XVIII$_{\mathrm{B}}$. Dimension cohomologique : raffinements et compléments

Fabrice Orgogozo

version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

Table des matières

Notre premier objectif est de démontrer que pour tout nombre premier ℓ il existe un ouvert *affine* d'un schéma nœthérien strictement hensélien régulier de dimension 2 dont la ℓ-dimension cohomologique est égale à 3. Outre les ingrédients cohomologiques — pureté, morphisme de Gysin et comparaison à la complétion —, on utilise une construction dont le principe est dû à Nagata : utilisant des « dilatations formelles », on construit un schéma nœthérien strictement hensélien X de dimension 2, de complété $\widehat{X}$ *régulier de dimension* 2, et une courbe *irréductible* C dans X devenant le ℓ-ième multiple d'un diviseur régulier dans $\widehat{X}$. Cette construction est ensuite étendue au cas, plus délicat, de la dimension supérieure. À partir de là, on construit aisément des schémas dont l'existence a été annoncée dans la première partie (exp. **XVIII$_{\mathbf{A}}$**, 1.5). Pour vérifier que leur dimension cohomologique est bien celle attendue, on fait appel à une majoration assez générale établie sans hypothèse d'excellence. Enfin, on termine par une minoration de la dimension cohomologique d'un ouvert (non nécessairement affine) du spectre épointé d'un schéma nœthérien intègre strictement local.

1. Préliminaires

1.1. Dilatations formelles. — Soient R un anneau, π un élément non diviseur de 0 et f un élément de la complétion π-adique $\widehat{R}$ de R. Pour tout $n \geq 0$, choisissons un $f_n \in R$ tel que $f \equiv f_n$ modulo π^n.

Définition 1.1.1. — On note $\mathrm{Dil}_{\pi}^{f} R$ la sous-R-algèbre de $R[\pi^{-1}, F]$, où F est une indéterminée, colimite des R-algèbres $R[\frac{F-f_n}{\pi^n}]$.

On notera également F l'image de cette variable dans $\mathrm{Dil}_{\pi}^{f} R$.

Remarque 1.1.2. — Notons que les R-algèbres considérées sont toutes isomorphes à une algèbre de polynômes en une variable sur R.

1.1.3. — On vérifie immédiatement les faits suivants :

i. la construction ne dépend pas des choix des f_n, et ne dépend de l'élément π qu'à travers l'idéal qu'il engendre ;
ii. les morphismes $R \to \mathrm{Dil}_{\pi}^{f} R$ et $\mathrm{Dil}_{\pi}^{f} R \to \widehat{R}$, $\frac{F-f_n}{\pi^n} \mapsto \frac{f-f_n}{\pi^n}$, induisent des *isomorphismes* sur la complétion π-adique.

1.2. Platitude et nœthérianité. —

1.2.1. — Rappelons que si un morphisme $A \to B$ est fidèlement plat, A est nœthérien si B l'est ([**ÉGA** IV[PLEASEINSERT\PRE 2.2.14]). Pour vérifier la platitude, il est parfois commode d'utiliser le critère suivant ([**Raynaud & Gruson, 1971**, II.1.4.2.1]).

Proposition 1.2.2. — *Soient M un R-module, et $\pi \in R$. On suppose que π n'est diviseur de zéro ni dans R ni dans M. Alors, M est* plat *sur R si et seulement si M/π l'est sur R/π et $M[\pi^{-1}]$ l'est sur $R[\pi^{-1}]$.*

Remarque 1.2.3. — Pour démontrer la nœthérianité des anneaux considérés ci-après, on pourrait également utiliser le critère de Cohen rappelé en exp. **XIX**, 3.2, en vérifiant notamment que les idéaux de hauteur 1 sont principaux.

1.3. Gonflements. —

1.3.1. — Soit A un anneau local nœthérien, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Suivant [**Bourbaki**, **AC**, IX, appendice, § 2], on note $A]t[$ et on appelle **gonflement (élémentaire)** de A le localisé de l'anneau de polynômes $A[t]$ en l'idéal premier $\mathfrak{m}A[t]$. C'est un anneau local nœthérien. (Il est noté $A(t)$, par analogie avec les fractions rationnelles, dans [**Nagata, 1962**, p. 17—18] ; voir aussi [**Matsumura, 1980**, p. 138].) Plus généralement, on peut considérer un ensemble arbitraire de variables t_e, $e \in E$, et définir l'anneau $A]t_e, e \in E[$, localisé de $A[t_e, e \in E]$ en l'idéal premier engendré par $\mathfrak{m}$. Rappelons le fait suivant ([**Bourbaki**, **AC**, IX, appendice, prop. 2 et corollaire]).

Proposition 1.3.2. — *L'anneau* $A]t_e, e \in E[$ *est local nœthérien de même dimension que* A.

1.3.3. — Notons que le cas d'un nombre fini de variables est très élémentaire et que le cas général résulte du lemme [**ÉGA** 0_{III} 10.3.1.3], reproduit en exp. **XIX**, 3.1, par passage à la (co)limite. Pour une autre démonstration, voir également [**Bourbaki**, **AC**, III, § 5, exercice 7].

1.3.4. — Observons également que si le corps résiduel de A est κ, celui de $A]t_e, e \in E[$ est canoniquement isomorphe à son extension transcendante pure $\kappa(t_e, e \in E)$. De plus, on montre que si F est un sous-ensemble de E, le morphisme $A]t_e, e \in F[\to A]t_e, e \in E[$ est *fidèlement plat*. (Voir [**Bourbaki**, **AC**, IX, appendice, prop. 2] pour une démonstration dans le cas où $F = \varnothing$, auquel on se ramène immédiatement.)

2. Construction de Nagata en dimension 2, application cohomologique

2.1. Dilatation relativement à une série transcendante. —

2.1.1. — Soit W un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_W = (\pi)$, corps résiduel k, corps des fractions K et de complété $\widehat{W}$. On note $\widehat{K}$ le corps des fractions de $\widehat{W}$. Supposons qu'il existe un élément $\varphi \in \widehat{W}$ *transcendant* sur K. C'est le cas si W est dénombrable ou, par exemple, lorsque $W = k[t]_{(t)}$ auquel cas $\varphi = \sum_n t^{n!}$ convient. Par translation, on peut supposer que φ appartient à l'idéal maximal de $\widehat{W}$.

2.1.2. — Fixons un entier $\ell \geq 1$ et considérons l'élément $f = (y - \varphi)^\ell$ du complété π-adique $\widehat{W[y]}$ de $W[y]$. Notons que ce complété s'injecte dans la complétion totale $\widehat{W}[[y]]$ et que f appartient au sous-anneau $\widehat{W}[y]$ de $\widehat{W[y]}$ et $\widehat{W}[[y]]$. En conséquence, le morphisme canonique $\mathrm{Dil}^f_\pi\, W[y] \to \widehat{W[y]}$ se factorise en un morphisme $\mathrm{Dil}^f_\pi\, W[y] \to \widehat{W}[y]$.

Proposition 2.1.3. — *Le morphisme* $\mathrm{Dil}^f_\pi\, W[y] \to \widehat{W}[y]$ *est* plat.

Démonstration. — Notons pour simplifier $\mathscr{D}$ la source de ce morphisme. D'après le critère de platitude rappelé ci-dessus, il suffit de montrer que le morphisme $\mathscr{D}[\pi^{-1}] \to \widehat{W}[y][\pi^{-1}]$ est plat car $\mathscr{D} \to \widehat{W}[y]$ induit visiblement un isomorphisme modulo π. Or, lorsque l'on inverse π, les $W[y]$-algèbres dont $\mathscr{D}$ est par définition la colimite sont toutes isomorphes à un anneau de polynômes $K[y, F]$ où, rappelons-le, K est le corps des fractions $W[\pi^{-1}]$ de W. Par conséquent, il nous faut montrer que le morphisme $K[y, F] \to \widehat{W}[y][\pi^{-1}]$, composé des morphismes

$$\begin{cases} K[y, F] \to K[y, F'] \\ F \mapsto F'^\ell \end{cases} \qquad \begin{cases} K[y, F'] \to \widehat{K}[y] \\ F' \mapsto y - \varphi \end{cases}$$

est plat. La platitude du premier est évidente. Pour le second, on se ramène par translation et changement de base à montrer que le morphisme $K[F'] \to \widehat{K}$, $F' \mapsto \varphi$, est plat. Il se factorise en le composé du passage aux fractions $K[F'] \to K(F')$ avec l'*injection* $K(F') \hookrightarrow \widehat{K}$ déduite de φ. Chacun de ces morphismes est plat. □

Remarque 2.1.4. — La construction de l'anneau de dilatation $\mathrm{Dil}^f_\pi\, W[y]$ est inspirée de celle de [**Nagata, 1958**], qui considère le cas $\ell = 2$. (Voir aussi [**Nagata, 1962**, appendice, E4.1] et [**Heinzer et al., 1997**].)

2.2. Le diviseur $C = V(F)$. —

2.2.1. — On conserve les notations précédentes. Soit A le localisé de l'anneau de dilatation $\mathscr{D}$ en l'idéal premier image inverse de l'idéal $(\pi, y) \subset \widehat{W}[y]$. C'est un anneau nœthérien par fidèle platitude, de corps résiduel k.

