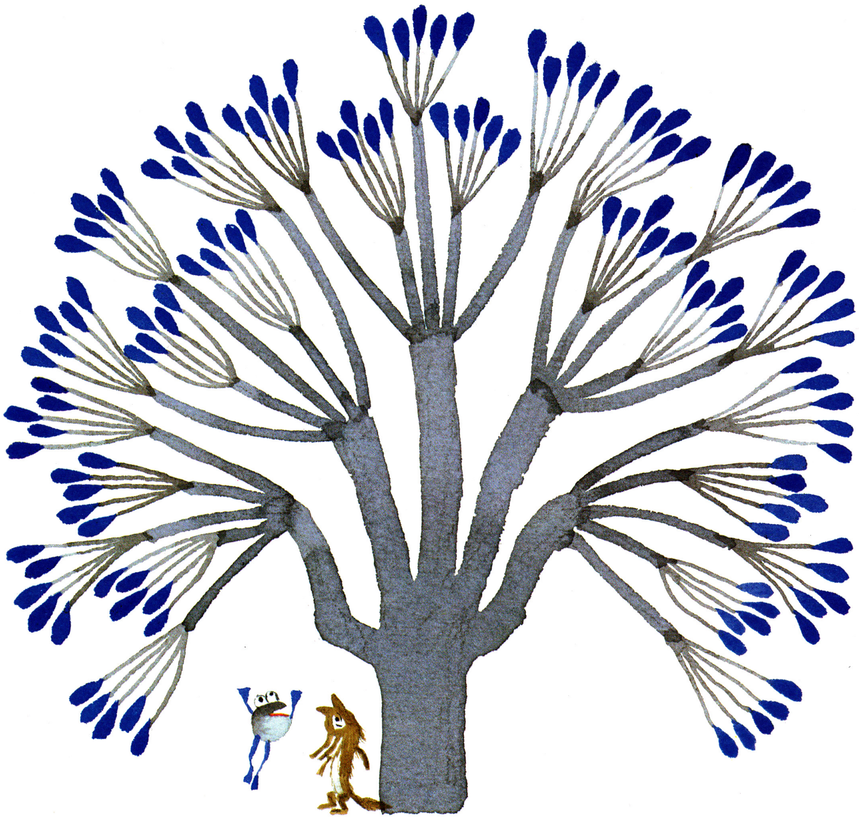
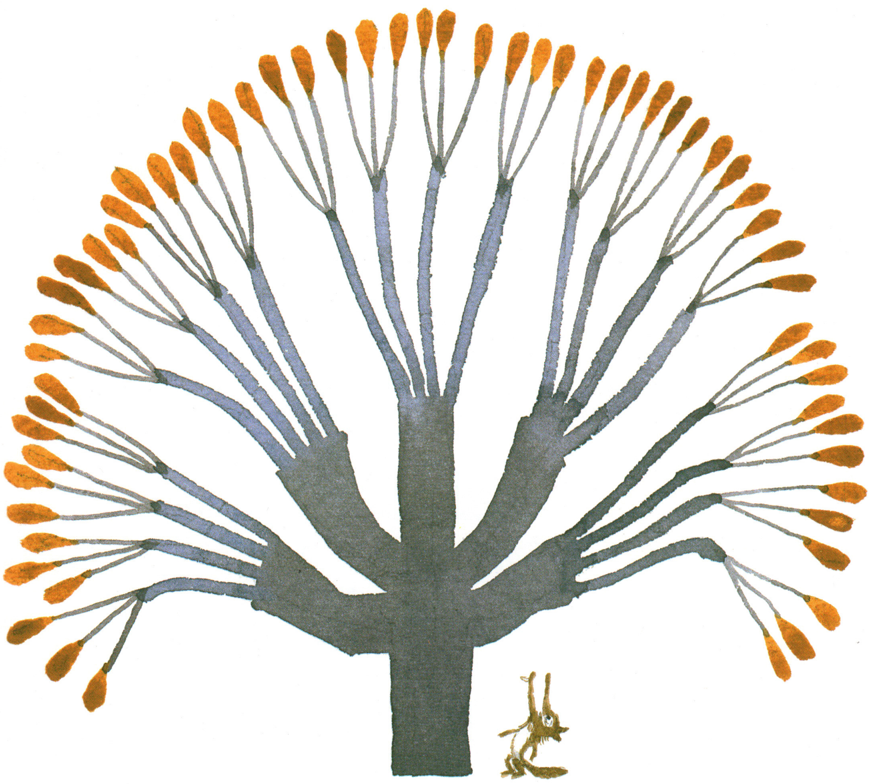
Pile ou face, petits cochons et anniversaires.

