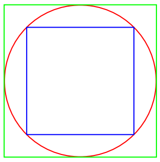
```
     3,14159265358979323846264338327 9
   5028841971693993751058209749445923
  07816406286208998628034825342117067
  9821    48086         5132
 823      06647        09384
46        09550        58223
17        25359        4081
          2848         1117
          4502         8410
          2701         9385
         21105        55964
         46229        48954
         9303         81964
         4288         10975
        66593         34461
       284756         48233
       78678          31652        71
      2019091         456485       66
     9234603           48610454326648
    2133936            0726024914127
    3724587             00660631558
    817488               152092096
```

Le nombre pi
Octave Orgogozo

pi est le *périmètre* d'un cercle de diamètre 1.



Autrement dit, si le carré extérieur (vert) est de périmètre 4, le cercle rouge est de périmètre π[1].

Son nom vient du fait que « périmètre » est un emprunt du grec « περίμετρος » (perimetros), qui commence par le p grec, « π », que l'on lit « pi » en français. (La notation, elle, date de 1706 [William Jones].)

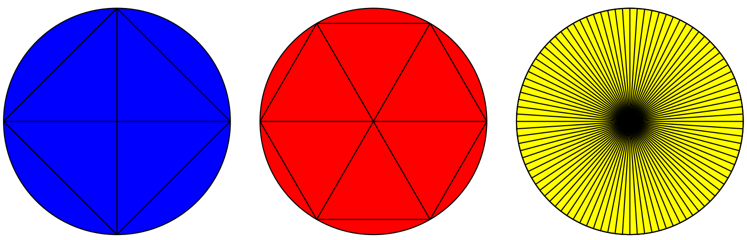
1 Histoire des approximations numériques

Certains auteurs divisent l'histoire de pi en trois parties : la période antique durant laquelle pi a été étudié géométriquement, l'ère classique aux alentours du 17e siècle et la période des ordinateurs.
Il y a très longtemps, on pensait que $\pi = 3$. (C'est-à-dire que l'on aurait vécu dans un monde où les hexagones sont des cercles !) Cependant, de bien meilleures approximations furent obtenues rapidement :

$\sim$ -2000 D'après les Babyloniens, $\pi \approx 3 + \frac{1}{8} = 3,125$.

$\sim$ -1500 D'après les Égyptiens, $\pi \approx \frac{2^8}{3^4} = \frac{256}{81} \approx 3,1605$.

$\sim$ -250 Archimède montre que pi est compris entre $3 + \frac{10}{71} \approx 3,1408$ et $3 + \frac{1}{7} = 3,1428...$ En utilisant, non pas un carré, ni un hexagone mais un polygone régulier à 96 côtés, qui ressemble beaucoup à un cercle !



[1]Et le carré intérieur (bleu) est de périmètre $4/\sqrt{2} \approx 2,8$.

∼ +250 Liú Huī [劉徽] montre que $\pi \approx 3,1416$, en utilisant également, mais plus astucieusement, un polygone régulier à 96 côtés.

∼ 450 Zǔ Chōngzhī [祖沖之] améliore la méthode de Liú Huī et montre que pi est compris entre $3,1415926$ et $3,1415927$, en utilisant un polygone à 12288 côtés ! Sa précision n'a été égalée que seulement 800 ans plus tard !

1596 Ludolph van Ceulen calcule 20 puis 35 décimales (=chiffres après la virgule), mais en y passant toute sa vie !

1706 Le britannique John Machin calcule 100 décimales ![2]

2019 Emma Haruka Iwao [岩尾エマはるか], une informaticienne japonaise, a utilisé des ordinateurs très puissants pour calculer 31 mille milliards de décimales ! [Très exactement : 31 415 926 535 897].

Question : le nombre π est-il une fraction, c'est-à-dire un quotient de deux nombres entiers, comme par exemple $\frac{22}{7}$ ou $\frac{355}{113}$?

En 1761, un mathématicien suisse (Johann Heinrich Lambert) démontre que ce n'est *pas* le cas ! En particulier, les chiffres apparaissant dans l'écriture décimale de pi sont en nombre infini, et ils ne se répètent pas périodiquement, contrairement par exemple à

$$22/7 = 3,\underline{142857}142857\underline{142857}142857\cdots$$

Question : supposons que l'on code « Bilbo le Hobbit » (par exemple) en une suite de chiffres, en remplaçant les lettres « a,à,â » par 1, « b » par 2, « c,ç » par 3, etc. La suite de chiffres correspondante apparaît-elle dans les décimales (consécutives) de π ?

On ne sait pas ! C'est un problème qui semble très difficile aux mathématiciennes et mathématiciens qui réfléchissent à ce type de questions.