Lemme 2.2.2. — *L'anneau* A *satisfait les propriétés suivantes :*

i. *il est régulier et la suite* (π, F) *est régulière ;*
ii. *son quotient* A/F *est intègre ;*
iii. *l'intersection schématique du fermé* $V(F)$ *avec le spectre épointé de* A *est un schéma régulier.*

Démonstration. — (i) Il suffit d'établir les deux énoncés pour $\mathscr{D}$. Pour se faire, on peut compléter π-adiquement (cf. par exemple [**Bourbaki**, **AC**, X, §4, n°2, cor. 3]). Le complété de $\mathscr{D}$ est isomorphe à $\widehat{W[y]}$ de sorte que la régularité de l'anneau et de la suite (π, F) — c'est-à-dire l'injectivité de la multiplication par π, et par F modulo π — sont évidents. (ii) Si on inverse π, l'anneau A devient une localisation de l'anneau de polynômes $K[y, F]$. La restriction du diviseur à cet ouvert est intègre. La multiplication par π dans le quotient A/F étant injective d'après (i), l'intégrité de A/F résulte de celle de $A[\pi^{-1}]/F$. Le quotient est non nul car $F \in \mathfrak{m}_A$. (iii) Sur l'ouvert complémentaire de $V(\pi)$, l'élément F est une indéterminée de sorte que le résultat est clair. D'autre part, l'intersection du complémentaire de $V(y)$ avec le diviseur est contenu dans le complémentaire de $V(\pi)$ car l'équation est — dans le complété π-adique — de la forme $(y-\varphi)^\ell$, avec $\varphi \in (\pi)$. Ceci suffit pour conclure. ☐

2.2.3. — Notons le fait suivant, trivial mais crucial : par construction, le diviseur $V(F)$ devient $V((y-\varphi)^\ell)$ dans le complété $\widehat{A}$ de A relativement à son idéal maximal.

2.3. Hensélisation. — Pour simplifier les notations, on suppose dorénavant le corps k séparablement clos.

2.3.1. — Soient A^{hs} le hensélisé de A en son point fermé, $\widehat{A}$ le complété de A (ainsi que de A^{hs}), et notons $X = \mathrm{Spec}(A^{hs})$ et $\widehat{X} = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$ leurs spectres respectifs, ainsi que $\star$ et $\widehat{\star}$ les points fermés. Comme $\mathrm{Spec}(A)$, le schéma X est intègre. De plus, le diviseur C d'équation $F = 0$ dans X est réduit, cette propriété étant également conservée par hensélisation.

2.3.2. — Vérifions que le diviseur C est *irréductible*. D'après le théorème de comparaison de Elkik, le morphisme $\pi_0(\widehat{C} - \widehat{\star}) \to \pi_0(C - \star)$ est une bijection. Or, $\widehat{C} - \widehat{\star}$ est connexe : dans un anneau local régulier B, le spectre $\mathrm{Spec}(B/g^\ell)$ est irréductible pour tout $g \in \mathfrak{m}_B - \mathfrak{m}_B^2$. Ainsi, l'ouvert $C - \star$ de C est connexe et, finalement, C est irréductible.

2.4. Application cohomologique. — *On suppose dorénavant l'entier ℓ inversible sur X.*

2.4.1. — Notons pour simplifier G l'élément $y - \varphi$ de $\widehat{A}$, de sorte que — par construction — on a l'égalité $F = G^\ell$ dans $\widehat{A}$. Notons U l'ouvert affine $X - C$ du schéma strictement local X. Soient j l'immersion ouverte de U dans le spectre épointé $X - \star$ et i l'immersion fermée $C - \star \hookrightarrow X - \star$.

2.4.2. — Le triangle
$$i_\star i^! \to \mathrm{Id} \to Rj_\star j^\star$$
sur $X - \star$ induit la suite exacte
$$H^3_{C-\star}(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^3(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^4_{C-\star}(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = H^2(C-\star, i^!\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}[2]).$$
Par pureté (exp. **XVI**, 3.1.1), le faisceau de cohomologie locale $i^!\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ est constant concentré en degré 2. Or le groupe de cohomologie $H^2(C-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est nul : la cohomologie du corps des fractions d'un anneau B strictement local intègre de dimension 1 est nul en degré ≥ 2. (On se ramène au cas bien connu d'un anneau de valuation discrète en observant que le normalisé de B dans son corps des fractions est un anneau nœthérien, de Dedekind, et strictement local car colimite locale d'anneaux strictement locaux.) Il en résulte que la flèche de restriction $H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^3(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est surjective ; nous allons voir que c'est un isomorphisme.

2.4.3. — Comme rappelé ci-dessus, le morphisme $H^3_{C-\star}(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ s'identifie, par pureté, au morphisme de Gysin $\mathrm{Gys}(f) : H^1(C-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Il résulte de la commutativité du diagramme
$$\begin{tikzcd} H^1(C-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[r, "\mathrm{Gys}(F)"] \arrow[d] & H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[d] \\ H^1(\widehat{C}-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \arrow[r, "\mathrm{Gys}(F)=\mathrm{Gys}(G^\ell)"] & H^3(\widehat{X}-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}), \end{tikzcd}$$
de l'égalité $\mathrm{Gys}(F) = \ell \cdot \mathrm{Gys}(G)$ et enfin du fait que les flèches verticales sont des isomorphismes (comparaison à la complétion, [**Fujiwara, 1995**, 6.6.4]) que le morphisme $\mathrm{Gys}(F)$ est nul. (La commutativité du diagramme résulte par exemple de la définition exp. **XVI**, 2.3.1 et de exp. **XVI**, 2.2.3.1.) Ainsi, le morphisme de restriction induit un isomorphisme
$$H^3(X-\star, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} H^3(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}).$$
Or le terme de gauche est non nul, à nouveau par pureté. Le schéma affine U est donc de dimension cohomologique > 2. CQFD.

3. Séries formelles de Gabber, application cohomologique

On étend la construction précédente en dimension arbitraire ≥ 2.

3.1. Une série formelle et sa décomposition. —

3.1.1. — Soit A un anneau commutatif. Rappelons que l'application A-linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} A[x_{j\neq i}][[x_i]] \to A[[x_1,\dots,x_n]]$$

somme des injections canoniques est *surjective* : si $G \in A[[x_1,\dots,x_n]]$, on peut par exemple regrouper pour chaque $i \in [1,n]$ les termes $ax_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n} \in A[[x_1,\dots,x_n]]$ de G pour lesquels $\beta_i = \max_{j\in[1,n]}\beta_j$ et $\beta_1,\dots,\beta_{i-1} < \beta_i$. (Cette dernière condition n'est là que pour définir i de façon non ambiguë ; tout autre choix conviendrait.) La somme g_i de ces termes appartient à $A[x_{j\neq i}][[x_i]]$, et $G = g_1 + \cdots + g_n$.

3.1.2. — On fixe maintenant deux entiers non nuls n et ℓ et on considère

$$S = \big(y + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{\infty} t_{i\alpha}x_i^{\alpha}\big)^{\ell} \in \mathbf{Z}[y, t_{i\in[1,n],\alpha\geq 1}][[x_1,\dots,x_n]].$$

Il résulte de l'observation précédente que l'on peut écrire cette série sous la forme

$$y^{\ell} + f_1 + \cdots + f_n$$

où chaque f_i est une série formelle en x_i, à coefficients polynomiaux en les autres variables.

3.1.3. — Afin que la proposition de platitude ci-dessous soit vraie, on procède de façon légèrement différente pour définir les séries formelles $f_i \in \mathbf{Z}[y, t_{j\alpha}, x_{k\neq i}][[x_i]]$ telles que $S - y^{\ell} = \sum_{i=1}^{n} f_i$. Écrivons

$$S = y^{\ell} + \sum_{\alpha=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{n} t_{i\alpha}x_i^{\alpha})^{\ell} + \big(\text{élément de degré } < \ell \text{ en les } t_{j\beta}\big).$$

Soient $i \in [1,n]$ et $\alpha \geq 1$ des indices. On considère les termes $ax_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ de $(\sum_{i=1}^{n} t_{i\alpha}x_i^{\alpha})^{\ell}$ pour lesquels i est le plus grand indice tel que $\beta_i \neq 0$, c'est-à-dire les termes de $(\sum_{i=1}^{n} t_{i\alpha}x_i^{\alpha})^{\ell}$ qui sont dans $\mathbf{Z}[t_{1\alpha},\dots,t_{n\alpha},x_1,\dots,x_i]$ mais pas dans $\mathbf{Z}[t_{1\alpha},\dots,t_{n\alpha},x_1,\dots,x_{i-1}]$. À i fixé, la somme sur α de ces termes est un élément $f_{i,=\ell}$ de $\mathbf{Z}[t_{j\beta}, x_{k\neq i}][[x_i]]$. Par construction, on a l'égalité $\sum_{\alpha=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{n} t_{i\alpha}x_i^{\alpha})^{\ell} = \sum_{i=1}^{n} f_{i,=\ell}$. Enfin, on décompose le terme restant, $S - y^{\ell} - \sum_{i=1}^{n} f_{i,=\ell}$, en une somme $\sum_{i=1}^{n} f_{i,<\ell}$ où chaque $f_{i,<\ell}$ appartient à $\mathbf{Z}[y, t_{j\beta}, x_{k\neq i}][[x_i]]$, en procédant par exemple comme en 3.1.1. On pose alors $f_i = f_{i,=\ell} + f_{i,<\ell}$; chacun de ces éléments est de degré total en les $t_{j\beta}$ inférieur ou égal à ℓ, et appartient donc également à $\mathbf{Z}[y, t_{j,\beta\neq\alpha}][[x_1,\dots,x_n]][t_{1\alpha},\dots,t_{n\alpha}]$ pour chaque $\alpha \geq 1$.