Fabrice Orgogozo

version : aa1abd6 2017-09-14 13:00:53 +0200

http://fabrice.orgogozo.perso.math.cnrs.fr/articles/anniversaires.pdf





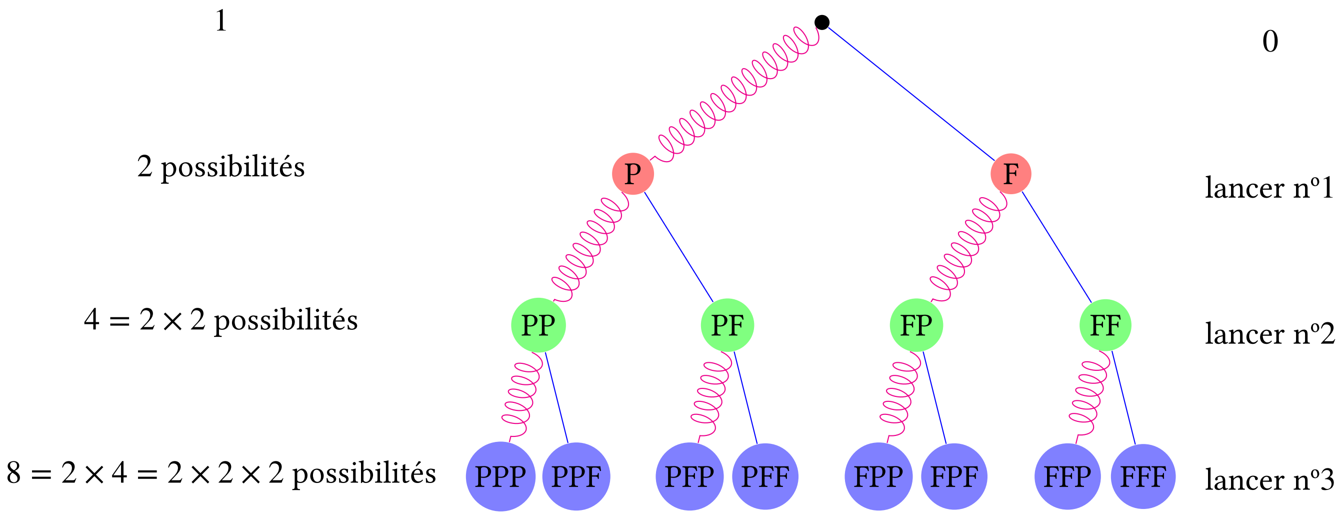
1. Pile ou face

Supposons que l'on s'amuse avec une pièce, en tirant à pile ou face. On peut noter les tirages en inscrivant sur une feuille, après chaque lancer, « P » si c'est pile et « F » si c'est face.

Quel est le nombre de possibilités pour 2 lancers ? Il y a :

soit 4 possibilités.

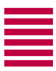
Voyons en détail quel est le nombre de possibilités pour 3 lancers. Pour le premier lancer, on a 2 possibilités : P ou F (voir première ligne rouge). Étant donné que pour le second lancer, on a encore 2 possibilités, le nombre total de possibilités après ce lancer est 2×2. Enfin, on double encore le nombre de possibilités dans une partie à 3 lancers : il y en a $2 \times 2 \times 2 = 8$.



De façon générale, un lancer supplémentaire multiplie par deux le nombre de possibilités. Si c'était une « partie » de 10 coups, il y aurait autant de possibilités que de mots (bizarres !) de 10 lettres mais avec seulement P et F ! Donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$ possibilités.

☯

Exercice.
Dans le « Classique des mutations » (易經, yì jīng) les traits ⚋ (*yin*) et ⚊ (*yang*) sont superposés 6 fois, pour former les fameux hexagrammes

 (Élan céleste),  (Terre réceptive),

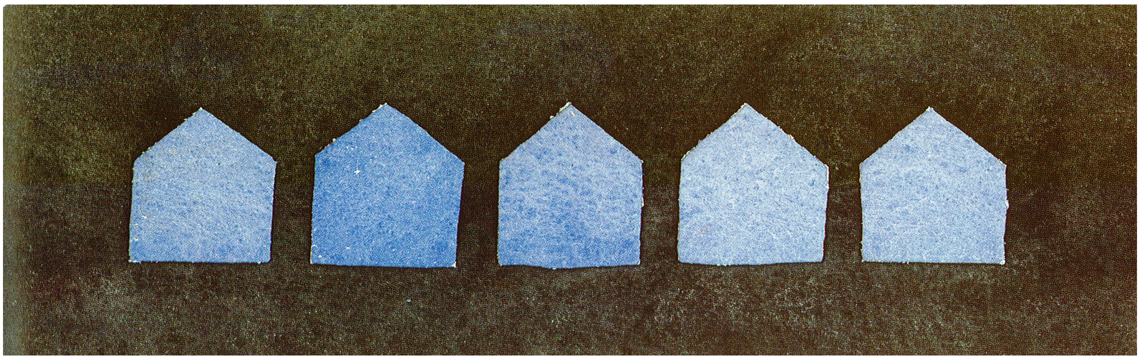
 (Difficulté initiale),  (Tâtonnement juvénile), …

Combien y en a-t-il ?

2. Un loup, trois petits cochons, cinq cabanes

Trois petits cochons (Rouge, Orange et Bleu) sont partis se promener par une belle après-midi.

Après s'être perdus, ils se retrouvent finalement par une nuit sans lune dans la forêt. (Mauvaise idée.) Soudain, ils ressentent la présence d'un  qui rôde alentour… Ils se précipitent en courant, séparément, vers la clairière la plus proche où se trouvent 5 cabanes dans lesquelles ils peuvent s'abriter.

