] \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.)

6.2.2. Constructibilité, tor-finitude. —

Proposition 6.2.2.1. — *Soit K un complexe dualisant potentiel sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Alors $K \in D^b_c(X_{ét}, \Lambda)$.*

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 6.2.2.2. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent. Soit $i\colon Z \to X$ une immersion fermée. Soit $j\colon U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit $K \in D^+(X_{ét}, \Lambda)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *$K \in D^b_c(X_{ét}, \Lambda)$;*
- *$j^\star K \in D^b_c(U_{ét}, \Lambda)$ et $i^! K \in D^b_c(Z_{ét}, \Lambda)$.*

Ce lemme résulte aussitôt du fait non trivial que le foncteur $Rj_\star$ envoie $D^b_c(U_{ét}, \Lambda)$ dans $D^b_c(X_{ét}, \Lambda)$, cf. exp. **XIII**, 1.1.1.

Démontrons la proposition. On peut supposer X réduit. Comme X est excellent, X admet un ouvert dense régulier. Notons Z le sous-schéma fermé $(X - U)_{réd}$ et $i\colon Z \to X$ son immersion fermée dans X. Par récurrence noethérienne, on peut supposer que le complexe dualisant potentiel $i^! K$ de Z est dans $D^b_c(Z_{ét}, \Lambda)$. En vertu du lemme, on est ramené à montrer que $j^\star K \in D^b_c(U_{ét}, \Lambda)$. Autrement dit, on peut supposer que X est régulier. On peut supposer de plus que X est connexe. Notons η le point générique de X. D'après la proposition 2.4.4.1 et le théorème 5.1.1, on a un isomorphisme canonique $K \simeq \Lambda(\delta(\eta))[2\delta(\eta)]$. Ainsi, K appartient bien à $D^b_c(X_{ét}, \Lambda)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition 6.2.2.3. — *Soit X un schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Le complexe dualisant potentiel de (X, δ) appartient à $D^b_{ctf}(X_{ét}, \Lambda)$.*

On sait déjà que le complexe dualisant potentiel K de (X, δ) appartient à $D^b_c(X_{ét}, \Lambda)$. Il s'agit donc d'obtenir un résultat de tor-finitude pour K. Pour cela, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier et $\nu \geq 1$. D'après la proposition 6.2.1.1, $R\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ est un complexe dualisant potentiel relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$; d'après la proposition 6.2.2.1, cet objet appartient à $D^b_c(X_{ét}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, le critère du lemme suivant permet de conclure que K appartient à $D^b_{tf}(X_{ét}, \Lambda)$.

Lemme 6.2.2.4. — *Soit X un schéma noethérien. Soit ℓ un nombre premier. Soit $\nu \geq 1$. On pose $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$. Soit $K \in D^b(X_{ét}, \Lambda)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- (i) *$K \in D^b_{tf}(X_{ét}, \Lambda)$;*
- (ii) *$K \overset{L}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in D^b(X_{ét}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$;*
- (iii) *$R\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K) \in D^b(X_{ét}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$.*

Dans ce cas, on a un isomorphisme canonique $R\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K) \simeq K \overset{L}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ dans $D^b(X_{ét}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$.

L'équivalence entre (i) et (ii) est seulement indiquée pour mémoire. Il s'agit ici principalement de montrer que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. On représente K par un complexe borné. Notons R le complexe (acyclique) de Λ-modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \dots & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{\ell^{\nu-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{\ell^{\nu-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{\ell^{\nu-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} \dots \end{array}$$

On note $R^{\leq 0}$ et $R^{>0}$ les troncatures bêtes de R, de façon à ce que l'on ait une suite exacte courte de complexes :

$$0 \to R^{>0} \xrightarrow{i} R \xrightarrow{p} R^{\leq 0} \to 0\,.$$

On en déduit une suite exacte de complexes de faisceaux de Λ-modules sur $X_{ét}$:

$$0 \to K \otimes_\Lambda R^{>0} \to K \otimes_\Lambda R \to K \otimes_\Lambda R^{\leq 0} \to 0\,,$$

puis un triangle distingué dans $D(X_{ét}, \Lambda)$:

$$K \otimes_\Lambda R^{>0} \to K \otimes_\Lambda R \to K \otimes_\Lambda R^{\leq 0} \xrightarrow{\delta} (K \otimes_\Lambda R^{>0})[1]\,.$$

On dispose d'un quasi-isomorphisme évident $R^{\leq 0} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ qui permet de faire l'identification $K \otimes_\Lambda R^{\leq 0} \simeq K \overset{L}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ dans $D^-(X_{ét}, \Lambda)$. Avec les conventions de signes de [**Conrad, 2000**, §1.3] (voir aussi exp. **XVI**, 4.7.3), on a un isomorphisme canonique $(K \otimes_\Lambda R^{>0})[1] \simeq K \otimes_\Lambda (R^{>0}[1])$ et un autre (qui ne fait pas intervenir de signes) $\mathbf{Hom}(Q, \Lambda) = R^{>0}[1]$ où Q est le complexe de faisceaux constants de Λ-modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & -4 & & -3 & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \\ \dots & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{-\ell^{\nu-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \xrightarrow{-\ell^{\nu-1}} & \Lambda & \xrightarrow{\ell} & \Lambda & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \dots \end{array}$$

En procédant comme dans exp. **XVI**, 4.7.2, on en déduit un isomorphisme $K \otimes_\Lambda (R^{>0}[1]) \to \mathbf{Hom}(Q, K)$. Le quasi-isomorphisme évident $Q \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ induit un isomorphisme $\mathbf{Hom}(Q, K) \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ dans $D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Compte tenu de ce qui précède, on a obtenu un isomorphisme canonique $(K \otimes_\Lambda R^{>0})[1] \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$. Si on note $\tilde{\delta} \colon K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ le morphisme dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ induit par δ *via* les isomorphismes précédents, on a obtenu un triangle distingué dans $D(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$K \otimes_\Lambda R \to K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K) \to (K \otimes_\Lambda R)[1]$$

Vu que $R = R[2]$, on remarque que l'on a des isomorphismes au niveau des objets de cohomologie $\mathscr{H}^q(K \otimes_\Lambda R) \simeq \mathscr{H}^{q+2}(K \otimes_\Lambda R)$ pour tout $q \in \mathbf{Z}$. Par conséquent, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $K \otimes_\Lambda R$ est acyclique.
(b) $K \otimes_\Lambda R \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;
(c) $K \otimes_\Lambda R \in D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$;

Grâce au triangle distingué construit plus haut, compte tenu du fait que $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K) \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on obtient que (b) est équivalente à (ii). De même, que $K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ appartienne à $D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ implique que (c) et (iii) sont équivalentes. Par conséquent, (ii) et (iii) sont équivalentes.

Si on suppose que ces conditions équivalentes sont vérifiées (c'est-à-dire que $K \in D^b_{\mathrm{tf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$), le morphisme $\tilde{\delta} \colon K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ est un isomorphisme dans $D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, ce qui ne permet pas de conclure immédiatement puisque l'on souhaite obtenir un isomorphisme dans la catégorie $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Pour cela, on peut représenter K par un complexe borné de faisceaux plats de Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$. Les objets $K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ et $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ sont alors représentés respectivement par $K/\ell K$ et ${}_\ell K := \mathrm{Ker}(\ell \colon K \to K)$ et le quasi-isomorphisme cherché est l'isomorphisme induit par la multiplication par $\ell^{\nu-1} \colon K/\ell K \xrightarrow{\sim} {}_\ell K$. (On peut montrer qu'après application du foncteur évident $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to D^b(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, l'isomorphisme que l'on vient de définir devient $\tilde{\delta}$.)

6.2.3. *Préservation de* $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. —

Proposition 6.2.3.1. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Notons K_X le complexe dualisant potentiel de (X, δ). Alors, le foncteur $D_X = \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(-, K_X)$ préserve $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Grâce à la proposition 6.2.1.1, on peut supposer que l'anneau de coefficients est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, avec ℓ un nombre premier. Il s'agit de montrer que pour tout faisceau constructible de Λ-modules $\mathscr{M}$ sur X, $D_X\,\mathscr{M} \in D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. D'après la proposition 6.2.2.1, si $\mathscr{M}$ est constant, on a bien $D_X\,\mathscr{M} \in D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Si $p \colon Y \to X$ est un morphisme étale, on a un isomorphisme évident $p^\star D_X\,\mathscr{M} \simeq D_Y\,p^\star\mathscr{M}$ pour tout faisceau constructible $\mathscr{M}$ sur X. Si $\mathscr{M}$ est localement constant, en introduisant un morphisme étale surjectif p tel que $p^\star\mathscr{M}$ soit constant, on obtient que $D_X\,\mathscr{M} \in D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ si $\mathscr{M}$ est localement constant.

On raisonne alors par récurrence noethérienne. Pour tout faisceau constructible $\mathscr{M}$, il existe un ouvert dense U de X sur lequel $\mathscr{M}$ est localement constant. On note $j \colon U \to X$ l'immersion ouverte correspondante et $i \colon Z \to X$ une immersion fermée complémentaire. D'après ce qui précède, on a $j^\star D_X\,\mathscr{M} = D_U\,\mathscr{M}_{|U} \in D^b_c(U_{\text{ét}}, \Lambda)$. Par ailleurs, $i^! D_X\,\mathscr{M} \simeq D_Z\,i^\star\mathscr{M}$. Par hypothèse de récurrence noethérienne, on obtient que $i^! D_X\,\mathscr{M}$ appartient à $D^b_c(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$. Le lemme 6.2.2.2 permet de conclure que $D_X\,\mathscr{M}$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

La stabilité de $D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ par D_X permet d'énoncer le résultat important suivant :

Proposition 6.2.3.2. — *Soit $p \colon X' \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents. On suppose X muni d'une fonction de dimension δ_X et on munit X' de la fonction de dimension $\delta_{X'}$ définie dans la proposition 4.1.1. Alors, pour tout $L \in D^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on a un isomorphisme canonique $p^\star D_X\,L \xrightarrow{\sim} D_{X'}\,p^\star L$ et le morphisme de bidualité $p^\star L \to D^2_{X'}\,p^\star L$ s'identifie à l'image par $p^\star$ du morphisme de bidualité $L \to D^2_X\,L$.*

Cela résulte aussitôt des propositions 4.1.1, 4.2.2, 6.2.3.1 et du résultat du §E.3.2.

6.2.4. Dimension quasi-injective. —

Proposition 6.2.4.1. — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension* δ*. Notons* K_X *le complexe dualisant potentiel de* (X,δ)*. La dimension quasi-injective de* K_X *est* $-2\inf_{x\in X}\delta(x)$*. En particulier, elle est finie si et seulement si* X *est de dimension de Krull finie.*

Commençons par minorer la dimension quasi-injective de K_X. Soit $x \in X$. On note $i\colon Z \to X$ l'inclusion du sous-schéma intègre de X de point générique x. On a un isomorphisme canonique $i^!K_X \simeq i^\star \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(\Lambda_Z, K_X)$. Le complexe $K_Z = i^!K_X$ est un complexe dualisant potentiel pour $(Z, \delta_{|Z})$. Par conséquent $(K_Z)_{\overline{x}} \simeq \Lambda(\delta(x))[2\delta(x)]$. Il en résulte que la dimension quasi-injective de K_X est au moins $-2\delta(x)$. On obtient ainsi la minoration

$$-2\inf_{x\in X}\delta(x) \leq \mathrm{dim.\,q.\,inj.}\, K_X \;.$$

Montrons que cette inégalité est en fait une égalité si X est de dimension de Krull finie. On peut procéder par récurrence sur la dimension de X. On peut en outre supposer que X est local strictement hensélien (réduit) de point fermé x. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur X. Il s'agit de montrer que $D_X\,\mathscr{M} \in \mathsf{D}^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}},\Lambda)$. Il existe un ouvert affine dense U sur lequel $\mathscr{M}$ est localement constant. Le schéma X étant réduit et excellent, quitte à rétrécir X, on peut supposer que U est régulier. Notons $j\colon U \to X$ l'immersion de U. Notons $U_1,\ldots,U_n$ les composantes connexes de U, et $\eta_1,\ldots,\eta_n$ les points génériques de ces composantes. Le schéma U étant régulier, on connaît la structure du complexe dualisant potentiel K_U : pour tout $1 \leq i \leq n$, on a un isomorphisme canonique $K_{U_i} \simeq \Lambda(\delta(\eta_i))[2\delta(\eta_i)]$. En particulier, $K_{U_i} \in \mathsf{D}^{\leq -2\delta(\eta_i)}(U_{i\text{ét}},\Lambda)$. Le faisceau $\mathscr{M}_{|U_i}$ étant localement constant, on obtient que $D_{U_i}\,\mathscr{M}_{|U_i} \in \mathsf{D}^{\leq -2\delta(\eta_i)}(U_{i\text{ét}},\Lambda)$. D'après le théorème de Lefschetz affine (cf. exp. **XV**, 1.2.2) appliqué aux immersions ouverts affines $j_i\colon U_i \to X$, il vient alors que $\mathrm{R}j_{i\star}\,D_{U_i}\,\mathscr{M}_{|U_i}$ appartient à $\mathsf{D}^{\leq \dim\overline{\{\eta_i\}}-2\delta(\eta_i)}(X_{\text{ét}},\Lambda)$. Comme on a $\dim\overline{\{\eta_i\}} - 2\delta(\eta_i) \leq -2\delta(x)$, il vient que $\mathrm{R}j_\star\,D_U\,\mathscr{M}_{|U}$ appartient à $\mathsf{D}^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}},\Lambda)$.

Notons $i\colon Z \to X$ une immersion fermée complémentaire à j. Grâce à la récurrence sur la dimension, on sait que $D_Z\,i^\star\mathscr{M} \in \mathsf{D}^{\leq -2\delta(x)}(Z_{\text{ét}},\Lambda)$. En utilisant le triangle distingué canonique

$$i_\star\,D_Z\,i^\star\mathscr{M} \to D_X\,\mathscr{M} \to \mathrm{R}j_\star\,D_U\,\mathscr{M}_{|U} \to i_\star\,D_Z\,i^\star\mathscr{M}[1]\;,$$

on obtient bien que $D_X\,\mathscr{M} \in \mathsf{D}^{\leq -2\delta(x)}(X_{\text{ét}},\Lambda)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

6.3. Le théorème en degré négatif ou nul. —

Proposition 6.3.1. — *Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$*-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension* δ*. Soit* $\mathscr{M}$ *un faisceau constructible de* Λ*-modules sur* X*. Alors, le morphisme canonique est un isomorphisme dans* $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$*.*

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq 0}\,D_X\,D_X\,\mathscr{M}\;.$$

Au cours de cette démonstration, on dira qu'un faisceau constructible de Λ-modules $\mathscr{M}$ sur X est **faiblement réflexif** si le morphisme canonique $\mathscr{M} \to \tau_{\leq 0}\,D_X\,D_X\,\mathscr{M}$ de la proposition est un isomorphisme.

D'après le théorème 5.1.1, on sait que Λ est faiblement réflexif. Si $g\colon Z \to X$ est une immersion fermée et $\mathscr{N}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur Z, il est clair que $\mathscr{N}$ est faiblement réflexif sur Z si et seulement si $g_\star\mathscr{N}$ est faiblement réflexif sur X. Plus généralement, si $f\colon Y \to X$ est un morphisme fini et $\mathscr{N}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur Y, alors $\mathscr{N}$ est faiblement réflexif si et seulement si $f_\star\mathscr{N}$ l'est (voir [**SGA 5** I 1.13] et le §E.4.4). Notons aussi qu'une utilisation appropriée du lemme des cinq montre que si on a une suite exacte courte $0 \to \mathscr{M}' \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}'' \to 0$ de faisceaux constructibles de Λ-modules, et que $\mathscr{M}''$ est faiblement réflexif, alors $\mathscr{M}$ est faiblement réflexif si et seulement si $\mathscr{M}'$ est faiblement réflexif.

Grâce à la stabilité par extension énoncée plus haut et à la proposition 6.2.1.1, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. Des remarques précédentes, il résulte que si $f\colon Y \to X$ est fini et que U est un ouvert de Y, alors $f_\star\Lambda_U$ est faiblement réflexif. La classe des faisceaux constructibles de Λ-modules faiblement réflexifs sur X étant stable par facteurs directs et extensions, on peut conclure en utilisant le dévissage des faisceaux constructibles de [**SGA 4** IX 5.8].

6.4. L'argument de [SGA 4½ [Th. finitude] 4.3]. —

Définition 6.4.1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent muni d'une fonction de dimension δ. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur X. On dit que $\mathscr{M}$ est **réflexif** si le morphisme de bidualité $\mathscr{M} \to D_X\,D_X\,\mathscr{M}$ est un isomorphisme. On dira que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour X si tout faisceau constructible de Λ-modules sur X est réflexif.

Proposition 6.4.2. — *Soit $d \geq 0$. Si le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas excellents noethériens de dimension $\leq d$, alors il l'est aussi pour les schémas de type fini sur de tels schémas.*

Remarque 6.4.3. — Dans [**SGA 4½** [Th. finitude] 4.3], un tel isomorphisme de bidualité est construit pour les schémas de type fini sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier de dimension au plus un (mais non nécessairement excellent). Aux hypothèses d'excellence et de régularité du schéma de base près, il s'agit essentiellement du cas $d = 1$ de la proposition. La démonstration qui suit reprend et généralise celle de [**SGA 4½** [Th. finitude] 4.3].

Par récurrence sur d, on peut supposer que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour les schémas de type fini (et leurs hensélisés stricts) sur des $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents de dimension $< d$. Pour montrer que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout schéma Y de type fini sur X, il suffit évidemment de le faire pour $Y = (\mathbf{P}^1)^k \times X$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent X de dimension au plus d (muni d'une fonction de dimension δ), le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour $(\mathbf{P}^1)^k \times X$. L'hypothèse de la proposition règle le cas $k = 0$. Supposons la propriété établie jusqu'au cran $k-1$, avec $k \geq 1$. Soit X un schéma noethérien excellent de dimension d muni d'une fonction de dimension δ. Montrons que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour $(\mathbf{P}^1)^k \times X$. Grâce à la proposition 6.2.3.2, on peut supposer que X est local strictement hensélien, de point fermé x. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau constructible sur $(\mathbf{P}^1)^k \times X$. Notons C un cône du morphisme de bidualité $\mathscr{M} \to \mathrm{D}\,\mathrm{D}\,\mathscr{M}$. On sait déjà que $C \in \mathrm{D}^b_c((\mathbf{P}^1)^k \times X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (cf. proposition 6.2.3.1). Nous allons dans un premier temps montrer que les faisceaux de cohomologie de C sont en gratte-ciel, c'est-à-dire supportés par des points fermés. L'hypothèse de récurrence sur d montre que le support de C est contenu dans le fermé $(\mathbf{P}^1)^k \times x$. Posons $Y = (\mathbf{P}^1 \times X)_{(y)}$ où y est le point générique de $\mathbf{P}^1 \times x \subset \mathbf{P}^1 \times X$. On considère les n projections canoniques $(\mathbf{P}^1)^k \times X \to \mathbf{P}^1 \times X$ et leur changement de base $(\mathbf{P}^1)^{k-1} \times Y \to Y$ au-dessus de Y. Le schéma Y étant de dimension d et la proposition 6.2.3.2 montrant en particulier que « la dualité commute aux localisations », l'hypothèse de récurrence pour $n-1$ implique que si $z \in (\mathbf{P}^1)^k \times X$ est tel que $C_{\overline{z}} \neq 0$, alors les images de z par les k projections canoniques $(\mathbf{P}^1)^k \times X \to \mathbf{P}^1 \times X$ sont des points fermés (puisqu'elles sont au-dessus de x et différentes du point générique y de $\mathbf{P}^1 \times x$). Par conséquent, un tel point z est un point fermé de $(\mathbf{P}^1)^k \times x$. Bref, les faisceaux de cohomologie de C sont supportés par des points fermés. Il en résulte que si on note $\pi\colon (\mathbf{P}^1)^k \times X \to X$ le morphisme canonique, alors pour montrer que $C \simeq 0$, il suffit de montrer que $\mathrm{R}\pi_\star C \simeq 0$. D'après [**SGA 4½** [Th. finitude] 4.4], $\mathrm{R}\pi_\star C$ s'identifie au cône du morphisme de bidualité $\mathrm{R}\pi_\star\mathscr{M} \to \mathrm{D}_X\,\mathrm{D}_X\,\mathrm{R}\pi_\star\mathscr{M}$, qui est un isomorphisme par hypothèse. Par conséquent, $C \simeq 0$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

6.5. Fin de la démonstration. — Démontrons le théorème 6.1.1. Compte tenu des résultats antérieurs, il ne reste plus qu'à montrer que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent X muni d'une fonction de dimension δ. Comme il suffit d'obtenir la conclusion pour les hensélisés stricts de X, on peut supposer que X est de dimension de Krull finie d. On va raisonner par récurrence sur d.

Définition 6.5.1. — Soit $\mathscr{M}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent X muni d'une fonction de dimension δ. Pour tout $q \geq 1$, on dit que $\mathscr{M}$ vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$ si le faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^q(\mathrm{D}^2_X\,\mathscr{M})$ est nul.

D'après la proposition 6.3.1, $\mathscr{M}$ est réflexif si et seulement s'il vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$ pour tout $q \geq 1$.

La fonction de dimension δ sert à formuler la propriété $(\mathrm{D})_q$. Pourtant, elle n'en dépend pas. En effet, si δ et δ' sont deux fonctions de dimension sur X (connexe), il existe un entier relatif k tel que $\delta' = \delta + k$. Le complexe dualisant potentiel $K_{X,\delta'}$ s'identifie canoniquement à $K_{X,\delta}(k)[2k]$: les foncteurs de bidualité $\mathrm{D}^2_{X,\delta}$ et $\mathrm{D}^2_{X,\delta'}$ sont canoniquement isomorphes. Il n'y a donc pas lieu de mentionner la fonction de dimension dans la notation D^2_X, et les propriétés $(\mathrm{D})_q$ définies relativement à δ et δ' sont équivalentes.

En outre, les propriétés $(\mathrm{D})_q$ sont clairement locales pour la topologie étale. Comme les schémas noethériens excellents admettent localement pour la topologie étale des fonctions de dimension, on peut leur donner un sens même en l'absence d'une fonction de dimension globale. Par recollement, on peut même donner un sens aux faisceaux de cohomologie $\mathscr{H}^q(\mathrm{D}^2_X\,\mathscr{M})$.

Soit $d \geq 0$. On suppose que l'isomorphisme de bidualité est un isomorphisme pour tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma noethérien excellent de dimension au plus $d-1$ muni d'une fonction de dimension.

Nous allons montrer par récurrence sur $q \geq 1$ que tout faisceau constructible de Λ-modules $\mathscr{M}$ sur un schéma noethérien excellent X de dimension $\leq d$ vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$.

Soit $q \geq 1$. On suppose que pour tout $1 \leq q' < q$, tout faisceau de Λ-modules sur un schéma noethérien excellent X de dimension $\leq d$ vérifie la propriété $(\mathrm{D})_{q'}$.

