XXI. Le théorème de finitude pour les coefficients non abéliens

Frédéric Déglise

version du 2016-11-14 à 13h36 TU (19c1b56)

À la mémoire de mon oncle Olivier.

1. Introduction

Le but de l'exposé est de démontrer les théorèmes suivants, qui généralisent le théorème d'Artin (cf. [**SGA 4** XIV 1.1]) dans le cas ensembliste et non abélien :

Théorème 1.1. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens. Pour tout faisceau constructible F sur $Y_{ét}$, le faisceau $f_\star F$ est constructible.*

Théorème 1.2. — *Soit $f : Y \to X$ un morphisme de type fini entre schémas quasi-excellents. Soit $\mathbb{L}$ un ensemble de nombres premiers inversibles sur X. Pour tout faisceau constructible de groupes F sur $Y_{ét}$ de $\mathbb{L}$-torsion, le faisceau $R^1 f_\star(F)$ sur $X_{ét}$ est constructible.*

Théorème 1.3. — *Soit X un schéma excellent, $Z \subset X$ une partie fermée telle que pour toute composante irréductible X' de X, $\mathrm{codim}_{X'}(Z \cap X') \geq 2$. Notons $j : U \to X$ l'immersion ouverte du complémentaire de Z. Pour tout groupe fini G, le faisceau $R^1 j_\star(G_U)$ est constructible.*

Théorème 1.4. — *Soit A un anneau strictement local de dimension 2. On suppose que A est normal, excellent, et on note $X' = \mathrm{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$ son spectre épointé. Alors, pour tout groupe fini G, l'ensemble $H^1(X', G)$ est fini.*

Le théorème 1.1 est prouvé dans la section 2. Ce théorème est utilisé par les suivants dans le cas où X est quasi-excellent. Ce cas est beaucoup plus simple, comme nous le dégageons dans la démonstration.

Le théorème 1.2 est réduit — en trois étapes — au théorème 1.3 dans la section 3. Toutefois, le lecteur attentif notera que ce dernier théorème n'est pas un simple cas particulier car il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse sur le cardinal du groupe G.

Le théorème 1.3 est réduit au théorème 1.4 dans la section 4. Cette réduction apparaît en 4.3 et utilise deux lemmes qui ont été établis auparavant (lemmes 3.3.2 et 4.2.2).

Le dernier théorème est bien un cas particulier de 1.3. Toutefois, nous avons choisi de le dégager dans cette introduction à la fois comme une résultat important et comme un point clé. Il est démontré dans la section 5 suivant un raisonnement par l'absurde qui utilise la méthode des ultrafiltres (voir 5.2.1 pour des rappels).

Notations et conventions. —

– Quand une topologie sur un schéma est sous-entendue, il s'agit de la topologie étale.
– Étant donné un ensemble D (resp. un groupe G), on notera parfois D (resp. G) pour le faisceau étale constant induit sur un schéma X lorsque X est clair d'après le contexte. Si l'on veut préciser X, on note ce faisceau D_X (resp. G_X), suivant l'usage.
– Quand on parle de la normalisation d'un schéma X, il s'agit du morphisme canonique
$$X' = \coprod_{i \in I} X'_i \to X$$
où I désigne l'ensemble des composantes irréductibles de X et X'_i désigne le schéma normalisé de la composante irréductible de X correspondant à i, munie de sa structure de sous-schéma réduit. On dit aussi que X' est le schéma normalisé associé à X.

2. Image directe de faisceaux d'ensembles constructibles

Dans le cas où X est quasi-excellent, la preuve est une application de résultats déjà connus (cf. [**SGA 4** IX]). Nous commençons par exposer la démonstration dans ce cas, puis dans le cas général. Toutefois, l'étape de réduction exposée dans la section qui suit est valable dans les deux cas.

2.1. Réduction du théorème. — On commence par réduire le théorème 1.1 à l'assertion suivante :

($\mathscr{P}$) Soit D un ensemble fini et $j : U \to X$ une immersion ouverte entre schémas noethériens. Alors, le faisceau d'ensembles $j_\star(D_U)$ est constructible.

Considérons les hypothèses du théorème 1.1. D'après [**SGA 4** IX 2.14], on peut trouver un monomorphisme

$$F \to \prod_{i=1}^{n} \pi_{i\star}(C_i) = Q$$

pour des morphismes finis $\pi_i : Y_i \to Y$ et des faisceaux constants finis C_i sur Y_i. Comme un sous-faisceau d'un faisceau constructible est constructible ([**SGA 4** IX 2.9 (ii)]), il suffit de montrer que $f_\star(Q)$ est constructible. On est donc ramené au cas de $(f\pi_i)_\star(C_i)$ pour tout i, ce qui montre qu'on peut supposer $F = D_Y$ pour un ensemble fini D.

Notons que dans ce cas, le théorème est local en Y. En effet, si l'on se donne un recouvrement étale de type fini $\pi : W \to Y$, le morphisme d'adjonction

$$D_Y \to \pi_\star\pi^\star(D_Y) = \pi_\star(D_W)$$

est un monomorphisme. En lui appliquant $f_\star$, on en déduit un monomorphisme

$$f_\star(D_Y) \to (f\pi)_\star(D_W).$$

Il suffit donc de montrer que le membre de droite est constructible ([**SGA 4** IX 2.9 (ii)] à nouveau). Notamment, on peut donc supposer que Y est affine.

Alors, f est séparé de type fini. On peut donc considérer une factorisation

$$Y \xrightarrow{j} \bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} X$$

de f telle que j est une immersion ouverte et $\bar{f}$ un morphisme propre. Le résultat est connu pour $\bar{f}$ (cf. [**SGA 4** XIV 1.1]) donc on est réduit au cas de l'immersion ouverte j, c'est-à-dire à l'assertion ($\mathscr{P}$).

Remarque 2.1.1. — i. Si l'on suppose que X est quasi-excellent, le schéma $\bar{X}$ qui apparaît dans la réduction ci-dessus est encore quasi-excellent puisque $\bar{f}$ est de type fini.

ii. Dans cette réduction, on a vu que ($\mathscr{P}$) est locale en U.

2.2. Cas où X est quasi-excellent. — Notons le lemme facile suivant :

Lemme 2.2.1. — *Considérons un carré cartésien de schémas noethériens*

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

tel que j est une immersion ouverte et p un morphisme fini surjectif. Alors, pour tout ensemble fini D, si $j'_\star(D_{U'})$ est constructible, $j_\star(D_U)$ est constructible.

Démonstration. — Par hypothèse, q est surjectif. On en déduit que le morphisme d'adjonction

$$D_U \to q_\star q^\star(D_U) = q_\star(D_{U'})$$

est un monomorphisme. Appliquant $j_\star$, on en déduit un monomorphisme

$$j_\star(D_U) \to p_\star(j'_\star(D_{U'})).$$

Puisque p est fini, $p_\star$ préserve la constructibilité d'après [**SGA 4** IX 2.14 (i)]. Le lemme en résulte puisqu'un sous-faisceau d'un faisceau d'ensembles constructible est constructible ([**SGA 4** IX 2.9 (ii)]). □

2.2.2. — Avant de passer à la preuve dans le cas général, notons que la démonstration du théorème 1.1 dans le cas où X est quasi-excellent est plus simple. Grâce à la remarque précédente, on se réduit à l'assertion ($\mathscr{P}$) dans le cas où X est quasi-excellent. Dès lors, la normalisation $p : X' \to X$ de X est finie. Ainsi, le lemme précédent appliqué au carré cartésien évident nous ramène au cas où X est normal.

Seul le cas où X et U sont connexes non vides nous intéresse. Alors, d'après [**SGA 4** IX 2.14.1], $j_\star(D_U) = D_X$, ce qui conclut.

2.3. Cas général. —

2.3.1. — Considérons les hypothèses de l'assertion $(\mathscr{P})$. Celle-ci est locale en X et il suffit donc de traiter la cas où X est affine, spectre d'un anneau noethérien A. Utilisant le lemme 2.2.1 — en prenant pour X' la somme disjointe des composantes irréductibles de X — on peut supposer aussi que A est intègre. On a déjà vu que $(\mathscr{P})$ est aussi locale en U (point (ii) de la remarque 2.1.1). On peut donc se ramener au cas où $U = \mathrm{Spec}(A_f)$ pour un élément non nul $f \in A$.

Pour prouver $(\mathscr{P})$, nous allons démontrer par induction noethérienne sur les fermés irréductibles Z de X la propriété légèrement plus forte suivante :

$(*_Z)$ Pour tout morphisme fini $Z' \to Z$, Z' intègre, tout ensemble fini D et toute immersion ouverte $l : V' \to Z'$, le faisceau $l_\star(D_{V'})$ est constructible.

D'après ce qui précède, on est ramené à prouver $(\mathscr{P})$ pour $X = \mathrm{Spec}(A)$ intègre et $U = \mathrm{Spec}(A_f)$, $f \neq 0$, en supposant la propriété d'induction suivante :

$(\mathscr{H})$ Pour tout fermé propre Z de X, tout morphisme fini $Z' \to Z$, tout ensemble fini D et toute immersion ouverte $l : V' \to Z'$, le faisceau $l_\star(D_{V'})$ est constructible.