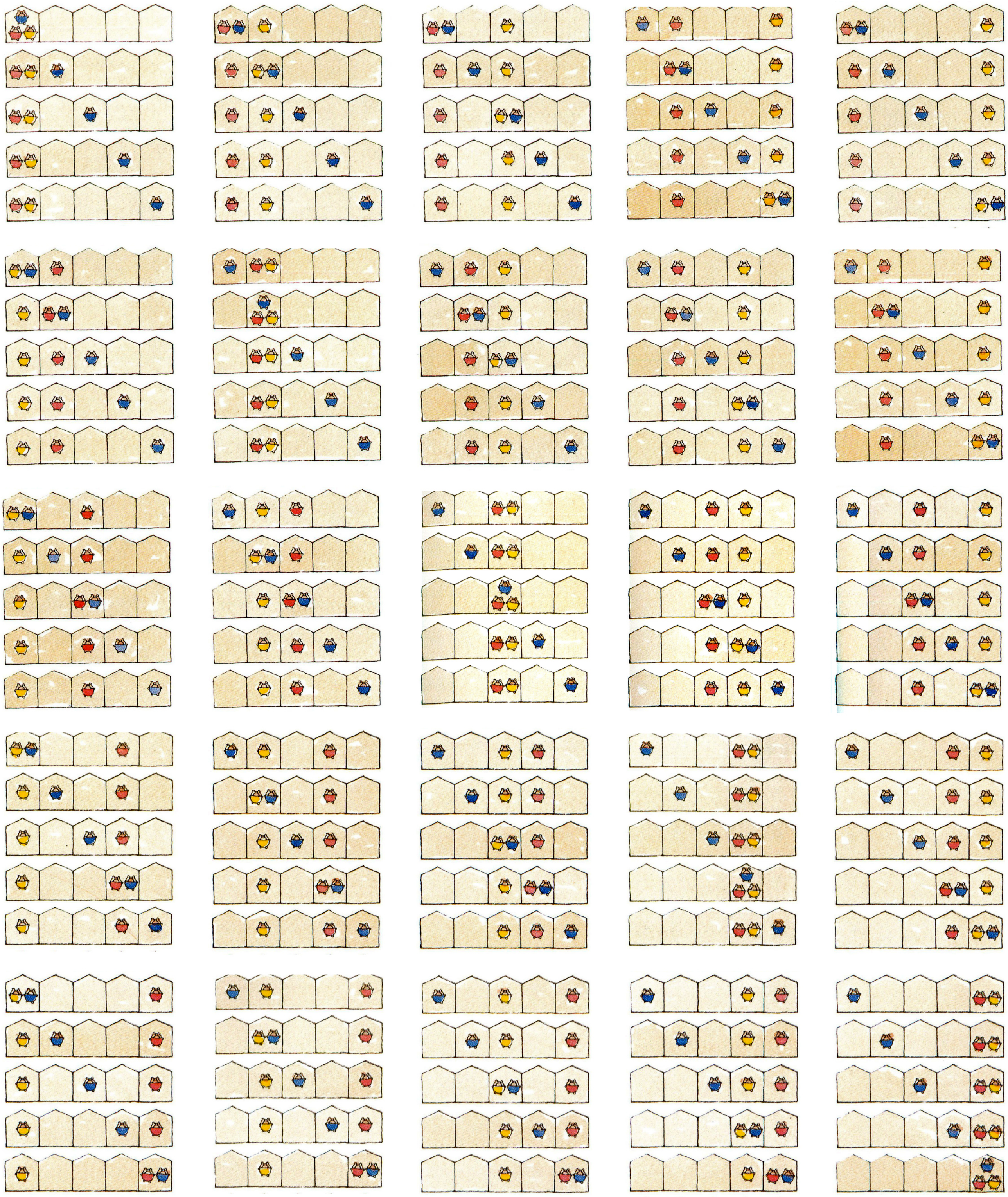


Il se peut par exemple qu'ils aillent par hasard tous dans la même cabane, juste avant que le loup n'arrive. Il se peut aussi qu'ils soient dans 3 cabanes différentes, ce qui est bien plus inquiétant (mais plus confortable).

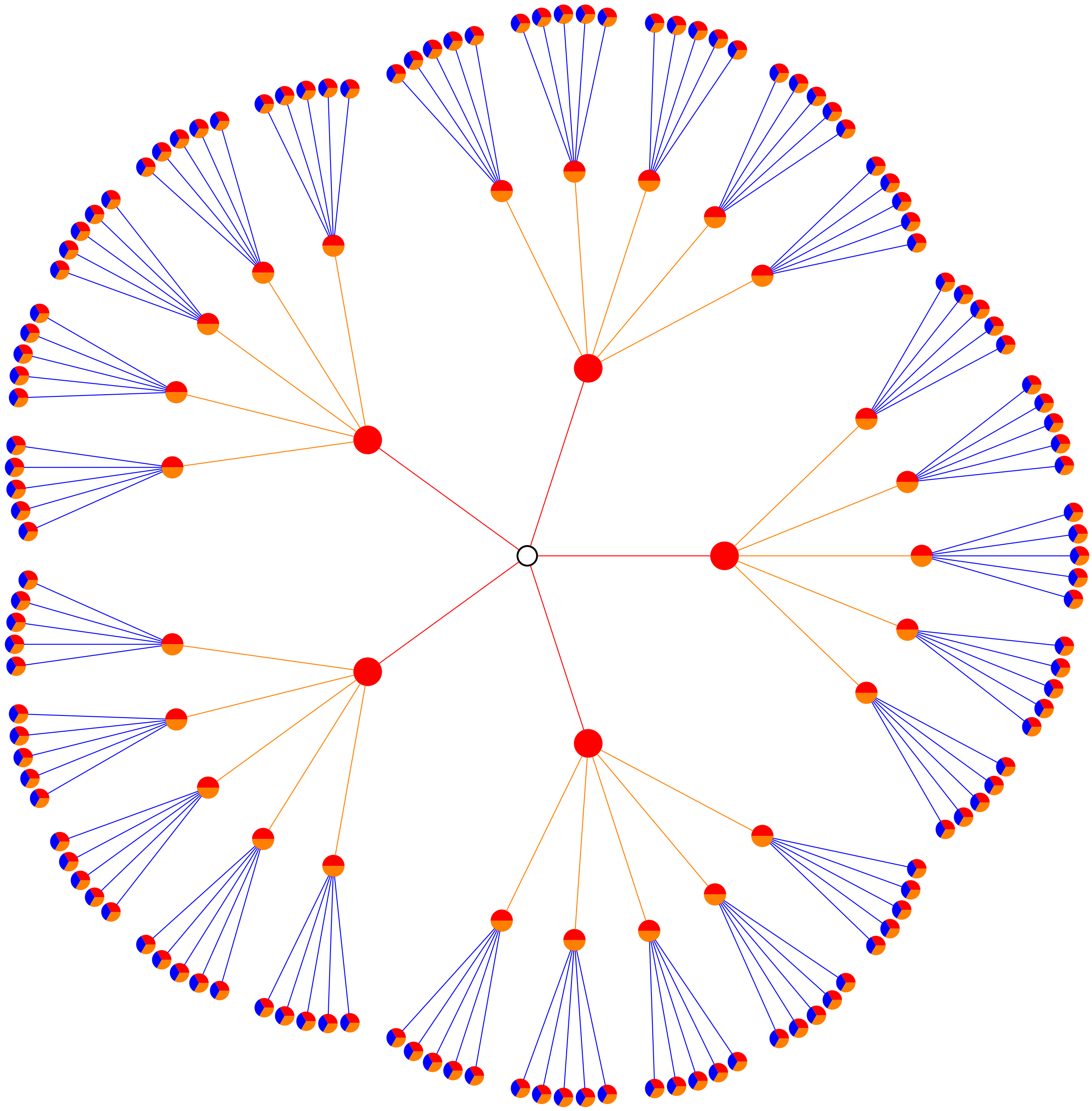
De combien de façons les petits cochons peuvent-ils s'abriter dans les cabanes ?