Proposition 3.1.4. — *Fixons* $\alpha \geq 1$. *Notons* $T_i = t_{i\alpha}$ *pour chaque* $i \in [1,n]$ *et* R_α *l'anneau* $\mathbf{Z}[y, t_{j,\beta\neq\alpha}][[x_1,\dots,x_n]]$. *Le morphisme*

$$R_\alpha[F_1,\dots,F_n] \to R_\alpha[T_1,\dots,T_n]$$

$$F_i \mapsto f_i$$

est libre, *donc* plat, *au-dessus de l'ouvert* $x_1\cdots x_n \neq 0$ *de* $\mathrm{Spec}(R)$.

Démonstration. — Par construction, chaque f_i est une somme $f_{i,=\ell} + f_{i,<\ell}$, où $f_{i,=\ell}$ (resp. $f_{i,<\ell}$) est un polynôme dans $R_\alpha[T_1,\dots,T_n]$ de degré total égal (resp. strictement inférieur) à ℓ. De plus, $f_{i,=\ell}$ est, comme polynôme en T_i, de la forme $x_i^{\alpha\ell}T_i^{\ell} + \sum_{m<\ell} c_m T_i^m$ où les c_m appartiennent à $R_\alpha[T_{j<i}]$. Munissons les monômes de $R_\alpha[T_1,\dots,T_n]$ de l'ordre lexicographique gradué suivant : $T_1^{d_1}\cdots T_n^{d_n} \preceq T_1^{d'_1}\cdots T_d^{d'_n}$ si et seulement si $\sum d_i < \sum d'_i$ ou $\sum d_i = \sum d'_i$ et $d_i < d'_i$ pour le plus grand i tel que $d_i \neq d'_i$. Il est clair que le *terme de tête* $\mathrm{in}_{\preceq}(g)$ pour cet ordre d'un polynôme $g = f_1^{q_1}\cdots f_n^{q_n}$ en les f_i est $T_1^{q_1\ell}\cdots T_n^{q_n\ell}$, à multiplication près par un monôme en les x_i. Il en résulte immédiatement qu'en inversant les x_i, l'anneau $R_\alpha[T_1,\dots,T_n]$ est libre sur $R_\alpha[F_1,\dots,F_n]$ de base les monômes $T_1^{r_1}\cdots T_d^{r_d}$, avec $0 \leq r_i < \ell$. □

3.1.5. — Soit A un anneau local nœthérien régulier de dimension n dont on note $x_1,\dots,x_n$ un système régulier de paramètres. On pourra penser par exemple au localisé $k[x_1,\dots,x_n]_{(x_1,\dots,x_n)}$ d'un anneau de polynômes sur un corps. On considère le gonflement $A]\underline{t}[$ défini en 1.3, où $\underline{t}$ est l'ensemble des variables $\{t_{i\alpha} : i \in [1,\dots,n], \alpha \in \mathbf{N}_{\geq 1}\}$.

3.2. Construction d'un anneau local régulier pathologique. — Soit $i \in [1, \dots, n]$. Notons encore f_i l'image de la série formelle à coefficients entiers considérée en 3.1.3 dans le complété x_i-adique de $A]\underline{t}[\,[y]$, et $\mathscr{D}_i$ l'anneau de dilatation $\mathrm{Dil}_{x_i}^{f_i} A]\underline{t}[\,[y]$. Le produit tensoriel $\mathscr{P}$ de ces $A]\underline{t}[\,[y]$-algèbres s'envoie naturellement dans le complété $\widehat{A]\underline{t}[}\,[[y]]$, où la première complétion est faite relativement à l'idéal maximal $(x_1, \dots, x_n)$ de $A]\underline{t}[$. On note $\mathscr{D}$ le localisé de $\mathscr{P}$ en l'image de l'idéal maximal $(x_1, \dots, x_n, y)$ de $\mathrm{Spec}(\widehat{A]\underline{t}[}\,[[y]])$.

Proposition 3.2.1. — *Le morphisme* $\mathscr{D} \to \widehat{A]\underline{t}[}\,[[y]]$ *est fidèlement* plat.

Il en résulte que l'anneau $\mathscr{D}$ est local *nœthérien*, régulier.

Remarque 3.2.2. — Notons qu'il est clair que $\mathscr{D}$ est « quasi-régulier ». En effet, le gradué de $\mathscr{P}$ relativement à l'idéal $(x_1, \dots, x_n, y)$ est une algèbre symétrique : pour chaque entier r, le morphisme $A]\underline{t}[\,[y] \to \mathscr{P}$ induit un isomorphisme modulo $(x_1, \dots, x_n)^r$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que le morphisme $\mathscr{P} \to \widehat{A]\underline{t}[}\,[[y]]$ est plat. D'après le critère de platitude rappelé précédemment (1.2.2), il suffit de montrer la platitude sur l'ouvert $x_1 \cdots x_n \neq 0$. En effet, le cas où seuls certains x_i sont nuls se ramène à ce cas particulier : en tensorisant par $A]\underline{t}[\,[y]/x_i$ le morphisme $\mathscr{P} \to \widehat{A]\underline{t}[}\,[[y]]$, on obtient une flèche du même type définie par l'anneau A/x_i de dimension $n-1$ et des séries qui coïncident avec l'évaluation en $x_i = 0$ des $f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n$. Pour chaque i, $\mathscr{D}_i[x_i^{-1}]$ est une algèbre de polynômes $A]\underline{t}[\,[y, F_i][x_i^{-1}]$ de sorte que le morphisme dont on souhaite montrer la platitude est

$$A]\underline{t}[\,[y, F_1, \dots, F_n]\,[\frac{1}{x_1 \cdots x_n}] \to \widehat{A]\underline{t}[}\,[[y]]\,[\frac{1}{x_1 \cdots x_n}],$$

$$F_i \mapsto f_i.$$

Il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble *fini* $\mathscr{T}$ des variables $\underline{t}$, le morphisme

$$A]t \in \mathscr{T}[\,[y, F_1, \dots, F_n]\,[\frac{1}{x_1 \cdots x_n}] \to \widehat{A]t \in \mathscr{T}}[\,[[y]]\,[\frac{1}{x_1 \cdots x_n}]$$

est plat. Quitte à agrandir un tel ensemble $\mathscr{T}$, on se ramène au cas où $\mathscr{T}$ est *cofini*, de complémentaire des variables $t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}$ pour un indice $\alpha \geq 1$ quelconque. Posant alors $R_\alpha = A]t_{i,\beta\neq\alpha}[$ et $R' = A]\underline{t}[$, il suffit de montrer que le morphisme $R_\alpha[y, F_1, \dots, F_n] \to R'[[y]]$ est plat au-dessus de l'ouvert $x_1 \cdots x_n \neq 0$. Un dernier dévissage nous ramène à montrer la platitude du morphisme $R_\alpha[y, F_1, \dots, F_n] \to R_\alpha[y, t_{1\alpha}, \dots, t_{n\alpha}]$, au-dessus du même ouvert. Ce dernier point résulte de la proposition 3.1.4. □

Proposition 3.2.3. — *Le diviseur* $C = V(y^\ell + F_1 + \cdots + F_n)$ *de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{D})$ *est* régulier *hors du point fermé.*

Dans cet énoncé, on note abusivement F_i l'image dans $\mathscr{D}$ de l'élément de $\mathscr{D}_i$ correspondant à f_i (cf. 1.1).

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour chaque sous-ensemble strict E de $[1, n]$, l'intersection schématique de C avec le sous-schéma $X_E = \{x_i = 0, i \in E\,; x_i \neq 0, i \notin E\}$ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{D})$ est un diviseur régulier de X_E. Si $E = \varnothing$, cela résulte du fait que le schéma $X_\varnothing$ est le localisé d'une algèbre de polynômes en les $y, F_1, \dots, F_n$. Le cas général se ramène aisément à ce cas particulier. (Remarquons que si $x_i = 0$, il en est de même de F_i.) □

Proposition 3.2.4. — *L'image inverse de* C *dans un localisé strict de* $\mathrm{Spec}(\mathscr{D})$ *est* irréductible.

Démonstration. — Même argument qu'en dimension 2. □

Corollaire 3.2.5. — *Pour tout entier* $d \geq 1$, *il existe un schéma nœthérien strictement local régulier de dimension* d *possédant un ouvert affine de* ℓ*-dimension cohomologique* $2d-1$.

Démonstration. — La même démonstration qu'en dimension 2 nous permet de minorer la dimension cohomologique par $2d-1$. D'après exp. **XVIII$_\mathbf{A}$**, 1.1.1, c'est une égalité. □

4. Dimension cohomologique : majoration d'une « fibre de Milnor générique »

4.1. Énoncé. —

Théorème 4.1.1. — *Soit $R \to R'$ un morphisme local essentiellement de type fini d'anneaux nœthériens strictement locaux intègres. Notons K le corps des fractions de R. Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur R, on a la majoration*

$$\mathrm{cd}_\ell(R' \otimes_R K) \leq \dim(R'),$$

où le terme de gauche désigne la ℓ-dimension cohomologique étale du spectre de l'anneau $R' \otimes_R K$ et le terme de droite désigne la dimension de Krull de R'.