2.3.2. — Soit A' la clôture intégrale de A dans son corps des fractions. On pose $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $Z = \mathrm{Spec}(A/(f))$ et on considère le diagramme formé de carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} & & Z'' \arrow[d, "h"'] \arrow[dd, bend left, "\pi"] \\ U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"'] & Z' \arrow[l, "i'"'] \arrow[d, "r"'] \\ U \arrow[r, "j"] & X & Z \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

tel que i et j sont les immersions évidentes, p (resp. h) est la normalisation de X (resp. Z').

2.3.3. Première étape (fibres génériques de p*).* — D'après [**Nagata, 1962**, 3.3.10], l'anneau A' est un anneau de Krull. Il en résulte que Z' n'a qu'un nombre fini de points génériques $z'_1, ..., z'_n$. On pose $z_r = p(z'_r)$. Bien que p ne soit pas nécessairement fini, $p^{-1}(z_s)$ est fini et l'extension résiduelle $\kappa(z'_s)/\kappa(z_s)$ est finie (voir [**Nagata, 1962**, chap. V, 33.10]). D'après le lemme 2.2.1, on peut toujours remplacer A par une extension finie $A \subset B \subset A'$. L'hypothèse $(\mathscr{H})$ est en effet encore vérifiée pour $Y = \mathrm{Spec}(B)$. Dès lors, on peut supposer que les conditions suivantes sont vérifiées :

(h1) Pour tout indice s, $p^{-1}(\{z_s\}) = \{z'_s\}$.
(h2) Pour tout indice s, $\kappa(z'_s)/\kappa(z_s)$ est triviale.

Notons A_s (resp. A'_s) l'anneau localisé de X en z_s (resp. X' en z'_s). Alors, A'_s est un anneau de valuation discrète. Du fait que l'extension induite A'_s/A_s est entière, on déduit que A_s est de dimension 1, ce qui implique que z_s est un point maximal du diviseur Z de X. Comme q est surjectif, on déduit de (h1) que $z_1, ..., z_n$ est l'ensemble des points génériques de Z.

2.3.4. Deuxième étape (restriction à un ouvert de Z*).* — Puisque trivialement $j^\star j_\star(D_U) = D_U$, il suffit de montrer que $i^\star j_\star(D_U)$ est constructible. Notons les faits suivants :

i. q surjectif : $D_U \to q_\star q^\star(D_U) = q_\star(D_{U'})$ est un monomorphisme.
ii. X' normal, j' dominante : $j'_\star(D_{U'}) = D_{X'}$ (voir [**SGA 4** IX 2.14.1]).
iii. h surjectif : $D_{Z'} \to h_\star h^\star(D_{Z'}) = h_\star(D_{Z''})$ est un monomorphisme.

On déduit de (i) et (ii) un monomorphisme

$$j_\star(D_U) \to j_\star q_\star(D_{U'}) = p_\star(D_{X'}).$$

Notons que p est pro-fini. Le théorème de changement de base propre s'étend à ce cas, ce qui donne la relation : $i^\star p_\star = r_\star i'^\star$. Si on applique $i^\star$ au monomorphisme précédent, on déduit de cette relation et de (iii) un monomorphisme composé :

$$\sigma : i^\star j_\star(D_U) \to i^\star p_\star(D_{X'}) = r_\star(D_{Z'}) \to \pi_\star(D_{Z''}).$$

Considérons maintenant une immersion ouverte dense $l : V \to Z$ ainsi que le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Z'' \arrow[d, "\pi"'] & V'' \arrow[l, "l'"'] \arrow[d, "\pi_V"] \\ Z & V. \arrow[l, "l"'] \end{tikzcd}$$

On en déduit un diagramme commutatif de faisceaux d'ensembles :

$$\begin{tikzcd} i^\star j_\star(D_U) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"'] & l_\star l^\star i^\star j_\star(D_U) \arrow[d, "l_\star l^\star \sigma"] \\ \pi_\star(D_{Z''}) \arrow[r, "\beta"] & l_\star l^\star \pi_\star(D_{Z''}). \end{tikzcd}$$

Or le morphisme β — induit par l'unité d'adjonction $(l^\star, l_\star)$ — est un isomorphisme. En effet, l étant une immersion ouverte $l^\star\pi_\star = \pi_{V\star}l'^\star$ par changement de base. On obtient donc l'identification : $l_\star l^\star\pi_\star(D_{Z''}) = \pi_\star l'_\star(D_{V''})$. De plus, à travers cette identification, le morphisme β est l'image [(i)] par $\pi_\star$ de l'unité d'adjonction

$$D_{Z''} \to l'_\star l'^\star(D_{Z''}) = l'_\star(D_{V''}).$$

Ce dernier est un isomorphisme puisque Z'' est normal et l' dense (voir [**SGA 4** IX 2.14.1]). Puisque σ est un monomorphisme, on en déduit que α est un monomorphisme.
Or, d'après ($\mathscr{H}$), le faisceau d'ensembles $l_\star(D_V)$ est constructible. Pour conclure, il suffit donc (d'après [**SGA 4** IX 2.9 (ii)]) de trouver un ouvert dense V de Z tel que

$$j_\star(D_U)|_V = D_V. \tag{2.3.4.1}$$

2.3.5. Troisième étape (composantes immergées de Z*).* — Considérons la réunion T des composantes immergées de Z dans X. Alors, l'ouvert $V = Z - T$ satisfait la relation (2.3.4.1).

On doit montrer que pour tout point géométrique $\bar{x}$ de V, la fibre du morphisme canonique $D_V \to j_\star(D_U)|_V$ au point $\bar{x}$ est un isomorphisme. Autrement dit, on doit montrer que le morphisme canonique

$$\pi_0(U \times_X X_{(\bar{x})}) \to \pi_0(X_{(\bar{x})})$$

est un isomorphisme. En raisonnant par induction sur la dimension de $X_{(\bar{x})}$, on se ramène à montrer que le morphisme suivant

$$\pi_0(X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}) \to \pi_0(X_{(\bar{x})}) \tag{2.3.5.1}$$

est un isomorphisme.

Soit x le point de $X = \operatorname{Spec} A$ correspondant à $\bar{x}$. Si x n'est pas un point maximal, puisque V n'a pas de composante immergée,

$$\operatorname{Prof}_x(A/(f)) \geq 1 \Rightarrow \operatorname{Prof}_x(A) \geq 2.$$

D'après le théorème de Hartshorne ([**SGA 2** III 3.6]), le morphisme (2.3.5.1) est donc un isomorphisme.
Supposons que x est un point maximal. D'après (h1), il existe un indice i tel que $x = z_i$. Or, d'après (h2), le morphisme entier birationnel

$$X'_{(z'_i)} = \operatorname{Spec}(A'_i) \to \operatorname{Spec}(A_i) = X_{(z_i)}$$

est radiciel. C'est donc un homéomorphisme universel. On en déduit que le morphisme $X'_{(\bar{z}'_i)} \to X_{(\bar{z}_i)}$ est encore un homéomorphisme, où $\bar{z}'_i$ est le point géométrique correspondant à la clôture séparable de $\kappa(z_i)$ définie par $\bar{z}_i$. Dès lors, (2.3.5.1) est un isomorphisme puisque la propriété correspondante est vraie pour le schéma normal $X'_{(\bar{z}'_i)}$. Ceci conclut.

3. Image directe dérivée de faisceaux de groupes constructibles

3.1. Réduction au cas d'un faisceau constant.—

Lemme 3.1.1. — *Soit $f : Y \to X$ une morphisme de type fini entre schémas noethériens et $u : F \to F'$ un monomorphisme de faisceaux de groupes constructibles sur $Y_{\text{ét}}$. Alors, $R^1f_\star(F')$ constructible implique $R^1f_\star(F)$ constructible.*

Démonstration. — Posons $C = F'/F$ vu comme faisceau pointé, constructible sur $Y_{\text{ét}}$ par hypothèse. On considère la suite exacte de faisceaux pointés (cf. [**SGA 4** XII 3.1])

$$f_\star(F') \to f_\star(C) \to R^1f_\star(F) \xrightarrow{\nu} R^1f_\star(F').$$

[(i)] On le vérifie facilement en revenant à la définition du morphisme de changement de base à l'aide des adjonctions $(l^\star, l_\star)$ et $(l'^\star, l'_\star)$ et en utilisant que la composée suivante de morphismes unités/coünités est l'identité :

$$l_\star \to l_\star l^\star l_\star \to l_\star.$$

Supposant que $R^1f_\star(F')$ est constructible, on peut trouver une famille génératrice de sections locales $(e_1, ..., e_n)$ de $R^1f_\star(F')$ où e_i est définie sur un X-schéma étale de type fini V_i. Soit Φ_i le faisceau fibre de ν en e_i, défini par le diagramme cartésien de faisceaux (d'ensembles) sur $X_{\text{ét}}$:

$$\begin{tikzcd} \Phi_i \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d] & V_i \arrow[d, "e_i"] \\ R^1f_\star(F) \arrow[r, "\nu"] & R^1f_\star(F'). \end{tikzcd}$$

où on voit $e_i \in \Gamma(V_i, R^1f_\star(F'))$ comme un morphisme du topos étale de X. Pour montrer que $R^1f_\star(F)$ est constructible, il suffit de montrer qu'il est engendré par une famille finie de sections locales sur des objets quasi-compacts. Il suffit donc de montrer que pour tout i, Φ_i, vu comme un faisceau étale sur V_i grâce au morphisme ν_i, est engendré par un nombre fini de sections locales. On est donc ramené à montrer que le faisceau étale Φ_i sur V_i est constructible.