Lemme 6.5.2. — *Les entiers d et q ayant été fixés comme ci-dessus, la propriété $(\mathrm{D})_q$ pour les faisceaux constructibles de Λ-modules sur les schémas noethériens excellents de dimension au plus d est stable par extensions et sous-objets.*

En effet, si on a une suite exacte courte $0 \to \mathscr{M}' \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}'' \to 0$ de faisceaux constructibles de Λ-modules sur un tel schéma X, l'hypothèse de récurrence si $q \geq 2$ ou la proposition 6.3.1 si $q = 1$ implique que l'on a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathscr{H}^q(\mathrm{D}_X^2 \mathscr{M}') \to \mathscr{H}^q(\mathrm{D}_X^2 \mathscr{M}) \to \mathscr{H}^q(\mathrm{D}_X^2 \mathscr{M}'')$$

La propriété $(\mathrm{D})_q$ est donc stable par extensions et sous-objets.

Lemme 6.5.3. — *Soit $p\colon Y \to X$ un morphisme fini entre schémas noethériens excellents. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur Y. Alors, $\mathscr{M}$ vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$ si et seulement si $p_\star\mathscr{M}$ la vérifie.*

Ceci résulte aussitôt de l'isomorphisme canonique $p_\star\mathscr{H}^q(\mathrm{D}_Y^2 \mathscr{M}) \simeq \mathscr{H}^q(\mathrm{D}_X^2\, p_\star\mathscr{M})$ (voir [**SGA 5** I 1.12 (a)]) et de la conservativité du foncteur $p_\star$.

Lemme 6.5.4. — *Soit X un schéma noethérien excellent. Soit $\mathscr{C}$ une sous-catégorie strictement pleine de la catégorie $\mathrm{Cons}(X, \Lambda)$ des faisceaux constructibles de Λ-modules sur X, stable par facteurs directs et extensions. On suppose que pour tout morphisme fini $p\colon Y \to X$, toute immersion ouverte $j\colon U \to Y$ avec Y normal intègre et tout nombre premier ℓ divisant n, on a $p_\star j_! \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \in \mathscr{C}$. Alors, $\mathscr{C} = \mathrm{Cons}(X, \Lambda)$.*

Il s'agit d'une variante facile de [**SGA 4** IX 5.8].

Lemme 6.5.5. — *Les entiers d et q ayant été fixés comme ci-dessus, si la propriété $(\mathrm{D})_q$ est satisfaite par le faisceau constant Λ sur les schémas noethériens excellents normaux (strictement henséliens) de dimension au plus d, alors la propriété $(\mathrm{D})_q$ est satisfaite par tout faisceau constructible de Λ-modules sur un schéma noethérien excellent de dimension au plus d.*

D'après le lemme 6.5.4, il suffit d'établir la propriété $(\mathrm{D})_q$ pour un faisceau de la forme $p_\star j_! \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec ℓ un diviseur premier de n, p un morphisme fini et j une immersion ouverte entre schémas normaux intègres. D'après le lemme 6.5.3, il suffit d'établir la propriété $(\mathrm{D})_q$ pour $j_!\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec $j\colon U \to Y$ une immersion ouverte, avec Y normal intègre. D'après la stabilité par sous-objet et extensions de la propriété $(\mathrm{D})_q$ (cf. lemme 6.5.2), il suffit de traiter le cas du faisceau $j_!\Lambda$, qui est lui-même un sous-faisceau du faisceau constant Λ sur le schéma normal Y, ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ainsi ramené à montrer la propriété $(\mathrm{D})_q$ pour le faisceau constant Λ sur les schémas noethériens excellents normaux X de dimension d. On peut supposer X local strictement hensélien de point fermé x et de point générique η. Si $d \leq 1$, X est régulier, et alors, si on choisit la fonction de dimension δ sur X telle que $\delta(\eta) = 0$, le complexe dualisant potentiel associé K_X sur X est le faisceau constant Λ, et alors il est évident que Λ vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$ puisque l'on a tautologiquement $\mathrm{D}_X \mathrm{D}_X \Lambda \simeq \Lambda$. On peut donc supposer que $d \geq 2$. En appliquant le lemme suivant à la complétion $\widehat{X} \to X$, on voit qu'on peut supposer que X est complet :

Lemme 6.5.6. — *Soit $q \geq 1$. Soit $p\colon X' \to X$ un morphisme régulier entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens excellents. Soit $\mathscr{M}$ un faisceau constructible de Λ-modules sur X. On suppose que p est surjectif. Alors, le faisceau $\mathscr{M}$ vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$ si et seulement si $p^\star\mathscr{M}$ la vérifie.*

Ceci résulte aussitôt de la proposition 6.2.3.2.

Il nous reste à montrer que si X est un schéma local strictement hensélien noethérien normal complet de dimension $d \geq 2$, alors le faisceau constant Λ sur X vérifie la propriété $(\mathrm{D})_q$. D'après le théorème d'algébrisation partielle (cf. exp. **V**, 3.1.3 et exp. **V**, 2.1.2), il existe un morphisme $p\colon X' \to X$ fini surjectif tel que

- le schéma X' soit normal ;
- il existe un schéma local noethérien complet Y de dimension $< d$, un morphisme de type fini $Z \to Y$, un point géométrique $\bar{z} \to Z$ et un isomorphisme $X' \simeq \widehat{Z_{(\bar{z})}}$.

Le schéma Y est noethérien excellent et de dimension $< d$. L'hypothèse de récurrence sur d et la proposition 6.4.2 impliquent que le morphisme de bidualité est un isomorphisme pour $Z_{(\overline{z})}$. En particulier, le faisceau constant Λ sur $Z_{(\overline{z})}$ est réflexif. Appliquée au morphisme de complétion $X' \to Z_{(\overline{z})}$, la proposition 6.2.3.2 montre que le faisceau constant Λ sur X' est réflexif. En particulier, le faisceau constant Λ sur X' satisfait la propriété $(D)_q$. D'après le lemme 6.5.3, on peut en déduire que le faisceau $p_\star\Lambda$ sur X vérifie la propriété $(D)_q$. Le morphisme fini p étant surjectif, le morphisme canonique $\Lambda \to p_\star\Lambda$ est un monomorphisme de faisceaux. La propriété $(D)_q$ étant stable par sous-objets (cf. lemme 6.5.2), le faisceau constant Λ sur X vérifie bien la propriété $(D)_q$, ce qui achève la démonstration du théorème de dualité locale.

7. Anneaux de coefficients généraux

7.1. Énoncés. —

Définition 7.1.1. — Soit X un schéma noethérien. Soit A un anneau commutatif noethérien. On appelle **complexe dualisant** sur $\mathsf{D}^b_c(X_{ét}, A)$ (resp. $\mathsf{D}^b_{ctf}(X_{ét}, A)$) un objet $K \in \mathsf{D}^b_c(X_{ét}, A)$ (resp. $\mathsf{D}^b_{ctf}(X_{ét}, A)$) tel que le foncteur $D_K = R\,\mathbf{Hom}(-, K)$ préserve $\mathsf{D}^b_c(X_{ét}, A)$ (resp. $\mathsf{D}^b_{ctf}(X_{ét}, A)$) et que pour tout $M \in \mathsf{D}^b_c(X_{ét}, A)$ (resp. $M \in \mathsf{D}^b_{ctf}(X_{ét}, A)$), le morphisme de bidualité $M \to D^2_K\, M$ soit un isomorphisme.

Cette section vise à établir les deux théorèmes suivants :

Théorème 7.1.2. — *Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_c(X_{ét}, A)$ sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit $R \in \mathsf{D}(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort au sens de* [**Conrad, 2000**, page 120][(vi)]. *Soit K un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{ét}, \Lambda)$. Alors, $R \overset{L}{\otimes}_\Lambda K$ est un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{ét}, A)$.*

Théorème 7.1.3. — *Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_{ctf}(X_{ét}, A)$ sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit K un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{ét}, \Lambda)$. Alors, $A \overset{L}{\otimes}_\Lambda K$ est un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_{ctf}(X_{ét}, A)$.*

7.2. Systèmes locaux. —

Définition 7.2.1. — Soit X un schéma noethérien. On appelle **système local** (d'ensembles) sur X un faisceau d'ensembles sur $X_{ét}$ isomorphe à une limite inductive filtrante de faisceaux représentés par des revêtements étales finis de X. Un **système local fini** est un système local représenté par un revêtement étale fini.

Proposition 7.2.2. — *Soit X un schéma noethérien. La catégorie des systèmes locaux sur X est équivalente à la catégorie* $\mathrm{Ind}(\mathrm{Rev}(X))$ *des ind-objets dans la catégorie* $\mathrm{Rev}(X)$ *des revêtements étales finis de* X.

Le foncteur qui à un revêtement étale fini $Y \to X$ associe le faisceau d'ensembles sur $X_{ét}$ représenté par Y est pleinement fidèle. En utilisant [**SGA 4** I 8.7.5 a)], on en déduit, par passage à la limite inductive, un foncteur pleinement fidèle de la catégorie $\mathrm{Ind}(\mathrm{Rev}(X))$ vers celle des faisceaux d'ensembles sur $X_{ét}$. Par définition, l'image essentielle de ce foncteur est la catégorie des systèmes locaux.

Proposition 7.2.3. — *Soit X un schéma noethérien connexe. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X. Le foncteur qui à un système local $\mathscr{F}$ associe la fibre $\mathscr{F}_{\overline{x}}$ est naturellement muni d'une action de $\pi_1(X, \overline{x})$ et définit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux sur X et la catégorie $\pi_1(X, \overline{x}) - \mathsf{Ens}$ des ensembles sur lesquels le groupe profini $\pi_1(X, \overline{x})$ agit continûment. Autrement dit, la catégorie des systèmes locaux d'ensembles sur X s'identifie à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(X, \overline{x})$.*

Notons Ensf la catégorie des ensembles finis. D'après [**SGA 1** V 7], le foncteur $\mathrm{Rev}(X) \to \mathsf{Ensf}$ qui à Y associe l'ensemble sous-jacent au schéma $Y_{\overline{x}}$ s'enrichit d'une action du groupe $\pi_1(X, \overline{x})$ pour définir une équivalence de catégories $\mathrm{Rev}(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \overline{x}) - \mathsf{Ensf}$ où $\pi_1(X, \overline{x}) - \mathsf{Ensf}$ est la catégorie des ensembles finis (discrets) munis d'une action continue du groupe profini $\pi_1(X, \overline{x})$. En passant cette équivalence aux ind-objets, on obtient une équivalence $\mathrm{Ind}(\mathrm{Rev}(X)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \overline{x}) - \mathsf{Ens}$, ce qui permet de conclure d'après la proposition 7.2.2.

(vi) On rappelle que cela signifie ici que R appartient à $\mathsf{D}^b_c(A)$ et que pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$, $R_{(x)} \in \mathsf{D}(A_{(x)})$ est un complexe dualisant pour $A_{(x)}$ au sens de [**Hartshorne, 1966**, page 258], ce qui signifie que $R_{(x)}$ est de dimension injective finie et que le foncteur $\mathrm{RHom}(-, R_{(x)})$ induit une involution de $\mathsf{D}^b_c(A_{(x)})$. D'après, [**Conrad, 2000**, lemma 3.1.5], il revient au même de demander que le foncteur $\mathrm{RHom}_A(-, R)$ induise une involution de $\mathsf{D}^b_c(A)$.

À partir de la définition des systèmes locaux d'ensembles, on peut définir les systèmes locaux de groupes abéliens, de groupes abéliens de torsion, de modules, etc.

Proposition 7.2.4. —

(a) *Pour tout schéma noethérien* X*, la catégorie des systèmes locaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur* X *admet des limites inductives et des limites projectives finies et le foncteur d'inclusion de la catégorie des systèmes locaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur* X *dans la catégorie des faisceaux d'ensembles (resp. de groupes abéliens) sur* $X_{\text{ét}}$ *y commute.*

(b) *Soit* $p\colon Y \to X$ *un morphisme entre schémas noethériens. Si* $\mathscr{F}$ *est un système local sur* X*, alors* $p^\star\mathscr{F}$ *est un système local sur* Y *; la réciproque est vraie si* p *est un revêtement étale fini surjectif.*

(c) *Si* $\mathscr{G}$ *est un système local sur* Y *et* p *un revêtement étale fini, alors* $p_\star\mathscr{G}$ *est un système local sur* X*.*

En appliquant la proposition 7.2.3 aux composantes connexes de X et à tous leurs points géométriques, on obtient directement (a). La première partie de (b) est triviale. Pour montrer la deuxième partie de (b), commençons par établir (c). Il suffit pour cela de montrer que si $\mathscr{G}$ est représenté par un revêtement étale de Y, alors $p_\star\mathscr{G}$ est représenté par un revêtement étale de X (que l'on peut supposer connexe) : par descente fidèlement plate, on se ramène au cas trivial où Y est une réunion disjointe de copies de X. Montrons la dernière partie de (b). Supposons que p est un revêtement étale fini surjectif et que $\mathscr{F}$ un faisceau d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ tel que $p^\star\mathscr{F}$ soit un système local. On a un isomorphisme évident entre $\mathscr{F}$ et l'égalisateur des deux morphismes évidents $p_\star p^\star\mathscr{F} \to p_\star p^\star p_\star p^\star\mathscr{F}$ déduits du couple de foncteurs adjoints $(p^\star, p_\star)$. D'après les autres propriétés de stabilité des systèmes locaux, $p_\star p^\star\mathscr{F}$ et $p_\star p^\star p_\star p^\star\mathscr{F}$ sont des systèmes locaux et l'égalisateur de deux morphismes entre systèmes locaux est encore un système local d'après (a). On obtient ainsi que $\mathscr{F}$ est un système local, ce qui achève la démonstration de (b).

Proposition 7.2.5. — *Soit* X *un schéma noethérien. La catégorie abélienne des systèmes locaux de groupes abéliens de torsion sur* X *est stable par extension dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur* $X_{\text{ét}}$*. Plus précisément, si* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *est une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur* X *telle que* $\mathscr{F}'$ *et* $\mathscr{F}''$ *soient des systèmes locaux et que* $\mathscr{F}'$ *soit de torsion, alors* $\mathscr{F}$ *est un système local de groupes abéliens.*

Cette proposition résulte aussitôt du lemme suivant :

Lemme 7.2.6. — *Soit* X *un schéma noethérien. Soit* $\mathscr{G}$ *un faisceau de groupes abéliens de torsion agissant librement sur un faisceau d'ensembles* $\mathscr{T}$*. On note* $p\colon \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathscr{G}$ *le morphisme quotient. Si* $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{T}/\mathscr{G}$ *sont des systèmes locaux, alors* $\mathscr{T}$ *aussi.*

On peut supposer que X est connexe. Notons $\mathscr{Y} = \mathscr{T}/\mathscr{G}$. On peut écrire $\mathscr{Y}$ comme réunion de sous-systèmes locaux finis $\mathscr{Y}'$. Pour chacun de ces $\mathscr{Y}'$, on peut considérer $p^{-1}(\mathscr{Y}')$: il s'agit d'un faisceau d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ sur lequel $\mathscr{G}$ agit librement avec $\mathscr{Y}'$ pour quotient. Le faisceau $\mathscr{T}$ étant réunion des sous-faisceaux $p^{-1}(\mathscr{Y}')$ associés, pour montrer que $\mathscr{T}$ est un système local, il suffit de montrer que pour tout sous-système local fini $\mathscr{Y}'$ de $\mathscr{Y}$, $p^{-1}(\mathscr{Y}')$ est un système local. Bref, on peut supposer que $\mathscr{Y}$ est un système local fini.

On suppose ainsi que $\mathscr{Y}$ est représenté par un revêtement étale fini $q\colon Y \to X$. Nous voudrions montrer que $\mathscr{T}$ est un système local. Pour cela, admettons provisoirement que ce fait est connu dans le cas particulier où $Y = X$ (ce qui revient à demander que $\mathscr{T}$ soit $\mathscr{G}$-torseur au-dessus de $X_{\text{ét}}$) ; nous étudierons ce cas plus bas. Introduisons $r\colon Z \to X$ un revêtement étale galoisien trivialisant q, c'est-à-dire que $Y \times_X Z = \coprod_{i\in I} Z_i$ où $Z_i \to Z$ est un isomorphisme pour tout $i \in I$. Par image inverse, $r^\star\mathscr{G}$ est un système local sur Z agissant librement sur $r^\star\mathscr{T}$ et le quotient $r^\star(\mathscr{T}/\mathscr{G})$ s'identifie à $\coprod_{i\in I} \bullet$ où $\bullet$ est l'objet final de la catégorie des faisceaux sur $Z_{\text{ét}}$. Pour tout $i \in I$, notons $\mathscr{T}_i \subset r^\star\mathscr{T}$ l'image inverse par $r^\star\mathscr{T} \to \coprod_{i\in I} \bullet$ de la copie de $\bullet$ correspondant à i. Le faisceau $\mathscr{T}_i$ sur $Z_{\text{ét}}$ est donc un $r^\star\mathscr{G}$-torseur au-dessus de $Z_{\text{ét}}$. D'après ce que nous avons admis provisoirement, les faisceaux $\mathscr{T}_i$ sont des systèmes locaux sur $Z_{\text{ét}}$, donc $r^\star\mathscr{T} = \coprod_{i\in I} \mathscr{T}_i$ est aussi un système local sur $Z_{\text{ét}}$. D'après la proposition 7.2.4 (b), $\mathscr{T}$ est un système local sur X.

On s'est ramené à la situation où $\mathscr{T}/\mathscr{G}$ est l'objet final de la catégorie des faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, c'est-à-dire que $\mathscr{T}$ est un torseur sous $\mathscr{G}$. Si $\mathscr{G}$ est un système local fini, alors $\mathscr{T}$ est représentable par un revêtement étale fini et est donc un système local ; nous allons nous ramener à ce cas-là.

La classe d'isomorphisme du $\mathscr{G}$-torseur $\mathscr{T}$ est définie par un élément dans l'ensemble $H^1_{\text{ét}}(X, \mathscr{G})$. Comme $H^1_{\text{ét}}(X, -)$ commute aux limites inductives filtrantes, il existe un sous-système local de groupes abéliens finis $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ (supposé de torsion), un $\mathscr{G}'$-torseur $\mathscr{T}'$ et un $\mathscr{G}$-isomorphisme $\mathscr{T} \simeq \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{G}'} \mathscr{T}'$ où l'on a noté $\otimes$ le foncteur d'extension du groupe structural (cf. [**Giraud, 1971**, proposition 1.3.6, Chapitre III]). L'extension du groupe structural commutant aux limites inductives filtrantes, $\mathscr{T}$ s'identifie à la limite inductive des $\mathscr{G}'' \otimes_{\mathscr{G}'} \mathscr{T}'$ pour $\mathscr{G}''$ parcourant l'ensemble ordonné des sous-systèmes locaux de groupes abéliens finis de $\mathscr{G}$ contenant

$\mathscr{G}'$. D'après ce qui précède, $\mathscr{G}''\otimes_{\mathscr{G}'}\mathscr{T}'$ est un système local d'ensembles sur X. Par passage à la limite inductive, $\mathscr{T}$ est bien un système local.

Le résultat de l'exercice suivant montre que l'hypothèse « de torsion » est bien nécessaire dans la proposition 7.2.5, et que par ailleurs, un faisceau qui est un système local localement pour la topologie étale n'est pas forcément un système local.

Exercice 7.2.7. — Soit A le sous-anneau de $\mathbf{C}[t]$ formé des polynômes f tels que $f(0) = f(1)$: le schéma $C = \mathrm{Spec}(A)$ correspondant est obtenu en identifiant 0 et 1 dans la droite affine complexe $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$.

- Montrer que C est isomorphe à la cubique plane d'équation $x^3 - y^2 + xy = 0$ dans le plan affine complexe $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x, y])$ (envoyer x et y respectivement sur $t(t-1)$ et $t^2(t-1)$).
- Montrer que C admet un unique point singulier O.
- Montrer que le morphisme évident $p\colon \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}} \to C$ est le normalisé de C et que le sous-schéma fermé (réduit) $p^{-1}(O)$ de $\mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ est $\{0, 1\}$.
- Construire un isomorphisme $H^1_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$.
- Montrer qu'il existe un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur $C_{\text{ét}}$ tel que :
  (i) $\mathscr{F}$ soit extension de deux systèmes locaux, et s'insère plus précisément dans une suite exacte courte $0 \to \mathbf{Z} \to \mathscr{F} \to \mathbf{Z} \to 0$;
  (i′) Localement pour la topologie étale, $\mathscr{F}$ soit un système local ;
  (ii) $\mathscr{F}$ ne soit pas un système local.

7.3. Partitions galoisiennes. —

Définition 7.3.1. — Une **partition galoisienne** d'un schéma noethérien X consiste en la donnée d'une partition finie de X par des sous-schémas (localement fermés) réduits connexes (non vides) $(S_i)_{i\in I}$ et d'un revêtement étale galoisien $S'_i \to S_i$ pour tout $i \in I$.

Définition 7.3.2. — Soit $p\colon Y \to X$ un revêtement fini étale galoisien entre schémas noethériens. Soit A une Λ-algèbre. On dit qu'un système local de A-modules $\mathscr{F}$ sur X est **rendu ind-unipotent par** Y, si pour un point géométrique $\overline{y}$ de Y (et donc pour tous) au-dessus d'un point géométrique $\overline{x}$ de X, le $\pi_1(X, \overline{x})$-module discret $\mathscr{F}_{\overline{x}}$ est ind-unipotent pour le sous-groupe distingué $\pi_1(Y, \overline{y})$ (cf. sous-section D.3), autrement dit que $\mathscr{F}$ est limite inductive filtrante de faisceaux localement constants extensions successives de faisceaux dont l'image inverse par p soit un faisceau constant.

Définition 7.3.3. — Soit X un schéma noethérien muni d'une partition galoisienne $\mathscr{P} = (S'_i \to S_i)_{i\in I}$. Soit A une Λ-algèbre. On dit d'un faisceau de A-modules sur X qu'il est **faiblement constructible par rapport à** $\mathscr{P}$ si pour tout $i \in I$, sa restriction à S_i est un système local rendu ind-unipotent par S'_i. On note $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des faisceaux de A-modules sur X formée des faisceaux faiblement constructibles pour $\mathscr{P}$. Si $\mathscr{P}'$ est une deuxième partition galoisienne, on dit que $\mathscr{P}'$ **raffine** $\mathscr{P}$ si on a l'inclusion $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, \Lambda) \subset \mathrm{FCons}^{\mathscr{P}'}(X, \Lambda)$ (et donc aussi $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A) \subset \mathrm{FCons}^{\mathscr{P}'}(X, A)$ pour toute Λ-algèbre A).

Proposition 7.3.4. — *Soit X un schéma noethérien muni d'une partition galoisienne. Soit A une Λ-algèbre. La catégorie $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est abélienne et admet des limites inductives ; son foncteur d'inclusion dans la catégorie des faisceaux de A-modules sur X est exact et commute aux limites inductives. $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est stable par extensions dans la catégorie des faisceaux de A-modules sur X.*

Ceci résulte aussitôt des propriétés des modules ind-unipotents pour un sous-groupe (cf. proposition D.3.4) et des propriétés générales des systèmes locaux (cf. sous-section 7.2).

Définition 7.3.5. — On dit d'une partition galoisienne $\mathscr{P} = (S'_i \to S_i)_{i\in I}$ sur un schéma noethérien X qu'elle est **dirigée** si on a muni I d'un ordre total tel que, soit I est vide, soit, si on note i_0 le plus petit élément de I, S_{i_0} est ouvert et, récursivement, $(S'_i \to S_i)_{i\in I-\{i_0\}}$ est une partition galoisienne dirigée du fermé réduit $X - S_{i_0}$. On dit qu'une partition galoisienne est **dirigeable** s'il existe un ordre total sur l'ensemble d'indices qui en fasse une partition galoisienne dirigée.