4.1.2. — Dans cet énoncé, l'hypothèse de finitude sur f signifie que R' est une colimite de R-algèbres de type fini à morphismes de transition étales.

Corollaire 4.1.3. — *Soit R un anneau strictement local nœthérien intègre de corps des fractions K et soit ℓ un nombre premier inversible sur R. Alors, on a la majoration*

$$\mathrm{cd}_\ell(K) \leq \dim(R).$$

Remarque 4.1.4. — Réciproquement, il résulte par passage à la limite des résultats de §6 *infra* que, sous les hypothèses du corollaire, si U est un ouvert non vide strict de $\mathrm{Spec}(R)$, alors $\mathrm{cd}_\ell(U) \geq \dim(R)$ et que, lorsque $R' \otimes_R K \neq 0$, la majoration du théorème 4.1.1 est une égalité, excepté dans le cas trivial $R' \xrightarrow{\sim} R' \otimes_R K$. Une autre façon de procéder serait d'utiliser une variante de la méthode (également due à O. Gabber) exposée dans [**Gabber & Orgogozo, 2008**, §6.1] et reposant sur une « astuce quadratique ». Rappelons pour terminer que la minoration « limite » $\mathrm{cd}_\ell(K) \geq \dim(R)$ est élémentaire : on procède par spécialisations successives en codimension 1 (voir [**SGA 4** X 2.4]).

4.2. Démonstration. — On procède par récurrence sur $d' = \dim(R')$ et l'on se ramène au cas excellent.

4.2.1. — Notons $X = \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(R')$ et respectivement $X^\star$ et $Y^\star$ les spectres épointés. Considérons l'ouvert $Y_\star = Y \times_X X^\star$ de $Y^\star$, $V = \mathrm{Spec}(R' \otimes_R K)$ la fibre générique de $Y \to X$ et enfin j le morphisme $V \hookrightarrow Y^\star$. Il résulte de l'hypothèse de récurrence que pour chaque faisceau $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$-modules sur V, le complexe $\Phi_{\mathscr{F}} = \mathrm{R}j_\star\mathscr{F}$ appartient à $\mathrm{D}^{\leq \mathrm{cod}}(Y^\star)$, où cod est la fonction de perversité $y \mapsto \dim \mathscr{O}_{Y,y}$. (Ceci est encore vrai avec $y \mapsto d' - \dim \overline{\{y\}}$.) On veut montrer que $\mathrm{H}^r(V, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^r(Y^\star, \Phi_{\mathscr{F}})$ est nul pour $r > d'$. Fixons un tel r et une classe $c \in \mathrm{H}^r(Y^\star, \Phi_{\mathscr{F}})$.

4.2.2. — On suppose $d \geq 2$, et on choisit un système de paramètres $x_1, \ldots, x_d$ pour l'anneau strictement local R. Soit $Z = Y\}t_1, \ldots, t_{d-1}\{$ le « gonflement étale », hensélisé strict de $\mathbf{A}^{d-1}_Y = Y[t_1, \ldots, t_{d-1}]$ en un point générique géométrique de la fibre spéciale sur Y. L'« hyperplan » $H = V(t_1x_1 + \cdots + t_{d-1}x_{d-1} + x_d)$ de Z est de codimension 1, essentiellement lisse au-dessus de $Y_\star$. Considérons le triangle distingué

$$\mathrm{R}\Gamma_{H_\star}(Z_\star, \Phi_{\mathscr{F}}) \to \mathrm{R}\Gamma(Z_\star, \Phi_{\mathscr{F}}) \to \mathrm{R}\Gamma(Z_\star - H_\star, \Phi_{\mathscr{F}}) \xrightarrow{+1},$$

où l'on note $Z_\star$ le produit fibré $Z \times_Y Y_\star$ et, abusivement, $\Phi_{\mathscr{F}}$ ses diverses images inverses. Soit i l'immersion fermée $H_\star \hookrightarrow Z_\star$, où $H_\star = H \times_Z Z_\star$. Le morphisme $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \to i^!\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}(1)[2]$ de complexes sur $H_\star$ est un isomorphisme par pureté relative. On montre par dévissage qu'il en est de même de la flèche $\Phi_{\mathscr{F}|H_\star} \to i^!\Phi_{\mathscr{F}|Z_\star}(1)[2]$ obtenue par tensorisation à partir de la précédente. On utilise ici le fait que la restriction de $\Phi_{\mathscr{F}}$ à $Z_\star$ provient de la base $Y_\star$. On en tire le morceau de suite exacte :

$$\mathrm{H}^{r-2}(H_\star, \Phi_{\mathscr{F}})(-1) \to \mathrm{H}^r(Z_\star, \Phi_{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^r(Z_\star - H_\star, \Phi_{\mathscr{F}}).$$

Notons que $Z_\star - H_\star = Z - H$ car H contient la fibre spéciale de $Z \to X$. Soient $\widehat{Y}$ le complété ($\mathfrak{m}_{R'}$-adique) de Y et $\widetilde{Z}$ un hensélisé strict du produit fibré $Z \times_Y \widehat{Y}$. Notons que le morphisme $\widetilde{Z} \to Z$ est un morphisme local entre schémas strictement locaux induisant un isomorphisme sur la complétion le long de la fibre spéciale sur Y. Il résulte donc du théorème de comparaison de Fujiwara-Gabber ([**Fujiwara, 1995**, 6.6.4]) que le morphisme $\mathrm{H}^r(Z_\star, \Phi_{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^r(\widetilde{Z}_\star, \Phi_{\mathscr{F}})$ est un *isomorphisme* pour chaque r. Il en est de même de $\mathrm{H}^{r-2}(H_\star, \Phi_{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^{r-2}(\widetilde{H}_\star, \Phi_{\mathscr{F}})$, où $\widetilde{H}_\star = H_\star \times_{Z_\star} \widetilde{Z}_\star$. Le schéma $\widetilde{Z}_\star - \widetilde{H}_\star$ est un ouvert affine, qui coïncide avec $\widetilde{Z} - \widetilde{H}$, d'un schéma strictement local essentiellement de type fini sur le schéma local nœthérien complet $\widehat{Y}$. Comme l'appartenance de $\Phi_{\mathscr{F}}$ à $\mathrm{D}^{\leq \mathrm{cod}}$ est préservée par complétion, il résulte du théorème de Lefschetz affine (exp. **XV**, 1.2.2), dans le cas excellent, que le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^r(\widetilde{Z}_\star - \widetilde{H}_\star, \Phi_{\mathscr{F}})$ est nul pour chaque $r > \dim(Z) = \dim(Y) = d'$. En conséquence, le morphisme $\mathrm{H}^r(\widetilde{Z}_\star, \Phi) \to \mathrm{H}^r(\widetilde{Z}_\star - \widetilde{H}_\star, \Phi)$ est nul pour les mêmes r. De ce fait, des théorèmes de comparaisons susmentionnés et de la compatibilité du morphisme de Gysin à la complétion, il résulte formellement que toute classe $c \in H^r(Z_\star, \Phi_{\mathscr{F}})$ provient d'une classe dans $H^{r-2}(H_\star, \Phi_{\mathscr{F}})(-1)$ et est donc tuée par restriction à $Z_\star - H_\star$.

4.2.3. — Il existe donc un voisinage étale $e : W \to \mathbf{A}^{d-1}_Y$ dont l'image rencontre la fibre spéciale sur Y tel que la classe $c \in H^r(Y^\star, \Phi_{\mathscr{F}})$ soit tuée par restriction à $W - H_W$. Notons k' le corps résiduel de Y, et k celui de X. L'ensemble k^{d-1} est dense dans $\mathbf{A}^{d-1}_{k'}$, car k est infini. Il en résulte qu'il existe une section $\sigma : Y \to \mathbf{A}^{d-1}_Y$, correspondant à des spécialisations des t_i à valeurs dans R, telle que W_σ ait une fibre spéciale sur Y non vide. Le schéma Y étant strictement local, on relève cette section en $Y \to W_\sigma \to W$. La classe de cohomologie c est donc nulle sur $Y - H_Y$, où H_Y est maintenant une hypersurface d'équation $x_d + t_1x_1 + \cdots + t_{d-1}x_{d-1}$ à coefficients t_i dans R. Cet ouvert affine $Y - H_Y$ contient la fibre générique $V = Y \otimes_R K$ car l'élément $x_d + t_1x_1 + \cdots + t_{d-1}x_{d-1} \in R$ est non nul, les x_i constituant un système de paramètres de R. Finalement la restriction de $c \in H^r(Y^\star, \Phi_{\mathscr{F}})$ à $H^r(V, \Phi_{\mathscr{F}}) = H^r(V, \mathscr{F})$, qui est la classe dont on est parti, est nulle. CQFD.

5. Majoration : amélioration

5.1. Énoncé. —

5.1.1. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme entre espaces topologiques sobres non vides. On note

$$\mathrm{dim.cat}(f) = \sup\{n \in \mathbf{N} : \exists y_0 \rightsquigarrow y_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow y_n, f(y_0) \neq f(y_1) \neq \cdots \neq f(y_n)\} \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$$

la **dimension caténaire** de f, où chaque $y_i \rightsquigarrow y_{i+1}$ est une spécialisation.