Pour montrer cela, on suppose $X = V_i$ pour simplifier les notations et on utilise l'interprétation de Φ_i en termes de F-objets tordus. Le faisceau Φ_i est un prolongement par le vide d'un faisceau à fibres non vides sur un ouvert U de X. Soit $\bar{x}$ un point géométrique de U. Il existe un voisinage étale V de $\bar{x}$ dans X et une section e de Φ_i sur V/X. Quitte à restreindre le voisinage V, e provient d'un F-torseur P sur $V \times_X Y$. On peut alors tordre par P les faisceaux F, F' et C et obtenir une suite exacte sur V :

$$f_\star(F'^P) \to f_\star(C^P) \to R^1f_\star(F^P) \xrightarrow{\nu^P} R^1f_\star(F'^P).$$

On sait que $\Phi_i|_V$ s'identifie avec le noyau de ν^P. On en déduit $\Phi_i|_V \simeq f_\star(F'^P)\backslash f_\star(C^P)$. Or ce faisceau est constructible d'après le théorème 1.1. □

Considérons les hypothèses du théorème 1.2. D'après [**SGA 4** IX 2.14], on peut trouver un monomorphisme de faisceaux de groupes

$$F \to F' = \prod_{i=1}^{r} \pi_{i\star}(G_i)$$

pour des morphismes finis $\pi_i : Y_i \to Y$ et des groupes finis G_i pour $i = 1, ..., r$. Notons que d'après la preuve de *loc. cit.*, on peut supposer que les groupes G_i sont de $\mathbb{L}$-torsion, du fait que F est de $\mathbb{L}$-torsion. D'après le lemme précédent, on est réduit au cas de F'. Puisque $\pi_{i\star}$ est exact, on est donc ramené au cas du morphisme $f \circ \pi_i$ et du faisceau constant sur Y_i de groupe G_i pour chaque indice i.

3.2. Réduction au cas d'une immersion ouverte. — Le lemme clé dans cette étape de réduction est le suivant :

Lemme 3.2.1. — *Soit* G *un groupe fini. Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

de morphismes de type fini entre schémas noethériens. Les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) *Si* h *est surjectif,*
$R^1f_\star(G_Y)$ *constructible implique* $R^1g_\star(G_{Y'})$ *constructible.*

(ii) *Si* g *est propre,*
$R^1h_\star(G_Y)$ *constructible implique* $R^1f_\star(G_Y)$ *constructible.*

Démonstration. — Rappelons que l'on dispose de la suite exacte de faisceaux d'ensembles sur $X_{\text{ét}}$ (cf. [**SGA 4** XII 3.2]) :

$$* \to R^1g_\star(h_\star G_Y) \xrightarrow{u} R^1f_\star(G_Y) \xrightarrow{\nu} g_\star R^1h_\star(G_Y).$$

Considérons l'assertion (i). Puisque h est surjectif, le morphisme d'adjonction

$$G_{Y'} \to h_\star h^\star G_{Y'} = h_\star G_Y$$

est un monomorphisme. Appliquant le lemme 3.1.1, il suffit de montrer que $R^1g_\star(h_\star G_Y)$ est constructible. On peut alors conclure puisque le morphisme $u : R^1g_\star(h_\star G_Y) \to R^1f_\star(G_Y)$ est un monomorphisme.

Considérons maintenant l'assertion (ii). Puisque g est propre, le théorème de changement de base propre [**SGA 4** XIV 1.1] conjugué avec le théorème 1.1 montre que la source de u est constructible. Par hypothèse et une nouvelle application du théorème 1.1, le but de ν est constructible.

Il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration de 3.1.1 sur les fibres du morphisme ν associées à une famille finie de sections locales de $g_\star R^1 h_\star(G_Y)$ qui est génératrice. Chacune de ses fibres est un prolongement par le vide d'un faisceau localement isomorphe au faisceau tordu $R^1 g_\star\big((h_\star G_Y^P)\big)$ pour une de ses sections locales représentée par un torseur P. Comme ce faisceau est toujours constructible, on peut conclure. □

Considérons maintenant les hypothèses du théorème 1.2, dans le cas $F = G_Y$. Puisque Y est noethérien, il existe un recouvrement Zariski $\pi : W \to Y$ tel que W est affine. D'après l'assertion (i) du lemme ci-dessus, il suffit de montrer le théorème pour $f \circ \pi$. On peut donc supposer que Y est affine.

Le morphisme $f : Y \to X$ est alors quasi-projectif. On peut donc considérer une factorisation $Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{g} X$ de f tel que g est projectif et j est une immersion ouverte. D'après l'assertion (ii) du lemme ci-dessus, nous sommes réduit au cas de l'immersion ouverte j.

3.3. Réduction au théorème 1.3 (*i.e.* la codimension 2). —

3.3.1. — Grâce aux deux étapes de réduction précédentes, nous sommes ramenés au cas d'une immersion ouverte dense $j : U \to X$, X quasi-excellent, et d'un faisceau constant sur U de groupe G. Dans cette étape de réduction, on considère la codimension du complémentaire Z de U dans X.

Pour montrer que $R^1 j_\star(G_U)$ est constructible on peut raisonner localement sur X. On peut donc supposer que X est noethérien. Considérons la normalisation $p : X' \to X$ de X ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Puisque q est surjectif, le morphisme d'adjonction $G_U \to q_\star q^\star(G_U)$ est un monomorphisme. D'après le lemme 3.1.1, il suffit donc de montrer que $R^1 j_\star(q_\star G_{U'})$ est constructible. Or p et q étant finis, $R^1 j_\star(q_\star G_{U'}) = p_\star R^1 j'_\star(G_{U'})$. On peut donc supposer que X est normal.

Dès lors, X est somme disjointe de ses composantes irréductibles, et on peut donc le supposer intègre. Notons K son corps des fonctions. Pour une extension finie L/K, on peut considérer le schéma normalisé X′ de X dans L, ainsi que le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{j'} & X' \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{j} & X. \end{array}$$

Par adjonction, on obtient un morphisme canonique

$$\phi_{U/X}^{(L)} : R^1 j_\star(G_U) \to p_\star R^1 j'_\star(G_{U'})$$

induit par le morphisme de champs sur U qui à un G-revêtement d'un schéma étale V/U associe son pullback sur $V' = V \times_U U'$.

***Lemme* 3.3.2.** — *Considérons les hypothèses et notations précédentes. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. $R^1 j_\star(G_U)$ *est constructible.*
ii. *Il existe une extension finie séparable* L/K *telle que* $\phi_{U/X}^{(L)}$ *est trivial.*

Démonstration. — (ii) ⇒ (i) : Soit L/K une extension finie telle que $\phi_{U/X}^{(L)}$ est trivial. Avec les notations qui précèdent, on pose $C = q_\star(G_{U'})/G_U$, faisceau sur $U_{\text{ét}}$ pointé de manière évidente. On peut alors former la suite exacte de faisceaux pointés (cf. [**SGA 4** XII 3.1]) :

$$j_\star q_\star(G_{U'}) \to j_\star(C) \to R^1 j_\star(G_U) \xrightarrow{(1)} R^1 j_\star\left(q_\star(G_{U'})\right).$$

Notons que, puisque p est fini, $R^1 j_\star\left(q_\star(G_{U'})\right) = p_\star R^1 j'_\star(G_{U'})$ et le morphisme (1) s'identifie au morphisme $\phi_{U/X}^{(L)}$. Par hypothèse, la suite exacte ci-dessus implique donc que $R^1 j_\star(G) = j_\star(C)/j_\star q_\star(G_{U'})$ ce qui conclut d'après le théorème 1.1.

(i) ⇒ (ii) : Considérons une famille $(e_1, ..., e_n)$ de sections de $R^1 j_\star(G_U)$ qui soit génératrice. Le schéma X étant supposé noethérien, on peut supposer que e_i est définie sur un X-schéma étale de type fini V_i. Quitte à remplacer V_i par un recouvrement étale de type fini, on peut en outre supposer que la section e_i correspond à un revêtement $P_i \to V_i \times_X U$. Puisque $V_i \times_X U$ est quasi-compact, le schéma P_i est quasi-compact : soit L_{ij}/K

la famille finie des extensions de corps correspondant aux points génériques de P_i. On considère la clôture normale L d'une extension de K composée des L_{ij}/K pour tous les indices (i,j). Par définition, $\phi^{(L)}_{U/X}(e_i) = *$ pour tout entier i et le résultat suit puisque $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice. □

Remarque 3.3.3. — Considérons les notations qui précèdent le lemme. En termes de G-revêtements, la trivialité du morphisme $\phi^{(L)}_{U/X}$ s'interprète comme suit :

i. Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de Z et pour tout G-revêtement $\pi : P \to X_{(\bar{s})} - Z_{(\bar{s})}$, le revêtement $\phi^{(L)}_{U/X,\bar{s}}(P)$ est trivial.
ii. Pour tout schéma étale V/X et tout G-revêtement $\pi : P \to V - Z_V$, il existe un recouvrement étale $W/V \times_X X'$ tel que $\pi|_{W-Z_W}$ s'étend à W (l'extension est alors unique (à isomorphisme unique près) puisque X' est normal).