Pour répondre à cette question, il y a au moins deux approches : on fait la liste des possibilités, une par une, ou bien on réfléchit en s'aidant d'un petit calcul ! Commençons par la première méthode, qui demande beaucoup de patience et d'attention pour n'oublier aucune possibilité.

On trouve, fastidieusement,

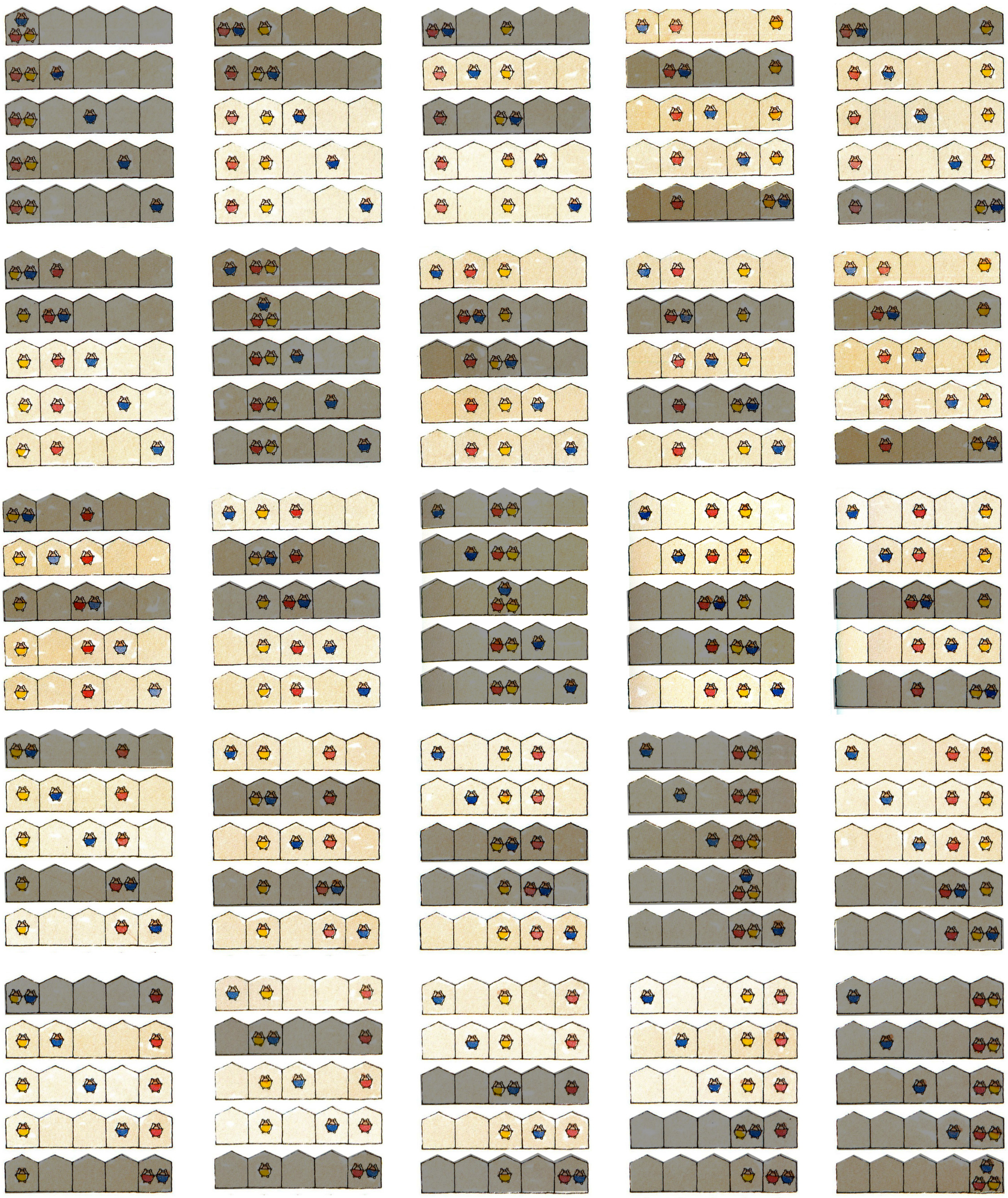


Faisons maintenant le calcul ; c'est beaucoup plus rapide. Regardons où peut être Rouge : il y a 5 possibilités ; l'un des 5 points rouges ci-dessous. Rouge a maintenant choisi sa cabane. Pour la cabane d'Orange, il y a encore 5 possibilités. Donc le nombre de positions possibles pour les deux premiers cochons, Rouge et Orange, est $5 \times 5 = 25$, le nombre de points orange(s) et rouges ci-dessous. Enfin, le dernier cochon, Bleu, a lui aussi 5 choix. La disposition des cochons correspond donc aux points tricolores (bleu, orange, rouge) ci-dessous. Il y en a 5×5×5, nombre que l'on note 5^3. C'est $25 \times 5 = 125$.