Proposition 7.3.6. — *Toute partition galoisienne d'un schéma noethérien est raffinée par une partition galoisienne dirigeable.*

Lemme 7.3.7. — *Soit $X' \to X$ un revêtement étale galoisien. Soit $(S_i \to X)_{i\in I}$ une partition de X par un nombre fini de sous-schémas réduits connexes. On note S'_i une composante connexe du produit fibré $S_i \times_X X'$. Alors, $(S'_i \to S_i)_{i\in I}$ est une partition galoisienne de X qui raffine la partition galoisienne $(X' \to X)$.*

Cela résulte aussitôt de la théorie de Galois.

Montrons la proposition 7.3.6 par récurrence noethérienne sur X. Soit $\mathscr{P} = (S'_i \to S_i)_{i\in I}$ une partition galoisienne d'un schéma noethérien non vide X. Tout d'abord, montrons que, quitte à raffiner $\mathscr{P}$, on peut supposer qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que S_{i_0} soit un ouvert. En effet, si on choisit un $i_0 \in I$ tel que S_{i_0} contienne un point maximal de X, S_{i_0} contient un ouvert non vide U de S_{i_0}. Notons $V_1, \dots, V_n$ les composantes connexes du fermé réduit $S_{i_0} - U$ de S_{i_0}. D'après le lemme, il existe une partition galoisienne $\mathscr{Q} = (U' \to U, V'_1 \to V_1, \dots, V'_n \to V_n)$ de S_{i_0} qui raffine la partition galoisienne $(S'_{i_0} \to S_{i_0})$ de S_{i_0}. Quitte à remplacer la partition galoisienne initiale de X par son raffinement $\mathscr{Q} \cup \mathscr{P}'$ avec $\mathscr{P}' = (S'_i \to S_i)_{i\in I-\{i_0\}}$, on peut effectivement supposer que S_{i_0} est ouvert.

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence noethérienne à la partition galoisienne $\mathscr{P}'$ de $X - S_{i_0}$ pour en obtenir un raffinement $\mathscr{P}''$ indexé par un certain ensemble totalement ordonné J qui fasse de $\mathscr{P}''$ une partition galoisienne dirigée de $X - S_{i_0}$. La partition galoisienne $(S'_{i_0} \to S_{i_0}) \cup \mathscr{P}''$ raffine $\mathscr{P}$, et si on étend l'ordre sur J en un ordre sur la réunion disjointe $\{i_0\} \amalg J$ de façon à faire de i_0 le plus petit élément, on a obtenu une partition dirigée.

Exercice 7.3.8. — Montrer que si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux partitions galoisiennes d'un schéma noethérien X, il existe une partition galoisienne (dirigeable) raffinant à la fois $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

7.4. Dévissages. — Le but de cette sous-section est d'établir le résultat suivant :

Proposition 7.4.1. — *Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathscr{T}$ une sous-catégorie triangulée strictement pleine de $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ stable par facteurs directs. On suppose que pour tout nombre premier ℓ divisant n et tout $A/\ell A$-module de type fini N, le foncteur $N \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} - \colon \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ prend ses valeurs dans $\mathscr{T}$. Alors, $\mathscr{T} = \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$.*

La démonstration de cette proposition est repoussée à la fin de cette sous-section.

Proposition 7.4.2. — *Soit A une Λ-algèbre. Soit $\mathscr{P} = (S'_i \to S_i)_{i\in I}$ avec $I = \{1, \dots, N\}$ une partition galoisienne dirigée d'un schéma noethérien X. Notons $k_i \colon S_i \to X$ l'immersion canonique pour tout $i \in I$. Pour tout $i \in I$, le foncteur $k_{i!} \colon \mathrm{FCons}^{(S'_i\to S_i)}(S_i, A) \to \mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est pleinement fidèle. Tout objet $\mathscr{F}$ de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ admet une filtration croissante (fonctorielle) $(\mathrm{Fil}_n \mathscr{F})_{n\in\mathbf{Z}}$ telle que le $\mathrm{Fil}_0 \mathscr{F} = 0$, $\mathrm{Fil}_N \mathscr{F} = \mathscr{F}$ et que pour tout $1 \leq i \leq N$, le quotient $\mathrm{Fil}_i \mathscr{F} / \mathrm{Fil}_{i-1} \mathscr{F}$ soit dans $k_{i!}\, \mathrm{FCons}^{S'_i\to S_i}(S_i, A)$.*

C'est trivial.

Proposition 7.4.3. — *Soit A une Λ-algèbre. Soit $\mathscr{P} = (S'_i \to S_i)_{i\in I}$ une partition galoisienne dirigeable d'un schéma noethérien X. Notons $k_i \colon S_i \to X$ l'immersion canonique pour tout $i \in I$. Si A est noethérien, alors $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est une catégorie abélienne localement noethérienne (cf.* [**Gabriel, 1962**, pages 325–326]*). Si A est artinien, $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est localement finie et admet un nombre fini d'objets simples ; plus précisément, si on note $k_i \colon S_i \to X$ les inclusions canoniques, W_i un ensemble (fini) représentatif des objets simples de la catégorie des* $A[\mathrm{Gal}(S'_i/S_i)]$-modules (via *le choix d'un point géométrique de S'_i, on identifie ces objets à des systèmes locaux sur S_i trivialisés par S'_i), alors les objets $k_{i!}\mathscr{F}$ pour $i \in I$ et $\mathscr{F} \in W_i$ forment un ensemble représentatif des objets simples de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$.*

Supposons A noethérien. Montrons que $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est localement noethérienne. On sait déjà que cette catégorie abélienne admet des limites inductives filtrantes et que celles-ci sont exactes. Il s'agit de montrer que tout objet de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ est limite inductive d'objets noethériens (ou plus précisément, mais cela revient au même, « réunion » de ses sous-objets noethériens). Si l'ensemble d'indice I de $\mathscr{P}$ est vide, c'est trivial. Sinon, on peut choisir un ordre total sur I qui fasse de $\mathscr{P}$ une partition galoisienne dirigée, et noter i_0 le plus petit élément de I. Notons $j \colon S_{i_0} \to X$ l'immersion (ouverte) correspondante et $k \colon X - S_{i_0} \to X$ l'immersion du fermé réduit complémentaire. Pour tout objet $\mathscr{F} \in \mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$, on a une suite exacte courte :

$$0 \to j_!j^\star\mathscr{F} \to \mathscr{F} \xrightarrow{\pi} k_\star k^\star\mathscr{F} \to 0\ .$$

En raisonnant par récurrence sur le cardinal de I, on peut supposer que $k^\star\mathscr{F}$ est « réunion » de ses sous-objets noethériens dans $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}'}(X - S_{i_0}, A)$ avec $\mathscr{P}' = \mathscr{P} - (S'_{i_0} \to S_{i_0})$. Bien entendu, un objet $\mathscr{R} \in \mathrm{FCons}^{\mathscr{P}'}(X - S_{i_0}, A)$ est noethérien si et seulement si $k_\star\mathscr{R}$ l'est dans $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$. On dispose donc d'un système inductif $(\mathscr{H}_b)_{b\in B}$ indexé par un ensemble ordonné filtrant B de sous-objets noethériens de $k_\star k^\star\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}$ soit la réunion des sous-objets $\pi^{-1}(\mathscr{H}_b)$ de $\mathscr{F}$ pour $b \in B$. Si chacun des $\pi^{-1}(\mathscr{H}_b)$ est réunion de ses sous-objets noethériens, alors $\mathscr{F}$ aussi. Ceci permet de supposer que $k^\star\mathscr{F}$ est noethérien. Concernant $j^\star\mathscr{F}$, en utilisant que la catégorie des $A[G]$-modules discrets (avec G groupe profini) est localement noethérienne, on obtient que l'objet $j^\star\mathscr{F}$ de $\mathrm{FCons}^{S'_{i_0}\to S_{i_0}}(S_{i_0}, A)$ est réunion de ses sous-objets noethériens ; on en déduit aussitôt que $j_!j^\star\mathscr{F}$ est aussi réunion de ses sous-objets noethériens dans $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$. Pour conclure que $\mathscr{F}$ est réunion de ses sous-objets noethériens, on utilise le lemme suivant :

Lemme 7.4.4. — *Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit $\mathscr{P}$ une partition galoisienne dirigeable d'un schéma noethérien X. Soit $0 \to \mathscr{H} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ une suite exacte courte dans $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$. On suppose que $\mathscr{G}$ est un objet noethérien de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ et que $\mathscr{H}$ est réunion de ses sous-objets noethériens. Alors, $\mathscr{F}$ est aussi réunion de ses sous-objets noethériens.*

Il est évident que $\mathscr{G}$ est un faisceau de A-modules constructible sur X. D'après [**SGA 4** IX 2.7.3], le foncteur $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, -)$ de la catégorie des faisceaux de A-modules sur X vers celle des A-modules commute aux limites inductives filtrantes. La suite exacte donnée définissant un élément dans $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ et $\mathscr{H}$ s'écrivant comme une limite inductive filtrante de ses sous-objets noethériens, il existe un sous-objet noethérien $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$, une suite exacte courte $0 \to \mathscr{H}' \to \mathscr{F}' \to \mathscr{G} \to 0$ et un diagramme commutatif de la forme suivante, où le carré de gauche est cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{H} \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

À vrai dire, on peut remplacer $\mathscr{H}'$ par tout sous-objet (noethérien) $\mathscr{H}''$ de $\mathscr{H}$ contenant $\mathscr{H}'$, et $\mathscr{F}$ s'identifie à la réunion des sous-objets $\mathscr{F}''$ ainsi définis. Pour conclure, il suffit de montrer qu'un tel $\mathscr{F}''$ est un objet noethérien de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$, ce qui est évident puisqu'il est extension de deux objets noethériens $\mathscr{H}''$ et $\mathscr{G}$.

Terminons la démonstration de la proposition 7.4.3. Supposons A artinien. Il s'agit de trouver un ensemble fini d'objets simples à partir desquels tous les objets noethériens s'obtiennent par extensions successives. Compte tenu du dévissage de la proposition 7.4.2, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est constitué d'un unique revêtement galoisien $X' \to X$. Choisissons un point géométrique $\overline{x}'$ de X' au-dessus d'un point géométrique $\overline{x}$ de X. Notons $G = \pi_1(X, \overline{x})$ et $H = \pi_1(X', \overline{x'})$. Le groupe profini H s'identifie à un sous-groupe ouvert distingué de G. Notons $K = G/H$ le groupe fini quotient. L'anneau $A[K]$ est évidemment artinien à gauche, on peut en noter W un ensemble représentatif fini d'objets simples ; considérés comme des $A[G]$-modules discrets, les éléments de W sont encore simples.

La catégorie $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ s'identifie à la catégorie des G-modules discrets ind-unipotents pour H. Tout objet de cette catégorie s'écrit comme une réunion de sous-objets de type fini unipotents pour H, et de tels sous-objets se dévissent eux-mêmes en extensions successives d'objets sur lesquels H agit trivialement, ces derniers s'identifiant à des $A[K]$-modules de type fini, ils se dévissent en extensions successives d'éléments de W.

Définition 7.4.5. — Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathscr{P}$ une partition galoisienne. On note $\mathrm{Cons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ formée des faisceaux de A-modules constructibles (ce qui revient ici à dire que les fibres sont des A-modules de type fini). Si $\mathscr{P}$ est dirigeable, il s'agit bien entendu de la sous-catégorie abélienne des objets noethériens de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X, A)$.

Proposition 7.4.6. — *Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathscr{P}$ une partition galoisienne dirigeable de X. Soit $\mathscr{F}$ un objet de $\mathrm{Cons}^{\mathscr{P}}(X, A)$. Il existe une filtration finie de $\mathscr{F}$ dans $\mathrm{Cons}^{\mathscr{P}}(X, A)$ dont les quotients successifs soient des facteurs directs d'objets de la forme $M \otimes_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathscr{F}_0$ où ℓ est un nombre premier divisant n, M un $A/\ell A$-module de type fini et $\mathscr{F}_0$ un objet de $\mathrm{Cons}^{\mathscr{P}}(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$.*

D'après la proposition 7.4.2, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est constituée d'un unique revêtement galoisien $X' \to X$. En reprenant les notations utilisées dans la démonstration du cas artinien de la proposition 7.4.3, on peut identifier $\mathscr{F}$ à un $A[G]$-module discret unipotent pour le sous-groupe distingué fermé H. Cette propriété d'unipotence permet de supposer que H agit trivialement, de sorte qu'on se retrouve avec une action du groupe fini $K = G/H = \mathrm{Gal}(X'/X)$ (bref, on peut supposer que $\mathscr{F}$ est un système local de A-modules trivialisé par X'). Le lemme suivant appliqué à l'algèbre de groupe $B = \Lambda[K]$ permet de conclure.

Lemme 7.4.7. — *Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit B une Λ-algèbre finie non nécessairement commutative. Tout $A \otimes_\Lambda B$-module (à gauche) de type fini admet une filtration finie dont les quotients successifs soient des facteurs directs* *de $A \otimes_\Lambda B$-modules de la forme $N \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$ où ℓ est un nombre premier divisant n, N un $A/\ell A$-module de type fini et L un $B/\ell B$-module simple.*

En premier lieu, comme $A \otimes_\Lambda B$ est évidemment noethérien à gauche, on peut procéder à une récurrence noethérienne ; il suffit donc de montrer que tout $A \otimes_\Lambda B$-module non nul admet un sous-module non nul facteur direct d'un module de la forme $N \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$ avec N un $A/\ell A$-module de type fini, L un $B/\ell B$-module simple et ℓ un nombre premier divisant n. Ceci permet de supposer que B est un anneau semi-simple. En effet, pour tout B-module non nul M, l'annulateur du radical de Jacobson $\mathscr{N}$ de B dans M est un sous-B-module non nul de M (cf. [**Lam, 1991**, § 4]) ; si M est un $A \otimes_\Lambda B$-module non nul, l'annulateur de $\mathscr{N}$ dans M s'identifie donc à un $A \otimes_\Lambda (B/\mathscr{N})$-module non nul et l'anneau $B/\mathscr{N}$ est bien semi-simple.

En deuxième lieu, l'énoncé du lemme est vrai pour un produit $B = B_1 \times \cdots \times B_k$ d'anneaux si et seulement s'il est vrai pour chacun des B_i et l'énoncé est aussi invariant par équivalence de Morita (cf. [**Lam, 1999**, § 18]) puisqu'on peut le formuler intrinsèquement en termes de la catégories des B-modules. Compte tenu du théorème d'Artin-Wedderburn de structure des anneaux semi-simples (cf. [**Lam, 1991**, 3.5]), on peut donc supposer que B est un corps fini, *a priori* non commutatif, mais effectivement commutatif en vertu du théorème de Wedderburn (cf. [**Lam, 1991**, 13.1]).

En troisième lieu, l'énoncé est vrai dans le cas particulier auquel on s'est ramené ci-dessus. Soit $B = L$ une extension finie de $\mathbf{F}_\ell$, pour un certain nombre premier ℓ divisant n. On peut supposer que ℓ annule A. Soit M un $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$-module. L'extension $L/\mathbf{F}_\ell$ est galoisienne, notons G son groupe de Galois. L'application $\gamma \colon L \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L \to \prod_{\sigma \in G} L$ définie par $\sigma(a \otimes b) = (\sigma(a)b)_{\sigma \in G}$ est une bijection d'après la théorie de Galois et elle réalise un isomorphisme de (L, L)-bimodules $\gamma \colon L \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in G} {}_\sigma L_{\mathrm{Id}}$ où l'on a indiqué en indice les morphismes $L \to L$ qui définissent les structures de modules à gauche et à droite sur les différents facteurs. Comme $M \otimes_L {}_{\mathrm{Id}}L_{\mathrm{Id}}$ s'identifie tautologiquement à M comme $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$-module, on en déduit que le $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$-module M s'identifie comme on le voulait à un facteur direct du $A \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$-module $M \otimes_L (L \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L) \simeq M \otimes_{\mathbf{F}_\ell} L$ (où L agit par multiplication sur le facteur de droite).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 7.4.1. Soit $\mathscr{T}$ une telle sous-catégorie triangulée de $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau constructible de A-modules sur X. Il s'agit de montrer que $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{T}$. Il existe évidemment une partition galoisienne $\mathscr{P}$ telle que $\mathscr{F}$ appartienne à $\mathrm{Cons}^{\mathscr{P}}(X, A)$. D'après la proposition 7.3.6, on peut supposer que $\mathscr{P}$ est dirigeable. On peut alors appliquer la proposition 7.4.6 pour conclure que $\mathscr{F}$ appartient à $\mathscr{T}$.

7.5. Complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$. —

7.5.1. Unicité. —

Proposition 7.5.1.1. — *Soit X un schéma noethérien. Soit A un anneau noethérien. Si K et K' sont deux complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ (resp. $\mathsf{D}^b_{ctf}(X_{\text{ét}}, A)$), alors il existe un objet inversible $L \in \mathsf{D}^b_{ctf}(X_{\text{ét}}, A)$ (cf. proposition B.2 pour plus de précisions) tel que K' soit isomorphe à $L \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A K$.*

Lemme 7.5.1.2. — *Soit X un schéma noethérien. Soit A un anneau noethérien. On suppose que K est un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$. Pour tout $F \in \mathsf{D}^-_c(X_{\text{ét}}, A)$, si $D_K F \in \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$, alors $F \in \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$.*

Commençons par montrer que l'on peut supposer que $D_K F = 0$. Pour tout $F \in \mathsf{D}(X_{\text{ét}}, A)$, notons $\varepsilon_F \colon F \to D_K D_K F$ le morphisme de bidualité. Le morphisme composé

$$D_K F \xrightarrow{\varepsilon_{D_K F}} D_K D_K D_K F \xrightarrow{D_K(\varepsilon_F)} D_K F$$

est l'identité de $D_K F$. Comme $D_K F$ est dans $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$, le fait que K soit dualisant implique que $\varepsilon_{D_K F}$ est un isomorphisme. Par conséquent, $D_K(\varepsilon_F)$ est un isomorphisme. Quitte à remplacer F par un cône de ε_F, on peut supposer que $D_K F = 0$.

Par l'absurde, supposons que F soit non nul. Il existe alors un morphisme non nul $p \colon F \to F'$ avec $F' \in \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ (par exemple, le morphisme canonique $F \to \tau_{\geq n} F$ pour un entier n bien choisi). Considérons le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varepsilon_F"] & F' \arrow[d, "\varepsilon_{F'}", "\sim"'] \\ D_K^2 F \arrow[r, "D_K^2(p)"] & D_K^2 F' \end{tikzcd}$$

D'un côté, $D_K^2 F$ est nul, donc $\varepsilon_{F'} \circ p = 0$, mais de l'autre, $\varepsilon_{F'}$ est un isomorphisme, d'où $p = 0$, ce qui conduit à une contradiction.

Établissons la proposition 7.5.1.1 dans le cas des complexes dualisants sur $D^b_c(X_{ét}, A)$, la démonstration qui suit vaudra aussi pour $D^b_{ctf}(X_{ét}, A)$ (à ceci près qu'il ne sera plus alors nécessaire de recourir au lemme ci-dessus). On pose $Y = D_K K' \in D^b_c(X_{ét}, A)$. Comme K est dualisant, on a aussi un isomorphisme privilégié $K' = D_K Y$. Pour tout $Z \in D^b_c(X_{ét}, A)$, on a un isomorphisme fonctoriel $D_{K'} Z \simeq D_K(Z \overset{L}{\otimes}_A Y)$ dans $D(X_{ét}, A)$. Grâce au lemme, on en déduit que pour tout $Z \in D^b_c(X_{ét}, A)$, on a $Z \overset{L}{\otimes}_A Y \in D^b_c(X_{ét}, A)$. On a ainsi un triangle commutatif de catégories et de foncteurs (à isomorphisme près de foncteurs) :

$$\begin{tikzcd} D^b_c(X_{ét}, A) \arrow[r, "- \overset{L}{\otimes}_A Y"] \arrow[dr, "D_{K'}"'] & D^b_c(X_{ét}, A) \arrow[d, "D_K"] \\ & (D^b_c(X_{ét}, A))^{opp} \end{tikzcd}$$

Comme D_K et $D_{K'}$ sont des équivalences, le foncteur $- \overset{L}{\otimes}_A Y$ aussi. En particulier, Y est un complexe inversible. Notons Y' l'inverse de Y. On a un isomorphisme de foncteurs $R\,\mathbf{Hom}(Y, -) \simeq Y' \overset{L}{\otimes}_A -$ (si un foncteur est une équivalence, son adjoint à droite est un quasi-inverse). Comme $K' = D_K Y$, on peut en déduire que $K' \simeq Y' \overset{L}{\otimes}_A K$.

7.5.2. Réduction au cas $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. —

Proposition 7.5.2.1. — *Soit A un anneau noethérien. Soit $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. Soit J un idéal de A. On pose $A' = A/J$ et $R' = \mathrm{RHom}_A(A', R) \in D(A')$. Alors, R' est un complexe ponctuellement dualisant fort. Si on note D (resp. D') le foncteur $\mathrm{RHom}_A(-, R)$ (resp. $\mathrm{RHom}_{A'}(-, R')$) sur $D(A)$ (resp. $D(A')$) et* oub: $D(A') \to D(A)$ *le foncteur de « restriction des scalaires », on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{oub} \circ D' \simeq D \circ \mathrm{oub}\ .$$

En passant aux adjoints à gauche de ces foncteurs, cela découle des résultats du §A :

Proposition 7.5.2.2. — *Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D^b_{ctf}(X_{ét}, \Lambda)$. Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit J un idéal de A. Soit $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. On pose $A' = A/J$ et $R' = \mathrm{RHom}_A(A', R) \in D(A')$. On note $K_R = K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R \in D^b_c(X_{ét}, A)$ et $K_{R'} = K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R' \in D^b_c(X_{ét}, A')$. On note* oub: $D^b_c(X_{ét}, A') \to D^b_c(X_{ét}, A)$ *le foncteur conservatif évident. Alors, pour tout $M \in D(X_{ét}, A')$, on a un isomorphisme canonique dans $D(X_{ét}, A)$:*

$$\mathrm{oub}(R\,\mathbf{Hom}_{A'}(M, K_{R'})) \simeq R\,\mathbf{Hom}_A(\mathrm{oub}(M), K_R)\ .$$

De plus, si K_R est un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{ét}, A)$, alors $K_{R'}$ en est un sur $D^b_c(X_{ét}, A')$ et la réciproque est vraie si J est nilpotent.

Les autres assertions en étant des conséquences faciles, il s'agit de montrer que l'on a un isomorphisme canonique $R\,\mathbf{Hom}_A(A', K_R) \simeq \mathrm{oub}(K_{R'})$ dans $D^b_c(X_{ét}, A)$, ce qui résulte de la proposition C.1.2.