Dans le cas des immersions ouvertes, on peut renforcer le lemme 3.2.1 comme suit :

Lemme 3.3.4. — *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "k"] & \\ U \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "j"] & & X \end{tikzcd}$$

d'immersions ouvertes tel que $U \neq \varnothing$, X est intègre, noethérien, normal, quasi-excellent. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées :

i. *Si $R^1 j_\star(G)$ est constructible, alors $R^1 k_\star(G)$ est constructible.*
ii. *Si $R^1 h_\star(G)$ est constructible et pour tout morphisme fini surjectif $X' \to X$ où X' est la normalisation de X dans une extension finie de son corps des fractions, $k' = k \times_X X'$, le faisceau $R^1 k'_\star(G)$ est constructible, alors $R^1 j_\star(G)$ est constructible.*

Démonstration. — Remarquons que l'hypothèse sur U et X entraîne que $h_\star(G_U) = G_V$ (cf. [**SGA 4** IX 2.14.1]).

L'assertion (i) résulte donc simplement du fait que le morphisme canonique $R^1 k_\star(G_V) \to R^1 j_\star(G_U)$ est toujours un monomorphisme.

Considérons les hypothèses de l'assertion (ii). Soit K le corps des fonctions de X. D'après le lemme précédent appliqué à h, on peut trouver une extension finie L/K telle que $\phi^{(L)}_{U/V} = *$. Soit X' le schéma normalisé de X dans L/K, $k' : V' \to X'$ le pullback de k sur X'. Appliquant le lemme précédent à k', on peut trouver une extension finie E/L telle que $\phi^{(E)}_{V'/X'} = *$.

On note X'' le normalisé de X dans E/K, $X'' \xrightarrow{p'} X' \xrightarrow{p} X$ les morphismes canoniques. On note h', j', k' (resp. h'', j'', k'') les pullback respectifs de h, j, k sur X' (resp. X''). On peut alors conclure grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & R^1 j_\star(G) \arrow[r] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\phi^{(L)}_{U/X}"] & k_\star R^1 h_\star(G) \arrow[d, "k_\star \phi^{(L)}_{U/V}"] \\ p_\star R^1 k'_\star(G) \arrow[r] \arrow[d, "p_\star \phi^{(E)}_{V'/X'}"'] & p_\star R^1 j'_\star(G) \arrow[r] \arrow[d, "p_\star \phi^{(E)}_{U'/X'}"] & (pk')_\star R^1 h'_\star(G) \\ (pp')_\star R^1 k''_\star(G) \arrow[r] & (pp')_\star R^1 j''_\star(G). & \end{tikzcd}$$

La flèche pointillée existe du fait de l'exactitude de la suite horizontale du milieu et de $\phi^{(L)}_{U/V} = *$. On conclut puisque $\phi^{(E)}_{U/X} = (p_\star \phi^{(E)}_{U'/X'}) \circ \phi^{(L)}_{U/X}$. □

Lemme 3.3.5. — *Soit X un schéma régulier et Z un sous-schéma fermé régulier de X. Notons $j : U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire. Soit n l'ordre de G. Alors, si n est inversible sur X, $R^1 j_\star(G_U)$ est constructible.*

Démonstration. — L'assertion est Zariski locale en X. On peut donc supposer que X est affine irréductible et Z est irréductible.

Si Z est de codimension supérieure à 2 dans X, il résulte du théorème de pureté de Zariski-Nagata (cf. [**SGA 1** X 3.1, 3.3]) que $R^1 j_\star(G) = *$ ce qui conclut.

En codimension 1, on peut supposer que Z admet un paramètre régulier $f \in A$. On considère le schéma

$$X' = \operatorname{Spec}\left(A[t]/(t^n - f)\right).$$

Le lemme d'Abhyankar absolu (cf. [**SGA 1** XIII 5.2]) montre alors précisément que pour tout point géométrique $\bar{y}$ de Z, pour tout revêtement $E \xrightarrow{\pi} U \times_X X_{(\bar{y})}$ principal galoisien de groupe G, le revêtement $\pi \times_X X' : E' \to U \times_X X' \times_X X_{(\bar{y})}$ se prolonge à $X' \times_X X_{(\bar{y})}$. Il est donc trivial et le lemme 3.3.2 accompagné de la remarque 3.3.3 permet de conclure. □

Revenons au cas général d'une immersion ouverte $j : U \to X$ de fermé complémentaire Z, X étant supposé intègre, noethérien, normal, et quasi-excellent. Supposons que l'ordre de G est inversible sur X.

Soit T la réunion des lieux singuliers de X et Z. Posons $V = X - T$ et $W = X - (Z \cup T)$ et considérons les immersions ouvertes correspondantes :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "k"] & \\ W \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "l"'] & & X \\ & U \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

D'après le lemme précédent, $R^1h_\star(G)$ est constructible. D'après le lemme 3.3.4, on est donc ramené à prouver que pour tout morphisme fini surjectif $X' \to X$ tel que X' est la normalisation de X dans son corps des fractions, $k' = k \times_X X'$, le faisceau $R^1k'_\star(G)$ est constructible. Cette dernière assertion est bien impliquée par le théorème 1.3.

4. Cas de codimension 2 sans hypothèse sur la torsion

4.1. Résolution des singularités. —

Lemme 4.1.1. — *Soit X un schéma normal, connexe et excellent, $Z \subset X$ une partie fermée de codimension supérieure à 2 et $j : U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire.*

Alors, il existe une partie fermée $T \subset Z$ de codimension supérieure à 3 dans X telle que pour tous points géométriques $\bar{s}$ et $\bar{t}$ de $Z - T$ et toute spécialisation $\eta : X_{(\bar{t})} \to X_{(\bar{s})}$, le noyau du morphisme de spécialisation

$$\eta^\star : R^1j_\star(G)_{\bar{s}} \to R^1j_\star(G)_{\bar{t}}$$

est trivial.

Démonstration. — Dans cette preuve, on considère Z muni de sa structure réduite de sous-schéma de X.

Si l'on dénote par X_{sing} le lieu singulier de X, le sous-ensemble

$$T_0 = \overline{(X_{\text{sing}} - Z)} \cap Z$$

est de codimension supérieure à 3 dans X. On peut donc supposer que X_{sing} est inclus dans Z. Le schéma X étant excellent, Z est aussi excellent. Donc quitte à enlever une partie nulle part dense dans Z, on peut supposer que Z est régulier. On se ramène alors au cas où Z est de plus intègre et de codimension 2.

D'après [**Lipman, 1978**], on peut résoudre la singularité de X au point maximal de Z par une suite d'éclatements et de normalisations. Donc, quitte à retirer de nouveau une partie fermée nulle part dense de Z, on peut supposer qu'il existe un diagramme formé de carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "p"'] & U' \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "f"'] \\ Z \arrow[r] & X & U \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

tel que X' est régulier, Z' est un diviseur dans X', toute composante irréductible de Z' domine Z, p est propre et q est un isomorphisme.

On en déduit donc $R^1j_\star(G) = R^1f_\star(G)$. Comme X' est régulier et U' dominant dans X', on obtient $j'_\star(G_{U'}) = G_{X'}$ (cf. [**SGA 4** IX 2.14.1]). On obtient donc un monomorphisme canonique $\rho : R^1p_\star(G) \to R^1f_\star(G)$.

Considérant les notations du lemme (où l'on a supposé $T = \varnothing$), on obtient donc un diagramme commutatif d'ensembles pointés

$$\begin{tikzcd} R^1p_\star(G)_{\bar{s}} \arrow[r, "\rho_{\bar{s}}"] \arrow[d, "(1)"'] & R^1f_\star(G)_{\bar{s}} \arrow[d, "\eta^\star"] \\ R^1p_\star(G)_{\bar{t}} \arrow[r, "\rho_{\bar{t}}"] & R^1f_\star(G)_{\bar{t}}. \end{tikzcd}$$

D'après le théorème de constructibilité appliqué à p (cf. [**SGA 4** XIV 1.1]), le faisceau de groupes $R^1p_\star(G)$ est constructible. Du fait que p est un isomorphisme au-dessus de U, on obtient que quitte à retirer un fermé propre de Z, on peut même supposer que $R^1p_\star(G)$ est localement constant. Il résulte donc de [**SGA 4** IX 2.13 (i)] que le morphisme (1) est injectif. D'après ce qui précède, $\rho_{\bar{t}}$ est aussi injectif. On obtient donc que la composée $\eta^\star \circ \rho_{\bar{s}}$ est un monomorphisme. Il nous suffit donc de vérifier que le noyau de $\eta^\star$ est inclus dans l'image de $\rho_{\bar{s}}$.

Quitte à tirer la situation sur $X_{(\bar{s})}$, on peut supposer que $X = X_{(\bar{s})}$ pour simplifier les notations — notons que Z reste intègre car, étant supposé régulier, il est géométriquement unibranche. On se donne donc un G-revêtement principal $P \to U'$ qui est trivial sur $U' \times_X X_{(\bar{t})}$. Soit $\bar{P}$ la clôture normale de X' dans P/U'. Nous allons montrer que $\bar{P}/X'$ est étale et donne donc un antécédent à la classe de P/U' par l'application ρ_s comme attendu.