5.1.2. — Par construction, $\mathrm{dim.cat}(f : Y \to X)$ est majorée par les dimensions de X et de Y avec égalité par exemple lorsque f est l'identité. Plus généralement, lorsque f est un morphisme *générisant* ([**ÉGA** I′ 3.9.2]) — comme c'est le cas d'un morphisme plat de schémas — la dimension caténaire coïncide avec la dimension de l'image.

Remarque 5.1.3. — Si f est un morphisme dominant essentiellement de type fini (c'est-à-dire Zariski-localement comme en 4.1.2) entre schémas nœthériens intègres, on peut montrer que la dimension caténaire de f est la dimension de l'image d'une platification de f.

Théorème 5.1.4. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme essentiellement de type fini entre schémas nœthériens strictement locaux et soit V un ouvert affine de Y. Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X, on a la majoration*

$$\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \max\big(0, \mathrm{dim.cat}(f) - 1\big).$$

Corollaire 5.1.5. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme essentiellement de type fini entre schémas nœthériens strictement locaux, où $\dim(X) \geq 1$, et soit V un ouvert affine de Y. Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X, on a la majoration*

$$\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y) + \dim(X) - 1.$$

Corollaire 5.1.6. — *Soit $d \geq 1$ un entier et soit n un entier dans l'intervalle fermé $[d, 2d-1]$. Il existe un schéma nœthérien strictement local X, régulier de dimension d, et un ouvert affine U de ce schéma tel pour tout nombre premier ℓ inversible sur X on ait l'égalité*

$$\mathrm{cd}_\ell(U) = n.$$

Démonstration du corollaire 5.1.6. — Il suffit de montrer que pour tout entier $d \geq 1$, et tout entier $r \geq 0$, il existe un schéma nœthérien strictement local régulier Y de dimension $d+r$ et un ouvert affine V de Y de ℓ-dimension cohomologique égale à $2d+r-1$. Soient X et f comme en 3.2.5 : l'ouvert affine $U = X[f^{-1}]$ est de dimension d, ℓ-dimension cohomologique $\delta = 2d-1$. Plus précisément, il résulte de la démonstration qu'il existe une classe non nulle dans $H^\delta(U, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Considérons maintenant $Y = X[T]_{(0)}$ un hensélisé strict de la droite affine sur X en l'origine de la fibre spéciale, $g = fT \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ et V l'ouvert affine $Y[g^{-1}]$. On a $\dim(Y) = d+1$. Par pureté cohomologique, on vérifie immédiatement que le groupe de cohomologie $H^{d+1}(V, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est également non nul. Par récurrence, on obtient une paire (Y, V) comme ci-dessus telle que $\mathrm{cd}_\ell(V) \geq 2d + r - 1$. D'après le corollaire précédent, on a également la majoration $\mathrm{cd}_\ell(V) \leq 2d + r - 1$, d'où l'égalité. □

5.2. Démonstration. — On procède par récurrence sur la dimension caténaire de f.

5.2.1. $\mathrm{dim.cat}(f) = 0$. — Cette égalité se produit si et seulement si Y est contenu dans la fibre spéciale. Le théorème est donc connu dans ce cas : on est sur un corps donc dans une situation excellente.

5.2.2. $\dim.\mathrm{cat}(f) = 1$. — On peut supposer les schémas X et Y réduits. Quitte à procéder par récurrence sur la dimension de Y, on peut également supposer Y irréductible : si Y est la réunion de deux fermés stricts Y_1 et Y_2, considérer par exemple le morphisme $\pi : Y_1 \amalg Y_2 \to Y$ et la suite exacte $0 \to \mathscr{F} \to \pi^\star \mathscr{F} \to i_\star \mathscr{H} \to 0$, où i est l'immersion fermée $Y_1 \cap Y_2 \hookrightarrow Y$ et $\mathscr{H}$ un faisceau sur cette intersection. Quitte à remplacer X par l'adhérence de l'image de f, on peut également supposer la base intègre et f dominant. Soit η (resp. s) le point générique (resp. fermé) de X et η' (resp. s') le point générique (resp. fermé) de Y. Comme tout point y de Y s'insère dans une suite de spécialisations $\eta' \rightsquigarrow y \rightsquigarrow s'$, d'image $\eta \rightsquigarrow f(y) \rightsquigarrow s$, il résulte de l'hypothèse $\dim.\mathrm{cat}(f) = 1$ que $f(y) = \eta$ ou $f(y) = s$. Soient $\widehat{X}$ le complété de X et $\widetilde{Y}$ un hensélisé strict du produit fibré $Y \times_X \widehat{X}$. C'est un schéma strictement local de dimension $\dim(Y)$ et *excellent* car essentiellement de type fini sur le schéma local nœthérien complet — donc excellent — $\widehat{X}$. On note $\widetilde{V}$ l'ouvert $V \times_Y \widetilde{Y}$. Il résulte de [**SGA 4½** [Th. finitude] 1.9] qu'au-dessus de η, et donc au-dessus de $X - \{s\}$, la formation des images directes par $j : V \hookrightarrow Y$ commute au changement de base $\widetilde{Y} \to Y$. En d'autres termes, si $V' = V \cup (Y - Y_s)$ et j' désigne l'immersion intermédiaire $V \hookrightarrow V'$, la formation de $Rj'_\star$ commute à $\widetilde{Y} \to Y$. Il en est de même pour $j'' : V' \to Y$ d'après le théorème de comparaison à la complétion de Fujiwara-Gabber ([**Fujiwara, 1995**, 6.6.4]). On utilise ici le fait que si F est un fermé de Y inclus dans la fibre spéciale alors les complétés de Y le long de F et celui de l'hensélisé de $\widetilde{Y}$ (en le point correspondant au point fermé de Y) sont naturellement isomorphes. Finalement, le foncteur $R\Gamma(V) = R\Gamma(Y) \circ Rj_\star$ s'identifie au foncteur $R\Gamma(\widetilde{Y}) \circ R\widetilde{j}_\star = R\Gamma(\widetilde{V})$, appliqué à l'image inverse. Ainsi on a l'inégalité $\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \mathrm{cd}_\ell(\widetilde{V})$. Le schéma $\widetilde{Y}$ est quasi-excellent, le terme de droite est donc justiciable du théorème de Lefschetz affine. L'inégalité $\mathrm{cd}_\ell(V) \leq \dim(Y)$ résulte alors de l'égalité $\dim(Y) = \dim(\widetilde{Y})$.

Remarque 5.2.3. — Lorsque $\dim(X) = 1$, on a vu en exp. **XIII**, 2.3 que le théorème peut également se démontrer par normalisation.

5.2.4. $\dim.\mathrm{cat}(f) > 1$. — Notons à nouveau j l'immersion ouverte $V \hookrightarrow Y$. Par restriction à la fibre générique, on a un isomorphisme $R\Gamma(V_\eta, \mathscr{F}) = R\Gamma(Y_\eta, (Rj_\star \mathscr{F})_{|Y_\eta})$. Si y est un point géométrique de Y localisé en Y_η, la fibre $(R^q j_\star \mathscr{F})_y$ est nulle dès lors que $q > \dim(\mathscr{O}_{Y_\eta, y})$. Cela résulte par passage à la limite du théorème d'Artin pour les schémas affines de type fini sur un corps et du fait trivial que $Y_{(y)} \to Y$ se factorise à travers Y_η. Soient $q \geq 0$ un entier, $\mathscr{G}$ un sous-faisceau constructible de $(R^q j_\star \mathscr{F})_{|Y_\eta}$ et S l'adhérence dans Y de son support. D'après ce qui précède, on a la majoration $\mathrm{codim}(S_\eta, Y_\eta) \geq q$. Il en résulte que $\mathrm{codim}(S, Y) \geq q$, et ce sans hypothèse de caténarité sur les schémas. De la suite spectrale de composition des foncteurs et du théorème 4.1.1, on déduit que le groupe de cohomologie $H^n(V_\eta, \mathscr{F})$ est nul lorsque $n > \dim(Y)$.

Considérons la flèche d'adjonction $\mathscr{F} \to k_\star k^\star \mathscr{F}$, où k est l'immersion $V_\eta \hookrightarrow V$, et $\mathscr{K}$ son noyau. Par construction, la restriction de $\mathscr{K}$ à V_η est nulle. La dimension de l'adhérence du support de $\mathscr{K}$ est donc au plus $\dim(Y) - 1$. Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que le résultat d'annulation désiré est connu pour $\mathscr{K}$. Procédant de même pour le conoyau de l'adjonction précédente, on se ramène à démontrer l'annulation du groupe $H^p(V, R^0 k_\star k^\star \mathscr{F})$ pour $p \geq \dim(Y) + \dim.\mathrm{cat}(f) (> \dim(Y))$. Compte tenu du résultat d'annulation précédemment établi pour $R\Gamma(V_\eta, \mathscr{F}) = R\Gamma(V, Rk_\star k^\star \mathscr{F})$ et de la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = H^p(V, R^q k_\star k^\star \mathscr{F}) \Rightarrow H^{p+q}(V_\eta, \mathscr{F})$, il suffit de montrer que pour chaque tel q, les groupes $H^{p-q-1}(V, R^q k_\star k^\star \mathscr{F})$ sont nuls pour $q > 0$. Fixons q. Soit y un point géométrique de Y tel que la fibre de $R^q k_\star k^\star \mathscr{F}$ en y soit non nulle et x le point image de y dans X. Le schéma $\eta \times_X X_{(x)}$ se décompose en un coproduit de spectres de corps η_α ; de même, le produit fibré $Y_{(y)} \times_X \eta$, dont on considère la cohomologie, est isomorphe au coproduit des $Y_{(y)} \times_{X_{(x)}} \eta_\alpha$. D'après *op. cit.* (4.1.1), ces derniers n'ont de cohomologie qu'en degré $q \leq \dim Y_{(y)} \leq \dim(Y) - \dim \overline{\{y\}}$. Il en résulte que la dimension du support de chacun des sous-faisceaux constructibles de $R^q k_\star k^\star \mathscr{F}$ est au plus $\dim(Y) - q$. De plus, la dimension caténaire du morphisme f restreint à un tel support est au plus $\dim.\mathrm{cat}(f) - 1$. Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que les groupes $H^{p-q-1}(V, R^q k_\star k^\star \mathscr{F})$ sont nuls lorsque $p - q - 1 \geq (\dim(Y) - q) + (\dim.\mathrm{cat}.(f) - 1)$. CQFD.