Corollaire 7.5.2.3. — *Pour démontrer le théorème 7.1.2, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier.*

Étant entendu que la propriété d'unicité des complexes dualisants a déjà été obtenue (cf. proposition 7.5.1.1), il est évident que pour démontrer le théorème 7.1.2, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier et $\nu \geq 1$. Posons $A' = A/\ell A$. Notons $R \in D(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. D'après la proposition 7.5.2.1, le complexe $R' = R\,\mathbf{Hom}_A(A', R) \in D(A')$ en est un pour A'. Appliquant dans un premier temps la proposition 7.5.2.2 au cas où $\Lambda \to A$ est $\Lambda \to \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, nous obtenons que $K'' = R\,\mathbf{Hom}_\Lambda(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}, K)$ est un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{ét}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. D'après le lemme 6.2.2.4, on a aussi un isomorphisme $K'' \simeq K \overset{L}{\otimes}_\Lambda \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ dans $D^b_c(X_{ét}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Appliquons le théorème 7.1.2 dans le cas de la $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$-algèbre A' : on obtient que $K'' \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} R'$ est un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{ét}, A')$. Cet objet $K'' \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} R'$ s'identifie aussi à $K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R' = K_{R'}$. D'après la proposition 7.5.2.2, il vient que $K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R = K_R$ est un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{ét}, A)$, ce qui achève la démonstration de ce corollaire.

7.5.3. Démonstration du théorème 7.1.2. — L'énoncé d'unicité des complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ a déjà été obtenu, cf. proposition 7.5.1.1. Pour l'énoncé d'existence, d'après le corollaire 7.5.2.3, on peut supposer que $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec ℓ un nombre premier. On se donne K un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Soit A une $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$-algèbre noethérienne et $R \in \mathsf{D}(A)$ un complexe ponctuellement dualisant fort. Notons $D_X = R\,\mathbf{Hom}_\Lambda(-, K)$ le foncteur de dualité sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ induit par K et D_A celui induit par R sur $\mathsf{D}^b_c(A)$. Notons $D_{X,A}$ le foncteur $R\,\mathbf{Hom}_A(-, K_R)$ sur $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ où $K_R = K \overset{L}{\otimes}_\Lambda R$. La proposition C.1.3 ($\Lambda$ est un corps) montre que l'on a un isomorphisme canonique, pour tout $N \in \mathsf{D}^b_c(A)$ et $\mathscr{F} \in \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$:

$$D_{X,A}(N \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathscr{F}) \simeq (D_A N) \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} (D_X \mathscr{F}) .$$

Par hypothèse, $D_A N \in \mathsf{D}^b_c(A)$ et $D_X \mathscr{F} \in \mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, ce qui permet de déduire que $D_{X,A}(N \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathscr{F})$ appartient à $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$, puis que $D_{X,A}$ préserve $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$ grâce au dévissage de la proposition 7.4.1. Avec les mêmes notations, les morphismes de bidualité $N \to D_A^2 N$ et $\mathscr{F} \to D_X^2 \mathscr{F}$ sont des isomorphismes, le morphisme de bidualité $N \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathscr{F} \to D_{X,A}^2(N \overset{L}{\otimes}_{\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}} \mathscr{F})$ en est donc un aussi ; le même dévissage permet de conclure que $D_{X,A}$ définit une involution de $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$, c'est-à-dire que K_R est un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, A)$, ce qui achève la démonstration du théorème 7.1.2.

7.6. Complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$. — L'assertion d'unicité des complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$ a déjà été énoncée dans la proposition 7.5.1.1. L'essentiel de cette sous-section vise à établir le théorème suivant, dont on va déduire dans quelques lignes le théorème 7.1.3 :

Théorème 7.6.1. — *Soit X un schéma noethérien. On suppose qu'il existe un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Pour tous K et L objets de $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$, l'objet $R\,\mathbf{Hom}_A(K, L)$ appartient à $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$ et pour tout $M \in \mathsf{D}^+(A)$, le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :*

$$M \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(K, L) \xrightarrow{\sim} R\,\mathbf{Hom}_A(K, M \overset{L}{\otimes}_A L) .$$

Si A' est une A-algèbre, que K et L sont des objets de $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$, alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathsf{D}^b(X_{\text{ét}}, A')$:

$$A' \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(K, L) \xrightarrow{\sim} R\,\mathbf{Hom}_{A'}(A' \overset{L}{\otimes}_A K, A' \overset{L}{\otimes}_A L) .$$

Montrons que l'on peut déduire le théorème 7.1.3 de ce théorème 7.6.1 et du théorème 7.1.2 qui a déjà été établi. Commençons par un lemme :

Lemme 7.6.2. — *Soit A un anneau noethérien. Soit $K \in \mathsf{D}^-_c(A)$. Alors K est nul si et seulement si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'objet $(A/\mathfrak{m}) \overset{L}{\otimes}_A K$ est nul.*

On suppose que K n'est pas nul. On veut montrer qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A tel que $(A/\mathfrak{m}) \overset{L}{\otimes}_A K$ ne soit pas nul. Soit q le plus grand entier tel que $H^q(K)$ soit non nul. On peut supposer que K est un complexe formé de A-modules projectifs de type fini et nuls en degrés strictement plus grands que q. Par construction du produit tensoriel dérivé, on a un isomorphisme $H^q((A/\mathfrak{m}) \overset{L}{\otimes}_A K) \xrightarrow{\sim} H^q(K)/\mathfrak{m}H^q(K)$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $H^q(K) \neq \mathfrak{m}H^q(K)$ ou encore, d'après le lemme de Nakayama, que $H^q(K) \otimes_A A_\mathfrak{m} \neq 0$. Le support de $H^q(K)$ est un fermé non vide de $\mathrm{Spec}(A)$ (cf. [**ÉGA** 0_{I} 1.7]), il contient un point fermé que l'on identifie à un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, et cet idéal maximal vérifie la condition voulue.

Démontrons le théorème 7.1.3 en supposant connu le théorème 7.6.1. Soit K un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et A une Λ-algèbre noethérienne. Grâce au lemme 6.2.2.4, il vient que K appartient à $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et donc que $K_A = A \overset{L}{\otimes}_\Lambda K$ appartient à $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$. D'après le théorème 7.6.1, le foncteur $D_A = R\,\mathbf{Hom}_A(-, K_A)$ préserve $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$. Il reste à montrer que le morphisme de bidualité $L \to D_A^2 L$ est un isomorphisme pour tout $L \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$. D'après le lemme, il suffit de montrer qu'après produit tensoriel dérivé avec $A/\mathfrak{m}$, le morphisme $L \to D_A^2 L$ induit un isomorphisme. D'après le théorème 7.6.1, le foncteur de dualité considéré commute au changement d'anneau, ainsi, après produit tensoriel avec $A/\mathfrak{m}$, grâce au théorème E.2.5, on obtient le morphisme de bidualité pour $A/\mathfrak{m} \overset{L}{\otimes}_A L$ dans $\mathsf{D}^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}}, A/\mathfrak{m})$. Bref, on peut supposer que l'anneau A est un corps. Dans ce cas, on peut conclure en utilisant le théorème 7.1.2.

Proposition 7.6.3. — *Soit* X *un schéma noethérien. On suppose qu'il existe un complexe dualisant sur* $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$*. Alors, pour toute immersion* j *d'un ouvert* U *de* X*, le foncteur* $Rj_\star$ *envoie* $D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$ *dans* $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$*.*

Soit K un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$. Pour des raisons évidentes, $j^\star K$ est un complexe dualisant sur $D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$. On note D_X (resp. D_U) les dualités induites par K et $j^\star K$ sur les catégories triangulées $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$ (resp. $D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$). On a un isomorphisme canonique $D_X\circ j_! \simeq Rj_\star D_U$. On en déduit que pour tout $M\in D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$, $Rj_\star M\simeq D_X\, j_!\, D_U\, M$, ce qui permet de conclure que $Rj_\star M$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$.

Définition 7.6.4. — Si X est un schéma noethérien, A une Λ-algèbre noethérienne et $\mathscr{P}$ une partition galoisienne dirigeable de X, on note $D(X_{\text{ét}},A)^{\mathscr{P}}$ la sous-catégorie triangulée de $D(X_{\text{ét}},A)$ dont les objets de cohomologie sont dans $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X,A)$. On définit de même les variantes $D^b(X_{\text{ét}},A)^{\mathscr{P}}$, $D^b_c(X_{\text{ét}},A)^{\mathscr{P}}$, etc.

Proposition 7.6.5. — *Soit* $j\colon U\to X$ *une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que* $Rj_\star$ *applique* $D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$ *dans* $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$*. Pour toute partition galoisienne dirigeable* $\mathscr{P}$ *de* U*, il existe une partition galoisienne* $\mathscr{P}'$ *de* X *et un entier* c *tel que* $Rj_\star$ *envoie* $D^b(U_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}}$ *dans* $D^b(X_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}'}$ *et que pour tout* $q>c$ *et* $\mathscr{F}\in\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U,\Lambda)$*, on ait* $R^qj_\star\mathscr{F}=0$*.*

On sait que la catégorie $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U,\Lambda)$ est localement finie (cf. [**Gabriel, 1962**, pages 356]) et admet même un nombre fini d'objets simples (et ceux-ci sont des faisceaux constructibles), cf. proposition 7.4.3. Comme $Rj_\star$ applique $D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$ dans $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$, on peut choisir un entier c et une partition galoisienne $\mathscr{P}'$ de X tels que pour tout objet simple $\mathscr{F}$ de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U,\Lambda)$, $Rj_\star\mathscr{F}$ appartienne à $D^b(X_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}'}$ et ait des objets de cohomologie nuls en les degrés strictement supérieurs à c. Ce résultat s'étend par dévissage aux objets noethériens de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U,\Lambda)$ puis à cette catégorie toute entière du fait de la commutation des foncteurs $R^qj_\star$ aux limites inductives filtrantes.

Corollaire 7.6.6. — *Soit* $i\colon Z\to X$ *une immersion fermée entre schémas noethériens. On suppose que* $i^!$ *applique* $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$ *dans* $D^b_c(Z_{\text{ét}},\Lambda)$*. Pour toute partition galoisienne dirigeable* $\mathscr{P}$ *sur* X*, il existe une partition galoisienne* $\mathscr{P}'$ *sur* Z *et un entier* c *tel que* $i^!$ *envoie* $D^b(X_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}}$ *dans* $D^b(Z_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}'}$ *et que pour tout* $q>c$ *et* $\mathscr{F}\in\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(X,\Lambda)$*, on ait* $\mathscr{H}^q(i^!\mathscr{F})=0$*.*

Si on note $j\colon U\to X$ l'immersion ouverte complémentaire, l'hypothèse sur $i^!$ énoncée ici équivaut à celle exigée sur $Rj_\star$ dans la proposition 7.6.5. Quitte à raffiner $\mathscr{P}$, on peut supposer que les constituants de $\mathscr{P}$ sont soit au-dessus de U, soit au-dessus de Z. On peut ainsi écrire $\mathscr{P}=\mathscr{P}_U\cup\mathscr{P}_Z$ où $\mathscr{P}_U$ et $\mathscr{P}_Z$ sont des partitions galoisiennes de U et Z respectivement. On applique la proposition 7.6.5 à $\mathscr{P}_U$. On obtient une partition galoisienne $\mathscr{P}''$ de X telle que $Rj_\star$ applique $D^b(U_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}_U}$ dans $D^b(X_{\text{ét}},\Lambda)^{\mathscr{P}''}$ et un entier naturel c' tel que pour tout $\mathscr{F}\in\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}_U}(U,\Lambda)$, on ait $R^qj_\star\mathscr{F}=0$ pour $q>c'$. Quitte à raffiner $\mathscr{P}''$, on peut supposer que $\mathscr{P}''=\mathscr{P}''_Z\cup\mathscr{P}''_U$ comme ci-dessus. Quitte à raffiner $\mathscr{P}''_Z$, on peut supposer que cette partition galoisienne de Z raffine $\mathscr{P}_Z$. En utilisant le triangle distingué

$$i^!K\to i^\star K\to i^\star Rj_\star j^\star K\to i^!K[1]$$

pour tout $K\in D^+(X_{\text{ét}},\Lambda)$, on obtient aussitôt que $\mathscr{P}'=\mathscr{P}''_Z$ et $c=c'+1$ conviennent.

Proposition 7.6.7. — *Soit* $j\colon U\to X$ *une immersion ouverte entre schémas noethériens. On suppose que* $Rj_\star$ *envoie* $D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$ *dans* $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$*. Alors, pour toute* Λ*-algèbre noethérienne* A*,* $Rj_\star$ *envoie* $D^b_c(U_{\text{ét}},A)$ *(resp.* $D^b_{\mathrm{ctf}}(U_{\text{ét}},A)$*) dans* $D^b_c(X_{\text{ét}},A)$ *(resp.* $D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}},A)$*). En outre, pour tout* $Y\in D^b_{\mathrm{ctf}}(U_{\text{ét}},A)$ *et* $M\in D^+(A)$*, le morphisme canonique* $M\overset{L}{\otimes}_A Rj_\star Y\to Rj_\star(M\overset{L}{\otimes}_A Y)$ *est un isomorphisme. Par ailleurs, si* $i\colon Z\to X$ *est une immersion fermée complémentaire à* j*, alors* $i^!$ *envoie* $D^b_c(X_{\text{ét}},A)$ *(resp.* $D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}},A)$*) dans* $D^b_c(Z_{\text{ét}},A)$ *(resp.* $D^b_{\mathrm{ctf}}(Z_{\text{ét}},A)$*), et pour tout* $M\in D^+(A)$ *et* $Y\in D^b_{\mathrm{ctf}}(X_{\text{ét}},A)$*, le morphisme canonique* $M\overset{L}{\otimes}_A i^!Y\to i^!(M\overset{L}{\otimes}_A Y)$ *est un isomorphisme.*

L'énoncé sur $i^!$ se déduit aussitôt de celui sur $Rj_\star$, on se concentre donc sur celui-là. Pour montrer que $Rj_\star$ envoie $D^b_c(U_{\text{ét}},A)$ dans $D^b_c(X_{\text{ét}},A)$, on peut supposer par un dévissage évident que $\Lambda=\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, où ℓ est un nombre premier. Par conséquent, pour tout Λ-module N et tout objet $Y\in D^b_c(U_{\text{ét}},\Lambda)$, on a un isomorphisme $Rj_\star(N\overset{L}{\otimes}_\Lambda Y)\simeq N\overset{L}{\otimes}_\Lambda Rj_\star Y$ (cf. proposition C.2.1). Si N a une structure de A-module de type fini, comme on sait que $Rj_\star Y$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}},\Lambda)$, on peut en déduire que $Rj_\star(N\overset{L}{\otimes}_\Lambda Y)$ appartient à $D^b_c(X_{\text{ét}},A)$. D'après le dévissage de la proposition 7.4.1, il vient que $Rj_\star$ envoie $D^b_c(U_{\text{ét}},A)$ dans $D^b_c(X_{\text{ét}},A)$.

Montrons maintenant que $Rj_\star$ envoie $D^b_{ctf}(U_{\acute{e}t}, A)$ dans $D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$. Compte tenu du résultat précédent, il suffit de montrer que si $\mathscr{F}$ est un faisceau de A-modules plat et constructible sur U, alors $Rj_\star\mathscr{F} \in D^b_{tf}(X_{\acute{e}t}, A)$, c'est-à-dire que $M \overset{L}{\otimes}_A Rj_\star\mathscr{F}$ est borné indépendamment du A-module M. D'après la proposition C.2.1, il suffit de montrer que $Rj_\star(\mathscr{F} \otimes_A M)$ est borné indépendamment du A-module M, et si tel est le cas, la formule des coefficients universels énoncée ici sera satisfaite. Il existe une partition galoisienne dirigeable $\mathscr{P}$ de U telle que $\mathscr{F}$ appartienne à $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U, A)$. Pour tout A-module M, $\mathscr{F} \otimes_A M$ est un objet de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U, A)$, ainsi, il suffit de montrer qu'il existe un entier c tel que pour tout objet $\mathscr{G}$ de $\mathrm{FCons}^{\mathscr{P}}(U, A)$, on ait $R^q j_\star\mathscr{G} = 0$ pour $q > c$, ce qui résulte de la proposition 7.6.5.

Définition 7.6.8. — Soit X un schéma noethérien. Soit A une Λ-algèbre noethérienne. Soit $K \in D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$. On dira que K vérifie la **condition (B)** si pour toute partition galoisienne $\mathscr{P}$ de X, il existe un entier c et une partition galoisienne $\mathscr{P}'$ de X tels que pour tout $L \in D^b(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}}$, $R\,\mathbf{Hom}_A(K, L)$ appartienne à $D^b(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}'}$, que si on suppose que $\mathscr{H}^q L = 0$ pour $q > 0$, alors $\mathscr{H}^q R\,\mathbf{Hom}_A(K, L) = 0$ pour $q > c$ et enfin, que si L appartient à $D^b_c(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}}$, alors $R\,\mathbf{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D^b_c(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}'}$.

Proposition 7.6.9. — *Soit X un schéma noethérien tel qu'il existe un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$. Alors, tout objet $K \in D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$ vérifie la condition (B).*

Lemme 7.6.10. — *Soit X un schéma noethérien tel qu'il existe un complexe dualisant sur $D^b_c(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$. Soit $i\colon Z \to X$ une immersion fermée. Soit $j\colon U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit $K \in D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$. On suppose que $i^\star K$ et $j^\star K$ satisfont la condition (B). Alors, K satisfait la condition (B).*

Pour tout $L \in D(X_{\acute{e}t}, A)$, on a un triangle distingué dans $D(X_{\acute{e}t}, A)$:

$$i_\star R\,\mathbf{Hom}_A(i^\star K, i^! L) \to R\,\mathbf{Hom}_A(K, L) \to Rj_\star R\,\mathbf{Hom}_A(j^\star K, j^\star L) \xrightarrow{+}$$

Grâce au résultat de l'exercice 7.3.8 et compte tenu de la proposition 7.6.3, on peut combiner d'une part le résultat sur $i^!$ du corollaire 7.6.6 et la condition (B) pour $i^\star K$ et d'autre part la proposition 7.6.5 concernant $Rj_\star$ et la condition (B) pour $j^\star K$ pour obtenir que K vérifie la condition (B).

Démontrons la proposition 7.6.9. La condition (B) définit une sous-catégorie triangulée de $D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$. Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que si K est un faisceau de A-modules plat et constructibles, alors K satisfait la condition (B). L'existence d'un complexe dualisant étant une condition préservée par passage à un sous-schéma, le lemme précédent fournit un moyen de dévisser la situation pour se ramener au cas où K est localement constant. On est ramené au lemme suivant :

Lemme 7.6.11. — *Soit X un schéma noethérien. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de A-modules constructible, plat et localement constant. Alors, $\mathscr{F}$ satisfait la propriété (B).*

Tout d'abord, pour tout $L \in D^b(X_{\acute{e}t}, A)$, si $\mathscr{H}^q L = 0$ pour $q > 0$, alors pour tout $q > 0$, $\mathscr{H}^q(R\,\mathbf{Hom}_A(\mathscr{F}, L)) \simeq \mathbf{Hom}_A(\mathscr{F}, \mathscr{H}^q L) = 0$, et si $L \in D^b_c(X_{\acute{e}t}, A)$, alors $R\,\mathbf{Hom}_A(\mathscr{F}, L) \in D^b_c(X_{\acute{e}t}, A)$. Il reste donc à montrer que si $\mathscr{P}$ est une partition galoisienne de X, il existe une partition galoisienne $\mathscr{P}'$ de X telle que pour tout $L \in D^b(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}}$, alors $R\,\mathbf{Hom}_A(\mathscr{F}, L)$ appartient à $D^b(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}'}$. On peut supposer que $\mathscr{P}$ est constitué d'un unique revêtement étale galoisien $X' \to X$. On choisit un revêtement étale galoisien $X'' \to X$ tel que l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur X'' soit un faisceau constant, puis un revêtement galoisien $X''' \to X$ coiffant X' et X''. On voit aussitôt que la partition galoisienne $\mathscr{P}' = (X''' \to X)$ de X convient.

Démontrons le théorème 7.6.1. Soit $K \in D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$. D'après la proposition 7.6.9, K vérifie la condition (B). Soit $L \in D^b_{ctf}(X_{\acute{e}t}, A)$. Il existe une partition galoisienne $\mathscr{P}$ de X telle que L appartienne à $D^b(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}}$. Pour tout A-module M, l'objet $M \overset{L}{\otimes}_A L$ appartient encore à cette catégorie (et est borné indépendamment de M). Il résulte de la condition (B) de K que $R\,\mathbf{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D^b_c(X_{\acute{e}t}, A)$ et qu'il existe une partition galoisienne $\mathscr{P}'$ telle que $R\,\mathbf{Hom}_A(K, M \overset{L}{\otimes}_A L)$ soit un objet de $D^b(X_{\acute{e}t}, A)^{\mathscr{P}'}$ borné indépendamment du A-module M. La proposition C.1.1 permet de déduire que $R\,\mathbf{Hom}_A(K, L)$ appartient à $D^b_{tf}(X_{\acute{e}t}, A)$ et que pour tout $M \in D^+(A)$, le morphisme canonique $M \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(K, L) \to R\,\mathbf{Hom}_A(K, M \overset{L}{\otimes}_A L)$ est un isomorphisme. On déduit aussitôt de cette formule la compatibilité au changement d'anneau $A \to A'$ pour toute A-algèbre A'.

7.7. Élimination de l'hypothèse noethérienne sur A. —

Définition 7.7.1. — Soit A un anneau commutatif. Soit X un schéma noethérien. On dit d'un complexe $K \in \mathsf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ qu'il est **c-parfait** s'il existe une partition finie $(U_i)_{i\in I}$ de X par des sous-schémas (réduits) telle que pour tout $i \in I$, $K_{|U_i} \in \mathsf{D}(U_{i\,\text{ét}}, A)$ soit un complexe parfait (cf. [**SGA 6** I 4.8]). On note $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, A)$ formée des complexes c-parfaits.

Bien entendu, pour tout morphisme d'anneaux $A \to A'$, le foncteur $A' \overset{L}{\otimes}_A -\colon \mathsf{D}^-(X_{\text{ét}}, A) \to \mathsf{D}^-(X_{\text{ét}}, A')$ induit un foncteur $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A) \to \mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A')$. En outre, si A est un anneau noethérien, $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A) = \mathsf{D}^b_{\text{ctf}}(X_{\text{ét}}, A)$.

Théorème 7.7.2. — *Soit A une Λ-algèbre commutative. Soit X un schéma noethérien. S'il en existe, les complexes dualisants sur $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$ sont uniques au produit tensoriel près avec des objets inversibles. Soit K un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_c(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. Alors, $A \overset{L}{\otimes}_\Lambda K$ est un complexe dualisant sur $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$. En outre, le bifoncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_A$ préserve $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$ et commute à tout changement d'anneau $A \to A'$.*

Le théorème 7.6.1 énonce que si B est une Λ-algèbre noethérienne, que K et L sont deux objets de $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, B)$, alors pour toute B-algèbre A, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_A(A \overset{L}{\otimes}_B K, A \overset{L}{\otimes}_B L) \simeq A \overset{L}{\otimes}_B \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_B(K, L)\ .$$

Comme l'objet de droite appartient à $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$, il s'agit d'un isomorphisme dans $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$. Bref, compte tenu du théorème 7.6.1 et du théorème 7.1.3 (dont l'énoncé d'unicité des complexes dualisants vaut aussi pour $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$ avec la même démonstration, cf. proposition 7.5.1.1), le théorème ci-dessus est ramené au lemme suivant :

Lemme 7.7.3. — *Soit A un anneau commutatif. Soit X un schéma noethérien. Pour tout objet K de $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$, il existe un sous-anneau noethérien (et même de type fini sur $\mathbf{Z}$) B de A et $K' \in \mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, B)$ tels que les objets K et $A \overset{L}{\otimes}_B K'$ de $\mathsf{D}^b_{c-\text{parf}}(X_{\text{ét}}, A)$ soient isomorphes.*

Comme il nécessite un examen plus attentif de la notion de c-perfection, on repousse la démonstration de ce lemme à la fin de cette sous-section.