Par construction $\bar{P} \times_{X'} U' = P$, donc $\bar{P}/X'$ est non ramifié au-dessus de U'. Il suffit donc de montrer que $\bar{P}/X'$ est non ramifié au-dessus de Z'. D'après le théorème de Zariski-Nagata (cf. [**SGA 1** X 3.1]), il suffit de montrer que $\bar{P}/X'$ est non ramifié en tout point de codimension 1 du schéma régulier X'. D'après ce qui précède, il suffit de traiter les points maximaux z' de Z'. Or, un tel point s'envoie sur le point maximal de Z par construction. Du fait que η est un morphisme de spécialisation, il résulte qu'il existe un point y' de $Z' \times_X X_{(\bar{t})}$ qui s'envoie sur z'. Du fait que $P \times_X X_{(\bar{t})}$ est trivial sur $U' \times_X X_{(\bar{t})}$, il suit que $\bar{P} \times_X X_{(\bar{t})}$ est non ramifié au-dessus de y'. On en déduit que $\bar{P}/X'$ est non ramifié au-dessus de z' ce qui conclut. □

4.2. Un argument « à la Lefschetz ». — Pour cet argument, nous utiliserons le lemme suivant, qui est une application des résultats liés à « la méthode de Lefschetz » de [**SGA 2** X §2].

Lemme 4.2.1. — *Soit X un schéma normal excellent connexe, D un diviseur de Cartier effectif connexe dans X, et $Z \subset D$ une partie fermée de codimension supérieure à 2. Alors, $D - Z$ est connexe.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout point s de Z, le schéma $(D - Z) \times_X X_{(s)}$ est connexe. Par induction sur $\dim(\mathscr{O}_{X,s})$, il suffit de montrer que $(D \times_X X_{(s)} - \{s\})$ est connexe. On peut donc supposer que X est local, de dimension supérieure à 3 et que Z est son point fermé. Considérons le complété $\hat{X}$ du schéma local X. Puisque X est excellent, $\hat{X}$ est encore normal. Puisque le morphisme $\hat{X} \to X$ est un surjectif, il suffit de montrer que $(D - Z) \times_X \hat{X}$ est connexe. On peut donc supposer en outre que X est complet.

Alors, le spectre épointé $X' = X - Z$ est normal, connexe et équicodimensionnel de dimension supérieure à 2. Il résulte du *critère de normalité de Serre* (cf. [**Matsumura, 1989**, 23.8]) que pour tout point fermé x de X',

$$\operatorname{prof}(\mathscr{O}_{X',x}) \geq 2.$$

Dès lors, d'après [**SGA 2** X 2.1] (voir aussi plus directement [**SGA 2** IX 1.4]), on obtient un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X', \mathscr{O}) \simeq \Gamma\left(\widehat{X'}^{D}, \mathscr{O}\right)$$

où $\widehat{X'}^{D}$ désigne le complété formel de X' le long de D, ce qui conclut. □

Lemme 4.2.2. — *Soit X un schéma normal excellent, D un diviseur de Cartier effectif dans X et $Z \subset D$ une partie fermée non vide de codimension supérieure à 2. On pose $U = X - Z$, $V = D - Z$.*

Considérons le carré cartésien formé des immersions évidentes

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "i_U"'] & D \arrow[d, "i"] \\ U \arrow[r, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

Alors, le morphisme de changement de base associé

$$i^\star R^1 j_\star(G) \to R^1 j'_\star(G)$$

est un monomorphisme.

Démonstration. — On peut supposer que X et D sont locaux strictement henséliens. On doit montrer que le morphisme de restriction

$$H^1(U,G) \xrightarrow{i_U^\star} H^1(V,G)$$

est injectif.

Remarquons que le lemme précédent nous montre déjà que V est connexe. Soit P et P' deux G-torseurs sur U qui coïncident sur V. On considère le faisceau $L = \underline{\mathrm{Isom}}_G(P,P')$ des G-isomorphismes de P dans P' sur $U_{\text{ét}}$. On doit montrer qu'il admet une section sur U.

Comme L est localement constant constructible, il est représentable par un U-schéma étale fini noté U'. Posons $V' = U' \times_U V$. Par hypothèse, V'/V admet une section.

On va montrer que pour toute composante connexe U'_0 de U' telle que $U'_0 \times_U V/V$ admet une section, il existe une section de U'_0/U ce qui suffira pour conclure.

Quitte à remplacer U' par U'_0, on peut supposer pour montrer cela que U' est connexe non vide. Les corps de fonctions de U' et U définissent une extension finie séparable L/K. Soit X' le schéma normalisé de X dans L/K. On pose encore $D' = X' \times_X D$ et $Z' = X' \times_X Z$.

Notons que X' est normal excellent et connexe. Dès lors, le lemme précédent implique que $V' = D' - Z'$ est connexe. Par hypothèse, le V-schéma étale V' admet une section, donc $V' = V$. Il en résulte que le revêtement étale U'/U est de degré 1 au-dessus de V, donc $U' = U$. □

4.3. Réduction du théorème 1.3 au théorème 1.4. — On peut supposer que X est affine réduit. Pour un anneau excellent A fixé, on démontre par induction noethérienne sur les fermés Z de Spec(A) que le résultat est vrai pour les Z-schémas finis réduits. Pour cela, il suffit de démontrer le résultat pour X affine réduit en supposant le résultat vrai pour tout schéma fini sur un sous-schéma fermé strict d'une composante irréductible de X.

Montrons tout d'abord qu'on peut supposer que X est normal. Considérons la normalisation $p : X' \to X$ de X (somme des normalisations des composantes irréductibles de X) ainsi que le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "q"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

Puisque q est surjectif, le morphisme d'adjonction $G_U \to q_\star q^\star(G_U) = q_\star G_{U'}$ est un monomorphisme. Il suffit donc de montrer que $R^1 j_\star(q_\star G_{U'})$ est constructible. Or p et q étant finis, $R^1 j_\star(q_\star G_{U'}) = p_\star R^1 j'_\star(G_{U'})$. Notons que $Z \times_X X'$ est de codimension 2 dans toute composante irréductible de X' (puisque X est universellement caténaire). On est donc ramené au cas où X est normal et on peut en outre le supposer affine et intègre.

Le cas où X est de dimension 2 résulte du théorème 1.4. On peut donc supposer que $\dim(X) > 2$.

Si $\mathrm{codim}(Z) > 2$, on peut trouver un diviseur principal $D \xrightarrow{i} X$ qui contient Z (il suffit de prendre comme paramètre de D un élément non nul de l'anneau intègre $\mathscr{O}_X(X)$ s'annulant sur Z). Soit $j' : D - Z \to D$ le morphisme induit. D'après le lemme 4.2.2, on obtient un monomorphisme $i^\star R^1 j_\star(G) \to R^1 j'_\star(G)$. Du fait que $R^1 j_\star(G) = i_\star i^\star R^1 j_\star(G)$, il suffit d'utiliser que $R^1 j'_\star(G)$ est constructible par hypothèse de récurrence.

Plaçons nous dans le cas critique où $\mathrm{codim}(Z) = 2$.

D'après le théorème 1.4, le résultat est connu pour le schéma semi-localisé de X aux points génériques de Z qui sont de codimension 2 dans X. Il existe donc, d'après le lemme 3.3.2, une extension finie L du corps des fonctions K de X telle que pour tout point maximal η de Z de codimension 2 dans X, $\phi^{(L)}_{U/X,\bar\eta}$ est trivial.

Considérons X' la normalisation de X dans L/K et $p : X' \to X$ sa projection. On pose $j' = j \times_X X'$ et $Z' = Z \times_X X'$. D'après le lemme 4.1.1, il existe une partie fermée $T' \subset Z'$ de codimension supérieure à 3 dans X' telle que les noyaux des flèches de spécialisation de $R^1 j'_\star(G)$ aux points de $Z' - T'$ soient triviaux.

Soit T la réunion des composantes irréductibles de Z de codimension supérieure à 3 et du fermé $p(T')$ dans Z. Considérons un point géométrique $\bar s$ de $Z - T$. Il existe un point maximal géométrique $\bar t$ de $Z - T$ et une spécialisation $\eta : X_{(\bar t)} \to X_{(\bar s)}$. Considérant les fibres de $\phi^{(L)}_{U/X}$, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} R^1 j_\star(G)_{\bar s} \arrow[r, "\phi^{(L)}_{U/X,\bar s}"] \arrow[d] & {[p_\star R^1 j'_\star(G)]_{\bar s}} \arrow[d, "\eta^\star"] \\ R^1 j_\star(G)_{\bar t} \arrow[r, "\phi^{(L)}_{U/X,\bar t}"] & {[p_\star R^1 j'_\star(G)]_{\bar t}}. \end{tikzcd}$$

D'après le choix de L/K, la composée $\eta^\star \circ \phi^{(L)}_{U/X,\bar{s}}$ est triviale. Par ailleurs, puisque p est fini, $\eta^\star$ a un noyau trivial. On en déduit que $\phi^{(L)}_{U/X,\bar{s}}$ est trivial. D'après le lemme 3.3.2, $R^1h_\star(G)$ est constructible pour l'immersion ouverte $h : X - Z \to X - T$. D'après le lemme 3.3.4, on est donc réduit à montrer que pour tout morphisme fini surjectif $X' \to X$, $R^1k'_\star(G)$ est constructible pour l'immersion ouverte $k' : X' - T' \to X'$.