6. Dimension cohomologique d'un ouvert du spectre épointé : minoration

Théorème 6.1. — *Soient X un schéma intègre strictement local nœthérien de dimension d et Ω un ouvert non vide du spectre épointé. Alors, pour tout nombre premier ℓ inversible sur X, on a*

$$\mathrm{cd}_\ell(\Omega) \geq d.$$

La première démonstration occupe les deux paragraphes suivants.

6.2. Construction combinatoire locale. —

6.2.1. Notations. — Soit X un schéma strictement local nœthérien régulier de dimension $d \geq 2$ et soit $t_1, \ldots, t_{d-1}, t_d$ un système régulier de paramètres. Pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, on note également π l'élément t_d. Pour chaque $1 \leq i \leq d-1$, on note H_i le diviseur régulier $V(t_i)$; pour $i = d$, on pose $H_d = V(t_1 + \cdots + t_{d-1} - \pi)$. Enfin on note U l'ouvert affine $X[\pi^{-1}]$, k l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X$ et j l'immersion ouverte $U - \bigcup_{i=1}^{d} H_i \hookrightarrow U$. On fixe un nombre premier ℓ inversible sur X et on pose $\Lambda = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$.

6.2.2. — Soit P une partie de $\{1, \ldots, d\}$. Notons H_P l'intersection $\bigcap_{p \in P} H_p$, et désignons par H'_P l'intersection $H_P \cap U$ — ouverte dans H_P et fermée dans U —, et k_P l'immersion ouverte $H'_P \hookrightarrow H_P$. Pour chaque entier q, le groupe de cohomologie $H^q(U, \Lambda_{H'_P})$ est isomorphe au groupe $H^q(H'_P, \Lambda)$. Comme $H_P - H'_P$ est le diviseur régulier défini par π dans H_P, il résulte de la pureté cohomologique que $H^q(U, \Lambda_{H'_P})$ est nul pour $q > 1$, isomorphe à Λ pour $q = 0$ et de rang 1, engendré par la classe de Kummer de π pour $q = 1$. Ceci vaut également pour $P = \varnothing$, avec la convention évidente que $H_\varnothing = X$ et $H'_\varnothing = U$.

6.2.3. — Considérons maintenant le quasi-isomorphisme

$$j_!\Lambda \xrightarrow{\sim} \Big(\Lambda \to \bigoplus_{1 \leq i \leq d} \Lambda_{H'_i} \to \cdots \to \bigoplus_{|P| = d-1} \Lambda_{H'_P} \to 0\Big)$$

de faisceaux de Λ-modules sur U, où le premier terme du complexe de droite est placé en degré 0. (On utilise ici le fait que $H'_P = \varnothing$ si $|P| = d$ car H_P est alors le point fermé de X.) Les différentielles sont des sommes, avec des signes, de flèches de restriction. À cette résolution est associée — via la filtration « stupide » — la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(U, \bigoplus_{|P|=p} \Lambda_{H'_P}) \Rightarrow H^{p+q}(U, j_!\Lambda).$$

D'après les observations du paragraphe précédent, toute classe de $E_1^{d-1,1} = \bigoplus_{|P|=d-1} H^1(U, \Lambda_{H'_P})$ n'appartenant pas à l'image de $E_1^{d-2,1}$ survit dans l'aboutissement $H^d(U, j_!\Lambda)$.

6.2.4. — De même que le faisceau $j_!\Lambda$ est isomorphe au produit tensoriel

$$(U - H'_1 \hookrightarrow U)_!\Lambda \otimes \cdots \otimes (U - H'_d \hookrightarrow U)_!\Lambda),$$

le complexe quasi-isomorphe à $j_!\Lambda$ ci-dessus est isomorphe au produit tensoriel des complexes $(\Lambda \to \Lambda_{H'_i})$, $1 \leq i \leq d$, où la flèche est l'unité de l'adjonction, isomorphes respectivement aux $(U - H'_i \hookrightarrow U)_!\Lambda$. De cette observation, jointe à (6.2.2), on en déduit que le complexe $E_1^{\bullet,1}$ est quasi-isomorphe à la troncation naïve $\sigma_{\leq d-1}\big((\Lambda \overset{\mathrm{Id}}{\to} \Lambda)^{\otimes d}\big)$ obtenue en remplaçant le d-ième terme, isomorphe à Λ, par zéro. Il est bien connu que ce complexe (« de Koszul ») produit tensoriel est acyclique (avant troncation), cf. par exemple [**ÉGA** III_1 § 1.1]. (L'exactitude résulte également du quasi-isomorphisme ci-dessus, appliqué à d'autres fermés.) En particulier, l'image de la différentielle $E_1^{d-2,1} \to E_1^{d-1,1}$ est naturellement le noyau d'une forme linéaire non nulle (explicite) sur $E_1^{d-1,1}$ et n'est donc pas $E_1^{d-1,1}$ tout entier. Il existe donc des sommes directes de classes de Kummer de π qui survivent dans $H^d(U, j_!\Lambda)$.

6.3. Éclatement et normalisation partielle. —

6.3.1. — Soit maintenant $X = \mathrm{Spec}(R)$ un schéma strictement local nœthérien intègre de dimension $d \geq 2$, de point fermé x, et soit Ω un ouvert non vide strict de X. Nous allons montrer qu'après éclatement et « normalisation partielle » l'ouvert Ω est — localement et « modulo des nilpotents » — un schéma régulier du type du schéma U considéré ci-dessus. Ceci permet de produire une classe de cohomologie non nulle de degré d sur Ω.

6.3.2. — Soit $Y = \mathrm{\acute{E}cl}_x(X)$. Notons j l'immersion ouverte de $Y - Y_x$ dans Y. On désigne par $\widehat{X}$ le complété du schéma local X, par Y' le produit fibré $Y \times_X \widehat{X}$ et par $Y'_{\text{réd}}$ la réduction de Y'. Notons que le schéma Y' est *excellent* car $\widehat{X}$ l'est.

6.3.3. — Soit $\mathscr{O}_Y^{\mathscr{D}}$ la normalisation de $\mathscr{O}_Y$ dans $j_\star\mathscr{O}_{Y-Y_x}$. On définit de même $\mathscr{O}_{Y'}^{\mathscr{D}}$ et $\mathscr{O}_{Y'_{\text{réd}}}^{\mathscr{D}}$. La $\mathscr{O}_Y$-algèbre $\mathscr{O}_Y^{\mathscr{D}}$ est colimite (filtrante) de ses sous-$\mathscr{O}_Y$-algèbres finies $\mathscr{A}_\lambda$.

Proposition 6.3.4. — *Le foncteur envoyant une sous-$\mathscr{O}_Y$-algèbre $\mathscr{B}$ de $j_\star\mathscr{O}_{Y-Y_x}$ sur l'image de $(Y' \to Y)^\star\mathscr{B}$ par l'adjonction $(Y' \to Y)^\star j_\star\mathscr{O}_{Y-Y_x} \to j'_\star\mathscr{O}_{Y'-Y_x}$ induit une* bijection *entre les sous-$\mathscr{O}_Y$-algèbres finies de $j_\star\mathscr{O}_{Y-Y_x}$ et les sous-$\mathscr{O}_{Y'}$-algèbres finies de $j'_\star\mathscr{O}_{Y'-Y_x}$. De plus, les algèbres $\mathscr{O}_Y^{\mathscr{D}}$ et $\mathscr{O}_{Y'}^{\mathscr{D}}$ se correspondent par ce foncteur.*

Démonstration. — On se ramène au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y_x = V(t)$. Il suffit de montrer que si A est une R-algèbre intègre et $A' = A \otimes_R \widehat{R}$ alors le morphisme $A[t^{-1}]/A \to A'[t^{-1}]/A'$ est un isomorphisme et que les normalisations se correspondent. Notons que les anneaux A et A' ont même complétion t-adique. Le premier point résulte alors du fait que si M est un A-module dont chaque élément est tué par une puissance de t, on a $M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A A'$. Enfin, soit $(f'/t^r)^d + a'_1(f'/t^r)^{d-1} + \cdots + a'_d = 0$ une relation de dépendance intégrale où f' et les a'_i appartiennent à A'. Soit N un entier assez grand. Écrivons $f' = f + t^N g'$, $a'_i = a_i + t^N b'_i$ où f et les a_i appartiennent à A. La relation précédente devient $(f/t^r)^d + a_1(f/t^r)^{d-1} + \cdots + a_d \in A' \cap A[t^{-1}] = A$. Il en résulte que l'élément $f'/t^r = f/t^r + t^{N-r}g'$ est, modulo un élément de A', dans l'image de $A^{\mathscr{O}}$. □

6.3.5. — Par excellence, l'algèbre $\mathscr{O}^{\mathscr{O}}_{Y'_{\text{réd}}}$ est finie sur $\mathscr{O}_{Y'_{\text{réd}}}$. L'anneau $\mathscr{O}^{\mathscr{O}}_{Y'}$ en est l'« image inverse » par la surjection naturelle. De ces observations et de la proposition précédente, on déduit qu'il existe un indice λ tel que, si $Z = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_\lambda)$ et $Z' = Z_{\widehat{X}}$, alors $Z'_{\text{réd}}$ est intégralement clos dans $Z'_{\text{réd}}$ privé de l'image inverse de Y_x. Notons que Z et Y sont isomorphes hors de Y_x.