Lemme 7.7.4. — *Soit A un anneau commutatif. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de A-modules sur $X_{\text{ét}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une partition $(U_i)_{i\in I}$ de X par des sous-schémas réduits tels que pour tout $i \in I$, $\mathscr{F}_{|U_i}$ soit localement constant et que pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, le A-module $\mathscr{F}_{\overline{x}}$ soit projectif de type fini ;*

(ii) *Le faisceau de A-modules $\mathscr{F}$ est constructible (vii) et pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, le A-module $\mathscr{F}_{\overline{x}}$ est projectif de type fini ;*

(iii) *Le faisceau de A-modules $\mathscr{F}$ est plat et constructible.*

Par définition des faisceaux constructibles, on a évidemment l'équivalence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Si $\mathscr{F}$ est constructible, les fibres $\mathscr{F}_{\overline{x}}$ sont des A-modules de présentation finie, il est alors équivalent d'exiger que ces modules soient plats ou projectifs de type fini, ce qui montre l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).

On note $\mathscr{C}$ la catégorie fibrée au-dessus du site $X_{\text{ét}}$ qui à $U \in X_{\text{ét}}$ fait correspondre la catégorie $\mathscr{C}_X$ des faisceaux de A-modules sur $U_{\text{ét}}$ et $\mathscr{C}_c$ la sous-$X_{\text{ét}}$-catégorie de $\mathscr{C}$ formée des faisceaux de A-modules plats et constructibles. Nous allons utiliser la terminologie de [**SGA 6** I 1.2] et [**SGA 6** I 2]. Il est évident qu'un objet de $\mathscr{C}$ qui est localement dans $\mathscr{C}_c$ est dans $\mathscr{C}_c$ et que $\mathscr{C}_c$ est stable par noyau d'épimorphisme. D'après [**SGA 4** IX 2.7], un faisceau de A-modules sur $X_{\text{ét}}$ est constructible si et seulement s'il est isomorphe au conoyau d'un morphisme $A_V \to A_U$ pour U et V deux X-schémas étales et de présentation finie. Les faisceaux A_U pour U étale et de présentation finie sur X sont donc évidemment plats et constructibles. Il résulte de ces résultats qu'un objet de $\mathscr{C}_X$ est de $\mathscr{C}_c$-type fini si et seulement s'il est engendré par un nombre fini de sections (ce qui revient à demander qu'il soit de $\mathscr{C}_{cX}$-type fini) et qu'un objet de $\mathscr{C}_X$ est de $\mathscr{C}_c$-présentation finie si et seulement s'il est constructible (ce qui revient encore à demander qu'il soit de $\mathscr{C}_{cX}$-présentation finie). Il est par ailleurs évident que $\mathscr{C}_c$ est quasi-relevable dans $\mathscr{C}$ et même que $\mathscr{C}_{cX}$ est quasi-relevable dans $\mathscr{C}_X$. Les catégories

(vii) On utilise la définition donnée dans [**SGA 4** IX 2.3] même si A n'est pas noethérien, et non pas la définition suggérée en note à cet endroit ; un faisceau constructible pour cette autre définition est ce que nous appelons un faisceau c-pseudo-cohérent (cf. définition 7.7.6).

$\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}$ vérifient donc les hypothèses de [**SGA 6** I 2.0] et de [**SGA 6** II 1.1] (mais en général pas de [**SGA 6** I 4.0]). On dispose donc d'une notion de complexe pseudo-cohérent (relativement à $\mathscr{C}_c$) et celle-ci peut-être définie de façon globale (c'est-à-dire relativement à $\mathscr{C}_{cX}$) :

Définition 7.7.5. — Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in C(X_{\text{ét}}, A)$. On dit que K est **strictement** c**-pseudo-cohérent** (resp. **strictement** c**-parfait**) si K est un complexe borné supérieurement (resp. borné) formé de faisceaux de A-modules plats et constructibles.

Définition 7.7.6. — Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. On dit que K est c**-pseudo-cohérent** s'il est isomorphe à l'image dans $D(X_{\text{ét}}, A)$ d'un complexe strictement c-pseudo-cohérent [(viii)]. Les objets c-pseudo-cohérents forment une sous-catégorie triangulée anonyme de $D(X_{\text{ét}}, A)$.

Remarque 7.7.7. — La $X_{\text{ét}}$-catégorie $\mathscr{C}$ contient aussi la $X_{\text{ét}}$-catégorie $\mathscr{C}_0$ des faisceaux constants de valeur un A-module projectif de type fini. Bien entendu, $\mathscr{C}_0$ est contenue dans $\mathscr{C}_c$. Ainsi, les notions de stricte pseudo-cohérence (resp. stricte perfection) définies relativement à $\mathscr{C}_0$ impliquent les notions correspondantes relativement à $\mathscr{C}_c$.

Proposition 7.7.8. — *Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) K *est* c*-parfait ;*
(ii) K *est* c*-pseudo-cohérent et de tor-dimension finie ;*
(iii) K *est isomorphe à l'image dans* $D(X_{\text{ét}}, A)$ *d'un complexe strictement* c*-parfait.*

Lemme 7.7.9. — *Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une partition finie de X par des sous-schémas réduits. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. On suppose que pour tout $i \in I$, la restriction de K à U_i est* c*-pseudo-cohérente. Alors, K est* c*-pseudo-cohérent.*

Par les arguments habituels, on se ramène au cas où la partition de X est constituée d'un ouvert U et d'un fermé Z. On note $i \colon Z \to X$ et $j \colon U \to X$ les immersions correspondantes. On dispose d'un triangle distingué dans $D(X_{\text{ét}}, A)$:

$$j_!j^\star K \to K \to i_\star i^\star K \to j_!j^\star K[1]$$

On sait que $j^\star K$ et $i^\star K$ sont c-pseudo-cohérents. Il est évident que $j_!$ et $i_\star$ préservent la notion de faisceau plat et constructible ; au niveau des catégories triangulées, ces foncteurs préservent donc la notion de c-pseudo-cohérence. Les objets $j_!j^\star K$ et $i_\star i^\star K$ sont c-pseudo-cohérents ; il en résulte que K aussi est c-pseudo-cohérent.

Lemme 7.7.10. — *Soit A un anneau. Soit X un schéma noethérien. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$. Si K est* c*-parfait, alors K est* c*-pseudo-cohérent.*

D'après le lemme 7.7.9, quitte à passer à un recouvrement fini par des localement fermés convenables, on peut supposer que K est parfait. Par conséquent, K est pseudo-cohérent (sous-entendu relativement à la $X_{\text{ét}}$-catégorie $\mathscr{C}_0$) ; *a fortiori*, K est c-pseudo-cohérent.

Démontrons la proposition 7.7.8. L'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) est évidente. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) résulte essentiellement du lemme précédent ; il reste cependant à vérifier que si K est c-parfait, alors il est de tor-dimension finie. Supposons donc que K est c-parfait. Il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X par des localement fermés tels que $K_{|U_i}$ soit parfait pour tout $i \in I$. Pour obtenir (ii) pour K, il suffit de montrer que le complexe parfait $K_{|U_i}$ est de tor-dimension finie, ce qui résulte aussitôt de [**SGA 6** I 5.8.1]. Il reste à établir l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii), la plus intéressante pour nous. Soit $K \in D(X_{\text{ét}}, A)$ un complexe c-pseudo-cohérent et de tor-dimension finie. Par définition de la c-pseudo-cohérence, on peut remplacer si besoin est K par un complexe borné supérieurement formé de faisceaux de A-modules plats et constructibles. Pour tout $a \in \mathbf{Z}$, on peut considérer la troncature canonique $\tau_{\leq a}K$ de K, si on note Z^a le noyau de $K^a \to K^{a+1}$, il s'agit du sous-complexe suivant de K :

$$\dots \to K^{a-2} \to K^{a-1} \to Z^a \to 0 \to \dots .$$

Comme K est de tor-dimension finie, il existe un entier $a \in \mathbf{Z}$ tel que pour tout A-module M, $\tau_{\leq a}(K \otimes_A M)$ soit acyclique. En appliquant ceci avec $M = A$, on obtient une résolution plate de Z^a :

$$\dots \to K^{a-3} \to K^{a-2} \to K^{a-1} \to Z^a \to 0 .$$

Ensuite, on obtient aussitôt que pour un A-module M quelconque, cette suite reste exacte après passage au produit tensoriel avec M. Par suite, pour tout $i > 0$, $\mathbf{Tor}_i^A(Z^a, M) = 0$ pour tout A-module M, ce qui implique

[(viii)] En raison de l'existence de « résolutions globales », la définition globale donnée ici équivaut à la définition locale de [**SGA 6** I 2.3].

que Z^a est un faisceau de A-modules plat. Par ailleurs, Z^a est le conoyau du morphisme $K^{a-2} \to K^{a-1}$, donc Z^a est un faisceau constructible. Ainsi, Z^a est plat et constructible. Le complexe K est quasi-isomorphe au complexe strictement c-parfait

$$\cdots \to 0 \to Z^a \to K^a \to K^{a+1} \to \dots ,$$

ainsi K vérifie la condition (iii).

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme 7.7.3. Compte tenu de la proposition 7.7.8, il s'agit de montrer que si $K \in C(X_{\text{ét}}, A)$ est un complexe strictement c-parfait, alors A contient un sous-anneau A' de type fini sur **Z** tel qu'il existe un complexe strictement c-parfait $K' \in C(X_{\text{ét}}, A')$ et un isomorphisme $K \simeq A \otimes_{A'} K'$. Ceci résulte aussitôt du lemme suivant :

Lemme 7.7.11. — *Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ un système inductif d'anneaux commutatifs indexé par un ensemble ordonné filtrant (non vide) I. On en note A la limite inductive. Soit X un schéma noethérien. Alors, la donnée d'un faisceau de A-modules constructible (resp. plat et constructible) sur X équivaut à la donnée d'un faisceau de A_α-modules constructible (resp. plat et constructible) sur X pour α assez grand.*

Conformément aux grands principes de [**ÉGA** IV 8], ceci signifie d'une part que si F est un faisceau de A-modules constructible sur X, il existe $\alpha \in I$ et F_α un faisceau de A_α-modules constructible sur X tel que F soit isomorphe à $A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ et d'autre part que si $\alpha \in I$ et que F_α et G_α sont deux faisceaux de A_α-modules constructibles sur X, si on note $F_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ et $G_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} G_\alpha$ pour tout $\beta \geq \alpha$ et $F = A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ et $G = A \otimes_{A_\alpha} G_\alpha$, alors l'application canonique

$$\operatorname*{colim}_{\beta\geq\alpha} \mathrm{Hom}_{A_\beta}(F_\beta, G_\beta) \to \mathrm{Hom}_A(F, G)$$

est un isomorphisme. En outre, si $\alpha \in I$ et que F_α est un faisceau de A_α-modules constructible sur X, alors $F = A \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ est plat si et seulement si pour $\beta \geq \alpha$ assez grand, $F_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} F_\alpha$ est plat.

L'énoncé dans le cas non respé résulte de la description des faisceaux de B-modules constructibles (pour tout anneau commutatif B) comme conoyau d'une flèche $B_V \to B_U$ où U et V sont étales et de présentation finie sur X, et du fait que le foncteur $H^0_{\text{ét}}(V, -)$ de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$ vers celle des groupes abéliens commute aux limites inductives filtrantes [**SGA 4** VII 3.3].

Il reste à montrer que si F_α est un faisceau de A_α-modules constructible tel que, avec les notations ci-dessus, F soit A-plat, alors pour $\beta \geq \alpha$ assez grand, F_β est A_β-plat. En utilisant une décomposition de X en réunion de localement fermés connexes (non vides) au-dessus desquels F_α soit localement constant trivialisé par un revêtement étale (non vide), on peut supposer que X est connexe (non vide) et que F_α est localement constant et trivialisé par un revêtement étale (non vide) $Y \to X$. Pour vérifier la platitude de F_β, il suffit de l'obtenir pour *une* fibre $(F_\beta)_{\overline{x}}$; on est ainsi ramené au lemme suivant :

Lemme 7.7.12. — *Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ un système inductif d'anneaux commutatifs indexé par un ensemble ordonné filtrant (non vide) I. On en note A la limite inductive. Soit $\alpha \in I$, soit M_α un A_α-module de présentation finie. On suppose que $M = A \otimes_{A_\alpha} M_\alpha$ est A-plat. Alors, il existe $\beta \geq \alpha$ tel que $M_\beta = A_\beta \otimes_{A_\alpha} M_\alpha$ soit A_β-plat.*

Les modules considérés étant de présentation finie, le module M (resp. M_β) est plat si et seulement s'il est facteur direct d'un module libre de type fini. On peut conclure en utilisant convenablement [**ÉGA** IV 8.5.2].

Appendice A
Produits tensoriels de complexes non bornés

A.1. K-platitude. —

Définition A.1.1. — Soit $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. On note $C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ (resp. $K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$) la catégorie des complexes de $\mathscr{A}$-Modules (resp. la catégorie homotopique correspondante, la catégorie dérivée associée). On dispose d'un bifoncteur $\otimes_{\mathscr{A}}$ sur $C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ induisant un bifoncteur sur $K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ [(ix)]. Soit $K \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$.On dit que K est K-**plat** si le foncteur triangulé $K \otimes_{\mathscr{A}} -\colon K(\mathscr{T}, \mathscr{A}) \to K(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ préserve les quasi-isomorphismes, autrement dit que pour tout complexe acyclique L de $C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, le complexe $K \otimes_{\mathscr{A}} L$ est acyclique (cf. [**Spaltenstein, 1988**, definition 5.1]).

(ix) Le lecteur pourra consulter les conventions de signes de exp. **XVI**, 4.5

La sous-catégorie pleine de $C(\mathscr{T},\mathscr{A})$ formée des complexes K-plats est stable par limites inductives filtrantes, sommes directes et facteurs directs. En outre, la sous-catégorie pleine de $K(\mathscr{T},\mathscr{A})$ correspondante est une sous-catégorie triangulée de $K(\mathscr{T},\mathscr{A})$.

Proposition A.1.2. — *Soit $(\mathscr{T},\mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit K un complexe borné supérieurement formé de $\mathscr{A}$-modules plats (cf.* [**SGA 4** V 1]*). Alors, K est K-plat.*

En utilisant les foncteurs de troncature bête et la stabilité par limites inductives filtrantes de la K-platitude, on se ramène au cas où K est borné. Comme la K-platitude définit une sous-catégorie triangulée de $K(\mathscr{T},\mathscr{A})$, on peut procéder à un dévissage utilisant encore les troncatures bêtes pour se ramener au cas où $K^q = 0$ pour $q \neq 0$. On est alors ramené à montrer que si F est un $\mathscr{A}$-Module plat et $L \in C(\mathscr{T},\mathscr{A})$ un complexe acyclique, alors $F \otimes_{\mathscr{A}} L$ est acyclique, ce qui résulte aussitôt de la définition de la platitude.

A.2. Résolutions K-plates. —

A.2.1. Définition du produit tensoriel dérivé. —

Théorème A.2.1.1. — *Soit $(\mathscr{T},\mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Il existe un foncteur $\rho\colon C(\mathscr{T},\mathscr{A}) \to C(\mathscr{T},\mathscr{A})$ et une transformation naturelle $\rho K \to K$ pour $K \in C(\mathscr{T},\mathscr{A})$ telle que :*
- *pour tout $K \in C(\mathscr{T},\mathscr{A})$, ρK soit K-plat ;*
- *pour tout $K \in C(\mathscr{T},\mathscr{A})$, le morphisme $\rho K \to K$ soit un quasi-isomorphisme ;*
- *le foncteur ρ commute aux limites inductives filtrantes.*

Ce théorème sera démontré plus bas. Déduisons-en aussitôt la proposition triviale suivante, qui constitue notre définition du produit tensoriel sur $D(\mathscr{T},\mathscr{A})$:

Proposition A.2.1.2. — *Soit $(\mathscr{T},\mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Le foncteur dérivé total à gauche de $\otimes_{\mathscr{A}}\colon C(\mathscr{T},\mathscr{A}) \times C(\mathscr{T},\mathscr{A}) \to C(\mathscr{T},\mathscr{A})$ existe. Plus précisément, pour tous K et L dans $C(\mathscr{T},\mathscr{A})$, on note $K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} L = (\rho K) \otimes_{\mathscr{A}} (\rho L) \in C(\mathscr{T},\mathscr{A})$; ce bifoncteur $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}}$ commute aux limites inductives filtrantes en chaque argument et, préservant les quasi-isomorphismes, il induit un bifoncteur du même nom $D(\mathscr{T},\mathscr{A}) \times D(\mathscr{T},\mathscr{A}) \to D(\mathscr{T},\mathscr{A})$; la transformation naturelle évidente $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \to \otimes_{\mathscr{A}}$ fait de $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}}$ le foncteur dérivé total à gauche de $\otimes_{\mathscr{A}}$ (cf.* [**Goerss & Jardine, 1999**, remark 7.4, Chapter II] *pour une définition des foncteurs dérivés totaux en termes d'extensions de Kan). En outre, si K et L sont deux objets de $C(\mathscr{T},\mathscr{A})$ dont l'un au moins est K-plat, alors le morphisme canonique $K \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} L \to K \otimes_{\mathscr{A}} L$ est un isomorphisme dans $D(\mathscr{T},\mathscr{A})$.*

A.2.2. Modules sur un anneau. — On se place ici dans le cas particulier où le topos $\mathscr{T}$ est ponctuel. On peut identifier les faisceaux de $\mathscr{A}$-modules à des A-modules pour un anneau A. Le lemme suivant démontre le théorème A.2.1.1 dans ce cas particulier.

Lemme A.2.2.1. — *Pour tout anneau commutatif A, on peut définir un foncteur ρ_A et une transformation naturelle $\rho_A \to \mathrm{Id}$ de foncteurs de la catégorie $C(A)$ des complexes de A-modules dans elle-même telle que ρ_A commute aux limites inductives filtrantes, préserve les monomorphismes, que pour tout $K \in C(A)$, le morphisme de complexes $\rho_A(K) \to K$ soit un quasi-isomorphisme, que pour tout entier relatif n, $\rho_A(K)^n$ soit un A-module libre, et que $\rho_A(K)$ soit la limite inductive filtrante de sous-complexes bornés formés de A-modules libres (en particulier, $\rho_A(K)$ est K-plat).*

On peut définir de telles résolutions K-plates ρ_A pour tout anneau commutatif A de sorte que si $A \to A'$ est un morphisme d'anneaux, on ait un morphisme fonctoriel $\rho_A(K) \to \rho_{A'}(K)$ dans $C(A)$ pour $K \in C(A')$, ce morphisme vérifiant une compatibilité évidente à la composition des morphismes d'anneaux.

On note G le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli oub de la catégorie des A-modules vers celle des ensembles pointés. On pose $F = G \circ \mathrm{oub}$. Si M est un A-module, FM est le quotient du A-module libre de base l'ensemble M par le sous-module libre de rang 1 engendré par le zéro de M. On pose $(F'M)_0 := FM$ et on note Z_0 le noyau du morphisme d'adjonction $(F'M)_0 = FM \to M$ qui est un épimorphisme. Ensuite, de façon évidente, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on peut définir par récurrence un objet $(F'M)_n = FZ_{n-1}$, un morphisme $d_n\colon (F'M)_n \to (F'M)_{n-1}$ et le noyau $Z_n = \mathrm{Ker}(d_n)$. Il est évident que l'on définit ainsi un complexe $F'M$ concentré en degrés négatifs ou nuls, muni d'une augmentation $F'M \to M$ qui soit un quasi-isomorphisme. Comme F préserve les monomorphismes, on voit que F' préserve aussi les monomorphismes.

Soit $K \in C(A)$. Le foncteur F' défini ci-dessus n'est pas additif (à moins que $A = 0$), mais il est tel que $F'(0) = 0$. Ainsi, si on applique terme à terme le foncteur F' aux objets K_n pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on obtient un complexe double $((F'K^p)_{-q})_{(p,q)\in\mathbf{Z}}$ dans la catégorie des A-modules. On note $\rho_A(K)$ le complexe simple associé (défini en termes de sommes), cf. exp. **XVI**, 4.4. On dispose bien entendu d'un morphisme d'augmentation $\rho_A(K) \to K$.

Il est évident que ρ_A commute aux limites inductives filtrantes, préserve les monomorphismes et que pour tout entier n, $\rho_A(K)^n$ est un A-module libre. Si K est borné supérieurement, le fait que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le morphisme $\rho_A(K^n) \to K^n$ soit un quasi-isomorphisme implique, par passage au complexe simple, que $\rho_A(K) \to K$ est un quasi-isomorphisme. Comme tout complexe de A-modules peut s'écrire comme une limite inductive filtrante de sous-complexes bornés supérieurement, il vient que pour tout $K \in C(A)$, le morphisme $\rho_A(K) \to K$ est un quasi-isomorphisme.

Si K est borné supérieurement $\rho_A(K)$ est borné supérieurement et formé de A-modules libres. En utilisant les troncatures bêtes, on obtient que $\rho_A(K)$ est limite inductive filtrante de sous-complexes bornés formés de A-modules libres. Dans le cas général, K est limite inductive filtrante de sous-complexes bornés supérieurement. En utilisant que ρ_A préserve les monomorphismes et commute aux limites inductives filtrantes, on obtient que $\rho_A(K)$ est limite inductive filtrante de sous-complexes bornés formés de A-modules libres.

La dernière assertion concernant le changement d'anneau étant évidente, on peut considérer que le lemme a été démontré.

A.2.3. Préfaisceaux de modules. — On suppose maintenant que $\mathscr{T}$ est le topos des préfaisceaux sur une petite catégorie $\mathscr{C}$. Le faisceau d'anneaux $\mathscr{A}$ est un préfaisceau d'anneaux commutatifs sur $\mathscr{C}$.

Soit $K \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. Pour tout objet U de $\mathscr{C}$, $K(U)$ s'identifie à un objet de $C(\mathscr{A}(U))$. On applique la construction du lemme A.2.2.1 à l'anneau $\mathscr{A}(U)$. On pose $(\rho K)(U) = \rho_{\mathscr{A}(U)}(K(U)) \in C(\mathscr{A}(U))$. Si $V \to U$ est un morphisme dans $\mathscr{C}$, on définit un $\mathscr{A}(U)$-morphisme $(\rho K)(U) \to (\rho K)(V)$ de la façon suivante :

$$\rho_{\mathscr{A}(U)}(K(U)) \to \rho_{\mathscr{A}(U)}(K(V)) \to \rho_{\mathscr{A}(V)}(K(V))$$

où le morphisme de gauche est induit par la structure de complexes de préfaisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur K et la flèche de droite par la compatibilité de la construction du lemme A.2.2.1 au changement d'anneau. D'après ce lemme, ces morphismes de transition définissent une structure de préfaisceau sur ρK. Ainsi, on a défini un objet $\rho K \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ et il est muni d'un morphisme fonctoriel $\rho K \to K$.