Or on peut trouver un diviseur principal $D \xrightarrow{i} X'$ qui contient T'. On pose $k'' = k' \times_{X'} D$.

D'après le lemme 4.2.2, on obtient un monomorphisme

$$i^\star R^1k'_\star(G) \to R^1k''_\star(G).$$

On peut donc à nouveau conclure d'après l'hypothèse d'induction appliquée à k'' et du fait que $R^1k'_\star(G) = i_\star i^\star R^1k'_\star(G)$.

5. Revêtements principaux d'une surface strictement locale épointée

5.1. Mise en place. — D'après le théorème d'algébrisation d'Elkik (cf. [**Elkik, 1973**], théorème 5, aussi rappelé en **??**), on peut supposer que A est complet. Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $X' = \mathrm{Spec}(A) - \{\mathfrak{m}_A\}$. On note K le corps des fractions de A.

On commence par montrer qu'on peut supposer qu'il existe un sous-anneau régulier $R \subset A$ tel que l'extension A/R est finie et génériquement étale.

D'après les théorèmes de structure de Cohen (cf. [**Bourbaki**, **AC**, IX, § 2, n° 5, th. 3] si A est de caractéristique mixte et [**Bourbaki**, **AC**, IX, § 3, n° 4, th. 2] si A contient un corps), il existe un sous-anneau $R \subset A$ tel que A/R est finie et R est un anneau de séries formelles sur un anneau de Cohen ou sur un corps. L'anneau R est donc en particulier régulier. Soit E le corps des fractions de R et E' la clôture séparable de E dans K. Notons A_0 la clôture normale de R dans E'/E. Alors, le morphisme $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0) \to \mathrm{Spec}(A)$ est fini radiciel et surjectif. D'après l'invariance topologique du site étale (cf. [**SGA 4** VIII 1.1]), on peut remplacer A par A_0 qui est fini génériquement étale sur R, comme attendu.

Remarquons tout d'abord le fait suivant :

Lemme 5.1.1. — *Soient R un anneau local régulier de dimension 2 et A une R-algèbre finie dominante telle que A est un anneau local et normal. Soit m le degré générique de $R \to A$. Alors A est un R-module libre de rang m.*

Démonstration. — Puisque A est finie dominante sur R, $\dim(A) = \dim(R) = 2$. De plus, puisque A est local normal de dimension 2, il résulte du critère de Serre que $\mathrm{prof}(A) = 2$ (cf. [**Matsumura, 1989**, ex. 17.3]). Donc A est un anneau de Cohen-Macaulay. Le lemme résulte alors de [**ÉGA** 0_{IV} 17.3.5 (ii)]. □

Faisant abstraction du groupe G, on fixe un entier $n > 0$ et on montre que l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements étales de X' de degré n est fini. Dans la suite de cette preuve, les revêtements étales considérés seront supposés connexes.

On raisonne par l'absurde. Considérons une suite $(P'_i \to X')_{i \in \mathbf{N}}$ de revêtements étales de degré n telle que pour tout $i \neq j$, P'_i est non X'-isomorphe à P'_j.

Soit K le corps des fractions de A. Pour tout entier i, P'_i/X' correspond à une extension finie séparable L_i/K. On note B_i la clôture intégrale de A dans L_i, $P_i = \mathrm{Spec}(B_i)$. Remarquons par ailleurs que d'après le lemme précédent, A/R est libre de rang m et B_i/R est libre de rang nm.

5.1.2. Questions de discriminant. — Rappelons pour les besoins de la preuve qui suit les considérations suivantes :

Définition 5.1.3. — Soit B/A une algèbre finie libre de rang n. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de B/A. Le déterminant de la matrice $\big(\mathrm{Tr}_{B/A}(e_i e_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelé le **discriminant de** B/A **relativement à** $\mathscr{B}$. Sa classe dans le monoïde multiplicatif $A/(A^\times)^2$ est indépendante de $\mathscr{B}$. On la note $\mathrm{disc}_{B/A}$.

Par abus, on considérera la classe $\mathrm{disc}_{B/A}$ comme un élément de A. Rappelons que B/A est étale si et seulement si $\mathrm{disc}_{B/A}$ est inversible dans A. Par la suite, nous aurons besoin de la formule suivante (cf. [**Ramero, 2005**, 2.1.4]) : Soit B/A et C/B deux algèbres finies libres. Soit n le rang de C/B. Alors,

$$\mathrm{disc}_{C/A} = \mathrm{disc}^n_{B/A} \cdot N_{B/A}(\mathrm{disc}_{C/B}).$$

Revenant à la situation du numéro précédent, on considère un idéal $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de R. Soit $A_\mathfrak{p}$ (resp. $B_{i,\mathfrak{p}}$) l'anneau semi-localisé de A (resp. B_i) correspondant à la fibre au-dessus de $\mathfrak{p}$.

Notons que $A_\mathfrak{p}$ est normal de dimension 1. Par ailleurs, comme par hypothèse B_i/A est étale finie de degré n au-dessus du spectre épointé de A, l'extension d'anneaux locaux $B_{i,\mathfrak{p}}/A_\mathfrak{p}$ est libre de rang n. D'après la formule rappelée précédemment,

$$\mathrm{disc}_{B_{i,\mathfrak{p}}/R_\mathfrak{p}} = \mathrm{disc}^n_{A_\mathfrak{p}/R_\mathfrak{p}} \cdot \mathrm{N}_{A_\mathfrak{p}/R_\mathfrak{p}}(\mathrm{disc}_{B_{i,\mathfrak{p}}/A_\mathfrak{p}}).$$

Or A/R (resp. B_i/R) est génériquement étale et $B_{i,\mathfrak{p}}/A_\mathfrak{p}$ est étale. On déduit de la relation précédente que l'élément $(\mathrm{disc}_{B_i/R})(\mathrm{disc}^n_{A/R})^{-1}$ de $\mathrm{Frac}(R)^\times$ appartient à $R^\times_\mathfrak{p}$. Comme ceci est valable pour tout $\mathfrak{p}$ et que R est normal, on en déduit :

$$\frac{\mathrm{disc}_{B_i/R}}{\mathrm{disc}^n_{A/R}} \in R^\times \tag{5.1.3.1}$$

5.2. Lemme clé. — La technique pour trouver une contradiction à la situation dans laquelle on est parvenu à l'issue de la mise en place 5.1 repose sur l'utilisation des ultrafiltres. Dans la section qui suit, nous rappelons cette théorie et démontrons les résultats qui nous seront utiles. Le point essentiel de la preuve se résume alors à prouver le *lemme clé* 5.2.8 comme nous le montrons dans le paragraphe 5.2.9. La preuve de ce lemme est donnée dans la dernière section, 5.2.10.

5.2.1. Ultraproduits. —

Définition 5.2.2. — Soit I un ensemble et $P(I)$ l'ensemble des parties de I. Un **ultrafiltre** $\mathscr{F}$ sur I est la donnée d'un ensemble de parties de I vérifiant les propriétés suivantes :

i. $\forall F \in \mathscr{F},\ \forall G \in P(I),\ F \subset G \Rightarrow\ G \in \mathscr{F}$.
ii. $\forall F, G \in \mathscr{F},\ F \cap G \in \mathscr{F}$.
iii. $\forall F \in P(I)$, $F \in \mathscr{F}$ ou bien $I - F \in \mathscr{F}$.
iv. $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

Dans la suite de la preuve, nous entendrons un ultrafiltre $\mathscr{F}$ comme un ensemble ordonné tel pour tout $F, G \in \mathscr{F}$,

$$F \leq G \Leftrightarrow F \supset G.$$

Notons qu'il résulte alors de la définition que $\mathscr{F}$ est un ensemble filtrant.

Exemple 5.2.3. — Soit a un élément de I. Alors, l'ensemble des parties de I contenant a est un ultrafiltre $\mathscr{F}$ de I. Dans ce cas, on dit que $\mathscr{F}$ est **principal**.

D'après le lemme de Zorn, il existe des ultrafiltres non principaux sur un ensemble infini I.

Définition 5.2.4. — Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur un ensemble I et $\mathscr{C}$ une catégorie admettant des limites inductives filtrantes et des produits.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\mathscr{C}$. Le système inductif $(\prod_{i\in F} X_i)_{F\in\mathscr{F}}$ est filtrant. On définit **l'ultraproduit de** $(X_i)_{i\in I}$ **suivant** $\mathscr{F}$ comme la limite inductive de ce système :

$$\prod_{i\in I/\mathscr{F}} X_i = \mathrm{colim}_{F\in\mathscr{F}} \left(\prod_{i\in F} X_i\right).$$

Si $(X_i)_i$ est la famille constante de valeur un objet X, on note $X^{I/\mathscr{F}}$ son ultraproduit, appelé **l'ultrapuissance de** X **suivant** $\mathscr{F}$. On dispose toujours de l'application diagonale $X \to X^{I/\mathscr{F}}$.