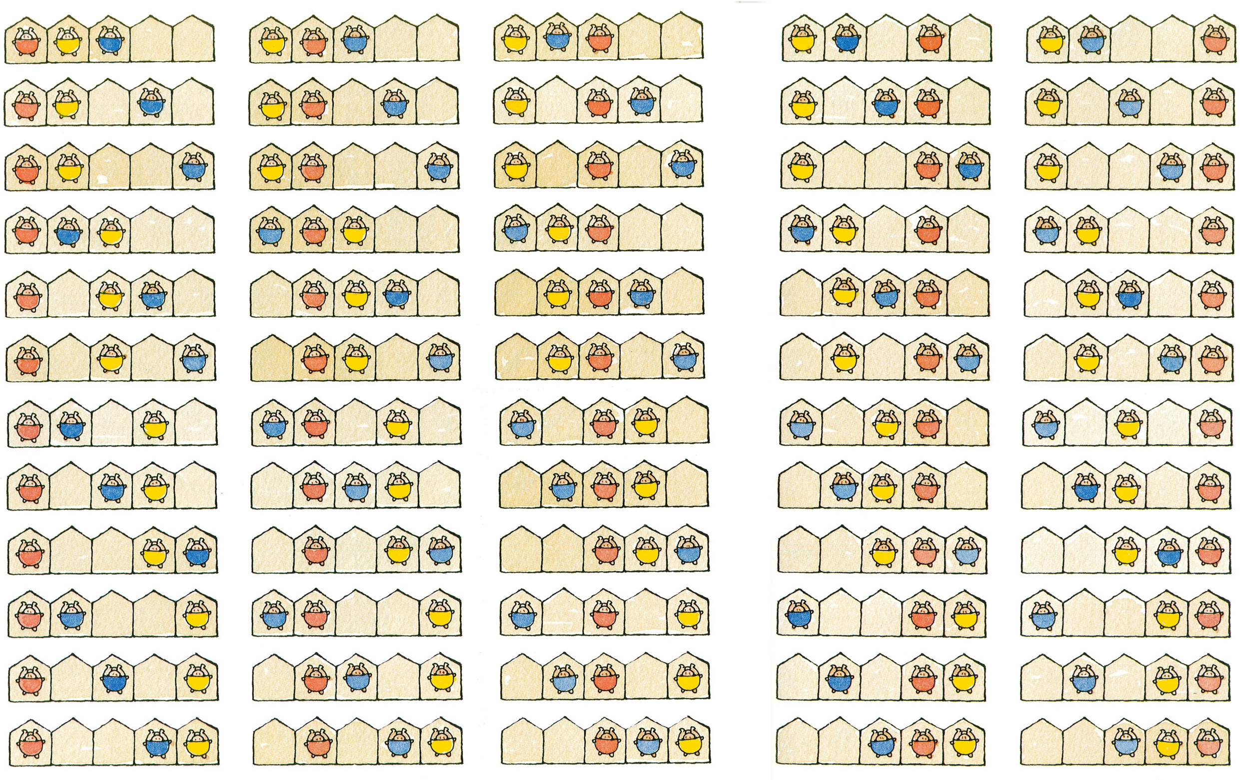


$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$$

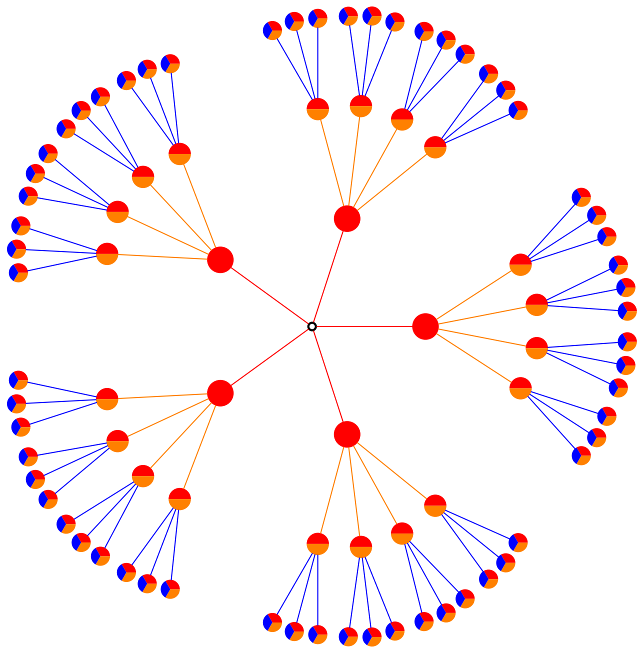
Supposons maintenant que les petits cochons soient très sensibles à leur confort et veuillent absolument avoir une cabane individuelle (malgré l'urgence). De combien de façons les petits cochons peuvent-ils occuper les cabanes, sans qu'il y en ait deux (ou plus) dans la même ? Là encore, deux méthodes. La première : petits dessins. Il faut retirer de la liste précédente les cas où il y a au moins deux cochons ensemble :