Par construction, on peut vérifier les vertus présumées de ρ terme à terme ; ainsi, ce foncteur ρ permet d'établir le théorème A.2.1.1 dans le cas où le topos est un topos de préfaisceaux.

A.2.4. Faisceaux de modules. —

Proposition A.2.4.1. — *Soit $\mathscr{T}$ le topos des faisceaux sur un site dont la catégorie sous-jacente est notée $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{T}'$ le topos des préfaisceaux d'ensembles sur $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{A}'$ un préfaisceau d'anneaux commutatifs sur $\mathscr{C}$. On note $\mathscr{A}$ le faisceau d'anneaux $a\mathscr{A}'$ sur $\mathscr{T}$ associé à $\mathscr{A}'$. Si $K \in C(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ est K-plat, alors $aK \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est K-plat.*

Lemme A.2.4.2. — *On conserve les notations de la proposition A.2.4.1. Soit $K \in C(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ un objet tel que aK soit nul dans $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. Alors, pour tout $L \in C(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$, $a(K \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}'} L)$ (où le produit tensoriel dérivé au-dessus de $\mathscr{A}'$ est celui défini plus haut dans le cas des préfaisceaux) est nul dans $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$.*

Si M est un $\mathscr{A}'$-Module plat, le $\mathscr{A}$-Module aM est plat d'après [**SGA 4** V 1.7.1][(x)]. L'isomorphisme $a(K \otimes_{\mathscr{A}'} M) \simeq aK \otimes_{\mathscr{A}} aM$ permet alors d'obtenir que $a(K \otimes_{\mathscr{A}'} M)$ est acyclique. Par dévissage, si M est un complexe borné formé de $\mathscr{A}'$-Modules plats, alors $a(K \otimes_{\mathscr{A}'} M)$ est acyclique. Pour tout $L \in C(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$, comme $\rho_{\mathscr{A}'}L$ est limite inductive filtrante de complexes bornés formés de $\mathscr{A}'$-Modules plats, il vient que $a(K \otimes_{\mathscr{A}'} \rho_{\mathscr{A}'}L)$ est acyclique. Comme $\rho_{\mathscr{A}'}L$ est K-plat (sur $\mathscr{A}'$), le quasi-isomorphisme $\rho_{\mathscr{A}'}K \to K$ induit un quasi-isomorphisme $\rho_{\mathscr{A}'}K \otimes_{\mathscr{A}'} \rho_{\mathscr{A}'}L \to K \otimes_{\mathscr{A}'} \rho_{\mathscr{A}'}L$. Par passage aux faisceaux associés, on en déduit des isomorphismes dans $D(\mathscr{T}, \mathscr{A}) : a(K \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}'} L) \simeq a(K \otimes_{\mathscr{A}'} \rho_{\mathscr{A}'}L) \simeq 0$.

Montrons la proposition A.2.4.1. Notons $\mathscr{Z}$ la sous-catégorie triangulée de $D(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ formée des complexes qui sont annulés par le foncteur faisceau associé $D(\mathscr{T}', \mathscr{A}') \to D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. Le foncteur induit $D(\mathscr{T}', \mathscr{A}')/\mathscr{Z} \to D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est évidemment une équivalence de catégories triangulées. D'après le lemme A.2.4.2, le bifoncteur $\overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}'}$ sur $D(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ passe au quotient par $\mathscr{Z}$ pour définit un bifoncteur sur $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. La proposition en résulte aussitôt. En effet, soit $K \in C(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ K-plat, soit $L \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ tel que L soit nul dans $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. On peut identifier L à un objet L' de $C(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ et cet objet L' appartient à la sous-catégorie triangulée $\mathscr{Z}$ de $D(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$. Le lemme montre que $K \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}'} L'$ appartient à $\mathscr{Z}$, autrement dit, K étant K-plat, que $K \otimes_{\mathscr{A}'} L'$ appartient à $\mathscr{Z}$, c'est-à-dire que le complexe de faisceaux $aK \otimes_{\mathscr{A}} L$ est acyclique, ce qui montre que $a(K \otimes_{\mathscr{A}'} L') = aK \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est K-plat.

[(x)] On laisse au lecteur le soin de trouver une démonstration alternative qui soit plus directe et qui évite de recourir aux limites inductives locales [**SGA 4** V 8] dans le cas où le topos $\mathscr{T}$ n'admettrait pas de famille conservative de points.

Corollaire A.2.4.3. — *Avec les notations de la proposition A.2.4.1, le foncteur $\rho_{\mathscr{A}}$ qui à un complexe $\mathsf{K} \in \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ associe $a\rho_{\mathscr{A}'}\mathsf{K}'$ où K' est le $\mathscr{A}'$-Module défini par K est un foncteur de résolution K-plate sur $\mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ vérifiant les conditions du théorème A.2.1.1. Ainsi, on dispose d'un bifoncteur $\overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}}$ sur $\mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ et d'un isomorphisme bifonctoriel*

$$a\mathsf{K} \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} a\mathsf{L} \simeq a(\mathsf{K} \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}'} \mathsf{L})$$

dans $\mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ pour tous K et L dans $\mathsf{D}(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$.

Avec l'énoncé de ce corollaire s'achève la démonstration du théorème A.2.1.1.

A.3. Compléments. —

A.3.1. Homomorphismes internes. —

Définition A.3.1.1. — Soit $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. On note $\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}$ le foncteur adjoint à droite du foncteur produit tensoriel $\otimes_{\mathscr{A}}$ sur $\mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, c'est-à-dire que pour X, K et L des objets de $\mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens :

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathscr{T},\mathscr{A})}(\mathsf{X} \otimes_{\mathscr{A}} \mathsf{K}, \mathsf{L}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathscr{T},\mathscr{A})}(\mathsf{X}, \mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L}))\ .$$

On note $\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L}) := \Gamma(\mathscr{T}, \mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L}))$ le complexe de groupes abéliens obtenu en appliquant le foncteur sections globales $\Gamma(\mathscr{T}, -)$ au complexe de faisceaux $\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L})$; ainsi, $\mathsf{H}^0(\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathscr{T},\mathscr{A})}(\mathsf{K}, \mathsf{L})$.

On rappelle qu'un objet $\mathsf{L} \in \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est **K-injectif** si pour tout complexe acyclique $\mathsf{K} \in \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, le complexe de groupes abéliens $\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L})$ est acyclique. On rappelle aussi qu'il existe des foncteurs de résolutions K-injectives [xi].

La proposition suivante, indiquée pour mémoire, est essentiellement triviale :

Proposition A.3.1.2. — *Soit $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}$ sur $\mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ admet un foncteur dérivé total à droite $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}} \colon \mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})^{\mathrm{opp}} \times \mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A}) \to \mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, adjoint à droite de $\overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}}$. En outre, si K et L sont des objets de $\mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, avec L K-injectif, alors le morphisme canonique*

$$\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L}) \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L})$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$; si on suppose de plus que K est K-plat, alors $\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathsf{L})$ est K-injectif. Enfin, si K, L et M sont trois objets de $\mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, on a un isomorphisme fonctoriel dans $\mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ « cher à Cartan » :

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K} \overset{\mathsf{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathsf{L}, \mathsf{M}) \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{K}, \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathsf{L}, \mathsf{M}))\ .$$

A.3.2. Compatibilité aux images inverses. —

Proposition A.3.2.1. — *Soit $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Pour tout $\mathsf{K} \in \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, la résolution K-plate $\rho_{\mathsf{A}}\mathsf{K} \in \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est telle que pour tout morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs $u \colon (\mathscr{T}', \mathscr{A}') \to (\mathscr{T}, \mathscr{A})$, le complexe $u^{\star}\rho_{\mathscr{A}}\mathsf{K} \in \mathsf{C}(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ soit K-plat.*

Comme $u^{\star}$ et $\rho_{\mathscr{A}}$ commutent aux limites inductives filtrantes, on peut supposer que K est un complexe borné. Le complexe $\rho_{\mathscr{A}}\mathsf{K}$ est alors un complexe borné supérieurement. D'après la proposition A.1.2, il suffit pour conclure de montrer que $u^{\star}\rho_{\mathsf{A}}\mathsf{K}$ est formé de $\mathscr{A}$-Modules plats. Si on note $\mathsf{F}_{\mathscr{A}}$ (resp. $\mathsf{F}_{\mathscr{A}'}$) le foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathscr{A}$-Modules (resp. $\mathscr{A}'$-Modules) vers celle des faisceaux d'ensembles pointés sur $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{T}'$), pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe un faisceau d'ensembles pointés X^n sur $\mathscr{T}$ tel que $(\rho_{\mathsf{A}}\mathsf{K})^n \simeq \mathsf{F}_{\mathscr{A}}\mathsf{X}^n$ et donc $(u^{\star}\rho_{\mathsf{A}}\mathsf{K})^n \simeq u^{\star}\mathsf{F}_{\mathscr{A}}\mathsf{X}^n \simeq \mathsf{F}_{\mathscr{A}'}u^{-1}\mathsf{X}^n$, où u^{-1} est le foncteur image inverse associé à u au niveau des faisceaux d'ensembles pointés. Ceci permet de conclure que $u^{\star}\rho_{\mathsf{A}}\mathsf{K}$ est formé de $\mathscr{A}'$-Modules plats.

Proposition A.3.2.2. — *Soit $u \colon (\mathscr{T}', \mathscr{A}') \to (\mathscr{T}, \mathscr{A})$ un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Le foncteur $u^{\star} \circ \rho_{\mathscr{A}} \colon \mathsf{C}(\mathscr{T}', \mathscr{A}') \to \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ préserve les quasi-isomorphismes et induit un foncteur que l'on note $\mathrm{L}u^{\star} \colon \mathsf{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A}) \to \mathsf{D}(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ qui est le foncteur dérivé total à gauche de $u^{\star} \colon \mathsf{C}(\mathscr{T}, \mathscr{A}) \to \mathsf{C}(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$.*

[xi] Ce résultat est énoncé dans [**Spaltenstein, 1988**, § 4] dans le cadre des espaces topologiques annelés, mais la démonstration peut être étendue au cas des topos annelés. Le principe de la démonstration est similaire à celui utilisé par Grothendieck pour montrer l'existence de suffisamment d'injectifs dans les catégories de faisceaux dans [**Grothendieck, 1957**, § I.10] ; dans le contexte de l'algèbre homotopique, cet argument est connu sous le nom de « raisonnement du petit objet ». On peut trouver une démonstration pour le cas qui nous intéresse dans [**Hovey, 2001**].

Il faut montrer que si $K_1 \to K_2$ est un quasi-isomorphisme dans $C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$, alors $u^\star \rho_{\mathscr{A}} K_1 \to u^\star \rho_{\mathscr{A}} K_2$ est un quasi-isomorphisme. Notons $u^{-1}\mathscr{A}$ le faisceau d'anneaux image inverse de $\mathscr{A}$ et $u' \colon (\mathscr{T}', u^{-1}\mathscr{A}) \to (\mathscr{T}, \mathscr{A})$ le morphisme de topos annelés évident. En appliquant la proposition A.3.2.1 à u', il vient que $u^{-1}\rho_{\mathscr{A}} K_1$ et $u^{-1}\rho_{\mathscr{A}} K_2$ sont des complexes K-plats de $u^{-1}\mathscr{A}$-Modules. Notons $C \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ le cône de $\rho_{\mathscr{A}} K_1 \to \rho_{\mathscr{A}} K_2$. Le complexe $u^{-1}C$ s'identifiant au cône de $u^{-1}\rho_{\mathscr{A}} K_1 \to u^{-1}\rho_{\mathscr{A}} K_2$, il vient que $u^{-1}C$ est K-plat. Comme u^{-1} est exact et C acyclique, il vient que $u^{-1}C$ est acyclique. La K-platitude de $u^{-1}C$ conduit à des quasi-isomorphismes $u^\star C = \mathscr{A}' \otimes_{u^{-1}\mathscr{A}} u^{-1}C \simeq \rho_{u^{-1}\mathscr{A}}\mathscr{A}' \otimes_{u^{-1}\mathscr{A}} u^{-1}C$. L'acyclicité de $u^{-1}C$ et la K-platitude de $\rho_{u^{-1}\mathscr{A}}\mathscr{A}'$ implique ensuite que $\rho_{u^{-1}\mathscr{A}}\mathscr{A}' \otimes_{u^{-1}\mathscr{A}} u^{-1}C$ est acyclique. Finalement, $u^\star C$ est acyclique et comme $u^\star C$ s'identifie au cône du morphisme $u^\star \rho_{\mathscr{A}} K_1 \to u^\star \rho_{\mathscr{A}} K_2$, ce morphisme de complexes est un quasi-isomorphisme.

Corollaire A.3.2.3. — *Soit $u \colon (\mathscr{T}, \mathscr{A}) \to (\mathscr{T}', \mathscr{A}')$ un morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs. Pour tous K et L objets de $D(\mathscr{T}', \mathscr{A}')$, on a un isomorphisme canonique*

$$Lu^\star K \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}} Lu^\star L \simeq Lu^\star(K \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}'} L)$$

dans $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$.

Corollaire A.3.2.4. — *Si u et v sont des morphismes composables de topos annelés en anneaux commutatifs, alors on a un isomorphisme canonique de foncteurs $Lv^\star \circ Lu^\star \xrightarrow{\sim} L(u \circ v)^\star$.*

Remarque A.3.2.5. — Il est possible d'établir un énoncé plus précis que la proposition A.3.2.1, à savoir que pour tout morphisme de topos annelés en anneaux commutatifs $u \colon (\mathscr{T}', \mathscr{A}') \to (\mathscr{T}, \mathscr{A})$, si $K \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est K-plat, alors $u^\star K$ est K-plat. Compte tenu de la proposition A.3.2.1, on se ramène à montrer que si $K \in C(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ est K-plat et acyclique, alors $(u^\star K) \otimes_{\mathscr{A}'} L$ est acyclique pour tout $\mathscr{A}'$-Module L et ceci peut se démontrer grâce à la méthode des limites inductives locales utilisées dans [**SGA 4** V 8.2.9] (ou en utilisant une famille conservative de foncteurs fibres si les topos considérés en possèdent). La conclusion de cette remarque est que pour calculer $Lu^\star K$ il suffit d'appliquer $u^\star$ à une résolution K-plate *arbitraire* de K.

Appendice B
Complexes inversibles

Proposition B.1. — *Soit A un anneau commutatif. Soit $X \in D(A)$. Soit $Y \in D(A)$. Soit $X \overset{L}{\otimes}_A Y \simeq A$ un isomorphisme dans $D(A)$. Alors, il existe une fonction localement constante $k \colon \operatorname{Spec}(A) \to \mathbf{Z}$, un A-module inversible L et des isomorphismes $X \simeq L[k]$ et $Y \simeq L^\vee[-k]$ (le foncteur de décalage $[k]$ étant défini de façon évidente).*

Ce résultat apparaît dans [**Hartshorne, 1966**, lemma 3.3, Chapter V] sous des hypothèses supplémentaires disant que A est noethérien et que X et Y sont dans $D^-_c(A)$. Cette version en implique évidemment une autre où on demande à A d'être noethérien et à X et Y d'être des complexes parfaits. Il est alors facile de supprimer l'hypothèse noethérienne (cf. [**ÉGA** IV 8]). Bref, pour achever la démonstration, il suffit de montrer que dans les conditions de la proposition ci-dessus, le complexe X (et donc Y par symétrie des rôles) est un complexe parfait. On dit d'un objet X de $D(A)$ qu'il est de **présentation finie** si le foncteur $\operatorname{Hom}_{D(A)}(X, -)$ de $D(A)$ vers la catégorie des groupes abéliens commute aux sommes directes (infinies). On peut montrer que $X \in D(A)$ est un complexe parfait si et seulement s'il est de présentation finie [xii]. De l'isomorphisme $X \overset{L}{\otimes}_A Y \simeq A$, on tire un isomorphisme de foncteurs $R\,\mathbf{Hom}(X, -) \simeq Y \overset{L}{\otimes}_A - \colon D(A) \to D(A)$. Comme le foncteur $Y \overset{L}{\otimes}_A -$ commute évidemment aux sommes directes, c'est aussi le cas du foncteur $\operatorname{Hom}_{D(A)}(X, -)$, ce qui montre que X est de présentation finie : il s'agit d'un complexe parfait.

Proposition B.2. — *Soit $(\mathscr{T}, \mathscr{A})$ un topos annelé en anneaux commutatifs. Soit $X \in D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. Soit $Y \in D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. Soit $X \overset{L}{\otimes}_{\mathscr{A}} Y \simeq \mathscr{A}$ un isomorphisme dans $D(\mathscr{T}, \mathscr{A})$. Alors, l'objet final de $\mathscr{T}$ est recouvert par des objets U tels que $X_{|U}$ et $Y_{|U}$ puissent être induits par des complexes parfaits X' et Y' de $D(\mathscr{A}(U))$ et que l'on ait un isomorphisme*

[xii] Il s'agit d'un bon exercice. Toutefois, on peut aussi obtenir ce critère en utilisant des principes généraux. L'objet A de $D(A)$ est un générateur de présentation finie (*i.e.* le foncteur cohomologique $\operatorname{Hom}_{D(A)}(A, -)$ commute aux sommes directes et est conservatif) ; la sous-catégorie triangulée de $D(A)$ formée des objets de présentation finie est donc l'enveloppe pseudo-abélienne de la sous-catégorie triangulée engendrée par A, c'est-à-dire la sous-catégorie des complexes parfaits : combiner [**Neeman, 2001**, proposition 8.4.1], [**Neeman, 2001**, lemma 4.4.5] et [**Neeman, 2001**, remark 4.2.6].

$X' \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}(\mathrm{U})} Y' \simeq \mathscr{A}(\mathrm{U})$ *compatible à l'isomorphisme donné ; la forme des complexes* X' *et* Y' *est donc connue grâce à la proposition B.1.*

Démontrons la proposition B.2. On peut supposer que $\mathscr{T}$ est le topos des faisceaux sur un site $\mathscr{C}$. Notons $\mathscr{T}'$ le topos des préfaisceaux sur la catégorie sous-jacente au site $\mathscr{C}$, elle aussi notée $\mathscr{C}$, et $\mathscr{A}'$ le préfaisceau d'anneaux sur $\mathscr{C}$ défini par $\mathscr{A}$. On peut identifier $X \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} Y$ au faisceau associé à $\rho_{\mathscr{A}'}X \otimes_{\mathscr{A}'} \rho_{\mathscr{A}'}Y$ où $\rho_{\mathscr{A}'}$ est le foncteur de résolution K-plate défini dans le paragraphe A.2.3. Ainsi, l'isomorphisme donné $\mathscr{A} \xrightarrow{\sim} X \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} Y$ peut être représenté localement par un 0-cocycle s de $(\rho_{\mathscr{A}'}X \otimes_{\mathscr{A}'} \rho_{\mathscr{A}'}Y)(\mathrm{U}) = \rho_{\mathscr{A}(\mathrm{U})}(X(\mathrm{U})) \otimes_{\mathscr{A}(\mathrm{U})} \rho_{\mathscr{A}(\mathrm{U})}(Y(\mathrm{U}))$. Soit U un objet de $\mathscr{C}$ sur lequel une telle description est possible. Par construction de $\rho_{\mathscr{A}(\mathrm{U})}$, il vient qu'il existe des sous-complexes bornés formés de $\mathscr{A}(\mathrm{U})$-modules libres de type fini X' de $\rho_{\mathscr{A}(\mathrm{U})}(X(\mathrm{U}))$ et Y' de $\rho_{\mathscr{A}(\mathrm{U})}(X(\mathrm{U}))$ tels que $X' \otimes_{\mathscr{A}(\mathrm{U})} Y'$ contienne s. Notons $\mathscr{T}_{|\mathrm{U}}$ le topos des faisceaux sur $\mathscr{T}$ au-dessus de U (un site sous-jacent est donné par la catégorie $\mathscr{C}/\mathrm{U}$). On dispose d'un morphisme de topos annelés évident π de $(\mathscr{T}_{|\mathrm{U}}, \mathscr{A}_{|\mathrm{U}})$ vers le topos ponctuel muni de l'anneau $\mathscr{A}(\mathrm{U})$. Posons $X'' = \pi^\star X'$ et $Y'' = \pi^\star Y'$: ce sont des complexes strictement parfaits sur $\mathscr{T}_{|\mathrm{U}}$. On dispose de morphismes évidents $X'' \to X_{|\mathrm{U}}$ et $Y'' \to Y_{|\mathrm{U}}$ dans $\mathrm{D}(\mathscr{T}_{|\mathrm{U}}, \mathscr{A}_{|\mathrm{U}})$ et d'après ce qui précède, on a un morphisme $\mathscr{A}_{|\mathrm{U}} \to X'' \otimes_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y''$ factorisant l'isomorphisme $\mathscr{A}_{|\mathrm{U}} \simeq X_{|\mathrm{U}} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y_{|\mathrm{U}}$. Bref, $\mathscr{A}_{|\mathrm{U}} \simeq X_{|\mathrm{U}} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y_{|\mathrm{U}}$ est un facteur direct de $X'' \otimes_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y''$. Par ailleurs, l'isomorphisme $\mathscr{A}_{|\mathrm{U}} \xrightarrow{\sim} X_{|\mathrm{U}} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y_{|\mathrm{U}}$ se factorise aussi par $X'' \otimes_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y_{|\mathrm{U}}$, donc $\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}$ est un facteur direct de $X'' \otimes_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y_{|\mathrm{U}}$ dans $\mathrm{D}(\mathscr{T}, \mathscr{A})$; en tensorisant ce fait avec $X_{|\mathrm{U}}$, on obtient que $X_{|\mathrm{U}}$ est un facteur direct de X''. Soit $p\colon X'' \to X''$ un projecteur dont l'image soit isomorphe à $X_{|\mathrm{U}}$. Comme X' et Y' sont (strictement) parfaits, quitte à remplacer U par une famille d'objets le recouvrant, on peut supposer que p provient d'un projecteur $\tilde{p}$ sur X' dans $\mathrm{D}(\mathscr{A}(\mathrm{U}))$. L'image de $\tilde{p}$ est un complexe parfait $\tilde{X}$ dans $\mathrm{D}(\mathscr{A}(\mathrm{U}))$ induisant $X_{|\mathrm{U}}$. De même, on peut supposer que $Y_{|\mathrm{U}}$ est induit par un complexe parfait de $\mathscr{A}(\mathrm{U})$-modules $\tilde{Y}$. Quitte à raffiner le recouvrement de U, on peut donc supposer que l'isomorphisme $\mathscr{A}_{|\mathrm{U}} \xrightarrow{\sim} X_{|\mathrm{U}} \otimes_{\mathscr{A}_{|\mathrm{U}}} Y_{|\mathrm{U}}$ est induit par un morphisme $\tilde{s}\colon \mathscr{A}(\mathrm{U}) \to \tilde{X} \otimes_{\mathscr{A}(\mathrm{U})} \tilde{Y}$. Notons C un cône de $\tilde{s}$. Le complexe C est parfait et vérifie $\pi^\star C \simeq 0$. Il en résulte que quitte à raffiner le recouvrement de U, on peut supposer que C est acyclique, c'est-à-dire que $\tilde{s}$ est un isomorphisme.