6.3.6. — Soit E une composante de dimension $d-1$ de Y_x et soit e un point maximal de $E'_{\text{réd}}$ dans $Z'_{\text{réd}}$. Le localisé en e est un anneau de valuation discrète : c'est un anneau local réduit de dimension 1, intégralement clos dans le complémentaire du point fermé. Par excellence de Z' il existe un ouvert dense de $E'_{\text{réd}}$ le long duquel $Z'_{\text{réd}}$ est régulier. On peut également supposer que $E'_{\text{réd}}$ est régulier sur cet ouvert. (Pour ce dernier point il suffit de constater que $E'_{\text{réd}}$ est de type fini sur un corps.) Soit $U'_{\text{réd}}$ un ouvert de $Z'_{\text{réd}}$ induisant l'ouvert de $E'_{\text{réd}}$ ci-dessus et U un ouvert de Z induisant l'ouvert correspondant de E. (Le morphisme $Z' \to Z$ est un isomorphisme sur E.) On a $U' \subset U \times_Z Z'$. Ci-dessous, on s'autorise à rétrécir les ouverts U et U', sous réserve qu'ils contiennent tous les points maximaux de E. On suppose de plus que $U \cap Y_x = U \cap E$.

6.3.7. — On note t une équation de E dans U et π une équation de $E'_{\text{réd}}$ dans $U'_{\text{réd}}$ de sorte qu'il existe une unité u et un entier e tels que l'on ait l'égalité $t = u \times \pi^e$ sur $U'_{\text{réd}}$. L'existence d'un relèvement montre que l'on peut supposer l'équation π définie sur U'. Vérifions que l'*on peut également supposer π défini sur* U. Les schémas Z' et Z ayant même complétion t-adique, il suffit d'observer que si a est une fonction sur U', on a l'égalité d'idéaux $(\pi) = (\pi + at^2)$, du moins lorsque $1 + ua\pi^{2e-1} \in \mathbf{G}_m(U')$, ce que l'on peut supposer quitte à restreindre U'.

6.3.8. — Soit Ω un ouvert non vide de $X - \{x\}$ (cf. 6.3.1). On note également Ω ses images inverses dans Y et Z ; elles lui sont isomorphes. Sur un voisinage ouvert des points maximaux de E, l'ouvert Ω coïncide avec le complémentaire de E. Génériquement sur E, on a donc $\Omega = Z[\pi^{-1}]$. Soit z un point fermé de Z appartenant à un tel ouvert ainsi qu'à l'ouvert U. Soient $t_1, \ldots, t_{d-1}$ des fonctions de $\mathscr{O}_{Z'_{\text{réd}},z}$ constituant, avec π, un système régulier de paramètres. On peut supposer qu'elles s'étendent à $U'_{\text{réd}}$. Utilisant à nouveau le fait que le morphisme $Z' \to Z$ est un isomorphisme au-dessus de E, on peut également supposer qu'elles proviennent de U, quitte à les changer modulo π. Pour chaque $i < d$, considérons l'adhérence schématique $H_i \subset Z$ de l'hypersurface $V(t_i)$ dans U et H_d l'adhérence schématique de $V(t_1 + \cdots + t_{d-1} - \pi)$. On note $H'_i = H_i \cap \Omega$.

6.3.9. Stratégie. — On va construire une classe non nulle dans le groupe de cohomologie $H^d(\Omega, j_!\Lambda_{\Omega - \bigcup_1^d H'_i})$, où j est l'immersion ouverte $\Omega - \bigcup_1^d H'_i \hookrightarrow \Omega$ et $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec n inversible sur X. *Localement*, ces groupes de cohomologie sont invariants par passage à la complétion de la base X (et bien sûr au schéma réduit) de sorte que l'on va pouvoir utiliser les calculs de 6.2. Il faut cependant prendre garde ici au fait que l'intersection $\bigcap_1^d H'_i$ n'est pas nécessairement vide, contrairement au cas local précédemment étudié : l'analogue du complexe 6.2.3 a donc un terme de plus (en degré d). Malgré tout, on va relever à Ω une classe de degré d « locale » — c'est-à-dire du schéma $\Omega \times_Z Z_{(\bar{z})}$ (ou plutôt l'analogue sur $Z'_{\text{réd}}$) — à coefficients dans $j_!\Lambda$.

6.3.10. — Considérons à nouveau la suite spectrale du 6.2.3 :

$$E_1^{p,q} = H^q(\Omega, \Lambda_p) \Rightarrow H^{p+q}(\Omega, j_!\Lambda),$$

où l'on note Λ_p la somme directe des $\Lambda_{H'_P}$ avec $|P| = p$. Pour chaque $P \subset [1,d]$ de cardinal $d-1$, l'intersection H_P des hypersurfaces correspondantes de Z est propre sur X. Par construction, elle est aussi *quasi-finie* au voisinage du point fermé z. Il en résulte par le théorème de changement de base propre pour l'ensemble des composantes connexes (ou le théorème principal de Zariski) — d'après lequel sa décomposition en composantes connexes se lit sur la fibre spéciale — que chaque H_P se décompose en le coproduit d'un schéma local fini sur X et d'un schéma ne rencontrant pas z. Ainsi, $H^1(\Omega, \Lambda_{d-1})$ a un facteur direct isomorphe à $H^1(Z_{(z)}[\pi^{-1}], \Lambda_{d-1})$ et, par comparaison à la complétion, à $H^1(Z'_{\text{réd}\,(z)}[\pi^{-1}], \Lambda_{d-1})$. De plus, la différentielle $E_1^{d-1,1} \to E_1^{d,1}$ envoie ce facteur sur 0 dans $H^1(\Omega, \Lambda_d)$ car l'intersection de $H_{[1,d]}$ avec Ω est vide au voisinage de z. En effet, si $t_1 = t_2 = \cdots = t_{d-1} = t_1 + \cdots + t_{d-1} - \pi = 0$ alors $\pi = 0$; d'autre part, au voisinage de z,

$\Omega = Z[\pi^{-1}]$. Ainsi, toute classe de cohomologie du facteur direct « local » induit une classe dans $H^d(\Omega, j_!\Lambda)$ qui relève la classe correspondante dans $H^d(Z'_{\mathrm{réd}(z)}[\pi^{-1}], j_!\Lambda)$. On a vu (6.2.4) qu'il existe de telles classes non nulles. En conséquence, $H^d(\Omega, j_!\Lambda) \neq 0$ et finalement $\mathrm{cd}_n(\Omega) \geq d$. CQFD.

6.4. Joints d'anneaux henséliens et dimension cohomologique. —

6.4.1. Joints. — Commençons par énoncer une variante du résultat principal de [**Artin, 1971**], auquel nous nous ramenons.

Proposition 6.4.1.1. — *Soient A un anneau, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux idéaux premiers et C une composante du produit tensoriel $A^h_{\mathfrak{p}} \otimes_A A^h_{\mathfrak{q}}$. L'anneau C est local hensélien. De plus, si ni $A^h_{\mathfrak{p}} \to C$ ni $A^h_{\mathfrak{q}} \to C$ ne sont* locaux, *il est* strictement *hensélien.*

Ici, $A^h_{\mathfrak{p}}$ désigne l'hensélisé de A en $\mathfrak{p}$. Par « composante connexe », on entend — comme en *op. cit.*, §3 — l'anneau de fonctions sur une composante connexe du spectre. Notons que le premier énoncé n'est mis que pour mémoire (*op. cit.*, 3.4 (i)) ; le second généralise *loc. cit.* (ii) car si $A^h_{\mathfrak{p}} \to C$ est local, on a l'inclusion $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ (et de même pour $\mathfrak{q}$, *mutatis mutandis*).

Corollaire 6.4.1.2. — *Soient A un anneau et $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ deux idéaux premiers. Si $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$, toute composante connexe du produit tensoriel $A^h_{\mathfrak{p}} \otimes_A A^{hs}_{\mathfrak{q}}$ est strictement hensélienne.*

Ici, $A^{hs}_{\mathfrak{q}}$ désigne un hensélisé strict de A en $\mathfrak{q}$.