Mis au propre, cela donne

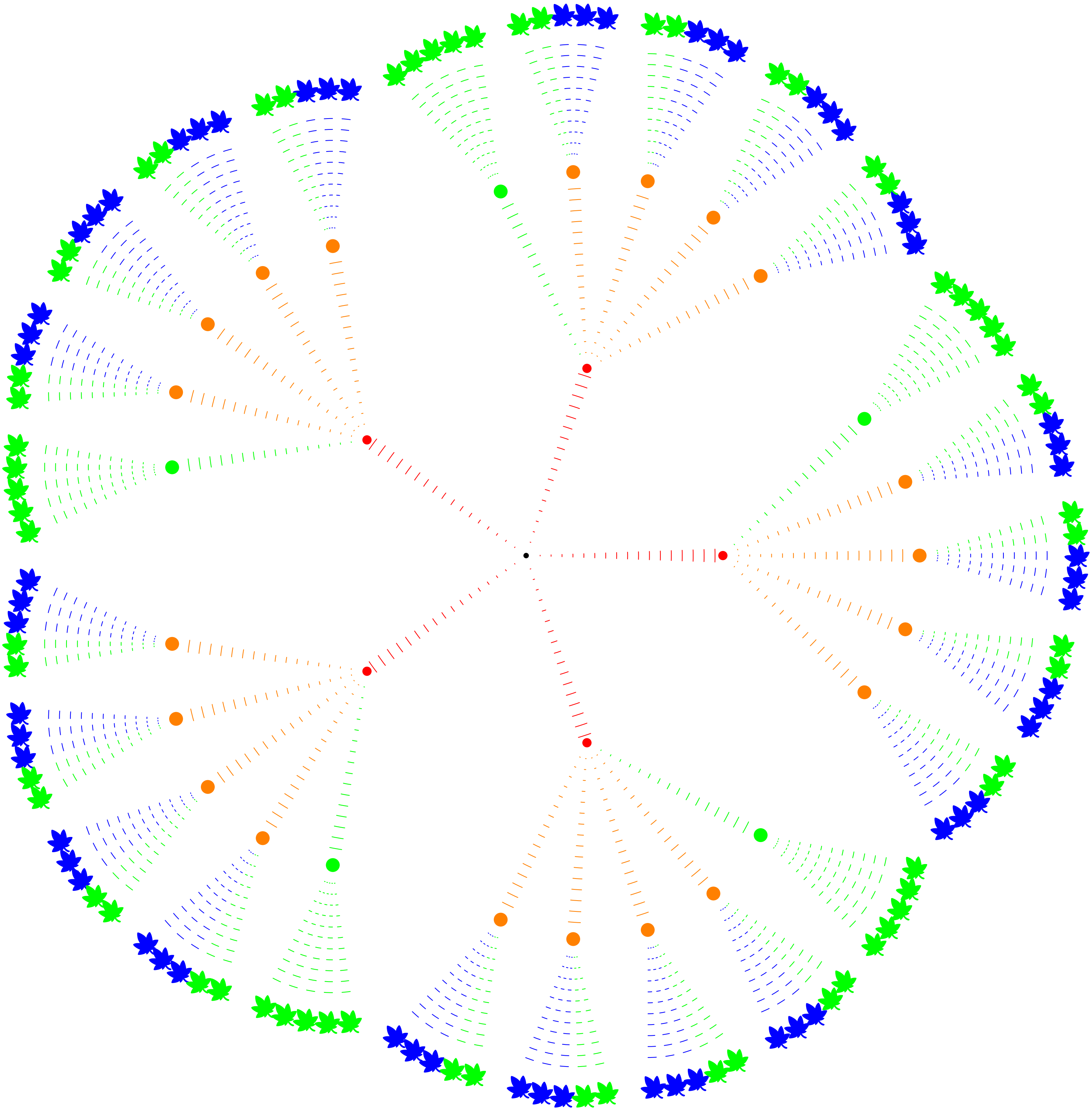


Appliquons cette fois la seconde méthode et faisons donc à nouveau un calcul. Regardons où peut être Rouge : il y a 5 possibilités, correspondant chacune à l'un des 5 points rouges ci-dessous. Rouge a maintenant choisi sa cabane. Pour la cabane d'Orange, il y n'a plus que 4 possibilités car il ne va pas dans la cabane de Rouge. Donc le nombre de positions possibles pour les deux premiers cochons, Rouge et Orange, est $5 \times 4 = 20$, le nombre de points orange(s) ci-dessous. Enfin, le dernier cochon, Bleu, n'a plus que 3 choix, deux cabanes ayant été prises. La disposition des cochons individualistes correspond donc aux points bleus ci-dessous. Il y en a $5 \times 4 \times 3$, c'est-à-dire 60.



$5 \times 4 \times 3 = 60$

Supposons que les petits cochons n'aient pas eu le temps, dans la panique, de choisir leur cabane et soient rentrés parfaitement au hasard. Qu'est-ce qui a le plus de chance d'arriver : qu'ils soient tous seuls dans leur cabane (pour se faire dévorer à coup sûr) ou bien qu'il y en ait au moins deux dans la même (ce qui leur permettra de lutter contre le loup) ? Autrement dit, on se demande si l'arbre ci-dessous a plus de feuilles bleues ou plus de feuilles vertes.



60 bleues ; 65 vertes

3. Anniversaire commun ; ou pas ?

Considérons maintenant une classe de 28 élèves, nés une année bissextile[1]. Première question pour se mettre en jambe : *est-on sûr que deux enfants soient nés le même mois ?* Pourquoi ?

Plus dur :

Quel est le nombre de possibilités pour les dates d'anniversaire des élèves ?