Appendice C

Coefficients universels

C.1. Énoncés pour $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}$. —

Proposition C.1.1. — *Soit* Z *un schéma noethérien. Soit* A *un anneau commutatif noethérien. Soit* $X \in \mathrm{D}^-_{\mathrm{c}}(Z_{\text{ét}}, A)$. *Soit* $Y \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$. *On suppose ou bien que* A *est un corps ou bien que* $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A Y)$ *est borné indépendamment du* A*-module* M. *Alors, pour tout* $M \in \mathrm{D}^+(A)$, *le morphisme canonique*

$$M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, Y) \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A Y)$$

est un isomorphisme. En outre, si on est dans le cas où $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A Y)$ *est borné indépendamment du* A*-module* M, *alors* $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, Y) \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$.

On note $u_M\colon M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, Y) \to \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A Y)$ le morphisme canonique, pour tout $M \in \mathrm{D}^+(Z_{\text{ét}}, A)$. L'hypothèse selon laquelle $X \in \mathrm{D}^-_{\mathrm{c}}(Z_{\text{ét}}, A)$ implique que les foncteurs $\mathbf{Ext}^q(X, -) = \mathscr{H}^q\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, -)$ commutent aux limites inductives filtrantes de faisceaux de A-modules sur Z. En particulier, le foncteur $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, -)$ de la catégorie $\mathrm{D}^+(Z_{\text{ét}}, A)$ dans elle-même commute aux sommes directes représentables. On en déduit que u_M est un isomorphisme si M est un A-module libre. Par suite, si M est un complexe borné de A-modules libres, alors u_M est un isomorphisme ; si A est un corps, on peut conclure que u_M est un isomorphisme pour tout $M \in \mathrm{D}^+(A)$.

On se place dorénavant dans le cas où $\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(X, M \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A-module M. Soit $M \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A)$. Montrons que u_M est un isomorphisme. Pour tout entier relatif q, il existe un morphisme $P \to M$ avec P un complexe borné de A-modules libres tel que si on note C un cône de ce morphisme, alors $C \leq q$ (de telles inégalités sont à comprendre relativement à la t-structure canonique). On considère le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} P \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}(X,Y) \arrow[r, "u_P", "\sim"'] \arrow[d] & R\,\mathbf{Hom}(X, P \overset{L}{\otimes}_A Y) \arrow[d] \\ M \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}(X,Y) \arrow[r, "u_M"] & R\,\mathbf{Hom}(X, M \overset{L}{\otimes}_A Y) \end{tikzcd}$$

Notons N le plus petit entier naturel tel que $R\,\mathbf{Hom}(X, V \overset{L}{\otimes}_A Y)$ soit $\leq N$ pour tout A-module V. Par dévissage, on obtient que les cônes des flèches verticales du diagramme ci-dessus sont $\leq q+N$. Les deux flèches verticales induisent donc des isomorphismes sur les objets de cohomologie $\mathscr{H}^i$ pour $i \geq q+N+2$. La flèche du haut étant un isomorphisme, la flèche du bas induit aussi des isomorphismes sur les $\mathscr{H}^i$ pour $i \geq q+N+2$. Ce fait étant vérifié pour tout $q \in \mathbf{Z}$, le morphisme du bas est bien un isomorphisme.

On déduit aussitôt de ce qui précède que $R\,\mathbf{Hom}(X,Y) \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$. On sait par ailleurs que $Y \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$ et que $X \in \mathsf{D}^-(Z_{\text{ét}}, A)$. Par conséquent, il existe un entier relatif N' tel que si $M \in \mathsf{D}^{\geq c}(A)$ pour un certain entier c, alors la source et le but de u_M sont $\geq c + N'$. En raisonnant comme ci-dessus, on déduit du fait que u_M soit un isomorphisme pour tout $M \in \mathsf{D}^b(A)$ que ce résultat vaut en fait pour tout $M \in \mathsf{D}^+(A)$.

Proposition C.1.2. — *Soit Z un schéma. Soit A un anneau commutatif. Soit $Y \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$. Soit M un complexe pseudo-cohérent dans $\mathsf{D}(A)$*[(xiii)]. *Soit $N \in \mathsf{D}^+(A)$. Alors, le morphisme canonique*

$$\mathrm{RHom}(M,N) \overset{L}{\otimes}_A Y \to R\,\mathbf{Hom}(M, N \overset{L}{\otimes}_A Y)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}^+(Z_{\text{ét}}, A)$. (On a noté RHom *le hom. interne dans $\mathsf{D}(A)$.)*

On fixe $N \in \mathsf{D}^+(A)$. Pour tout $M \in \mathsf{D}(A)$, notons ν_M le morphisme canonique

$$\mathrm{RHom}(M,N) \overset{L}{\otimes}_A Y \to R\,\mathbf{Hom}(M, N \overset{L}{\otimes}_A Y)\ .$$

Bien entendu, si $M \in \mathsf{D}(A)$ est un complexe parfait, ν_M est un isomorphisme. Pour tout $M \in \mathsf{D}(A)$ pseudo-cohérent et tout entier relatif q, il existe un morphisme $P \to M$ avec P parfait dont le cône soit $\leq q$. Pour pouvoir déduire que ν_M est un isomorphisme pour tout $M \in \mathsf{D}(A)$ du cas particulier où M est supposé parfait, il suffit donc de montrer qu'il existe un entier relatif c tel que pour tout entier q et tout $M \in \mathsf{D}^{\leq q}(A)$, la source et le but de ν_M soient $\geq -q + c$. Notons a un entier tel que $N \geq a$ et b un entier tel que pour tout A-module V, $V \overset{L}{\otimes}_A Y \geq b$. On vérifie aussitôt que $c = a + b$ convient, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition C.1.3. — *Soit Z un schéma noethérien. Soit A un anneau commutatif noethérien. Soit $X \in \mathsf{D}^-_c(Z_{\text{ét}}, A)$. Soit $Y \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$. On suppose ou bien que A est un corps ou bien que $R\,\mathbf{Hom}(X, N \overset{L}{\otimes}_A Y)$ est borné indépendamment du A-module N. Soit B une A-algèbre. Alors, pour tout complexe pseudo-cohérent $M \in \mathsf{D}(B)$ et pour tout $N \in \mathsf{D}^+(B)$, le morphisme canonique*

$$\mathrm{RHom}_B(M,N) \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(X,Y) \to R\,\mathbf{Hom}_B(M \overset{L}{\otimes}_A X, N \overset{L}{\otimes}_A Y)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}(Z_{\text{ét}}, B)$.

Les hypothèses font que $\mathrm{RHom}_B(M,N)$ appartient à $\mathsf{D}^+(B)$. Si A n'est pas un corps, on peut appliquer le résultat de la proposition C.1.2 en remplaçant respectivement A, M, N et Y par B, M, N et $B \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(X,Y)$ (on notera que $R\,\mathbf{Hom}_A(X,Y) \in \mathsf{D}^b_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$ d'après la proposition C.1.1). On obtient ainsi un isomorphisme canonique

$$\mathrm{RHom}_B(M,N) \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(X,Y) \xrightarrow{\sim} R\,\mathbf{Hom}_B(M, N \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(X,Y))\ .$$

Si A est un corps, on établit cet isomorphisme par un argument similaire en se ramenant au cas où M est un complexe parfait de B-modules. En appliquant maintenant la proposition C.1.1, on obtient un nouvel isomorphisme :

$$R\,\mathbf{Hom}_B(M, N \overset{L}{\otimes}_A R\,\mathbf{Hom}_A(X,Y)) \xrightarrow{\sim} R\,\mathbf{Hom}_B(M, R\,\mathbf{Hom}_A(X, N \overset{L}{\otimes}_A Y))\ .$$

[(xiii)] On rappelle que cela signifie que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe un morphisme de complexes $P \to M$ induisant des isomorphismes $H^q P \to H^q M$ pour $q \geq n$ où P est un complexe strictement parfait de A-modules (c'est-à-dire que P est borné et formé de A-modules projectifs de type fini).

Enfin, on utilise l'isomorphisme cher à Cartan :

$$\mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{B}(M, \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{A}(X, N \overset{L}{\otimes}_{A} Y)) \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{B}(M \overset{L}{\otimes}_{A} X, N \overset{L}{\otimes}_{A} Y)\ .$$

L'isomorphisme voulu est l'isomorphisme obtenu en composant les différents isomorphismes canoniques ci-dessus.

C.2. Conséquences pour $\mathrm{R}j_\star$ et $i^!$. —

Proposition C.2.1. — *Soit* $j\colon U \to X$ *une immersion ouverte entre schémas noethériens. Soit* A *un anneau commutatif noethérien. Soit* $Y \in \mathsf{D}^{b}_{\mathrm{tf}}(U_{\text{ét}}, A)$*. On suppose ou bien que* A *est un corps ou bien que* $\mathrm{R}j_\star(M \overset{L}{\otimes}_{A} Y)$ *est borné indépendamment du* A*-module* M*. Alors, pour tout* $M \in \mathsf{D}^{+}(A)$*, le morphisme canonique*

$$M \overset{L}{\otimes}_{A} \mathrm{R}j_\star Y \to \mathrm{R}j_\star(M \overset{L}{\otimes}_{A} Y)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}(X_{\text{ét}}, A)$*. Si* $\mathrm{R}j_\star(M \overset{L}{\otimes}_{A} Y)$ *est borné indépendamment du* A*-module* M*, alors* $\mathrm{R}j_\star Y$ *appartient à* $\mathsf{D}^{b}_{\mathrm{tf}}(X_{\text{ét}}, A)$*.*

Ceci résulte de la proposition C.1.1, compte tenu de la formule $\mathrm{R}j_\star Y \simeq \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(j_!A, j_!Y)$ pour tout $Y \in \mathsf{D}(U_{\text{ét}}, A)$.

Proposition C.2.2. — *Soit* $i\colon Z \to X$ *une immersion fermée entre schémas noethériens. Soit* A *un anneau commutatif noethérien. Soit* $Y \in \mathsf{D}^{b}_{\mathrm{tf}}(X_{\text{ét}}, A)$*. On suppose ou bien que* A *est un corps ou bien que* $i^!(M \overset{L}{\otimes}_{A} Y)$ *est borné indépendamment du* A*-module* M*. Alors, pour tout* $M \in \mathsf{D}^{+}(A)$*, le morphisme canonique*

$$M \overset{L}{\otimes}_{A} i^! Y \to i^!(M \overset{L}{\otimes}_{A} Y)$$

est un isomorphisme dans $\mathsf{D}(Z_{\text{ét}}, A)$*. Si* $i^!(M \overset{L}{\otimes}_{A} Y)$ *est borné indépendamment du* A*-module* M*, alors* $i^! Y$ *appartient à* $\mathsf{D}^{b}_{\mathrm{tf}}(Z_{\text{ét}}, A)$*.*

Cette fois-ci, on utilise la formule $i^! Y \simeq i^\star \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}(i_\star A, Y)$.

Appendice D
Modules ind-unipotents

D.1. Définitions. — Soit G un groupe topologique. Soit A un anneau. On appellera ici $A[G]$-module un $A[G]$-module (à gauche) au sens où on l'entend usuellement quand G est un groupe qui n'est pas muni d'une topologie. Un $A[G]$-module discret est un $A[G]$-module dans lequel le stabilisateur de tout élément est ouvert. Un $A[G]$-module est dit **trivial** si le groupe G agit trivialement sur lui ; un tel $A[G]$-module est discret. On note I_G l'idéal d'augmentation de $A[G]$; un $A[G]$-module est trivial si et seulement s'il est annulé par I_G.

La catégorie des $A[G]$-modules discrets est une catégorie abélienne de Grothendieck ; le foncteur d'inclusion de cette catégorie dans celle des $A[G]$-modules est exact, commute aux limites inductives, mais en général pas aux limites projectives. La catégorie des $A[G]$-modules discrets est stable par sous-quotient (mais en général pas par extensions) dans celle des $A[G]$-modules.

Définition D.1.1. — Un $A[G]$-module discret est **unipotent** s'il admet une filtration finie dont les quotients successifs sont des $A[G]$-modules triviaux. L'**ordre d'unipotence** d'un $A[G]$-module unipotent est la plus petite longueur d'une telle filtration ; ainsi, un $A[G]$-module trivial non nul est unipotent d'ordre 1. Un $A[G]$-module discret est **ind-unipotent** si tous ses sous-$A[G]$-modules de type fini sont unipotents.

Définition D.1.2. — Soit M un $A[G]$-module discret. On définit par récurrence une filtration croissante $(\mathrm{Fil}_n M)_{n \in \mathbf{Z}}$ de M par des sous $A[G]$-modules, de façon à ce que $\mathrm{Fil}_0 M = 0$ et que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on ait un isomorphisme canonique $\mathrm{Fil}_{n+1} M / \mathrm{Fil}_n M \simeq H^0(G, M/\mathrm{Fil}_n M) \subset M/\mathrm{Fil}_n M$.

La filtration $\mathrm{Fil}_\bullet M$ est évidemment fonctorielle en M au sens où si $f\colon M \to M'$ est un morphisme de $A[G]$-modules, alors $f(\mathrm{Fil}_n M) \subset \mathrm{Fil}_n(M')$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

D.2. Propriétés. —

Proposition D.2.1. — *Les notions d'unipotence et d'ind-unipotence des* $A[G]$*-modules discrets jouissent des propriétés suivantes :*

(i) *Le caractère unipotent des* $A[G]$*-modules discrets est stable par sous-quotients et extensions ; l'ordre d'unipotence décroît par passage à un sous-quotient et est sous-additif vis-à-vis des extensions ;*
(ii) *Le caractère ind-unipotent des* $A[G]$*-modules discrets est stable par sous-quotients, et, si* G *est profini, par extensions ;*
(iii) *La catégorie des* $A[G]$*-modules discrets unipotents (resp. ind-unipotents) est abélienne, le foncteur d'inclusion dans celle des* $A[G]$*-modules discrets est exact ;*
(iv) *Un* $A[G]$*-module discret* M *est unipotent si et seulement s'il existe un entier naturel* n *tel que* $\mathrm{Fil}_n\, M = M$ *; dans ce cas, l'ordre d'unipotence de* M *est le plus petit de ces entiers* n *;*
(v) *Le caractère unipotent (resp. ind-unipotent) d'un* $A[G]$*-module discret ne dépend pas de l'anneau des coefficients* A *et cette notion n'est pas altérée non plus si on considère* G *comme groupe discret ;*
(vi) *Pour tout entier naturel* n *et tout* $A[G]$*-module discret,* $\mathrm{Fil}_n\, M$ *est l'annulateur de* I_G^n *dans* M *;*
(vii) *Pour tout entier naturel* n*, un* $A[G]$*-module discret est unipotent d'ordre au plus* n *si et seulement s'il est annulé par l'idéal* I_G^n*. Un* $A[G]$*-module discret* M *est ind-unipotent si et seulement si tout élément de* M *est annulé par une puissance de* I_G*, c'est-à-dire que* $M = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Fil}_n\, M$ *;*
(viii) *Un* $A[G]$*-module discret unipotent est ind-unipotent ;*
(ix) *Un* $A[G]$*-module discret de type fini est unipotent si et seulement s'il est ind-unipotent ;*
(x) *Une somme directe (resp. une limite inductive) de* $A[G]$*-modules discrets ind-unipotents est un* $A[G]$*-module discret ind-unipotent.*
(xi) *Les* $A[G]$*-modules discrets ind-unipotents sont exactement les* $A[G]$*-modules limites inductives filtrantes de* $A[G]$*-modules discrets unipotents.*

Montrons (i). Si $(M, F_\bullet M)$ est un $A[G]$-module discret filtré, tout sous-objet M' (resp. sous-quotient M'') de M est naturellement muni d'une filtration $F_\bullet M'$ (resp. $F_\bullet M''$) telle que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le morphisme induit au niveau des gradués $\mathrm{Gr}_n\, M' \to \mathrm{Gr}_n\, M$ (resp. $\mathrm{Gr}_n\, M \to \mathrm{Gr}_n\, M''$) soit injectif (resp. surjectif) ; comme tout sous-quotient d'un $A[G]$-module trivial est trivial, il en résulte aussitôt que le caractère unipotent d'un $A[G]$-module est stable par sous-quotient et que l'ordre d'unipotence décroît dans cette opération. Il est évident sur la définition que le caractère unipotent des $A[G]$-modules discrets est stable par extensions, et que l'ordre d'unipotence est sous-additif vis-à-vis d'elles. (viii) est une conséquence triviale de (i).

Montrons la propriété (iv). Soit M un $A[G]$-module discret. Si $\mathrm{Fil}_n\, M = M$, la filtration $(\mathrm{Fil}_i\, M)_{0\leq i\leq n}$ est une filtration finie de M de longueur n dont les quotients successifs sont triviaux ; ainsi, M est unipotent d'ordre au plus n. Inversement, soit M un $A[G]$-module muni d'une filtration $(F_i M)_{i\geq 0}$ telle que $F_0 M = 0$ et dont les quotients successifs soient triviaux. Une récurrence évidente sur $i \in \mathbf{N}$ montre que l'on a une inclusion $F_i M \subset \mathrm{Fil}_i\, M$, de sorte que si un entier naturel n est tel que $F_n M = M$, alors $\mathrm{Fil}_n\, M = M$.

Dans le cas unipotent, la propriété (v) est une conséquence de la propriété (iv) : la filtration $\mathrm{Fil}_\bullet\, M$ est la même que l'on considère M comme $A[G]$-module ou comme $\mathbf{Z}[G]$-module, et que l'on considère G comme un authentique groupe topologique ou comme un groupe discret. Quand ce ne sera pas pertinent, on ne précisera donc pas systématiquement dans la suite que les $A[G]$-modules sont discrets.

Concernant la propriété (vi), il est facile de montrer par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\mathrm{Fil}_n\, M$ est l'annulateur de I_G^n dans M.

Considérons (vii). On déduit trivialement de (iv) et (vi) qu'un $A[G]$-module discret est unipotent d'ordre au plus n si et seulement s'il est annulé par I_G^n. Montrons l'autre partie de (vii). Soit M un $A[G]$-module discret ind-unipotent. Pour tout $m \in M$, le sous-$A[G]$-module de M engendré par m est unipotent, d'après ce qu'on vient de montrer, ce module est annulé par une puissance de I_G, en particulier, m est annulé par I_G^n pour un certain entier naturel n. Inversement, supposons que tout élément de M soit annulé par un puissance de I_G. Si on considère un sous-$A[G]$-module de type fini N de M, en appliquant l'hypothèse aux éléments d'un ensemble fini de générateurs de N, on obtient que N est annulé par I_G^n pour un certain entier naturel n, et donc que N est unipotent. Ceci achève la démonstration de (vii). On sait donc qu'un $A[G]$-module discret M est ind-unipotent si et seulement si $M = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Fil}_n\, M$. Comme la filtration $\mathrm{Fil}_n\, M$ ne dépend pas de la topologie de G ni de l'anneau des coefficients A, on peut obtenir (v). La propriété (ix) est une conséquence immédiate de (vii). La stabilité par sommes directes et sous-quotients du caractère ind-unipotent en résulte aussi, ce qui établit (x).

Supposons G profini et montrons la stabilité par extensions des $A[G]$-modules discrets ind-unipotents, ce qui achèvera la démonstration de (ii). D'après (v), on peut supposer que $A = \mathbf{Z}$. On se donne une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de $\mathbf{Z}[G]$-modules discrets avec M' et M'' ind-unipotents. Soit N un sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de type fini de M. Il s'agit de montrer que N est unipotent. On peut considérer l'image N'' de N dans M'', et N' le noyau de la projection $N \to N''$. Le $\mathbf{Z}[G]$-module N' (resp. N'') est un sous-$\mathbf{Z}[G]$-module de M' (resp. de M''). Par passage à des sous-objets, N' et N'' sont ind-unipotents. Le groupe G étant profini et N un $\mathbf{Z}[G]$-module discret, N est un groupe abélien de type fini ; les groupes abéliens N' et N'' qui en sont des sous-quotients sont eux aussi de type fini. D'après (ix), N' et N'' sont unipotents ; d'après (i), N est unipotent, ce qui achève la démonstration de (ii).

(iii) résulte aussitôt de (i) et (ii). Enfin, (xi) découle de (vii), (viii) et (x).

Remarque D.2.2. — Si $H \to G$ est un morphisme de groupes topologiques et M un $A[G]$-module unipotent (resp. ind-unipotent), alors, en tant que $A[H]$-module, M est unipotent (resp. ind-unipotent).

D.3. Modules ind-unipotents pour un sous-groupe distingué. — Soit A un anneau. Soit G un groupe topologique. Soit H un sous-groupe distingué (fermé) de G. Si M est un $A[G]$-module discret, on peut se demander si en tant que $A[H]$-module, M est unipotent (resp. ind-unipotent).

Dans cette situation, on note $\mathrm{Fil}_\bullet M$ la filtration de la définition D.1.2 pour le groupe H. Le fait que H soit distingué dans G permet d'obtenir aussitôt que cette filtration $\mathrm{Fil}_\bullet M$ est constituée de sous-$A[G]$-modules de M. De cette remarque et de la proposition D.2.1 (iv), on tire :

Proposition D.3.1. — *Soit M un $A[G]$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *en tant que $A[H]$-module, M est unipotent ;*
- *il existe une filtration finie de M par des sous-$A[G]$-modules telle que H agisse trivialement sur les quotients successifs.*

Proposition D.3.2. — *Soit M un $A[G]$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *en tant que $A[H]$-module, M est ind-unipotent ;*
- *tout sous-$A[G]$-module de type fini de M est unipotent pour H.*

Il s'agit de montrer que si un sous-$A[H]$-module N de M de type fini est unipotent, alors le sous-$A[G]$-module (de type fini) de M engendré par N est unipotent pour H. Pour montrer cela, il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme D.3.3. — *Soit M un $A[H]$-module unipotent. En tant que $A[H]$-module, $A[G] \otimes_{A[H]} M$ est unipotent.*

Notons $\rho \colon H \to \mathrm{Aut}_A(M)$ le morphisme définissant l'action de H sur M. Pour tout $g \in G$, notons $c_g \colon H \to H$ l'application $h \longmapsto ghg^{-1}$ et M^g le H-module défini par le morphisme $\rho \circ c_g \colon H \to \mathrm{Aut}_A(M)$. Le $A[H]$-module $A[G] \otimes_{A[H]} M$ s'identifie à $\oplus_{i \in I} H^{g_i}$ où $(g_i)_{i \in I}$ est un ensemble de représentants de G/H. Comme H est unipotent, il est évident que les $A[H]$-modules M^{g_i} sont unipotents et qu'ils ont tous le même ordre d'unipotence. On en déduit facilement que $A[G] \otimes_{A[G]} M$ est unipotent pour H.

Maintenant que les définitions d'unipotence et de ind-unipotences pour le sous-groupe distingué H sont clarifiées, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition D.3.4. — *Les énoncés de la proposition D.2.1 restent vrais si on remplace « unipotent » par « unipotent pour H », « ind-unipotent » par « ind-unipotent pour H » et I_G par I_H, et que, comme ci-dessus, on définit la filtration $\mathrm{Fil}_\bullet$ relativement au groupe H.*

Compte tenu des clarifications faites ci-dessus, c'est trivial.

Appendice E

Le morphisme de bidualité

Le morphisme de bidualité $L \to D_K D_K L$ étudié dans cet exposé a été défini en exp. **XVI**, 4.7.7. Nous allons ici établir ses compatibilités par rapport aux foncteurs $f^\star$ et $Rf_\star$. Ces compatibilités résultent de [**Calmès & Hornbostel, 2009**], mais, en le développant ici quelque peu, nous voudrions montrer toute la pertinence de l'argument donné par Deligne dans [**SGA 4½** [Dualité] 1.2].