On notera en particulier qu'un élément x de l'ultraproduit $\prod_{i\in I/\mathscr{F}} X_i$ est représenté par une suite $(x_i)_{i\in F}$ pour un élément $F \in \mathscr{F}$. De plus, étant donné un autre élément $y = (y_j)_{j\in G}$ de cet ultraproduit, $x = y$ si et seulement si il existe $H \in \mathscr{F}$ tel que $H \subset F \cap G$ vérifiant $\forall i \in H$, $x_i = y_i$.

Nous utiliserons cette notion dans le cas des anneaux ou des modules et nous utiliserons en particulier le lemme suivant :

Lemme 5.2.5. — *Soit I un ensemble et $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur I.*

Considérons une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'anneaux. On pose $A_\infty = \prod_{i\in I/\mathscr{F}} A_i$.

i. *Si pour tout $i \in I$, A_i est intègre (resp. un corps, un corps séparablement clos), il en est de même de A_∞.*
ii. *Si pour tout $i \in I$, A_i est local (resp. local hensélien) d'idéal maximal $\mathfrak{m}_i$, A_∞ est local (resp. local hensélien) d'idéal maximal $\prod_{i\in I/\mathscr{F}} \mathfrak{m}_i$.*

Considérons une famille d'algèbres $(B_i/A_i)_{i\in I}$, B_∞/A_∞ son ultraproduit suivant $\mathscr{F}$:

iii. *Si pour tout $i \in I$, B_i/A_i est une extension locale d'anneaux locaux (resp. libre de rang m), il en est de même de B_∞/A_∞.*

Considérons un anneau A, et $A_\infty = A^{I/\mathscr{F}}$ son ultrapuissance.

iv. *Si M est un A-module de présentation finie,*
$M \otimes_A A^{I/\mathscr{F}} = M^{I/\mathscr{F}}$.

v. *Si A est cohérent, l'application diagonale $A \to A^{I/\mathscr{F}}$ est plate.*

Démonstration. — D'après la caractérisation des éléments d'un ultraproduit rappelée avant l'énoncé du lemme, un élément $x \in A_\infty$ est inversible (resp. nul) si et seulement s'il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que x est représenté par une famille $(x_i)_{i\in F}$ tel que pour tout indice $i \in F$, x_i est inversible (resp. nul) dans A_i.
(i) dans les deux premiers cas respectifs en résulte facilement. Pour montrer que l'ultraproduit $k_\infty = A_\infty$ de corps séparablement clos $k_i = A_i$ est encore séparablement clos, on considère un polynôme séparable P à coefficients dans k_∞ de degré $d > 0$. En raisonnant sur les coefficients du polynôme P, on peut supposer que P est représenté par une famille de polynômes $(P_i)_{i\in F}$ pour un élément $F \in \mathscr{F}$ et des polynômes P_i à coefficients dans k_i. Quitte à restreindre F, on peut supposer que pour tout $i \in F$, P_i est séparable de degré d. Il admet donc une racine x_i dans k_i. Il est alors immédiat que la famille $(x_i)_{i\in F}$ représente un élément x de k_∞ tel que $P(x) = 0$.
(ii) : on traite d'abord l'assertion non respé. Posons $\mathfrak{m}_\infty = \prod_{i\in I/\mathscr{F}} \mathfrak{m}_i$. C'est clairement un idéal de A_∞. Soit x un élément de $A_\infty - \mathfrak{m}_\infty$, représenté par une famille $(x_i)_{i\in F}$. L'hypothèse sur x se traduit comme suit :

$$\nexists H \in \mathscr{F}, H \subset F \mid \forall i \in H, x_i \in \mathfrak{m}_i.$$

Soit $G = \{i \in F \mid x_i \notin \mathfrak{m}_i\}$. Alors, par hypothèse, $G \notin \mathscr{F}$. Donc $H = F - G$ appartient à $\mathscr{F}$ car $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre. Comme pour tout $i \in H$, $x_i \notin \mathfrak{m}_i$, x_i est inversible dans l'anneau local A_i. On en déduit que x est inversible d'après la caractérisation des éléments inversibles rappelée en début de preuve.

Pour montrer l'assertion respé, on raisonne comme dans le cas de l'ultraproduit de corps séparablement clos traité ci-dessus.
(iii) concernant la première assertion résulte facilement de (ii). L'assertion respé est évidente.
(iv) résulte facilement du fait élémentaire que le foncteur $M \otimes_A -$ commute aux produits si M est de présentation finie.
(v) résulte du fait que lorsque A est cohérent, un produit de A-modules plats est plat (cf. [**Chase, 1960**]). □

Remarque 5.2.6. — D'un point de vue conceptuel, on peut voir ce lemme comme un corollaire du théorème de Łoś (cf. [**Bell & Slomson, 1969**, chap. 5, §2]).

5.2.7. *Énoncé du lemme clé*. — Revenons à la situation qui nous occupe. Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre non principal sur **N**. On note B_∞ (resp. A_∞, R_∞) l'anneau local obtenu par ultraproduit suivant $\mathscr{F}$ de $(B_i)_{i\in\mathbf{N}}$ (resp. A, R). Soit $\widehat{B_\infty}$, $\widehat{A_\infty}$, $\widehat{R_\infty}$ leurs complétions respectives. On en déduit les tours d'anneaux locaux suivantes :

$$\begin{tikzcd}
B_i & B_\infty \arrow[r] & \widehat{B_\infty} \\
A \arrow[u] \arrow[r] & A_\infty \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & \widehat{A_\infty} \arrow[u, "\hat\varphi"'] \\
R \arrow[u] \arrow[r] & R_\infty \arrow[u] \arrow[r] & \widehat{R_\infty}.\arrow[u]
\end{tikzcd}$$

D'après le point (iii) du lemme 5.2.5, A_∞ et B_∞ sont des R_∞-algèbres libres de rang fini. Si k_∞ désigne le corps résiduel de R_∞, on en déduit que $A_\infty \otimes_{R_\infty} k_\infty$ et $B_\infty \otimes_{R_\infty} k_\infty$ sont des k_∞-algèbres locales finies : leurs idéaux maximaux sont donc nilpotents. Il en résulte que la complétion de l'anneau local A_∞ (resp. B_∞) coïncide avec sa complétion par rapport à l'idéal maximal de R_∞. Comme A_∞ (resp. B_∞) est un R_∞-module libre, on en déduit :

$$\widehat{A_\infty} = A_\infty \otimes_{R_\infty} \widehat{R_\infty}, \quad \widehat{B_\infty} = B_\infty \otimes_{R_\infty} \widehat{R_\infty}.$$

Considérant le spectre des anneaux locaux sur les deux premières lignes, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} P_i \arrow[d] & P_\infty \arrow[d, "p"] & \hat{P}_\infty \arrow[l] \arrow[d, "\hat{p}"] \\ X & X_\infty \arrow[l] & \hat{X}_\infty \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et la discussion qui précède montre que le carré qui apparaît dans ce diagramme est cartésien. Considérant encore le spectre épointé des anneaux locaux A, A_∞ et $\widehat{A_\infty}$, on obtient par changement de base le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} P'_i \arrow[d] & P'_\infty \arrow[d, "p'"] & \hat{P}'_\infty \arrow[l] \arrow[d, "\hat{p}'"] \\ X' & X'_\infty \arrow[l] & \hat{X}'_\infty . \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Notons que les flèches de la ligne inférieure existent car, l'idéal maximal $\mathfrak{M}_A$ étant de type fini, on obtient facilement pour les idéaux maximaux respectifs de A_∞ et $\widehat{A_\infty}$:

$$\mathfrak{M}_{A_\infty} = \mathfrak{M}_A \cdot A_\infty, \quad \mathfrak{M}_{\widehat{A_\infty}} = \mathfrak{M}_A \cdot \widehat{A_\infty}.$$

Lemme 5.2.8. — (1) *Le schéma $\hat{X}_\infty$ est noethérien.*
(2) *Le morphisme $\hat{X}_\infty \to X$ est plat à fibre géométriques régulières.*
(3) *Le morphisme $\hat{X}_\infty \to X_\infty$ est une immersion fermée dont l'image contient tous les points fermés de X'_∞.*
(4) *Le morphisme fini $\hat{p} : \hat{P}_\infty \to \hat{X}_\infty$ est étale au-dessus de $\hat{X}'_\infty$.*
(5) *Le morphisme fini $p : P_\infty \to X_\infty$ est étale au-dessus de X'_∞.*

5.2.9. Conséquences du lemme clé. — Montrons pourquoi le lemme précédent permet de terminer la démonstration par l'absurde.

D'après le point (ii) du lemme 5.2.5, A_∞ est un anneau local hensélien. On peut donc appliquer la variante c_2 du théorème de changement de base lisse (cf. exp. **XX**, 4.2.1, cas (ii)) au morphisme $\hat{X}_\infty \to X$ et à l'ouvert $\hat{X}'_\infty$. On en déduit qu'il existe un revêtement étale $Q \to X'$ tel que $\hat{P}'_\infty \simeq Q \times_{X'} \hat{X}'_\infty$.