C'est le même problème que précédemment, mais on remplace les 3 cochons par 28 enfants (propres) et les 5 cabanes par les 366 jours (ci-dessous) de l'année.

Le nombre de possibilités est donc

$$366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times$$
$$366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366\times366$$

que l'on note 366^{28} (« 366 puissance 28 »). C'est un très grand nombre, à 72 chiffres, égal à

599060095013989947557468228874319805414295322688408490091029961843408896,

soit *grosso modo*

$$6\underbrace{00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000}_{\text{71 zéros !!}}$$

c'est-à-dire **six** cents millions de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards.

Le nombre de possibilités avec 28 dates d'anniversaires différentes est, comme pour les petits cochons,

$$\underbrace{366\times365\times364\times\cdots\times(366-28+1)}_{\text{produit de 28 nombres}}=366\times365\times364\times\cdots\times339.$$

C'est aussi un très grand nombre, à 72 chiffres, mais forcément plus petit que le précédent :

207616118920773615696761148465985996861128507221067230855650344960000000,

soit *grosso modo*

$$2\underbrace{00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000}_{\text{71 zéros !!}}$$

Si on appelle pour simplifier

$$100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000=10^{71}$$

un « *zorglub* », de même que l'on a décidé d'appeler $1000000000 = 10^9$ un *milliard*, on a donc vu qu'il y a (environ) 6 zorglubs de dates d'anniversaires pour tous les élèves de la classe, 2 zorglubs où elles sont toutes différentes et donc 4 où il y a au moins deux élèves nés le même jour. **Il y a donc 2 fois plus de chances que deux élèves soient nés le même jour que le contraire !**

1. Si ce n'est pas le cas ($75,75\% = 303/400$ des fois), cela ne change pas grand chose, et la probabilité de « collision » n'en sera que plus grande.

4. Et sur Mars ?

Sur Mars, une journée solaire (rotation de la planète sur elle-même) — un « *sol* » — dure en moyenne environ 24 heures et 40 minutes ; une année (révolution autour du soleil) dure environ 687 jours (terriens), soit 669 sols. Des petits Martiens auraient moins de chance d'avoir un anniversaire le même jour :

$$669^{28} = 1293991124461248665895736054963160849852315068521945026303097718678543565882744 1$$

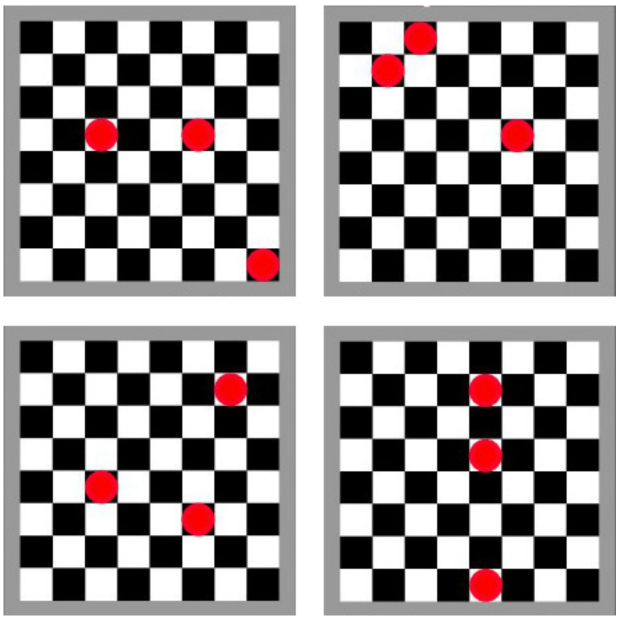
possibilités pour leurs dates de naissances, soit environ 130⋯0 (78 zéros), contre

$$\frac{669!}{(669-28)!} = 729645742800076306483137646832892384971643453489467201071981818470046105600000 0$$

possibilités pour les dates de naissances toutes différentes, soit environ 70⋯0 (78 zéros). Sur la planète rouge, il est plus vraisemblable qu'il n'y ait *pas* d'anniversaire commun. Mais si 3 petits nouveaux Martiens arrivaient dans la classe, il y aurait donc 31 élèves et cela redeviendrait plus probable !

5. Questions pour les enfants

(1) Que pourrait-on dire s'il y avait disons 400 élèves dans la classe ?
(2) Y-a-t-il deux enfants scolarisés à Paris ayant le même nombre de cheveux ?
(3) Avez-vous déjà vu un dé à 5 faces ? (Ce serait utile pour permettre aux petits cochons de choisir leur maison.) Supposons que l'on ait un dé à 20 faces, dont un patron est disponible sur la dernière page. Comment s'en servir pour faire comme si on avait un dé à 5 faces ?
(4) Quel est le nombre de façons de placer trois pions sur un damier 8×8 ? (On a représenté ci-dessous 4 de ces très nombreuses dispositions.)



6. Remarques pour les grands

Si n est le nombre de jours de l'année et k le nombre d'élèves, on a vu que la probabilité de « collision » est égale $\frac{n!}{n^k \times (n-k)!}$. Elle est donc supérieure à un-demi si et seulement si l'inégalité ci-dessous est satisfaite :

$$(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \geqslant 0,5.$$

En passant au logarithme, et en utilisant l'approximation $\log(1+x) \approx x$ pour x « petit », on voit que pour n grand la valeur critique pour laquelle la probabilité dépasse $\frac{1}{2}$ est $k \sim \sqrt{2\log(2)n} \approx 1,1774 \times \sqrt{n}$.

On trouvera des démonstrations détaillées dans les livres de Ph. Flajolet et R. Sedgewick ci-dessous.