E.1. Accouplements. — Soit $\mathscr{C}$ une catégorie munie d'un bifoncteur que nous noterons $\otimes\colon \mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$. On suppose donné un isomorphisme de symétrie $s_{X,Y}\colon X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X$ fonctoriel en X et Y tel que $s_{Y,X}^{-1}=s_{X,Y}$: on dira que $\otimes$ est un bifoncteur symétrique. On suppose également que « $\otimes$ admet un adjoint à droite **Hom** », c'est-à-dire un bifoncteur $\mathbf{Hom}\colon \mathscr{C}^{\mathrm{opp}}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ muni de bijections trifonctorielles dites « chères à Cartan » :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\mathbf{Hom}(Y,Z))\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X\otimes Y,Z)\ .$$

Définition E.1.1. — Un **accouplement** dans $\mathscr{C}$ consiste en la donnée de trois objets M_1, M_2, K et d'un morphisme $M_1\otimes M_2\xrightarrow{a} K$. On dit que a est un accouplement entre M_1 et M_2 à valeurs dans K. Si on dispose de morphismes $M_1'\to M_1$, $M_2'\to M_2$ et $K\to K'$, l'accouplement a induit par fonctorialité un accouplement $a'\colon M_1'\otimes M_2'\to K'$.

Proposition E.1.2. — *La donnée d'un accouplement $a\colon M_1\otimes M_2\to K$ équivaut par adjonction à la donnée d'un morphisme $b\colon M_1\to \mathbf{Hom}(M_2,K)$: on dit que b est la **description adjointe** de l'accouplement a. Si on dispose de morphismes $M_1'\to M_1$, $M_2'\to M_2$ et $K\to K'$, en utilisant la bifonctorialité de **Hom** et la composition avec $M_1'\to M_1$, on obtient un morphisme $b'\colon M_1'\to \mathbf{Hom}(M_2',K')$ qui n'est autre que la description adjointe de l'accouplement $a'\colon M_1'\otimes M_2'\to K'$ défini par fonctorialité dans la définition E.1.1.*

Cette proposition ne fait que reformuler l'adjonction entre $\otimes$ et **Hom** et la trifonctorialité de l'isomorphisme « cher à Cartan ».

Définition E.1.3. — Si $a\colon M_1\otimes M_2\to K$ est un accouplement entre M_1 et M_2 à valeurs dans K, on définit l'accouplement a^τ entre M_2 et M_1 à valeurs dans K déduit par symétrie de a comme étant le morphisme composé $M_2\otimes M_1 \underset{\sim}{\xrightarrow{s_{M_2,M_1}}} M_1\otimes M_2\xrightarrow{a} K$. (Cette construction est évidemment compatible à la trifonctorialité mise en évidence sur les accouplements.)

Définition E.1.4. — Soit $K\in\mathscr{C}$. On note $D_K:=\mathbf{Hom}(-,K)$. L'identité $D_KM\xrightarrow{\mathrm{Id}} D_KM=\mathbf{Hom}(M,K)$ est la description adjointe (cf. définition E.1.1) d'un accouplement $\mathrm{ev}\colon D_KM\otimes M\to K$ (c'est le « morphisme d'évaluation ») qui induit par symétrie (cf. définition E.1.3) un accouplement $M\otimes D_KM\to K$ dont la description adjointe est un morphisme que l'on note $\beta_M\colon M\to D_KD_KM$ et que nous appellerons **morphisme de bidualité** (de M).

E.2. Fonctorialité. — Supposons que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ soient deux catégories munies de bifoncteurs symétriques notés $\otimes$ et que ceux-ci admettent des adjoints à droite **Hom** comme dans le §E.1. Soit $F\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ un foncteur muni d'un morphisme $FX\otimes FY\xrightarrow{\varphi_{X,Y}} F(X\otimes Y)$ bifonctoriel en les objets X et Y de $\mathscr{C}$. On fait l'hypothèse que F est symétrique, c'est-à-dire que pour tous X et Y, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
FX\otimes FY \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "s_{FX,FY}"', "\sim"] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F(s_{X,Y})"', "\sim"] \\
FY\otimes FX \arrow[r, "\varphi_{Y,X}"] & F(Y\otimes X)
\end{tikzcd}$$

Définition E.2.1. — Soit $a\colon M_1\otimes M_2\to K$ un accouplement dans $\mathscr{C}$. L'accouplement $F[a]\colon FM_1\otimes FM_2\to FK$ dans $\mathscr{D}$ déduit de a par application de F est le morphisme composé suivant :

$$FM_1\otimes FM_2\xrightarrow{\varphi_{M_1,M_2}} F(M_1\otimes M_2)\xrightarrow{F(a)} FK\ .$$

(Cette construction est évidemment compatible à la fonctorialité en les trois variables M_1, M_2 et K.)

La clef de l'argument de Deligne dans [**SGA 4½** [Dualité] 1.2] réside dans la proposition suivante :

Proposition E.2.2. — *La construction de la définition E.2.1 commute à la symétrie.*

Si $a\colon M_1\otimes M_2\to K$ est un accouplement dans $\mathscr{C}$, on peut utiliser la symétrie dans $\mathscr{C}$ puis appliquer F pour obtenir un accouplement $FM_2\otimes FM_1\to FK$ dans $\mathscr{D}$. On peut aussi commencer par appliquer F puis utiliser la symétrie dans $\mathscr{D}$. L'énoncé de la proposition signifie que les deux accouplements ainsi obtenus sont égaux. Cette compatibilité n'est rien d'autre que l'hypothèse de symétrie faite sur le foncteur F.

Définition E.2.3. — Supposons que M et K soient des objets de $\mathscr{C}$. On dispose d'un accouplement canonique $\mathrm{ev}\colon \mathbf{Hom}(M,K)\otimes M \to K$ dont la description adjointe est l'identité de $\mathbf{Hom}(M,K)$ (cf. définition E.1.4). La définition E.2.1 donne lieu à un accouplement $F[\mathrm{ev}]\colon F\,\mathbf{Hom}(M,K)\otimes FM \to FK$ dans $\mathscr{D}$ dont la description adjointe est un morphisme que nous noterons $\mathbf{F}\colon F\,\mathbf{Hom}(M,K)\to \mathbf{Hom}(FM,FK)$. (Ce morphisme est évidemment fonctoriel en les deux variables M et K.)

Proposition E.2.4. — *Supposons que* $b\colon M_1 \to \mathbf{Hom}(M_2,K)$ *soit la description adjointe d'un accouplement* $a\colon M_1\otimes M_2 \to K$ *dans* $\mathscr{C}$. *Alors, l'accouplement* $F[a]\colon FM_1\otimes FM_2 \to FK$ *déduit de* a *par application de* F *admet pour description adjointe le morphisme composé suivant que nous noterons* $F[b]$ *:*

$$F[b]\colon FM_1 \xrightarrow{F(b)} F\,\mathbf{Hom}(M_2,K) \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{Hom}(FM_2,FK)\,.$$

Par construction de $\mathbf{F}$, c'est vrai si b est l'identité et le cas général s'en déduit en utilisant la fonctorialité par rapport à M_1.

Théorème E.2.5. — *Soit* $K\in\mathscr{C}$. *On note* $D_K := \mathbf{Hom}(-,K)$ *et* $D_{FK} := \mathbf{Hom}(-,FK)$. *Pour tout* $X\in\mathscr{C}$, *on note* $\mathbf{F}_X\colon FD_KX \to D_{FK}FX$ *le morphisme* $\mathbf{F}\colon F\,\mathbf{Hom}(X,K)\to\mathbf{Hom}(FX,FK)$ *de la définition* E.2.3. *Alors, pour tout* $M\in\mathscr{C}$, *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
FM \arrow[r, "F(\beta_M)"] \arrow[d, "\beta_{FM}"'] & FD_KD_KM \arrow[d, "\mathbf{F}_{D_KM}"] \\
D_{FK}D_{FK}FM \arrow[r, "D_{FK}(\mathbf{F}_M)"] & D_{FK}FD_KM
\end{tikzcd}$$

Considérons l'accouplement canonique $D_KM\otimes M \xrightarrow{a} K$ dont la description adjointe est l'identité de D_KM. Par symétrie, a induit un accouplement $a^\tau\colon M\otimes D_KM \to K$ dont la description adjointe est le morphisme de bidualité $\beta_M\colon M\to D_KD_KM$. On a défini un accouplement $F[a^\tau]\colon FM\otimes FD_KM \to FK$ dont la description adjointe est donc $F[\beta_M]$ par la proposition E.2.4 :

$$F[\beta_M]\colon FM \xrightarrow{F(\beta_M)} FD_KD_KM \xrightarrow{\mathbf{F}_{D_KM}} D_KFD_KM\,.$$

Par ailleurs, puisque $a\colon D_KM\otimes M\to K$ est l'accouplement canonique, le morphisme $F[a]\colon FD_KM\otimes FM \to FK$ admet pour description adjointe le morphisme $\mathbf{F}_M\colon FD_KM \to D_{FK}FM$ (cf. définition E.2.3). Si on note $\alpha\colon D_{FK}FM\otimes FM\to FK$ l'accouplement canonique donné par le morphisme d'évaluation, ceci signifie que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
FD_KM\otimes FM \arrow[r, "F[a]"] \arrow[d, "\mathbf{F}_M\otimes\mathrm{Id}"'] & FK \arrow[d, equal] \\
D_{FK}FM\otimes FM \arrow[r, "\alpha"] & FK
\end{tikzcd}$$

Par symétrie, on en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
FM\otimes FD_KM \arrow[r, "F[a]^\tau"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mathbf{F}_M"'] & FK \arrow[d, equal] \\
FM\otimes D_{FK}FM \arrow[r, "\alpha^\tau"] & FK
\end{tikzcd}$$

La description adjointe de α^τ étant par définition le morphisme de bidualité β_{FM} de FM, on en déduit que la description adjointe de $F[a]^\tau$ est égale à la composition suivante :

$$FM \xrightarrow{\beta_{FM}} D_{FK}D_{FK}FM \xrightarrow{D_{FK}(\mathbf{F}_M)} D_{FK}FD_KM\,.$$

La proposition E.2.2 énonce que $F[a]^\tau$ et $F[a^\tau]$ sont les mêmes accouplements $FM\otimes FD_KM\to FK$. Leurs descriptions adjointes (décrites ci-dessus) sont donc égales, ce qui achève la démonstration du théorème E.2.5.

Le théorème E.2.5 admet la généralisation suivante :

Théorème E.2.6. — *Soit* $K\in\mathscr{C}$. *Soit* $K'\in\mathscr{D}$. *On suppose donné un morphisme* $FK\xrightarrow{\varepsilon}K'$. *On note* $D_K := \mathbf{Hom}(-,K)$ *et* $D_{K'} := \mathbf{Hom}(-,K')$. *Pour tout* $X\in\mathscr{C}$, *on note* $\mathbf{F}_{\varepsilon X}\colon FD_KX \to D_{K'}FX$ *le morphisme composé*

$\mathrm{F}\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{X} = \mathrm{F}\,\mathbf{Hom}(\mathrm{X},\mathrm{K}) \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{Hom}(\mathrm{FX},\mathrm{FK}) \xrightarrow{\varepsilon_\star} \mathbf{Hom}(\mathrm{FX},\mathrm{K}') = \mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{FX}$. *Alors, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$*, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{FM} \arrow[r, "\mathrm{F}(\beta_{\mathrm{M}})"] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{FM}}"'] & \mathrm{FD}_{\mathrm{K}}\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{M} \arrow[d, "\mathbf{F}_{\varepsilon\,\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{M}}"] \\ \mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{FM} \arrow[r, "\mathrm{D}_{\mathrm{FK}}(\mathbf{F}_{\varepsilon\,\mathrm{M}})"] & \mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{FD}_{\mathrm{K}}\mathrm{M} \end{tikzcd}$$

Si $a\colon \mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2 \to \mathrm{K}$ est un accouplement dans $\mathscr{C}$, on peut définir $\mathrm{F}_\varepsilon[a]\colon \mathrm{FM}_1 \otimes \mathrm{FM}_2 \to \mathrm{K}'$ comme étant l'accouplement obtenu par composition

$$\mathrm{FM}_1 \otimes \mathrm{FM}_2 \xrightarrow{\mathrm{F}[a]} \mathrm{FK} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{K}'\ .$$

Tout comme la construction $\mathrm{F}[a]$, celle-ci commute à la symétrie, et le théorème E.2.6 se démontre comme le théorème E.2.5 en remplaçant $\mathrm{F}[-]$ par $\mathrm{F}_\varepsilon[-]$.

E.3. Application à $f^\star$. —

Proposition E.3.1. — *Soit* $f\colon (\mathscr{T}',\mathscr{A}') \to (\mathscr{T},\mathscr{A})$ *un morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs. Notons* $\mathrm{L}f^\star\colon \mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A}) \to \mathrm{D}(\mathscr{T}',\mathscr{A}')$ *le foncteur défini au §A.3.2. Soit* $\mathrm{K} \in \mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A})$*. On note* $\mathrm{D}_{\mathrm{K}} := \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{K})$ *et* $\mathrm{D}_{\mathrm{L}f^\star\mathrm{K}} := \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{L}f^\star\mathrm{K})$*. Alors, pour tout* $\mathrm{M} \in \mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A})$*, le diagramme suivant est commutatif dans* $\mathrm{D}(\mathscr{T}',\mathscr{A}')$ *:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}f^\star\mathrm{M} \arrow[r, "\mathrm{L}f^\star(\beta_{\mathrm{M}})"] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{L}f^\star\mathrm{M}}"'] & \mathrm{L}f^\star\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{M} \arrow[d, "\mathbf{L}\mathbf{f}^\star_{\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{M}}"] \\ \mathrm{D}_{\mathrm{L}f^\star\mathrm{K}}\mathrm{D}_{\mathrm{L}f^\star\mathrm{K}}\mathrm{L}f^\star\mathrm{M} \arrow[r, "\mathrm{D}_{\mathrm{L}f^\star\mathrm{K}}(\mathbf{L}\mathbf{f}^\star_{\mathrm{M}})"] & \mathrm{D}_{\mathrm{L}f^\star\mathrm{K}}\mathrm{L}f^\star\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{M} \end{tikzcd}$$

Ceci résulte du théorème E.2.5 appliqué au foncteur $\mathrm{L}f^\star\colon \mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A}) \to \mathrm{D}(\mathscr{T}',\mathscr{A}')$.

E.3.2. — Si $f\colon \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est un morphisme de schémas, on peut appliquer cette proposition au morphisme de topos $\mathrm{X}'_{\text{ét}} \xrightarrow{f} \mathrm{X}_{\text{ét}}$ (ces topos étant munis d'un faisceau d'anneaux constant). Dans certains cas favorables (cf. proposition 6.2.3.2), les morphismes $f^\star\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{M} \to \mathrm{D}_{f^\star\mathrm{K}}f^\star\mathrm{M}$ sont des isomorphismes, auquel cas la proposition E.3.1 énonce que pour certains objets M et K dans $\mathrm{D}(\mathrm{X}_{\text{ét}},\Lambda)$, l'image par $f^\star$ du morphisme de bidualité pour M s'identifie au morphisme de bidualité pour $f^\star\mathrm{M}$.

E.4. Le morphisme de Künneth. —

Proposition E.4.1. — *Supposons que* $\mathscr{C}$ *et* $\mathscr{D}$ *soient des catégories munies de bifoncteurs symétriques* $\otimes$ *admettant un adjoint à droite* **Hom***. Soit* $\mathrm{G}\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ *un foncteur symétrique. On suppose que pour tous* X *et* Y *dans* $\mathscr{D}$*, le morphisme* $\varphi_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}\colon \mathrm{GX} \otimes \mathrm{GY} \to \mathrm{G}(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y})$ *est un isomorphisme. Supposons que* G *admette un adjoint à droite* $\mathrm{F}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$*. Alors,* F *est naturellement muni d'une transformation naturelle symétrique* $\mathrm{FX} \otimes \mathrm{FY} \to \mathrm{F}(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y})$ *pour tous* X *et* Y *dans* $\mathscr{C}$*.*

Si X et Y sont des objets de $\mathscr{C}$, l'adjonction entre G et F définit des morphismes $\mathrm{GFX} \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{GFY} \to \mathrm{Y}$, ce qui permet de définir un morphisme $\mathrm{GFX} \otimes \mathrm{GFY} \to \mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}$ dont la source s'identifie à $\mathrm{G}(\mathrm{FX} \otimes \mathrm{FY})$ grâce à notre hypothèse. Le morphisme $\mathrm{G}(\mathrm{FX} \otimes \mathrm{FY}) \to \mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}$ qu'on en déduit correspond par adjonction au morphisme voulu $\mathrm{FX} \otimes \mathrm{FY} \to \mathrm{F}(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y})$.

E.4.2. — Si $f\colon (\mathscr{T}',\mathscr{A}') \to (\mathscr{T},\mathscr{A})$ est un morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs, en appliquant la proposition E.4.1 à $\mathrm{L}f^\star$, on obtient le morphisme de Künneth $\mathrm{R}f_\star\mathrm{X} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}} \mathrm{R}f_\star\mathrm{Y} \to \mathrm{R}f_\star(\mathrm{X} \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathscr{A}'} \mathrm{Y})$.

Corollaire E.4.3. — *Soit* $f\colon (\mathscr{T}',\mathscr{A}') \to (\mathscr{T},\mathscr{A})$ *un morphisme de topos annelé en anneaux commutatifs. Soit* $\mathrm{K}' \in \mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A})$*. Soit* $\mathrm{K} \in \mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A})$*. On suppose donné un morphisme* $\mathrm{R}f_\star\mathrm{K}' \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{K}$ *dans* $\mathrm{D}(\mathscr{T},\mathscr{A})$*. On note* $\mathrm{D}_{\mathrm{K}} := \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}}(-,\mathrm{K})$ *et* $\mathrm{D}_{\mathrm{K}'} := \mathrm{R}\,\mathbf{Hom}_{\mathscr{A}'}(-,\mathrm{K}')$*. On note* $\mathbf{f}_\varepsilon\colon \mathrm{R}f_\star\mathrm{D}_{\mathrm{K}'} \to \mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{R}f_\star$ *la transformation naturelle canonique. Alors, le diagramme suivant est commutatif pour tout* $\mathrm{M}' \in \mathrm{D}(\mathscr{T}',\mathscr{A}')$ *:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}f_\star\mathrm{M}' \arrow[r, "\mathrm{R}f_\star(\beta_{\mathrm{M}'})"] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{R}f_\star\mathrm{M}'}"'] & \mathrm{R}f_\star\mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{M}' \arrow[d, "\mathbf{f}_\varepsilon"] \\ \mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{R}f_\star\mathrm{M}' \arrow[r, "\mathrm{D}_{\mathrm{K}}(\mathbf{f}_\varepsilon)"] & \mathrm{D}_{\mathrm{K}}\mathrm{R}f_\star\mathrm{D}_{\mathrm{K}'}\mathrm{M}' \end{tikzcd}$$

E.4.4. — Si $f\colon X' \to X$ est un morphisme propre entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas noethériens et $K \in D^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, on peut poser $K' := f^!K$ et noter $\varepsilon\colon Rf_\star K' \to K$ le morphisme d'adjonction. On peut appliquer le corollaire E.4.3 à cette situation. Le morphisme $\mathbf{f}_\varepsilon\colon Rf_\star R\,\mathbf{Hom}(M', f^!K) \to R\,\mathbf{Hom}(Rf_\star, K)$ est un isomorphisme si $M' \in D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ grâce à la formule d'adjonction [**SGA 4** XVIII 3.1.10]. Si on sait que M' et $D_{K'}M'$ sont dans $D^-(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (par exemple, si on sait que $M' \in D^b_c(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$ et que $D_{K'}$ préserve $D^b_c(X'_{\text{ét}}, \Lambda)$), le corollaire énonce que l'image par $Rf_\star$ du morphisme de bidualité $\beta_{M'}\colon M' \to D_{K'}D_{K'}M'$ s'identifie au morphisme de bidualité $\beta_{Rf_\star M'}\colon Rf_\star M' \to D_K D_K Rf_\star M'$.

Références

[Calmès & Hornbostel, 2009] Calmès, B. & Hornbostel, J. (2009). Tensor-triangulated categories and dualities. *Theory Appl. Categ.*, 22, nº 6, 136–200. ↑ 59

[Conrad, 2000] Conrad, B. (2000). *Grothendieck duality and base change*, volume 1750 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 33, 38

[Fujiwara, 1995] Fujiwara, K. (1995). Theory of tubular neighborhood in étale topology. *Duke Math. J.*, 80(1), 15–57. ↑ 21

[Gabber, 2004] Gabber, O. (2004). Notes on some t-structures. In A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz, & F. Loeser (éds), *Geometric aspects of Dwork theory, vol. II* (pp. 711–734). Walter de Gruyter. ↑ 2, 27

[Gabber, 2005] Gabber, O. (2005). Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes. Conférence en l'honneur de Pierre Deligne à l'occasion de son soixante-et-unième anniversaire, Institute for Advanced Study, Princeton. (Voir annexe B). ↑ 2

[Gabber & Ramero, 2003] Gabber, O. & Ramero, L. (2003). *Almost ring theory*, volume 1800 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 4

[Gabriel, 1962] Gabriel, P. (1962). Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. math. France*, 90, 323–448. ↑ 41, 46

[Giraud, 1971] Giraud, J. (1971). *Cohomologie non abélienne*, volume 179 des *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag. ↑ 39

[Goerss & Jardine, 1999] Goerss, P. G. & Jardine, J. F. (1999). *Simplicial homotopy theory*, volume 174 des *Progress in Mathematics*. Birkhäuser. ↑ 51

[Grothendieck, 1957] Grothendieck, A. (1957). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J.*, 9, 119–221. ↑ 53

[Hartshorne, 1966] Hartshorne, R. (1966). *Residues and duality*, volume 20 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 38, 54

[Hovey, 2001] Hovey, M. (2001). Model category structures on chain complexes of sheaves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(6), 2441–2457. ↑ 53

[Lam, 1991] Lam, T. Y. (1991). *A first course in noncommutative rings*, volume 131 des *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 43

[Lam, 1999] Lam, T. Y. (1999). *Lectures on modules and rings*, volume 189 des *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 43

[Lipman, 1978] Lipman, J. (1978). Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math.*, 107(1), 151–207. ↑ 15

[Neeman, 2001] Neeman, A. (2001). *Triangulated categories*, volume 148 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press. ↑ 54

[Šafarevič, 1966] Šafarevič, I. R. (1966). *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, volume 37 des *Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research. Notes de C. P. Ramanujam. ↑ 15

[Serre, 1965] Serre, J.-P. (1965). *Algèbre locale. Multiplicités*, volume 11 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 14

[Serre, 1994] Serre, J.-P. (1994). *Cohomologie galoisienne*, volume 5 des *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag. ↑ 4

[Spaltenstein, 1988] Spaltenstein, N. (1988). Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2), 121–154. ↑ 50, 53

---

exposés oraux des 13 avril, 16 mai et 23 mai 2007, notes du 9 mai 2008

Joël Riou, Université Paris-Sud 11, Bât. 425, 91405 Orsay, France • *Courriel :* joel.riou@math.u-psud.fr