D'après le théorème de rigidité de Gabber (cf. 2.1.1) appliqué à A_∞, pour tout groupe fini G, le morphisme

$$H^1(X'_\infty, G) \to H^1(\hat{X}'_\infty, G)$$

est un isomorphisme. On en déduit donc un isomorphisme :

$$P'_\infty \simeq Q \times_{X'} X'_\infty. \tag{5.2.9.1}$$

Pour tout élément F de l'ultrafiltre $\mathscr{F}$, on pose : $P_F = \mathrm{Spec}(\prod_{i\in F} B_i)$, $X_F = \mathrm{Spec}(\prod_{i\in F} A)$, $Y_F = \mathrm{Spec}(\prod_{i\in F} R$, et on note $p_F : P_F \to X_F$, $q_F : X_F \to Y_F$ les flèches canoniques. Par définition, le morphisme $p : P_\infty \to X_\infty$ est la limite projective suivant $F \in \mathscr{F}$ des morphismes p_F. Notons $p'_F : P'_F \to X'_F$ le pullback de p au-dessus de X'.

Puisque pour tout $i \in F$, B_i/R (resp. A/R) est fini et libre de rang nm (resp. m), on obtient facilement que $q_F \circ p_F$ (resp. q_F) est fini libre de rang nm (resp. m). En particulier, p_F est fini de présentation finie. On peut alors appliquer [**ÉGA** IV$_3$ 8.8.2] aux familles de X'_F-schémas P'_F et $Q \times_{X'} X'_F$ indexées par les éléments de l'ultrafiltre $\mathscr{F}$ et on obtient que l'isomorphisme (5.2.9.1) se relève pour un élément particulier $F \in \mathscr{F}$ en un isomorphisme de la forme :

$$P'_F \simeq Q \times_{X'} X'_F.$$

L'ultrafiltre $\mathscr{F}$ étant non principal, F contient au moins deux éléments distincts i et j. L'isomorphisme précédent implique donc $P'_i \simeq Q \simeq P'_j$ ce qui constitue la contradiction annoncée.

5.2.10. Preuve du lemme clé. — Démontrons pour conclure chaque assertion du lemme 5.2.8 :

Assertion (1) : Notons que l'idéal maximal de l'anneau local A_∞ est de type fini d'après le point (ii) du lemme 5.2.5. Dès lors, le complété $\widehat{A_\infty}$ est noethérien d'après [**ÉGA** 0$_I$ 7.2.7, 7.2.8]. Il en est de même pour $\widehat{R_\infty}$ et $\widehat{B_\infty}$.

Assertion (2) : Pour montrer que $\hat{X}_\infty \to X_\infty$ est plat, il suffit, d'après le critère de platitude par fibres (cf. [**ÉGA** IV$_3$ 11.3.10]), de montrer que pour tout entier $l > 0$, le morphisme $A/\mathfrak{m}_A^l \to \widehat{A_\infty}/\mathfrak{m}^l_{\widehat{A_\infty}}$ est plat. Or, $\widehat{A_\infty}/\mathfrak{m}^l_{\widehat{A_\infty}} = (A/\mathfrak{m}_A^l)^{I/\mathscr{F}}$ et le morphisme précédent est l'application diagonale. On peut donc conclure en utilisant la propriété (v) du lemme 5.2.5 et le fait que $A/\mathfrak{m}_A^l$ est cohérent.

Notons que l'extension résiduelle $\kappa_A^{I/\mathscr{F}}/\kappa_A$ de A_∞/A est séparable. En effet, pour toute extension finie L/κ_A,

$L \otimes_{\kappa_A} \kappa_A^{I/\mathscr{F}} = L^{I/\mathscr{F}}$ est un corps d'après le point (i) du lemme 5.2.5. On en déduit que les fibres géométriques du morphisme $\hat{X}_\infty \to X$ sont régulières par application du *théorème de localisation de la lissité formelle* d'André (cf. [**André, 1974**]).

Assertion (3) : On commence par montrer que le morphisme $\hat{X}_\infty \to X$ est une immersion fermée. Il s'agit de montrer que $\pi : A_\infty \to \widehat{A_\infty}$ est surjectif. Or, comme on l'a déjà vu, $\widehat{A_\infty}$ est le complété[(ii)] de A_∞ pour la topologie $\mathfrak{M}_A$-adique. Or, $\mathfrak{M}_A$ étant de type fini, on obtient que A_∞ est complet (mais non nécessairement séparé) pour la topologie $\mathfrak{M}_A$-adique — cela résulte du fait que c'est trivialement vrai pour les produits A^F pour un élément $F \in \mathscr{F}$. La surjectivité de π en résulte.

Pour démontrer la deuxième partie de l'assertion (3), il suffit d'appliquer le lemme suivant à l'idéal maximal de A_∞.

Lemme 5.2.11. — *Soit A un anneau et I un idéal de type fini tel que $I \subset \mathrm{rad}(A)$. Soit $\hat{A}$ le complété I-adique de A. Alors le morphisme induit $\mathrm{Spec}(\hat{A}) - V(I\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A) - V(I)$ est surjectif sur les points fermés du but.*

Notons $f : \mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme canonique. Pour prouver le lemme, on doit montrer que pour tout fermé $Z \subset \mathrm{Spec}(A)$,

$$Z \subset V(I) \Leftrightarrow f^{-1}(Z) \subset V(I\hat{A}).$$

Comme I est de type fini, ceci équivaut à montrer que pour tout idéal $J \subset A$,

$$\exists n > 0 \mid I^n \subset J \Leftrightarrow \exists n > 0 \mid I^n\hat{A} \subset J\hat{A}.$$

Or cela résulte facilement du lemme de Nakayama.

Assertion (4) : Remarquons d'abord que d'après [**ÉGA** IV$_2$ 6.14.1], l'anneau $\widehat{A_\infty}$ est normal. En effet, A est normal et le morphisme $A \to \widehat{A_\infty}$ est normal puisqu'il est plat à fibres géométriques régulières d'après le lemme 5.2.8. Or, $\widehat{B_\infty}/\widehat{R_\infty}$ est libre (de rang nm), donc sans torsion. Comme $\widehat{A_\infty}/\widehat{R_\infty}$ est entière, on en déduit que $\widehat{B_\infty}/\widehat{A_\infty}$ est sans torsion. Ainsi, $\widehat{B_\infty}/\widehat{A_\infty}$ est plat en codimension ≤ 1.

Or, des relations (5.1.3.1) pour tout $i \in \mathbf{N}$, on déduit

$$\frac{\mathrm{disc}_{\widehat{B_\infty}/\widehat{R_\infty}}}{\mathrm{disc}^n_{\widehat{A_\infty}/\widehat{R_\infty}}} \in (\widehat{R_\infty})^\times.$$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur ≤ 1 de $\widehat{R_\infty}$, l'extension $(\widehat{B_\infty})_\mathfrak{p}/(\widehat{A_\infty})_\mathfrak{p}$ est sans torsion, donc libre. La relation précédente montre que $\mathrm{disc}_{(\widehat{B_\infty})_\mathfrak{p}/(\widehat{A_\infty})_\mathfrak{p}}$ est inversible ce qui prouve que $(\widehat{B_\infty})_\mathfrak{p}/(\widehat{A_\infty})_\mathfrak{p}$ est étale, ce qui démontre (4).

Assertion (5) : D'après le critère de platitude par fibres (cf. [**ÉGA** IV$_3$ 11.3.10] appliqué à $P_\infty \to X_\infty \to \mathrm{Spec}(R_\infty)$), pour tout point x du spectre épointé de R_∞, le morphisme des localisés $(P_\infty)_{(x)} \to (X_\infty)_{(x)}$ est plat. Comme dans le point (4), la relation (5.1.3.1) permet de montrer que $(P_\infty)_{(x)}/(X_\infty)_{(x)}$ est étale. La propriété (5) résulte donc du point (3).

Références

[André, 1974] André, M. (1974). Localisation de la lissité formelle. *Manuscripta math.*, 13, 297–307. ↑ 15

[Bell & Slomson, 1969] Bell, J. L. & Slomson, A. B. (1969). *Models and ultraproducts: An introduction*. North-Holland Publishing Co. ↑ 13

[Chase, 1960] Chase, S. U. (1960). Direct products of modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97, 457–473. ↑ 13

[Elkik, 1973] Elkik, R. (1973). Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien. *Ann. sci. École norm. sup.*, 6, 553–603. ↑ 11

[Lipman, 1978] Lipman, J. (1978). Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math.*, 107(1), 151–207. ↑ 8

[Matsumura, 1980] Matsumura, H. (1980). 可換環論. 共立出版. ↑ 15

[Matsumura, 1989] Matsumura, H. (1989). *Commutative ring theory*, volume 8 des *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, seconde édition. Traduction anglaise de [**Matsumura, 1980**]. ↑ 9, 11

[Nagata, 1962] Nagata, M. (1962). *Local rings*, volume 13 des *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons. ↑ 3

[Ramero, 2005] Ramero, L. (2005). Local monodromy in non-Archimedean analytic geometry. *Publications mathématiques de l'IHÉS*, 102, 167–280. ↑ 11

(ii) Rappelons que complété signifie complété-séparé.

FRÉDÉRIC DÉGLISE