Exercice Combien d'élèves faudrait-il pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux que *trois* enfants aient le même anniversaire ?

Références

Anno, Mitsumasa [安野光雅] et Tsuyoshi Mori [森毅] (1985). 3 匹の子豚. 童話屋.

Les belles illustrations en sont tirées. [Traduction française : « Le loup, le crapaud et les trois petits cochons », épuisé].

Diaconis, Persi et Frederick Mosteller (1989). « Methods for studying coincidences ». *J. Amer. Statist. Assoc.* 84.408, 853–861.

Voir §7.1 ; le cas de 3 personnes ayant la même date d'anniversaire est également discuté.

Flajolet, Philippe et Robert Sedgewick (2009). *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, xiv+810 pages. ☞ .

Voir pages 114-118.

– (2013). *An introduction to the analysis of algorithms*. 2e éd. Addison-Wesley, 572 pages.

Voir §9.3 ; plus élémentaire que la référence précédente. [Traduction française : « Introduction à l'analyse des algorithmes », épuisé].

Knuth, Donald E. (1998). *The art of computer programming. Vol. 3. Sorting and searching*. 2e éd. Addison-Wesley, xiv+780 pages.

Voir page 728.

Madore, David A. (2013). *Qui peut dire le nombre le plus grand ?* ☞ .

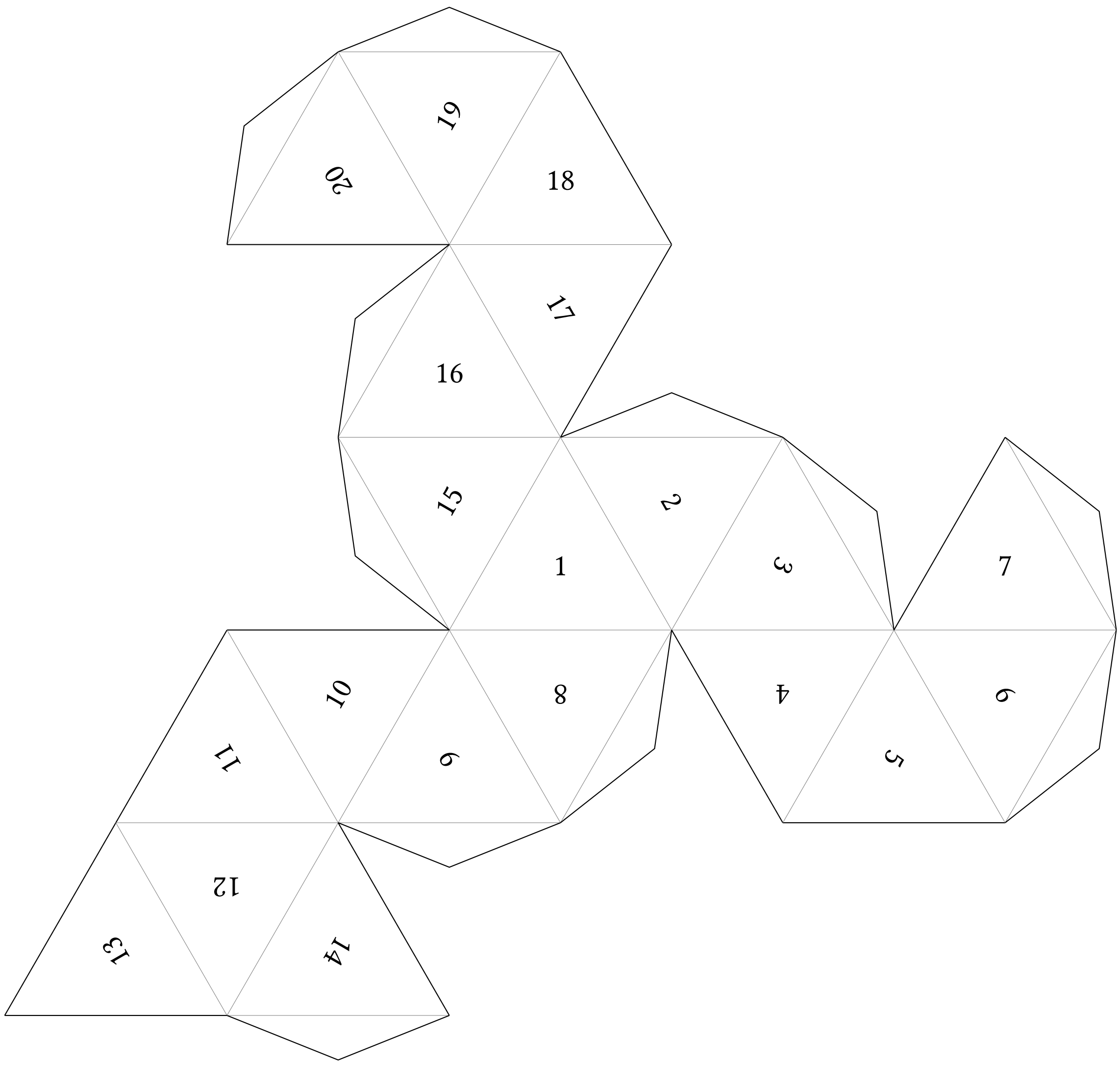
Blog. Plus difficile que le livre de Schwartz.

Mahajan, Sanjoy (2014). *The art of insight in science and engineering. Mastering complexity*. MIT Press. ☞ .

Voir §4.4. [Livre sous licence CC].

Schwartz, Richard Evan (2014). *Really big numbers*. American Mathematical Society, 192 pages.

Pour les amateurs de grands nombres.


19
20
18
17
16
15
2
1
3
7
10
8
4
6
11
9
5
12
13
14