Démonstration du corollaire. — Soit C' une composante du produit tensoriel $A^h_{\mathfrak{p}} \otimes_A A^{hs}_{\mathfrak{q}}$ et C la composante correspondante de $A^h_{\mathfrak{p}} \otimes_A A^h_{\mathfrak{q}}$. L'anneau C est local hensélien ; le morphisme $C \to C'$ étant ind-fini étale, l'anneau C' est également local hensélien. Par hypothèse, le morphisme $A^h_{\mathfrak{p}} \to C$ n'est pas local. Deux cas se présentent. Si $A^h_{\mathfrak{q}} \to C$ n'est pas local non plus, l'anneau C est (local) *strictement* hensélien et il en est de même de C'. Si $A^h_{\mathfrak{q}} \to C$ est local, il en est de même du morphisme ind-étale $A^{hs}_{\mathfrak{q}} \to C'$. Les corps résiduels de $A^{hs}_{\mathfrak{q}}$ et C' sont donc isomorphes. En particulier, l'anneau hensélien C' est *strictement* hensélien. □

Démonstration de la proposition. — Écrivons A comme un quotient d'un anneau intègre normal A' et notons encore $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers de A' correspondant à ceux de A. Pour toute composante connexe C' de $A'^h_{\mathfrak{p}} \otimes_{A'} A'^h_{\mathfrak{q}}$ — nécessairement locale hensélienne —, le quotient $C' \otimes_{A'} A$ est soit nul soit local hensélien. Les composantes connexes de $A^h_{\mathfrak{p}} \otimes_A A^h_{\mathfrak{q}}$ sont exactement les quotients locaux henséliens ainsi obtenus. Ceci nous permet de supposer A intègre normal. (On pourrait également supposer A de type fini sur $\mathbf{Z}$; cf. *op. cit.*, démonstration du théorème 3.4.) Comme dans *op. cit.*, 2.1, on peut choisir une clôture algébrique $\overline{K}$ de $K = \mathrm{Frac}(A)$ et plonger nos anneaux dans un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{K} \arrow[d, dash] & & \\
 & & C \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[d, phantom, "\cup" description] & & \\
\overline{A}_1 \arrow[r, phantom, "\subset"] & A^h_{\mathfrak{p}} \arrow[dr, dash] & \overline{A} & A^h_{\mathfrak{q}} \arrow[dl, dash] \arrow[r, phantom, "\supset"] & \overline{A}_2 \\
 & & A & &
\end{tikzcd}$$

où C est le sous-anneau de $\overline{K}$ engendré par $A^h_{\mathfrak{p}}$ et $A^h_{\mathfrak{q}}$ — c'est le « joint », noté $[A^h_{\mathfrak{p}}, A^h_{\mathfrak{q}}]$, de *op. cit.* —, et $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ et $\overline{A}$ sont les clôtures intégrales de A dans les corps de fractions de, respectivement, $A^h_{\mathfrak{p}}$, $A^h_{\mathfrak{q}}$ et C. Notons que l'anneau C est normal : c'est une composante de la A-algèbre ind-étale $A^h_{\mathfrak{p}} \otimes_A A^h_{\mathfrak{q}}$. D'autre part, l'anneau $A^h_{\mathfrak{p}}$ est un localisé (Zariski) de $\overline{A}_1$ en un idéal premier ; cet idéal premier admet — par la propriété de Hensel — un unique relèvement en un idéal premier $\overline{\mathfrak{p}}$ de C. De même pour $\mathfrak{q}$. L'anneau C est aussi le joint des anneaux henséliens $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}}$ et $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{q}}}$. Rappelons que, par hypothèse, aucun des morphismes $A^h_{\mathfrak{p}} \to C$ et $A^h_{\mathfrak{q}} \to C$ n'est local ; il en est donc de même de $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{p}}} \to C$ et $\overline{A}_{\overline{\mathfrak{q}}} \to C$ et, en particulier, $\overline{\mathfrak{p}} \not\subset \overline{\mathfrak{q}}$ et $\overline{\mathfrak{q}} \not\subset \overline{\mathfrak{p}}$. Ces réductions étant faites, le fait que C soit strictement hensélien résulte de [**Artin, 1971**, théorèmes 2.2 et 2.5]. □

6.4.2. Comparaison à la cohomologie d'un corps discrètement valué hensélien. — Voyons maintenant une conséquence cohomologique de la proposition précédente.

Soit X un schéma tel que toute paire de points appartienne à un ouvert affine. Soit $x \in X$ tel que $\mathscr{O}_{X,x}$ soit (local) nœthérien intègre de dimension 1 et enfin $\Omega \subset X$ un ouvert tel que $\Omega \cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$ soit le point générique $\mathrm{Spec}(K)$ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,x})$. Notons enfin K^h l'anneau total des fractions $\mathscr{O}^h_{X,x} \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} K$ de l'hensélisé $\mathscr{O}^h_{X,x}$ et ε le morphisme $\mathrm{Spec}(K^h) \to \Omega$.

Proposition 6.4.2.1. — *Pour tout entier $j > 0$, on a $R^j \varepsilon_\star = 0$. Ainsi, pour tout faisceau étale abélien $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{Spec}(K^h)$, et tout entier $i \geq 0$, le morphisme*

$$H^i(\Omega, \varepsilon_\star \mathscr{F}) \to H^i(\mathrm{Spec}\, K^h, \mathscr{F})$$

est un isomorphisme*. En particulier, pour tout nombre premier ℓ, on a la minoration* $\mathrm{cd}_\ell(\Omega) \geq \mathrm{cd}_\ell(K^h)$.

Démonstration. — Seul le résultat d'annulation est à démontrer ; il résulte immédiatement de la proposition précédente par passage aux fibres en des points géométriques de U. □

Il n'est pas difficile d'en déduire une démonstration alternative du théorème 6.1 (voir aussi 4.1.4) que nous rappelons ici sous la forme d'un corollaire.

Corollaire 6.4.2.2. — *Soit R un anneau strictement local nœthérien intègre de corps des fractions K et soit ℓ un nombre premier inversible sur R. Pour tout ouvert non vide strict Ω de $\mathrm{Spec}(R)$, on a la minoration*

$$\mathrm{cd}_\ell(\Omega) \geq \dim(R).$$

Démonstration. — Posons $X = \mathrm{Spec}(R)$ et considérons, comme en § 6.3, l'éclatement Y de X en son point fermé. Soit y le point générique d'une composante irréductible de dimension $\dim(X)-1$ de la fibre spéciale. D'après la proposition 6.4.2.1 appliquée au point y de Y et à l'ouvert Ω (vu dans Y), on a la minoration $\mathrm{cd}_\ell(\Omega) \geq \mathrm{cd}_\ell(K^h)$, où K^h désigne l'anneau total des fractions de $\mathscr{O}^h_{Y,y}$. D'après le théorème de Krull-Akizuki, le normalisé de $\mathscr{O}_{Y,y}$ dans K^h est un produit fini d'anneaux de valuation discrète henséliens, de corps résiduels finis sur $\kappa(y)$. Il résulte alors de la formule $\mathrm{cd}_\ell(\mathrm{Frac}\, A) = 1 + \mathrm{cd}_\ell(\kappa)$ — où A est un trait hensélien de corps résiduel κ de caractéristique $\neq \ell$ ([**SGA 4** X 2.2.(i)]) —, et de la formule $\mathrm{cd}_\ell(\kappa) = \mathrm{deg.\,tr.}(\kappa/k)$ — où κ est une extension de type fini d'un corps séparablement clos k de caractéristique $\neq \ell$ ([**SGA 4** X 2.1]) —, que la ℓ-dimension cohomologique de K^h est $\dim(R)$. CQFD. □

Remarques 6.4.2.3. — Le même argument permet d'obtenir une nouvelle démonstration, plus simple, des résultats de [**Gabber & Orgogozo, 2008**, § 6.2].

Enfin, signalons que l'on peut étendre 6.4.2.2 à tout *sous-ensemble* non vide Ω du schéma épointé $X^\star$ qui est stable par générisation : un tel ensemble est une intersection d'ouverts et on peut définir son topos étale, par passage à la limite ([**SGA 4** VI § 8]) ou bien via le topos étale d'un topos annelé [**Hakim, 1972**, chap. IV, § 5].

Références

[Artin, 1971] Artin, M. (1971). On the joins of Hensel rings. *Adv. Math.*, 7, 282–296. ↑ 11

[Fujiwara, 1995] Fujiwara, K. (1995). Theory of tubular neighborhood in étale topology. *Duke Math. J.*, 80(1), 15–57. ↑ 3, 6, 8

[Gabber & Orgogozo, 2008] Gabber, O. & Orgogozo, F. (2008). Sur la p-dimension des corps. *Invent. math.*, 174(1), 47–80. ↑ 6, 12

[Hakim, 1972] Hakim, M. (1972). *Topos annelés et schémas relatifs*, volume 64 des *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag. ↑ 12

[Heinzer et al., 1997] Heinzer, W., Rotthaus, C., & Wiegand, S. (1997). Noetherian rings between a semilocal domain and its completion. *J. Algebra*, 198(2), 627–655. ↑ 2

[Matsumura, 1980] Matsumura, H. (1980). 可換環論. 共立出版. ↑ 2

[Nagata, 1958] Nagata, M. (1958). An example of a normal local ring which is analytically reducible. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.*, 31, 83–85. ↑ 2

[Nagata, 1962] Nagata, M. (1962). *Local rings*, volume 13 des *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons. ↑ 2

[Raynaud & Gruson, 1971] Raynaud, M. & Gruson, L. (1971). Critères de platitude et de projectivité. Techniques de « platification » d'un module. *Invent. math.*, 13, 1–89. ↑ 1