2 Pour s'en souvenir

Il existe un poème qui permet de se souvenir des premières décimales de pi. Il faut compter le nombre de lettres dans chaque mot pour trouver chaque chiffre. En voici le début :

> **Que$_3$ j$_1$'aime$_4$ à$_1$ faire$_5$ apprendre$_9$ ce$_2$ nombre$_6$ utile$_5$ aux$_3$ sages$_5$!**
> **Immortel$_8$ Archimède$_9$, artiste$_7$ ingénieur$_9$,**
> **Qui$_3$ de$_2$ ton$_3$ jugement$_8$ peut$_4$ priser$_6$ la$_2$ valeur$_6$?**

3 Formules

Il y a environ 600 ans, le mathématicien indien Mādhava montre que

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots\right)$$

Malheureusement, pour obtenir $3,14\ldots$ — c'est-à-dire 2 décimales correctes —, il faut calculer environ 600 fractions.

Wallis :

$$\pi = 2 \times \left(\frac{2 \times 2}{1 \times 3} \times \frac{4 \times 4}{3 \times 5} \times \frac{6 \times 6}{5 \times 7} \times \frac{8 \times 8}{7 \times 9} \times \cdots\right)$$

[2] Compte tenu de la taille de l'univers observable, c'est probablement suffisant pour toutes les applications « pratiques ».

Il existe beaucoup d'autres formules mais elles sont pour l'instant trop compliquées[3].

4 π dans la nature...

4.1 Buffon

Supposons qu'on lance, disons 100 fois, un crayon, au-dessus d'un parquet dont les lattes sont espacées d'une distance égale à la longueur du crayon.

Question : devrait-on s'attendre à ce que le crayon touche plus souvent deux lattes ou seulement une ?

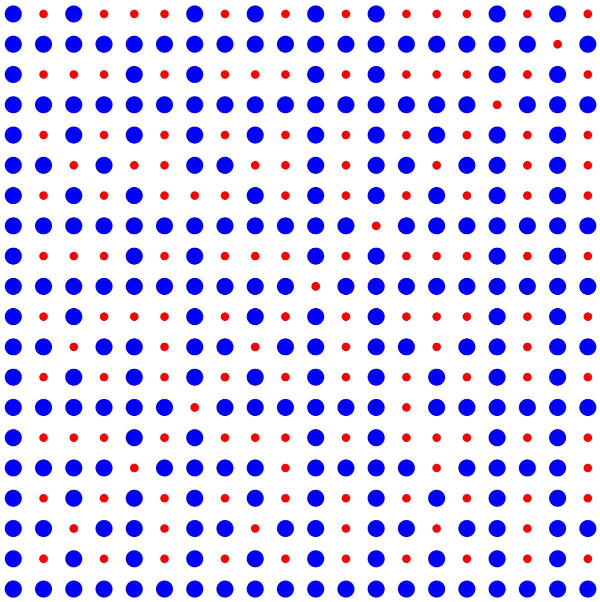
Le crayon devrait toucher deux lattes dans 64% des lancers ; cette valeur est obtenue en divisant 2 par π : on a $\frac{2}{\pi} = 0,63661977...$

4.2

Voici une autre apparition mystérieuse de pi. Si on regarde les entiers compris entre 1 et 20, on peut se demander combien il y en a qui n'ont pas de diviseur commun (autre que 1). Par exemple, 12 et 15 ont un diviseur commun : ils sont tous deux multiples de 3. De même, 10 et 18 ont un diviseur commun, 2.

Question : si on met un petit point [rouge] s'ils ont un diviseur commun et un gros point [bleu] sinon, quel est le pourcentage de gros points [bleus] ?

On peut montrer que c'est environ 61%, et cette valeur est obtenue en divisant 6 par $\pi^2 = \pi \times \pi \approx 9,8$: on a $6/\pi^2 = 0,60792710...$ Étonnant, non ?



[3]Borwein :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

En d'autres termes :

$$\left(\frac{4}{1}-\frac{2}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{4}{8+1}-\frac{2}{8+4}-\frac{1}{8+5}-\frac{1}{8+6}\right)/16+\left(\frac{4}{8\times 2+1}-\frac{2}{8\times 2+4}-\frac{1}{8\times 2+5}-\frac{1}{8\times 2+6}\right)/(16\times 16)+\cdots$$

En utilisant des notations plus compliquées encore, on peut écrire une des meilleures formules connues pour calculer pi, due aux frères Chudnovsky (1987) :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{12}{\sqrt{640320^3}} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} \frac{13591409 + 545140134k}{(640320)^{3k}}.$$

Quiz

Quelles sont les 3 premières décimales de pi ? [$3,141\ldots$]
Combien connaît-on de décimales de pi ? [31 mille milliards]
Combien de côtés avait le polygone utilisé par Archimède et Luí Huī ? [96]
Est-ce que 51 et 17 ont un diviseur commun ? [oui, 17]